Projeto de Pesquisa:
Minimizando Risco de Crédito Utilizando Programação Linear

Aluno: Rafael Santos Barbosa - 082573
Orientador: Prof. Antonio Carlos Moretti

8 de agosto de 2011

Este trabalho teve apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).
Este documento foi escrito em LaTeX.

1 Resumo

Na primeira etapa deste projeto de Iniciação Científica estão expostos os conceitos básicos de Gerenciamento de Risco, como Matriz de Covariância, VaR, C-VaR. Para complementar o entendimento dessa teoria trabalhamos alguns exemplos como o investimento em três ativos diferentes. Além disso, mostramos as propriedades necessárias para uma medida de risco ser coerente e argumentamos que VaR não é coerente e também não é convexa, por isso vamos nos focar em propor um modelo de Programação Linear para minimizar o C-VaR, assim vamos obter um VaR mínimo pra um portifólio correspondente. Para isso, a referência (3) (Optimization of Conditional Value-at-risk) foi a base de parte considerável do desenvolvimento teórico.

Na segunda etapa desse trabalho, focamos no aprendizado de um Software para otimização de sistemas de grande porte, o software escolhido foi o AIMMS devido a sua versatilidade, facilidade de implementação. Além disso, o AIMMS é mais voltado para o usuário final que outros softwares de modelagem matemática, o que torna a avaliação dos dados mais dinâmica. Também vamos expor uma técnica simples de simular cenários futuros de um investimento e os resultados que o modelo apresentado nos forneceu quando o implementamos em AIMMS. O desenvolvimento da parte teórica de modelagem de risco é baseado na Tese de Mestrado de Felipe Bueno, referência (2). Para ter uma noção melhor e mais próxima da realidade buscamos dados históricos reais da Bolsa de São Paulo (Bovespa), encontrados no site http://finance.yahoo.com/ .

2 Uma Ideia de Cenários e Matriz de Covariância

É fato que não podemos determinar com certeza o preço de uma ação no futuro, no entanto, vamos ao longo deste trabalho considerar possibilidades, as quais vamos definir como cenários.

2.1 Exemplo 1

Vamos supor o preço de uma ação da "Empresa X" que vale R$100,00 e vamos considerar 3 cenários diferentes para o seu valor no mês que vem:

Cenário 1 – Preço: R$90,00
Cenário 2 – Preço: R$120,00
Cenário 3 – Preço: R$110,00

Vamos definir uma variável que vai indicar o fator de crescimento, "θ", então teremos:

Cenário 1 – θ_1 = 0,9 – Capital Final = 0,9M
Cenário 2 – θ_2 = 1,2 – Capital Final = 1,2M
Cenário 3 – θ_3 = 1,1 – Capital Final = 1,1M
Onde M representa o montante inicial, que no nosso caso é R$100,00.

Os cenários podem ter probabilidades iguais ou diferentes de acontecer, vamos supor as seguintes probabilidades para os cenários citados:

Cenário 1 – $P_1 = 0,4$; Cenário 2 – $P_2 = 0,25$; Cenário 3 – $P_3 = 0,35$;

Então, em média, esperamos que nosso capital cresça:

$P_1 \cdot \theta_1 \cdot M + P_2 \cdot \theta_2 \cdot M + P_3 \cdot \theta_3 \cdot M = 1,045M = \theta_M$(chamaremos de crescimento médio)

Em porcentagem esperamos q nosso capital aumente $4,5\%$.
Essa abordagem utilizando cenários esta ligada a nossa exposição ao risco, em uma abordagem real teríamos um número enorme de cenários, estes podem estar caracterizados pelo capital final, rendimento, fatores de crescimento.
É conveniente atribuir o "fator de exposição ao risco" como a variância(σ) associada ao capital diante das possíveis situações, que simboliza "o quão distante" um rendimento está da média, no nosso caso:

$$\sigma^2 = (\theta_M - \theta_1)^2 \cdot P_1 + (\theta_M - \theta_2)^2 \cdot P_2 + (\theta_M - \theta_3)^2 \cdot P_3 = 0,015475$$
ou melhor:
$$\sigma = 0,1244$$

