
PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

APROXIMAÇÕES TIPO IMPEDÂNCIA PARA O
COEFICIENTE DE REFLEXÃO

Marcelo S. Carielo
Bolsista

Prof. Dr. Lúcio Tunes dos Santos
Orientador



JUNHO 2011



1 Introdução

Quando uma onda plana P (pressão) incide numa interface sólido-sólido a mesma dá origem a duas ondas de reflexão: uma P e outra S (cisalhamento). Considerando as condições de contorno necessárias (continuidade no deslocamento e tração), o coeficiente de reflexão elástico associado à onda P é escrito como $R_{PP} = N/D$, onde N e D são funções contínuas que dependem dos parâmetros dos meios em ambos lados da interface, da velocidade P e velocidade S, da densidade, e do ângulo de reflexão. Como a estrutura das funções N e D não é muito apropriada para uma possível inversão de parâmetros, surge a necessidade de aproximações para o coeficiente R_{PP} de maneira a tornar a inversão efetiva. Nossa intenção foi estudar as aproximações tipo impedância para o coeficiente de reflexão.

2 Desenvolvimento

Antes de estudarmos as aproximações tipo impedância para o coeficiente de reflexão elástico R_{PP} , fizemos um breve estudo das equações de Zoeppritz que definem tal coeficiente para nos familiarizarmos com as expressões exatas para o coeficiente.

Ao procurar-se uma solução para equação da onda, somos levados a um sistema linear, onde as equações desse são conhecidas como as equações de Zoeppritz e uma das soluções é o coeficiente R_{PP} . Os detalhes para obtermos o coeficiente R_{PP} podem ser encontrados em [4].

Indicaremos o coeficiente de reflexão considerando onda P incidente e onda P refletida por $R_{PP}(\alpha_i, \beta_i, \rho_i, \theta_i)$, ou, $R_{PP}(\alpha_i, \beta_i, \rho_i, p)$, onde α_i é a velocidade da onda P (km/s), β_i a velocidade da onda S (km/s) e ρ_i a densidade (g/cm^3), considerando o meio $i=1,2$, e $p = \text{sen}\theta_i/\alpha_i$ o parâmetro de raio. Além disso, podemos escrever,

$$R_{PP} = \frac{N(\alpha_i, \beta_i, \rho_i, \theta_i)}{D(\alpha_i, \beta_i, \rho_i, \theta_i)} \quad \text{ou} \quad R_{PP} = \frac{N(\alpha_i, \beta_i, \rho_i, p)}{D(\alpha_i, \beta_i, \rho_i, p)} \quad (2.1)$$

Como pretendemos estudar e comparar a eficiência entre as aproximações do tipo impedância elástica e de reflexão, e as clássicas, dentre as últimas escolheremos a que apresenta melhores resultados na literatura consultada.

Dentre as aproximações clássicas, baseadas em série de Taylor, escolhemos a aproximação de Aki e Richards(1980),

$$R_{PP} \approx \left[\frac{1}{2} - 2 \frac{\beta^2}{\alpha^2} \sin^2 \theta \right] \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{1}{2} \sec^2 \theta \frac{\Delta \alpha}{\alpha} - 4 \frac{\beta^2}{\alpha^2} \sin^2 \theta \frac{\Delta \beta}{\beta} \quad (2.2)$$

onde $\Delta \alpha = \alpha_2 - \alpha_1$, $\Delta \beta = \beta_2 - \beta_1$, $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$, $\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$, $\beta = (\beta_1 + \beta_2)/2$, $\rho = (\rho_1 + \rho_2)/2$.

Pode-se introduzir a função refletividade e definir uma equação diferencial parcial onde as hipóteses usadas para solucioná-la definem diferentes soluções. Estas soluções determinam uma aproximação para o coeficiente de reflexão: as aproximações do tipo impedância.

Partindo da expressão exata para R_{PP} [4], considerando a incidência normal (ou seja, ângulo de incidência $\theta = 0$) obtém-se a seguinte expressão,

$$R_{PP}(\theta=0) = \frac{AI_2 - AI_1}{AI_2 + AI_1} \quad (2.3)$$

onde $AI_j = \rho_j \alpha_j$, $j = 1, 2$ que é denominada impedância acústica.

