Relatório Final de Atividades

PIBIC/CNPq

Aluna: Ana Cândida Martins do Nascimento

Orientador: Pedro José Catuogno

1. Resumo das atividades:

Inicialmente foi feito um estudo sobre o conceito de derivada de uma função em relação a outra função: definições, teoremas, proposições e as devidas interpretações sobre o tema. Este conceito generaliza o conceito usual de diferenciabilidade, dado que este é um caso particular do objeto de estudo deste projeto, pois é a derivada de uma função em relação à função $g(x) = x$. Feito este estudo, obtiveram-se as ferramentas necessárias para a segunda etapa do projeto, que consistiu na pesquisa de algumas aplicações deste conceito generalizado de derivada em tópicos relacionados ao conceito usual.

Também foi realizado um estudo para aprendizagem da linguagem TEX, ferramenta usada para a concepção deste relatório e de grande importância na elaboração de outros textos matemáticos que a aluna vier a desenvolver.

2. Outras informações:

Não há outras informações relevantes.

3. Produção científica:

A seguir.

Derivação generalizada e algumas aplicações

Sejam $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{\mathrm{I}}$, f e g funções reais definidas em I. Suponhamos g ser estritamente crescente em I e existirem os limites laterais $f(x_0 - 0)$ e $f(x_0 + 0)$ (note que f não é necessariamente contínua em x_0).

Então são feitas as seguintes definições:

Definição 1. *se x_0 é um ponto de continuidade de g, define-se a derivada esquerda de f em relação a g por:*

$$f_g'^e(x_0) := \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0 + 0)}{g(x) - g(x_0 + 0)} \tag{1}$$

e a derivada direita de f em relação a g por:

$$f_g'^d(x_0) := \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0 - 0)}{g(x) - g(x_0 - 0)} \quad . \tag{2}$$

Senão, se x_0 é um ponto de descontinuidade de g, tais derivadas são definidas, respectivamente, por:

$$f_g'^e(x_0) := \frac{f(x_0 - 0) - f(x_0 + 0)}{g(x_0 - 0) - g(x_0 + 0)} \tag{3}$$

e

$$f_g'^d(x_0) := \frac{f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)}{g(x_0 + 0) - g(x_0 - 0)} \quad . \tag{4}$$

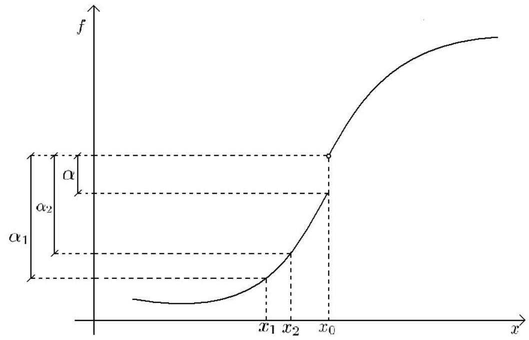
Diz-se que f é derivável à esquerda em relação a g em x_0 se $f_g'^e(x_0)$ assumir um valor finito. O mesmo conceito se estende para a derivada direita.

Observação 1. Tendo em mente a ideia intuitiva da derivada lateral tradicional, esta também mede a variação da função f, porém com uma "unidade" de variação arbitrária, dada pela função g (aspas porque esta unidade depende do ponto x_0 em que g está sendo avaliada).

Observação 2. No caso da derivada esquerda, faz sentido considerar a diferença $f(x) - f(x_0 + 0)$ pois $f(x)$ é avaliada em pontos à esquerda de x_0 e arbitrariamente próximos deste, e $f(x_0 + 0)$ fornece o comportamento de f imediatamente após x_0, dado que x está crescendo. Então, $f(x) - f(x_0 + 0)$ tende para a variação de f em x_0, considerando apenas valores à esquerda de x_0.

Exemplo 1.

$-\alpha_1 = f(x_1) - f(x_0 + 0)$
$-\alpha_2 = f(x_2) - f(x_0 + 0)$
$\{-\alpha_k\} \to -\alpha =$
$=$ limite da variação de f em torno de x_0
dado que x se aproxima de x_0 pela esquerda.