Geralmente as pessoas estão interessadas em maximizar o rendimento médio e minimizar a variância (que nesse caso tem interpretação de "volatilidade de mercado"), o que seria equivalente a aumentar as possibilidades de lucro e diminuir a exposição ao risco, ou seja, ter segurança e rentabilidade ao mesmo tempo.
Para diminuir os riscos, não colocaremos todo o capital em só uma empresa ou em um só tipo de investimento (por exemplo, colocar tudo em ações). Vamos trabalhar com um portfólio de investimentos e teremos diversas empresas de segmentos bem diferentes do mercado, talvez poupança, produtos de gênero alimentício.
Para exemplificar o funcionamento de um portfólio e trabalhar mais conceitos utilizados na otimização de investimentos vamos considerar que vamos fazer dois investimentos, vamos investir x_1 reais nas ações de uma "Empresa X" e x_2 reais no "Fundo de Investimento do Tesouro Nacional". Então, para um capital inicial M, temos:

$$x_1 + x_2 = M$$

Vamos considerar, como anteriormente, três cenários cada um com dois fatores de crescimento, um para a variável x_1 e outro para x_2, e vamos construir a seguinte matriz:

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \\ \theta_{31} & \theta_{32} \end{pmatrix}$$

Sob o cenário "i", nosso capital final será $\theta_{i1} \cdot x_1 + \theta_{i2} \cdot x_2$. Para obter a média usamos a seguinte equação:

$$\theta_M = x_1 \cdot (P_1 \cdot \theta_{11} + P_2 \cdot \theta_{21} + P_3 \cdot \theta_{31}) + x_2 \cdot (P_1 \cdot \theta_{12} + P_2 \cdot \theta_{22} + P_3 \cdot \theta_{32}) \equiv \theta_1 \cdot x_1 + \theta_2 \cdot x_2$$

e

$$(P_1 \cdot \theta_{11} + P_2 \cdot \theta_{21} + P_3 \cdot \theta_{31}) = \theta_1 \quad ; \quad (P_1 \cdot \theta_{12} + P_2 \cdot \theta_{22} + P_3 \cdot \theta_{32}) = \theta_2;$$

Com esse portfólio de duas ações a variância é dada por:

$$\sigma^2 = [(\theta_{11} - \theta_1)\, x_1 - (\theta_{12} - \theta_2)\, x_2]^2\, P_1 + [(\theta_{21} - \theta_1)\, x_1 - (\theta_{22} - \theta_2)\, x_2]^2\, P_2 + [(\theta_{31} - \theta_1)\, x_1 - (\theta_{32} - \theta_2)\, x_2]^2\, P_3$$

Podemos definir as matrizes **A** (matriz de cenários) e **P** (matriz das probabilidades) abaixo que vai nos auxiliar a chegar em uma equação para a variância:

$$A = \begin{pmatrix} \theta_{11} - \theta_1 & \theta_{12} - \theta_2 \\ \theta_{21} - \theta_1 & \theta_{22} - \theta_2 \\ \theta_{31} - \theta_1 & \theta_{32} - \theta_2 \end{pmatrix} \; ; \; P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{pmatrix}$$

Logo, o desvio padrão é dado por:

$\sigma = \left(\| P^{\frac{1}{2}} A x \| \right)^{\frac{1}{2}}$,

onde $\|.\|$ significa a norma euclidiana de um vetor.

Substituindo $\|P^{1/2}Ax\| = x^t \left(A^t P^{\frac{1}{2}t} P^{\frac{1}{2}A} \right) x$, vamos chamar de "Matriz de Covariância", $C = \left(A^t P^{\frac{1}{2}t} P^{\frac{1}{2}A} \right)$.

Observações:

1) Podemos decompor $P^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}} = P$ porque "P"é uma matriz diagonal, simétrica definida positiva, já que é uma Mariz de Probabilidades e todos os elementos diferentes de zero são positivos.

2) Na referência (1), o caso onde os cenários são equiprováveis é muito bem tratado. Uma outra forma de estender o desenvolvimento para cenários não equiprováveis é quebrar os cenários em outros cenários equiprováveis, por exemplo representar um cenário com probabilidade de 20% em dois cenários de 10% e fazer o mesmo para os outros até que todos sejam equiprováveis. No entanto, dessa forma teríamos um custo computacional envolvido maior para computar as matrizes, principalmente quando o número de cenários é muito grande.
Em uma Matriz de Covariância a linha C_i está relacionada ao Cenário i, ela expressa o quanto os ativos podem variar nesse cenário. Já as colunas C_j estão relacionadas aos ativos e C é uma matriz simétrica, então um elemento c_ij está relacionando o ativo i com o ativo j no cenário i, e diz o quanto a variação no valor de cada um deles pode influenciar no outro, ou seja, representa a co-variância entre os ativos, os termos da diagonal ($c'_{ii}s$) nos dizem a variância de cada ativo. Veja que os elementos da diagonal são sempre positivos, se um elemento $c_ij > 0$, ele diz que quando um ativo (pode ser o ativo i ou ativo j) aumenta seu valor o outro ativo também aumenta e se o valor de um deles decresce o outro também, por outro lado se $c_{ij} < 0$, quando um ativo cresce o outro decresce e vice-versa.
Algumas indicações da Matriz de Covariância é que se esperamos que um ativo vá subir é sugestivo investir em outro ativo correlacionado positivamente, da mesma forma, se este ativo vai cair de valor não é sugestivo investir em outro correlacionado positivamente. Para ativos correlacionados negativamente a sugestão é fazer o inverso, só devemos investir em um ativo se esperamos que o outro decresça.