Pode-se encontrar uma representação para o coeficiente de reflexão R_{PP} , considerando um ângulo de incidência qualquer, não somente no caso acima. Para isso define-se uma função conhecida como impedância $I = I(\alpha, \beta, \rho, \theta)$, ou $I = I(\alpha, \beta, \rho, p)$, onde $p = \text{sen}\theta_1/\alpha_1$ é o parâmetro de raio. Essa função pode ser usada para encontrar uma aproximação para o coeficiente de reflexão,

$$R_{PP}(\theta) \approx \frac{I(\alpha_2, \beta_2, \rho_2, \theta_2) - I(\alpha_1, \beta_1, \rho_1, \theta_1)}{I(\alpha_2, \beta_2, \rho_2, \theta_2) + I(\alpha_1, \beta_1, \rho_1, \theta_1)} = \frac{I_2 - I_1}{I_2 + I_1} \quad (2.4)$$

Veremos agora como obter uma expressão para função I em (2.4).

Foi dito anteriormente que para expressão exata de $R_{PP} = N/D$, N e D não possuem uma estrutura muito apropriada, trazendo a necessidade de expressões que aproximem R_{PP} de forma que a inversão seja efetiva. Para conseguir isto, pode-se definir uma função chamada refletividade, que é “uma medida da variação do coeficiente de reflexão nas proximidades do ponto onde o raio atinge a interface”. A partir dessa noção introduz-se um parâmetro σ na fórmula de R_{PP} de forma que possamos trabalhar com o conceito de continuidade dos parâmetros elásticos através da interface onde a onda incide.

Reescrevendo os parâmetros elásticos em função de σ e considerando $\Delta\sigma$ um incremento suficientemente pequeno, temos,

$$\alpha_1 = \alpha(\sigma), \beta_1 = \beta(\sigma), \rho_1 = \rho(\sigma), \theta_1 = \theta(\sigma), \alpha_2 = \alpha(\sigma + \Delta\sigma), \beta_2 = \beta(\sigma + \Delta\sigma), \rho_2 = \rho(\sigma + \Delta\sigma) \text{ e } \theta_2 = \theta(\sigma + \Delta\sigma). \quad (2.5)$$

A lei de Snell garante que o parâmetro de raio p permanece constante através da interface, portanto

$$p = \frac{\text{sen } \theta(\sigma)}{\alpha(\sigma)} = \frac{\text{sen } \theta(\sigma + \Delta\sigma)}{\alpha(\sigma + \Delta\sigma)} \quad (2.6)$$

ou seja,

$$\text{sen } \theta(\sigma) = p \alpha(\sigma) \quad (2.7)$$

Usando (2.1), (2.5) e (2.7) pode-se definir a função refletividade,

$$\mathcal{R}(\sigma) = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{R_{PP}(\sigma, \Delta\sigma)}{\Delta\sigma} \quad (2.8)$$

Calculando esse limite chega-se a,

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} [1 - 4\beta^2 p^2] \frac{\rho'}{\rho} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - \alpha^2 p^2} \right] \frac{\alpha'}{\alpha} - [4\beta^2 p^2] \frac{\beta'}{\beta} \quad , \quad (2.9)$$

onde ' denota as derivadas em relação a σ .

Substituindo (2.4) em (2.8), obtém-se,

$$\mathcal{R}(\sigma) = \frac{1}{2} \frac{I'(\sigma)}{I(\sigma)} \quad , \quad (2.10)$$

que junto com (2.9) fornece,

$$\frac{I'}{I} = [1 - 4\beta^2 p^2] \frac{\rho'}{\rho} + \left[\frac{1}{1 - \alpha^2 p^2} \right] \frac{\alpha'}{\alpha} - [8\beta^2 p^2] \frac{\beta'}{\beta} \quad , \quad (2.11)$$

que é a equação diferencial cuja solução define as diferentes aproximações do tipo impedância.

No caso das aproximações do tipo impedância elástica, proposta por [3], assume-se que $K = \beta/\alpha$ e θ são constantes. Reescrevendo (2.11) em função do ângulo de incidência, obteremos como soluções $I_i = IE_i$ ($i = 1, 2$),

$$IE = \rho^{1-4K^2 \text{sen}^2 \theta} \alpha^{\text{sec}^2 \theta} \beta^{-8K^2 \text{sen}^2 \theta} \quad , \quad (2.12)$$

que é a função impedância elástica.

No caso das aproximações do tipo impedância de reflexão, proposta por [5], usa-se o fato que o parâmetro de raio p é constante. Essa consideração é mais correta do que a de considerarmos o ângulo de incidência constante, visto que isso contraria a lei de Snell.