Portanto, quando esta diferença é dividida pela variação de g em torno de x_0, $g(x) - g(x_0)$, e é tomado o limite esquerdo deste quociente, obtém-se a variação esquerda de f em x_0 em relação à variação esquerda de g em x_0. Considerações análogas podem ser feitas para a derivada direita.

Observação 3. $g_g^{'e}$ e $g_g^{'d}$ existem e $g_g^{'e} = g_g^{'d} = 1, \forall\, x_0 \in \mathring{\mathrm{I}}$.

Definição 2. *Se x_0 é um ponto de continuidade de g, define-se a derivada de f em relação a g por:*

$$f_g^{'}(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - l_0}{g(x) - g(x_0)} \tag{5}$$

se existir o limite $l_0 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Senão, se x_0 for um ponto de descontinuidade de g, esta derivada é definida por:

$$f_g^{'}(x_0) := \frac{f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)}{g(x_0 + 0) - g(x_0 - 0)} \quad . \tag{6}$$

Quando $f_g^{'}(x_0)$ assume um valor finito, diz-que que f é derivável em relação a g em x_0. Também é dito que f é derivável em relação a g em I se f for derivável em relação a g em cada ponto de I.

Observação 4. $f_g^{'e} = f_g^{'d} = f_g^{'}$ em cada ponto de descontinuidade de g.

Observação 5. Como no conceito usual de derivada, f é derivável em relação a g em x_0 se e só se existirem $f_g^{'e}(x_0)$ e $f_g^{'d}(x_0)$ e estes valores forem iguais.

Observação 6. Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe e x_0 é um ponto de descontinuidade de g, então $f_g^{'}(x_0) = 0$, o que é razoável, já que a função g dá um salto em x_0 e a função f não (f pode, no máximo, apresentar uma descontinuidade em x_0, mas deve ter um comportamento "suave" em torno deste). Portanto, a variação aproximada de f em x_0 pode ser arbitrariamente menor que a de g, bastando para isso tomar x suficientemente próximo de x_0. Logo, no limite, a variação de f em relação a g em x_0 é zero.

A seguir são enunciados alguns teoremas de funções deriváveis de acordo com as definições anteriores, análogos a outros teoremas ligados ao conceito usual de diferenciabilidade. As demonstrações, aqui omitidas, podem ser encontradas em [1].

Teorema 1 (Fermat). *Sejam* $f,\ g:\ \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *duas funções contínuas em* $x_0 \in \mathring{\mathrm{I}}$, x_0 *ponto de extremo de* f. *Se* f *é derivável em relação a* g *em* x_0, *então* $f_g^{'}(x_0) = 0$.

Teorema 2 (Rolle). *Sejam* $f,\ g : [\mathrm{a},\ \mathrm{b}] \to \mathbb{R}$, g *estritamente crescente. Se* f *é uma função contínua em* $[\mathrm{a},\ \mathrm{b}]$, *derivável em relação a* g *em* $(\mathrm{a},\ \mathrm{b})$ *e* $f(a) = f(b)$, *então existe* $\mathrm{c} \in (\mathrm{a},\ \mathrm{b})$ *tal que* $f_g^{'}(c) = 0$.

Teorema 3 (Cauchy). *Sejam* $f, g, h : [\mathrm{a},\ \mathrm{b}] \to \mathbb{R}$ *e suponha que* g *é estritamente crescente. Se* f, g *e* h *são funções contínuas em* $[\mathrm{a},\ \mathrm{b}]$, f *e* h *deriváveis em relação a* g *em* $(\mathrm{a},\ \mathrm{b})$ *e* $h_g^{'}(x) \neq 0\ \forall\, x \in (\mathrm{a},\ \mathrm{b})$, *então* $h(a) \neq h(b)$ *e existe* $c \in (\mathrm{a},\ \mathrm{b})$ *tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{h(b) - h(a)} = \frac{f_g^{'}(c)}{h_g^{'}(c)} \quad .$$