2.2 Exemplo 2

Vamos considerar que uma pessoa vai investir R$ 100 mil em três ativos diferentes das empresas Cosan (produtora de açúcar e etanol), Petrobrás (produtora de petróleo) e Vivo (empresa de telecomunicações) e cada ação de uma delas vale respectivamente R$ $25,00$, R$ $30,00$, R$ $50,00$ no momento do investimento. E vamos supor três cenários equiprováveis para o resgate em 6 meses:

Cenário 1:
i) A produção de açúcar foi prejudicada pelas chuvas que diminuem a concentração de sacarose na cana.
ii) As guerras no Oriente médio influenciam no aumento do preço do petróleo e a Petrobras descobre uma nova bacia brasileira.
iii) A Vivo compra uma de suas concorrentes e aumenta seu domínio do mercado.

	Início	Cenário 1	Cenário 2	Cenário 3
Cosan	25	20	28	22
Petrobras	30	35	25	28
Vivo	50	55	53	48

Tabela 1: Matriz de Cenários do Exemplo 2

Matriz de Covariancia	Cosan	Petrobras	Vivo
Cosan	9,1875	-9,125	-0,625
Petrobras	-9,125	13,25	4,25
Vivo	-0,625	4,25	7,25

Tabela 2: Matriz de Covariância para o Exemplo 2

Cenário 2:
i) A moagem da cana proporcionou aproveitamento máximo, o etanol está em alta como energia sustentável e sua demanda de mercado tem aumentado.
ii) O governo aumentou os impostos sobre a gasolina o que acarretou uma contração do mercado e o Oriente médio está em paz.
iii) A Vivo compra uma de suas concorrentes e aumenta seu domínio do mercado.

Cenário 3:
i) A produção de açúcar foi prejudicada pelas chuvas que diminuem a concentração de sacarose na cana.
ii) O governo aumentou os impostos sobre a gasolina o que acarretou uma contração do mercado e o Oriente médio está em paz.
iii) A mídia publica que a Vivo perde mercado pra uma empresa mexicana.

Apesar dos poucos dados, podemos fazer algumas interpretações como a correlação entre Cosan e Petrobrás serem perto de -1 significa que são ativos concorrentes como esperávamos; e a correlação entre Cosan e Vivo serem

Matriz de Correlação	Cosan	Petrobras	Vivo
Cosan	1	-0,82704	-0,07658
Petrobras	-0,82704	1	0,433623
Vivo	-0,07658	0,433623	1

Tabela 3: Matriz de Correlação para o Exemplo 2

muito perto de 0 porque são empresas de ramos independentes. No entanto a correlação entre Petrobrás e Vivo não mostrou um valor esperado, que seria também próximo de zero, isso porque os dados são apenas suposições, em testes computacionais com dados reais esperamos ter uma idéia mais próxima da realidade.

3 Valor em Risco (VaR)

A Valor em Risco é uma função associa a cada investimento "x"um limitante para o "pior resultado". Por exemplo, se estamos investindo em ações, o VaR com uma confiança "α"garante que a perda máxima está entre os $(1-\alpha)$ resultados. Esta é a medida de risco que mais tem sido utilizada para administrar o risco, por sintetizar a exposição total ao risco de uma carteira, empresa ou instituição e nos permitir escolher o quanto as maiores perdas influenciarão nossas decisões. Não se tem um risco de confiança específico, mas normalmente varia entre 95% e 99% de acordo com o grau de aversão ao risco desejado.
Suponha que um banco informe que o VaR diário de sua carteira é de US$40 milhões, a um nível de confiança 99%, ou seja, existe 1 oportunidade em 100, sob condições normais de mercado, de ocorrer um prejuízo acima de US$40 milhões.
Matematicamente, a definição do VaR depende das funções de perdas associadas.