Supondo que a equação (2.11) admite uma solução do tipo $I(\sigma) = I(\rho(\sigma), \alpha(\sigma), \beta(\sigma), p)$ e fazendo as devidas considerações pode-se encontrar uma solução do tipo,

$$I = \frac{\rho\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2 p^2}} \exp \left\{ -4p^2 \left[\beta^2 + \int \frac{\beta^2}{\rho} d\rho \right] \right\} \quad . \quad (2.13)$$

As seguintes relações sobre a expressão acima foram sugeridas por [5],

$$\rho = b\beta^\gamma, \quad \text{ou equivalentemente} \quad , \quad \frac{\rho'}{\rho} = \gamma \frac{\beta'}{\beta} \quad , \quad (2.14)$$

onde b e γ são constantes.

Considerando essas relações, sobre (2.13), obtém-se a função impedância de reflexão,

$$I = IR = \frac{\rho\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2 p^2}} \exp \{ -2 [2 + \gamma] \beta^2 p^2 \} \quad , \quad \beta' \neq 0. \quad (2.15)$$

Depois de estudarmos a dedução das expressões acima, fizemos alguns experimentos numéricos utilizando o software Matlab. Em seguida comparamos os resultados obtidos para os diferentes tipos de aproximação para o coeficiente R_{pp} .

Usamos os seguintes modelos para nossos experimentos numéricos,

	Contraste Fraco			Contraste Médio			Contraste Forte		
Meio	α	β	ρ	α	β	ρ	A	B	ρ
1	3.42	1.78	2.53	3.35	1.72	2.36	3.21	1.60	2.39
2	3.39	1.79	2.50	3.05	1.46	2.30	4.55	2.61	2.44
Contraste	-0.01	0.01	-0.01	-0.09	-0.16	-0.03	0.35	0.48	0.02

Tabela 1. Modelos de contrastes.

Para traçarmos o gráfico da aproximação do tipo impedância elástica (2.12), usamos o seguinte valor para K ,

$$K = \sqrt{\frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}, \quad (2.16)$$

que é a expressão de quadrados mínimos total para K , visto que consideramos ter erro nos dois valores que definem o K .

Para traçarmos o gráfico da aproximação do tipo impedância de reflexão (2.15), encontramos a expressão para γ

$$\gamma = \frac{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}}{\ln \frac{\beta_2}{\beta_1}}. \quad (2.17)$$

Usando (2.1), (2.2) e (2.4) com (2.12) e (2.15), e considerando (2.16) e (2.17), traçamos os seguintes gráficos das aproximações para o coeficiente de reflexão R_{pp} .