Teorema 4 (Lagrange). *Sejam* $f,\ g : [\mathrm{a},\ \mathrm{b}] \to \mathbb{R}$ *e suponha* g *ser estritamente crescente. Se* f *e* g *são contínuas em* $[\mathrm{a},\ \mathrm{b}]$ *e* f *é derivável em relação a* g *em* $(\mathrm{a},\ \mathrm{b})$ *então existe* $c \in (\mathrm{a},\ \mathrm{b})$ *tal que*

$$f(b) - f(a) = f_g^{'}(c)[g(b) - g(a)] \quad .$$

Proposição 1. Seja $g : [\mathrm{a},\ \mathrm{b}] \to \mathbb{R}$ estritamente crescente e assuma que g apresenta um número finito de pontos de descontinuidade.
Seja $s : [\mathrm{a},\ \mathrm{b}] \to \mathbb{R}$ o componente salto de g, isto é,

$$s(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x = a \\ g(a+0) - g(a) + \sum\limits_{x_k < x} [g(x_k + 0) - g(x_k - 0)] + g(x) - g(x-0) & \text{se} \quad a < x \leq b \end{cases}$$

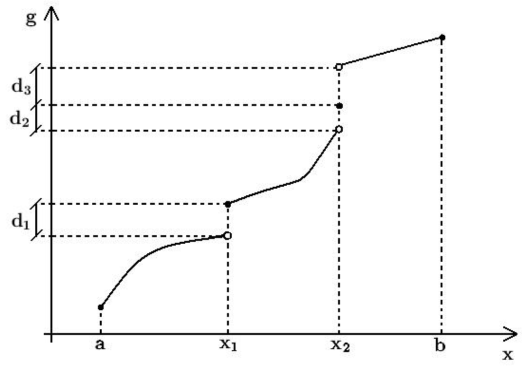
(observe que $\sum\limits_{x_k<x} [g(x_k + 0) - g(x_k - 0)]$ é uma soma finita, pois nela só influem os pontos de descontinuidade de g, os quais são finitos por hipótese).

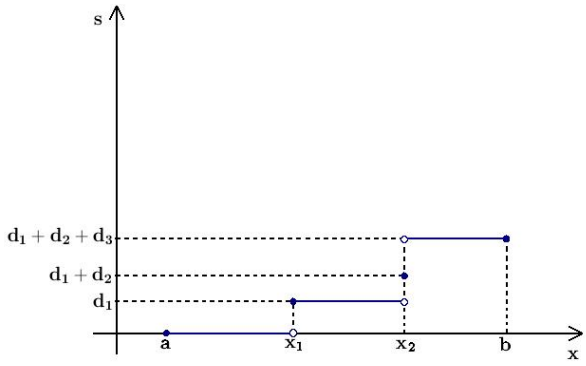
Então s é derivável em relação a g em (a, b) e temos:

$$s_g^{'}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é um ponto de continuidade de } g \\ 1 & \text{se } x \text{ é um ponto de descontinuidade de } g \end{cases}$$

Observação 7. Como o próprio nome já diz, a função s indica os saltos de g. É uma função escada cujos degraus ocorrem nos pontos de descontinuidade de g e é constante nos intervalos em que g é contínua. Logo, é bem razoável que $s_g^{'}$ assuma valor zero nos pontos de continuidade de g e 1 nos pontos de descontinuidade, pois a variação de s nestes pontos será exatamente na mesma proporção que a de g.

Exemplo 2.





Definição 3. $\mathfrak{D}_{[\mathrm{a,b}]} = \{\ g : [\mathrm{a},\ \mathrm{b}] \to \mathbb{R} \mid g$ *é estritamente crescente e seu componente salto* s *é derivável em relação a* g *em* $(\mathrm{a},\ \mathrm{b})\ \}$.