3.1 Quando a função de perda é uma variável aleatória com distribuição induzida por um vetor y com distribuição contínua;

Vamos considerar uma função $f_{(x,y)}$, onde x é um vetor de um subconjunto $X \in \mathbf{R}^n$ e $y \in \mathbf{R}^m$. "x"pode representar um portfólio de investimentos e "y"as incertezas do mercado. Nesse caso, para cada "x", $f_{(x,y)}$ é uma variável aleatória que tem distribuição induzida por "y". Vamos denotar a distribuição de probabilidade de y por $p(y)$. Vamos definir também $\psi(x,\alpha)$ como a função de distribuição acumulada até um ponto α:

$$\psi(x,\alpha) = \int_{f(x,y)\leq\alpha} p(y)dy$$

ou seja, uma função de α para um "x"fixo. Então, Var_β é uma variável aleatória de perda associada a "x"para uma probabilidade específica β e sua definição matemática é:

$$\text{Var}_\beta = min \ \{\alpha \in \mathbf{R} | \psi(x,\alpha) \geq \beta\}$$

3.2 Quando as funções de perda estão associadas a m cenários;

Se temos "m" cenários $y_1, y_2, \cdots, y_m$ com probabilidades $p_1, p_2, \cdots, p_m$, para um portfólio "x", sejam $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$ as respectivas perdas associadas a esses cenários, se as ordenarmos da forma $f_{i_{1(x)}} \leqslant f_{i_{2(x)}} \leqslant \cdots \leqslant f_{i_{m(x)}}$ e denotando por "p"o único índice que:

$$\sum_{k=1}^{p} p_{i_k} \geq \beta > \sum_{k=1}^{p_{i_k}}, \text{ sendo que } \beta \in (0,1),$$
$$\text{então : } \beta - Var(x) = f_{i_p}(x),$$

ou seja, após ordenarmos as funções, selecionamos a que está na posição "p" que satisfaz as condições acima.

A VaR tem propriedades que dificultam sua minimização como a não diferenciabilidade e a não convexidade. Então vamos trabalhar com a Valor em Risco Condicional – CVaR por esta preservar propriedades como coerência que está ligada a sub-aditividade; e ser mais consistente.

4 Valor em Risco Condicional (C-VAR)

O Valor em Risco Condicional considera as funções de perda que estão abaixo da média das funções desconsideradas pelo VAR. Então, o C-VAR associa a cada investimento "x" um limitante que é a média dos limitantes do VAR, ou seja, estamos medindo a perda média das funções não consideradas pelo VaR. Por essa definição é trivial perceber que se só existe uma função de perda acima da confiança, então a média é a própria função.

Expressões para determinar o C-Var também dependem de como identificamos os cenários:

4.1 Quando a função de perda é uma variável aleatória com distribuição induzida por um vetor y com distribuição contínua;

$$\beta - CVaR = (1-\beta)^{-1} \int_{f(x,y) \geq \beta - CVaR} f(x,y) p(y) dy$$

Podemos ver que β- CVar(x) é a esperança condicional associada a um portfólio "x" com relação a perdas maiores ou iguais ao β - Var(x).

4.2 Quando as funções de perda estão associadas a "m"cenários;

Se temos "m"cenários $y_1, y_2, \cdots, y_m$ com probabilidades $p_1, p_2, \cdots, p_m$, para um portfólio x, sejam $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$ as respectivas perdas associadas a esses cenários, se as ordenarmos da forma $f_{i_{1(x)}}(x) \leq f_{i_{2(x)}}(x) \leq \cdots \leq f_{i_{m(x)}}(x)$ e denotando por "p"o único índice que:

$$\textstyle\sum_{k=1}^{p} p_{i_k} \geq \beta > \sum_{k=1}^{p-1} p_{i_k}, \text{sendo que } \beta \in (0,1),$$
$$\text{então, } \beta - CVaR = (1-\beta)^{-1}[(\textstyle\sum_{k=1}^{p} p_{i_k} - \beta) f_{i_p(x)} + \sum_{k=p+1}^{m} p_{i_k}(f_{i_k}(x))],$$
se os cenários são equiprováveis
$$\beta - CVaR = (1-\beta)^{-1}[\textstyle\sum_{k=p+1}^{m} p_{i_k}(f_{i_{k(x)}}(x))]$$

5 Coerência de Medidas de Risco

Em geral uma Medida de Risco é dita coerente se sua função $\rho : V \to \mathbf{R}$ satisfaz quatro propriedades, que são:

a) monotonicidade: $X, Y \in V, X \geq Y \Rightarrow \rho(X)) \geq \rho(Y)$

b) invariância por translação: $a \in \mathbf{R}; X, X + a \in V, \Rightarrow \rho(X + a) = \rho(X) + a$

c) positividade homogênea: $h > 0, X, Y \in V, X = hY \Rightarrow \rho(hX) = h\rho(Y)$

d) sub-aditividade: $X, Y, X + Y \Rightarrow \rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X + Y)$