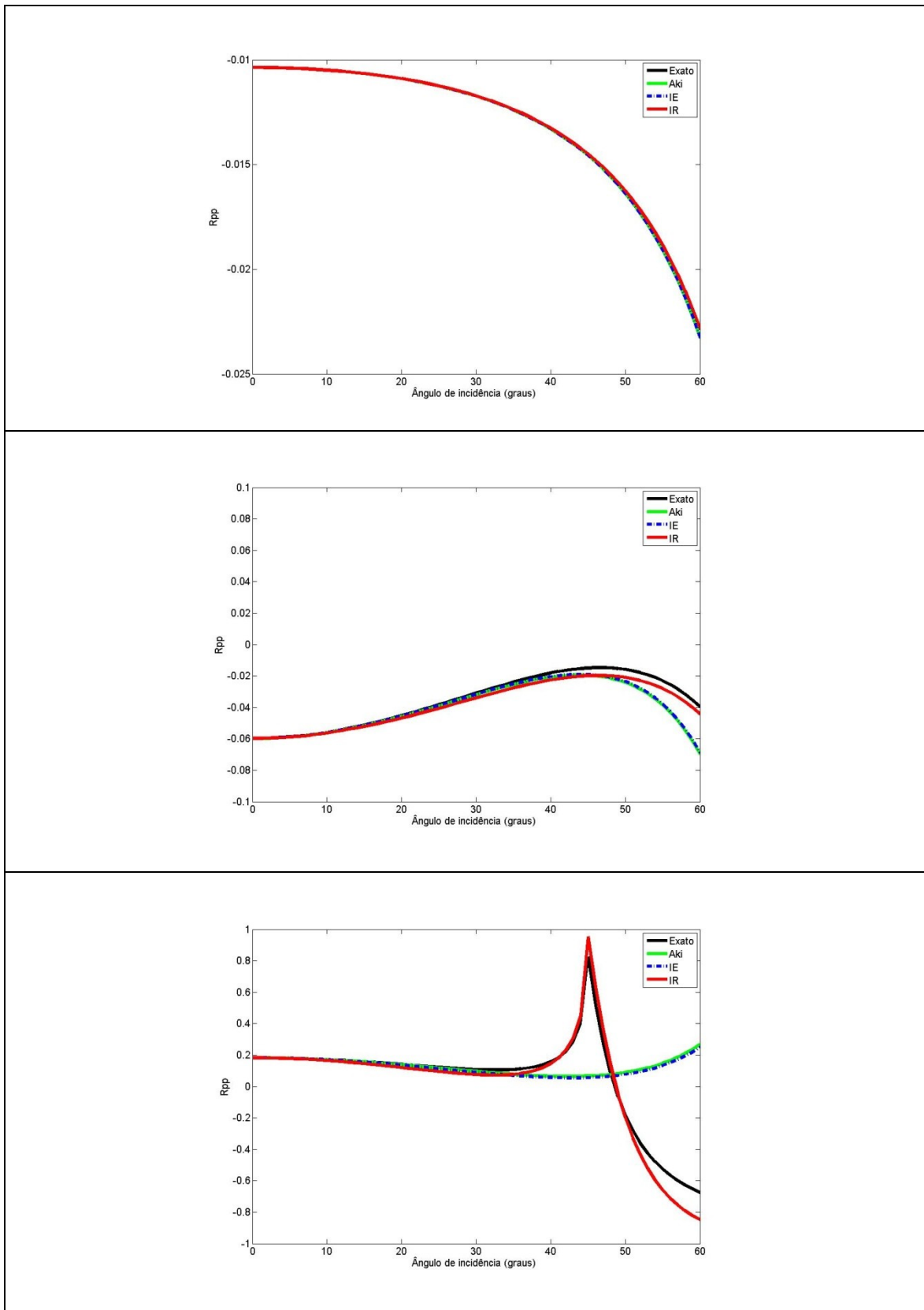


Tabela 2. Gráficos da curva exata(2.1) e das aproximações de Aki (2.2), impedância elástica (2.12) e impedância de reflexão (2.15) para o coeficiente de reflexão R_{PP} , para os modelos de contraste fraco, médio e forte, respectivamente (de cima para baixo).

Observamos pelos gráficos da Tabela 2, que para o modelo de contraste fraco escolhido as aproximações para R_{pp} aproximam bem a curva exata. Já para o modelo de contraste médio a aproximação do tipo impedância de reflexão aproxima bem a curva exata, o que não acontece para as aproximações do tipo impedância elástica e Aki, pois depois de um ângulo de pouco menos que 50 graus, ambas curvas começam a se afastar da curva exata, indicando que a aproximação não está sendo boa. Por fim, para o modelo de contraste forte, enquanto a aproximação do tipo impedância de reflexão aproxima bem a curva exata, na faixa de ângulos de incidência de 0 a cerca de 50 graus. Com as outras duas, não acontece o mesmo. Elas aproximaram bem numa faixa de 0 a cerca de 30 graus, que é o ângulo crítico na maioria dos modelos.

Disso concluímos que a aproximação do tipo impedância elástica é que melhor aproxima o coeficiente de reflexão elástico R_{pp} .

3 Comentários

Este projeto permitiu-me aprender um pouco sobre as aproximações tipo impedância elástica e de reflexão para o coeficiente de reflexão. Depois de estudar as diferentes formas de aproximação, pude comparar a eficiência das aproximações mais usadas para o coeficiente R_{pp} e perceber que, das aproximações vistas para o coeficiente R_{pp} , a que foi mais eficiente é a impedância de reflexão.

5 Bibliografia

- [1] K.I. Aki & P.G. Richards, Quantitative Seismology, W.H. Freeman and Co., 1980.
- [2] W. E. Boyce & R.C. DiPrima, Richard C., Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, Guanabara, 2006.
- [3] Connolly, Elastic impedance, Leading Edge, 18:438-452, 1999.
- [4] A. Davolio, Aproximações para o Coeficiente de Reflexão e Análise de AVO, Dissertação de Mestrado, IMECC, Unicamp, 2006.
- [5] Santos L.T. & Tygel M., Impedance-type approximations of the P-P elastic reflection coefficient: Modeling an AVO inversion, Geophysics, 69:592-598, 2004.