Proposição 2. Se $g \in \mathfrak{D}_{[\mathrm{a,b}]}$, então o componente contínuo de g, $\bar{g} : [\mathrm{a},\ \mathrm{b}] \to \mathbb{R}$, $\bar{g}(x) = g(x) - s(x)$ (s é o componente salto de g), é derivável em relação a g em (a, b) e:

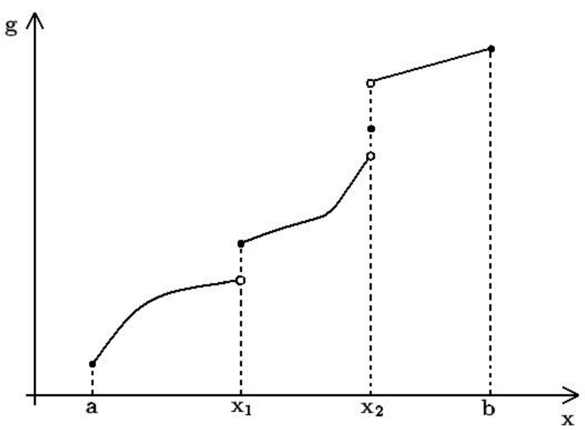
$$\bar{g}_g^{'}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é um ponto de descontinuidade de } g \\ 1 - s_g^{'}(x) & \text{se } x \text{ é um ponto de continuidade de } g \end{cases}$$

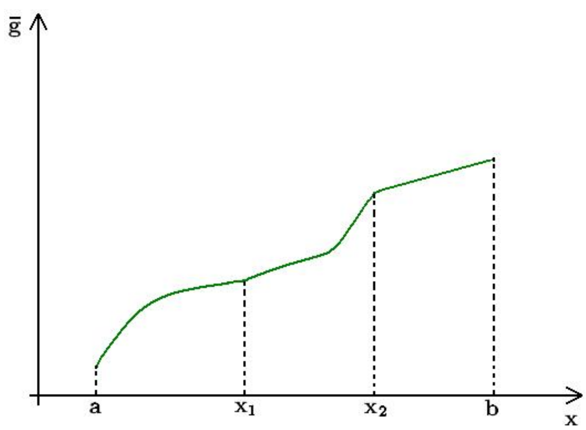
Portanto:

$$\bar{g}_g^{'}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } g \text{ não é contínua em } x \\ 1 & \text{se } g \text{ é contínua em } x \end{cases}$$

Observação 8. Uma maneira simples de entender $\bar{g}$ é enxergá-la geometricamente: o gráfico de $\bar{g}$ é o gráfico de g sem saltos, isto é, as partes "soltas" do gráfico de g são unidas para formar o gráfico de $\bar{g}$. A partir do exemplo anterior obtemos o próximo exemplo.

Exemplo 3.





Nos pontos de continuidade de g, $\bar{g}$ varia exatamente na mesma proporção que g; isto é confirmado pelo fato de a derivada de $\bar{g}$ em relação a g ser 1 nestes pontos. Nos pontos de descontinuidade de g, como g dá um "salto" e $\bar{g}$ não, a diferença $\bar{g}(x) - \bar{g}(x_1)$ é, em módulo, arbitrariamente menor que $g(x) - g(x_1)$ (basta tomar x suficientemente próximo de x_1), então o limite do quociente $\dfrac{\bar{g}(x) - \bar{g}(x_1)}{g(x) - g(x_1)}$, o qual fornece a variação de $\bar{g}$ em relação a g no ponto x_1, é zero; de fato, pela proposição acima temos $\bar{g}_g'(x_1) = 0$.

Definição 4. *Sejam f, $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ duas funções tais que g é estritamente crescente. Uma primitiva de f em relação a g é qualquer função $F : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ tal que $F_g'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathrm{I}$.*

Proposição 3. Se f é uma função contínua em [a, b] e se g é uma função estritamente crescente em [a, b], então a função

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dg(t), \ \forall\, x \in [\mathrm{a},\, \mathrm{b}] \tag{7}$$

é uma primitiva de f em relação a g em [a, b].