As características a), b), c) são válidas para VaR e C-VaR, no entanto a sub-aditividade (d)) só é válida para C-VaR, isso significa que a VaR não é uma medida coerente, ou seja, o risco associado para um investimento conjunto em dois ativos pode ser maior que o risco associado a um investimento nos mesmos ativos só que de forma independente, o que na prática temos a intuição de que não acontece, por isso a sugestão é diversificar os ativos que compramos.
Além disso, podemos explorar propriedades da C-VaR como convexidade, a C-VaR é convexa se suas funções perdas são convexas, já a VaR pode não ser convexa mesmo quando suas funções perdas são lineares. Do ponto de vista da otimização, a convexidade de uma função nos garante que se existe um mínimo local então esse mínimo é global. Essa propriedade associado ao fato que podemos transformar a otimização da C-VaR em um Problema de Programação Linear (PPL) torna a C-VaR muito mais viável de ser otimizada. Através da otimização da C-VaR podemos ter uma idéia de um mínimo para a VaR para determinadas condições.
Já do ponto de vista prático a C-VaR pode parecer muito conservadora, investidores podem argumentar que um gerenciamento através dessa medida diminui os riscos, porém restringe muito as possibilidades de grandes retornos. Isso acontece porque a C-VaR não menospreza cenários de grandes

perdas mesmo que eles tenham probabilidade muito baixa de acontecer. Vamos mostrar em um exemplo que a VaR não é convexa e não é sub-aditiva, sendo que aqui o conceito de função convexa que utilizamos é:

Definição Função Convexa: uma função $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ é dita convexa se para quaisquer x e y pertencentes a $[a, b]$ e para todo $t \in [0, 1]$:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Exemplo 3: Suponhamos as funções de perdas em três cenários possíveis sejam as funções lineares abaixo:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0x_1 + 6x_2 \\ f_2(x) &= 1x_1 + 1x_2 \\ f_3(x) &= 4x_1 + 0x_2 \end{aligned}$$

Então:

$$Var_{66\%}(1, 0) = 1; Var_{66\%}(0, 1) = 1; Var_{66\%}(0.5, 0.5) = 2;$$

Consequentemente:

$$Var_{66\%}(0.5, 0.5) = 2 > 0.5Var_{66\%}(1, 0) + 0.5Var_{66\%}(0, 1)$$

O que mostra que mesmo no caso onde todas as funções de perda são lineares a VaR pode não ser convexa.

6 Modelo de Otimização Linear para C-VaR

O modelo de minimização que apresentaremos foi proposto na referência (3) e se baseia na construção de uma função $F_\beta(x, \alpha)$, que é convexa e continuamente derivável e por isso poderemos utilizar técnicas conhecidas para otimizá-la.

$$F_\beta(x, \alpha) = \alpha + (1-\beta)^{-1} \int_{y \in \mathbf{R}^m} [max(0, f(x, y) - \alpha)]p(y)dy$$

Baseados nessa função, podemos enunciar o Teorema 1, que foi retirado do texto de Rockafellar e Uryasev:

Teorema 1: Propriedades da F_β:

Como função de $\alpha, F_\beta(x, \alpha)$ é convexa e continuamente diferenciável. O $\beta - CVaR$ da perda associada a x é determinada por:

$$\beta - CVaR = min_{\alpha \in \mathbf{R}}(F_\beta(x,\alpha))$$

Na fórmula acima, o conjunto de valores de α para o qual o mínimo é alcançado é :

$$A_\beta(x) = argmin_{\alpha \in \mathbf{R}} F_\beta(x,\alpha)$$

O intervalo $A_\beta(x)$ é fechado, não vazio, limitado e podemos determinar o $\beta - VaR$ como:

$$\beta - VaR(x) = \text{último ponto à esquerda de } A_\beta(x)$$

em particular, temos sempre:

$$\beta - VaR(x) \in argmin_{\alpha \in \mathbf{R}} F_\beta(x,\alpha) \text{ e } \beta - CVaR(x) = F_\beta(x, \beta - VaR(x))$$

Neste trabalho não exibiremos demonstrações dos teoremas, para ver a demonstração do Teorema 1, busque a referência (3).

O caso acima é quando $F_\beta(x,\alpha)$ tem y como uma distribuição de probabilidade $p(y)$; mas se tivermos y como um vetor que pode representar os cenários $y_1, y_2, \cdots, y_m$, então podemos montar $F_\beta(x,\alpha)$ como:

$$F_\beta(x,\alpha) = \alpha + \tfrac{1}{m(1-\beta)} \sum_{k=1}^{m} [max(0, f(x,y_k) - \alpha)]$$

assim, essa expressão para $F_\beta(x,\alpha)$ é convexa e linear por partes com respeito a α, então pode ser minimizada por programação linear ou busca linear.
Agora, para fundamentar a aproximação de minimização do β - CVaR através da função $F_\beta(x,\alpha)$ vamos enunciar um teorema que mostra a correspondência entre os seus mínimos.