Observação 9. Entendemos a integral da equação (7) no sentido da integral de Riemann-Stieltjes, isto é,

$$\int_a^b f(t)\, dg(t) = \lim_{|P| \to 0} \sum (f, g, P*) = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})],$$

onde P $= \{\ a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b\ \}$ é uma partição de [a, b], $t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i$, $i = 1, \ldots, n$ e $|\mathrm{P}| =$ maior comprimento $t_i - t_{i-1}$ dos intervalos de P (P* denota que o ponto ξ_i contido no i-ésimo subintervalo da partição é escolhido arbitrariamente).

Observação 10. F é uma função contínua em cada ponto x_0 de continuidade de g.

Teorema 5 (fórmula de Leibniz-Newton)**.** *Assuma que f é uma função Riemann-Stieltjes integrável e possui primitivas em* [a, b] *em relação à função contínua e estritamente crescente g. Se F é uma função contínua em* [a, b] *e uma primitiva de f em relação a g, então:*

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = F(b) - F(a) \quad . \tag{8}$$

Teorema 6. *Sejam f, g : [a, b] $\to \mathbb{R}$ duas funções. Assuma que:*

1. *g é uma função crescente e $(\mathrm{a_k})_{\mathrm{k} \geq 1}$ são seus pontos de descontinuidade;*
2. *f é Riemann-Stieltjes integrável em relação a g em* [a, b].

Sejam s e $\bar{g}$ os componentes salto e contínuo de g, respectivamente. Então f é Riemann-Stieltjes integrável em relação a $\bar{g}$ em [a, b] *e*

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,d\bar{g}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f(a_k)(s(a_k+0) - s(a_k-0)) \quad . \tag{9}$$

Uma aplicação natural deste conceito de derivada seria a generalização do polinômio de Taylor. Para isso serão necessários dois lemas:

Lema 1. *Sejam f, $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ duas funções tais que g é estritamente crescente, f função derivável em relação a g e a constante. Então:*

$$(af)_g^{'}(x) = a[f_g^{'}(x)],\ \forall\, x \in \mathring{\mathrm{I}} \quad . \tag{10}$$

Demonstração. Seja $x_0 \in \mathring{\mathrm{I}}$. Se x_0 é ponto de continuidade de g, suponha existir o limite $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Então

$$\begin{aligned}(af)_g^{'}(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{af(x) - \lim\limits_{x\to x_0}[af(x)]}{g(x)-g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{af(x) - a\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]}{g(x)-g(x_0)} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{a\left[f(x) - \lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]\right]}{g(x)-g(x_0)} = a\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]}{g(x)-g(x_0)} = a[f_g^{'}(x_0)] \quad .\end{aligned}$$

Senão, se x_0 for ponto de descontinuidade de g, então

$$(af)_g^{'}(x_0) = \frac{af(x_0+0) - af(x_0-0)}{g(x_0+0) - g(x_0-0)} = a \cdot \frac{f(x_0+0) - f(x_0-0)}{g(x_0+0) - g(x_0-0)} = a[f_g^{'}(x_0)] \quad .$$

□

Lema 2. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, k constante, $x_0 \in \mathring{\mathrm{I}}$ e x_0 ponto de continuidade de g. Então*

$$[(g(x)+k)^n]_g^{'}(x_0) = n\,[g(x_0)+k]^{n-1} \tag{11}$$

Demonstração.

$$[(g(x)+k)^n]_g^{'}(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{(g(x)+k)^n - \lim\limits_{x\to x_0}[(g(x)+k)^n]}{g(x)-g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{(g(x)+k)^n - (g(x_0)+k)^n}{g(x)-g(x_0)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(g(x_0)+h+k)^n - (g(x_0)+k)^n}{h} \quad \text{, fazendo } h = g(x) - g(x_0).$$

Mas $[(g(x_0)+k)+h]^n = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (g(x_0)+k)^{n-i} h^i = (g(x_0)+k)^n + h \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (g(x_0)+k)^{n-i} h^{i-1}$.