Teorema 2: Correspondência entre minimizar $\beta - CVaR$ e $F_\beta(x,\alpha)$

Minimizar $\beta - CVaR$ das perdas associadas a $x \in X$ é equivalente a minimizar $F_\beta(x,\alpha)$ sobre os pares $(x,\alpha) \in X\text{x}R$, ou seja:

$$min_{x \in X}(\beta - CVaR(x)) = min_{(x,\alpha) \in X x \mathbf{R}}(\beta - F_\beta(x,\alpha)),$$

onde um par (x^*, α^*) alcança o mínimo de F_β, se e somente se, x^* alcança o mínimo em $\beta - CVaRe\alpha^* \in A_\beta(x^*)$. Em particular, as circunstâncias quando o intervalo $A_\beta(x^*)$ se reduz a um único ponto, a minimização de $F_\beta(x,\alpha)$ sobre $(x,\alpha) \in XxR$ produz um par (x^*, α^*) não necessariamente único, tal que, x^* minimiza o $\beta - CVaR$ e α^* é correspondente a $\beta - CVaR$.

7 Modelo Linear

O modelo Linear que vamos trabalhar está de acordo com a Tese de Mestrado de Felipe Bueno, a referência (3). Este modelo considera cenários discretos em relação à variação da carteira de investimento, basicamente vamos construir os cenários através de uma técnica de simulação também exposta na mesma referência, que vai levar em conta as variações de dados anteriores dos investimentos. Após expormos o modelo e explicarmos o significado de cada variável ficará claro que o modelo aqui mostrado está de acordo com a construção da função $F_\beta(x, \alpha)$.

$$\begin{gathered} Min\alpha + \frac{1}{m-p} \sum_{k=1}^{m} [z_i] \\ s.a: \quad x \in \Omega \\ z_i \geq 0 \forall i = 1, \cdots, m \\ z_i \geq f_i(x) - \alpha \forall i = 1, \cdots, m \end{gathered}$$

Baseados nesse modelo, vamos escolher o espaço Ω de forma que fique coerente a nossa interpretação do resultado, nesse trabalho vamos escolher o Ω da seguinte forma:

$$x_1 + \cdots + x_m = 100,$$

pois assim teremos um valor em porcentagem e poderemos aplicar o resultado do portfólio para vários tipos de montante em dinheiro. Temos também que "m"é o número de cenários que estamos considerando, "p"é o número de cenários que queremos descartar(ou seja, que estarão acima do VaR), assim já temos a porcentagem de β, $f_i(x)$ será o valor do investimento "x"em cada cenário e por características do modelo vamos ter que "α"é uma aproximação para o VaR mínimo para aquele investimento que fizemos, uma espécie de VaR associado ao portfólio minimiza o $C - VaR$. Uma questão interessante nesse modelo é que quando quisermos conseguir um novo β, basta variarmos o "p".

8 Simulação de Cenários

Vamos considerar uma simulação de dados bastante simplificada, portanto é uma simulação que considera a correlação entre as ações, o que é bastante importante como já foi discutido, esta simulação é a mesma feita por Felipe Bueno em sua Tese.

Quando lidamos com dados reais, nos é fornecido vários tipos de dados sobre os preços das ações em diversos momentos. No entanto, como nosso modelo é pra cenários discretos, vamos escolher um dos tipos de dados fornecidos pela bolsa no dia e fixá-lo. Nesse trabalho os dados foram obtidos através do site da referência (4) (http://finance.yahoo.com/) e vamos considerar como dado para o cenário apenas o preço de abertura da bolsa, ou seja, nosso modelo será calculado sempre para preços de abertura da bolsa.

Empresa	Data	Preço de abertura
	08/07/2011	23,5
Petrobras (PETR4)	07/07/2011	23,7
	06/07/2011	23,45

A simulação será feita da seguinte forma, vamos supor que o dia corrente é 08/07/2011, então nos sobrou dois dias, vamos sortear um número aleatório entre 1 e 2 e vamos calcular o comportamento da bolsa em relação ao dia posterior. De acordo com a tabela acima, temos os casos:

(i) Se sortearmos 1, temos que $\frac{23{,}70}{23{,}45} = 1,01$, então vamos considerar que na próxima abertura da bolsa o valor da ação vai subir para $1,01$, ou seja, será $1,01 \cdot 23,50 = 23,75$, este será o nosso cenário 1 para esta ação.

(ii) se sortearmos 2, temos que $\frac{23{,}50}{23{,}70} = 0,99$ então vamos considerar que na próxima abertura da bolsa o valor da ação vai descer $0,99$, ou seja, será $0,99 \cdot 23,50 = 23,30$, este será nosso cenário 2 para esta ação.

Quando lidarmos com várias ações, vamos considerar que o cenário é formado pela seguinte expressão:

$f_i(x) = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{p_{(j,i)}}{p_{(j,i-1)}} \cdot x_j$, considerando que teremos n ações no nosso portfólio.

Fazendo esse processo para o número de cenários que queremos gerar, podemos colocar os cenários como variáveis definidas no nosso modelo e calcular o CVaR.

8.1 Como Simular os Cenários

Para simular os cenários usamos o algortimo abaixo. É importante ver que a distribuição uniforme garante que todos os cenários tem as mesmas probabilides, em trabalhos futuros seria interessante variar a distribuição da simulação e atribuir porcentagens diferentes pros cenários, no entanto seria um enfoque muito mais estatístico que voltado pra otimização:

```
for c in Cenarios do
LOCNumAleatorio(c) :=
Floor (1207 * Uniform(eps,1));
endfor;
```

$LOCNumAleatorio(c)|(LOCNumAleatorio(c) = 1 or LOCNumAleatorio(c) = 0) := 2;$
PeCenario(c) := Element(Cenarios, LOCNumAleatorio(c));

PrecoCenarioGerado(a,c) :=
(PetroAcoes(PeCenario(c),a)/PetroAcoes(PeCenario(c)-1,a))*PrecosIniciais(a);

No algoritmo acima o 1207 é o número de cenários q simulamos, que outros estudos podem mudar, mas pela nossa experiencia isso não é tão interessante.

8.2 Como tratar as funções de perda

Para tratar as funções de perda, atribuímos sinais positivo (+) quando o valor da ação desce em relação ao preço de compra e negativo (-) quando o valor da ação sobe em relação ao preço da compra da ação:
Em AIMMS fizemos uma parâmetro definido com o seguinte código:

if($\frac{PrecoCenarioGerado(a,c)}{PrecosIniciais(a)} \geq 1$) then
$-1\frac{PrecoCenarioGerado(a,c)}{PrecosIniciais(a)}$
else
$\frac{PrecoCenarioGerado(a,c)}{PrecosIniciais(a)}$
endif

e para definir a variável do cenário, basta usar a equação:

Sum(a, $Portifolio(a) \cdot DEFSinalPreco(a,c)$)

9 O Software (AIMMS)

O software no qual programamos o modelo linear foi o AIMMS, por ser um software muito poderoso, de fácil implementação, ter bastante interação com o usuário, isto é, ao final do processo podemos desenhar uma tela, na qual o usuário escolhe o número de ações e quais ele quer usar.
Além disso, ao longo da pesquisa, a Paragon, empresa que produz o AIMMS liberou uma licença acadêmica que permite o uso do software para pesquisas e estudos, esta licença vem com vários “solvers” poderosos como CPLEX e GUROBI, nos quais podemos testar nosso modelo.
Então, no ambiente que o aluno é desenvolvido é de muito interesse que haja incentivo ao uso de Softwares como esse tanto para a formação de mão-de-obra de excelência como para o desenvolvimento científico e tecnológico.

10 Resultados Obtidos

Basicamente, os resultados obtidos dependem da aptidão ao risco do investidor, por isso optamos por expor variações do β durante o trabalho e não variações do número de cenários ou ações. Vamos mostrar um portifólio composto por 6 tipos de investimentos diferentes:

PETR4SA - Petrobras
VIVO4SA - Vivo
BTOW3SA - B2W Varejo
AMBV4FSA - Ambev
NDX - Índice NasDaq
BVSP - índice de Bovespa de São Paulo

As quatro primeiras acima são ações relativas às empresas que queremos investir, já os dois últimos são Índices baseados em uma seleção de empresas; o Índice Bovespa é formado pelas principais empresas negociados na Bolsa do Estado de São Paulo e o Índice NASDAQ 100 reúne as 100 maiores corporações não financeiras negociadas na bolsa de Nova Iorque.

Para os testes computacionais em AIMMS, utilizamos os seguintes preços iniciais pras ações:

Petr4 - 20
VIVO4 - 71
BTOW3 - 12.9
AMBV4 - 25
NDX - 2.1
BVSP - 5290

Ações	$\beta = 5\%$	$\beta = 10\%$	$\beta = 20\%$	$\beta = 25\%$	$\beta = 50\%$
PETR4	0	0	14,234	16,4828	16,2066
VIVO4	0	0	14,2832	16,4777	16,4465
BTOW3	0	0	0,0336	0,4374	15,874
AMBV4F	0	0,0299	14,3706	16,5919	16,3626
NDX	0	0,1252	28,3159	17,1683	17,4035
BVSP	100	99,8349	28,7625	32,8418	17,7067

Vemos que à medida que aumentamos o grau de risco que estamos disposto a admitir, o sistema diversifica o nosso portifolio na intenção de minimizar o risco.

	$\beta = 5\%$	$\beta = 10\%$	$\beta = 20\%$	$\beta = 25\%$	$\beta = 50\%$
VaR	-100	-99	-42	-32	1
C-VaR	-4	2	13	16,7654	33,1967

Temos que interpretar que montamos as funções de perda e o sistema, em relação, a perda temos o -VaR e o CVaR da perda, ou seja, para 5% perderemos no máximo 100 e acima da perda temos a chance de ganhar 4, já para 50% ganharemos 1 e podemos perder em média 33,1967.

10.1 Matriz de Correlação

Para os nossos testes em AIMMS, podemos usar o seguinte algoritmo pra calcular a Matriz de Correlação para os ativos que usamos:

```
for a in Ativos do
DEFcorrelacao(a, a2)
:=
correlation(c , PrecoCenarioGerado(a2, c), PrecoCenarioGerado(a, c));
endfor;
```

Então obtivemos a seguinte matriz de correlação para os ativos usados no desenvolvimento:

Ações	PETR4	VIVO4	NDX	BVSP	BTOW3	AMBV4F
PETR4	1	0,05578	-0,06022	-0,06538	0,02623	-0,06234
VIVO4	0,05578	1	0,07640	0,03400	0,09492	0,00263
NDX	-0,06022	0,07640	1	-0,05425	0,03848	0,05194
BVSP	-0,06538	0,03400	-0,05425	1	0,01847	-0,06583
BTOW3	0,02623	0,09492	0,03848	0,01847	1	-0,04128
AMBV4F	-0,06234	0,00263	0,05194	-0,06583	-0,04128	1

Podemos ver que as correlações ficam muito perto de 0, o que significa que não existe uma correlação significativa entre os investimentos feitos. Mas o que supomos é que no mundo real é difícil perceber correlações entre os preços das ações, isso porque o otimismo e o persimismo dos investidores em relação à compra e venda de seus ativos não tem todos o mesmo comportamento sempre diante dos acontecimentos que influenciam nos preços. Além disso, existe o grande número de cenários envolvidos e não é sempre que os preços das ações variam da mesma forma, então isso pode confundir uma análise de dados baseada somente em uma matriz de correlação.

11 Conclusões e sugestões de trabalhos

Baseado no que foi exposto neste relatório, podemos compreender bem as definições de algumas técnicas utilizadas no gerenciamento de risco que são Matriz de Covariância, VaR e CVaR. Vemos também que a otimização do VaR pode ser trabalhosa o suficiente para que minimizar CVaR seja mais proveitoso, já que minimizar CVaR está intimamente relacionado a otimizar

VaR. Baseados nisto, trabalhamos com uma função F_β, na qual podemos cair em um modelo de programação linear.
A partir de um modelo de Programação Linear bem formulado, mesmo que básico, foi possível utilizar uma simulação de dados simples e gerar um número de cenários desejado, com esses dados podemos utilizar um software para conseguir diversos resultados e ter uma idéia melhor de como investir.
Também comprovamos que para expor nossos investimentos a grandes riscos o mais indicado é diversificar o números de ações.
Outros estudos científicos que poderiam ser feitos mais afundo é mudar o modelo, talvez maximizar o lucro do investimento sujeito a um limite de CVaR máximo. Assim os conceitos e modelo aqui exposto podem servir como base para outros estudos. Também poderia estudar o uso de uma restrição que impeça que os investimentos sejam variáveis reais, isto pra que as variáveis estejam relacionadas ao número de ações que seriam compradas na bolsa, porém essa restrição tornaria o problema em um Problema de Programação Linear Inteira que envolveria conceitos bem mais profundos e estudos mais relacionados a algoritmos para este tipo de problema. Nesse caso teria que analisar o preço de uma ação e determinar quantas ações comprar e não somente considerar porcentagens inteiras.

12 Referencias Bibliográficas

(1) J. M., Martínez. Elementos de Otimização e Risco Notas de MS416. Livro não publicado.

(2) BUENO, Luís F. C. R., Medidas de Risco em Otimização de Portfólios, Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica.

(3)R. T. Rockafellar and S. Uryasev, Optimization of Conditional Value-at-risk Jounal of Risk 2 Pages: 21-41 January 2000.

(4) http://finance.yahoo.com

13 Agradecimento

Além das boas indicação dadas pelo orientador Prof. Antonio Moretti, nesse trabalho, foram importantes o embasamento teórico que Luís Felipe Bueno deu em conversas informais, o auxílio na implementação em AIMMS de Fabio Pinto Araújo e o auxílio em codificação LaTeXde Nelson Gomes.