Então $\lim_{h\to 0} \dfrac{(g(x_0)+h+k)^n - (g(x_0)+k)^n}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(g(x_0)+k)^n + h\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(g(x_0)+k)^{n-i}h^{i-1} - (g(x_0)+k)^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(g(x_0)+k)^{n-i}h^{i-1}}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(g(x_0)+k)^{n-i}h^{i-1}\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[n[g(x_0)+k]^{n-1} + \sum_{i=2}^{n}\binom{n}{i}(g(x_0)+k)^{n-i}h^{i-1}\right]$$

$$= n[g(x_0)+k]^{n-1} + \lim_{h\to 0}\left[h\sum_{i=2}^{n}\binom{n}{i}(g(x_0)+k)^{n-i}h^{i-2}\right] = n[g(x_0)+k]^{n-1} \quad .$$

□

Seja a função $p : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, $p(x) = f(x_0) + f_g'(x_0)[g(x) - g(x_0)] + \dfrac{f_g''(x_0)}{2}[g(x) - g(x_0)]^2$, $x_0 \in \mathring{\mathrm{I}}$. Suponha g contínua em I. Pelos lemas anteriores,

$$p_g'(x) = f_g'(x_0) + f_g''(x_0)[g(x) - g(x_0)] \text{ e } p_g''(x) = f_g''(x_0) \quad .$$

Logo, as derivadas primeira e segunda de p em relação a g no ponto x_0 coincidem com as respectivas derivadas de f em relação a g no ponto x_0. Por essa razão p será chamado Polinômio de Taylor de ordem 2 de f derivada em relação a g no ponto x_0.

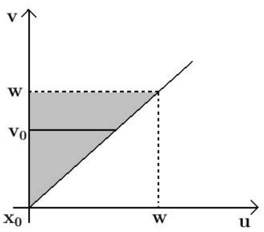
Se p for usado para aproximar o valor de f em pontos próximos de x_0, é razoável conhecer um limitante para o erro cometido nesta aproximação. Para isso, considere a função

$$R(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{w}\int_{x_0}^{v} f_g^{(3)}(u)\,\mathrm{dg}(u)\,\mathrm{dg}(v)\,\mathrm{dg}(w) \quad .$$

Por integração direta e usando os lemas 1 e 2 e o teorema 5, obtém-se:

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{w}\int_{x_0}^{v} f_g^{(3)}(u)\,\mathrm{dg}(u)\,\mathrm{dg}(v)\,\mathrm{dg}(w) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{w} f_g^{(2)}(u)\Big|_{x_0}^{v}\,\mathrm{dg}(v)\,\mathrm{dg}(w) =$$
$$= \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{w} f_g^{(2)}(v)\,\mathrm{dg}(v)\,\mathrm{dg}(w) - \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{w} f_g^{(2)}(x_0)\,\mathrm{dg}(v)\,\mathrm{dg}(w) =$$
$$= \int_{x_0}^{x} f_g^{'}(v)\Big|_{x_0}^{w}\,\mathrm{dg}(w) - f_g^{(2)}(x_0)\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{w} 1\,\mathrm{dg}(v)\,\mathrm{dg}(w) =$$
$$= \int_{x_0}^{x} f_g^{'}(w)\,\mathrm{dg}(w) - \int_{x_0}^{x} f_g^{'}(x_0)\,\mathrm{dg}(w) - f_g^{''}(x_0)\int_{x_0}^{x} g(v)\Big|_{x_0}^{w}\,\mathrm{dg}(w) =$$
$$= f(w)\Big|_{x_0}^{x} - f_g^{'}(x_0)\int_{x_0}^{x} 1\,\mathrm{dg}(w) - f_g^{''}(x_0)\int_{x_0}^{x}\Big[g(w)-g(x_0)\Big]\,\mathrm{dg}(w) =$$
$$= f(x)-f(x_0)-f_g^{'}(x_0)\Big(g(w)\Big|_{x_0}^{x}\Big) - \frac{f_g^{''}(x_0)}{2}\int_{x_0}^{x}\Big[2g(w)-2g(x_0)\Big]\,\mathrm{dg}(w) =$$
$$= f(x)-f(x_0)-f_g^{'}(x_0)\Big[g(x)-g(x_0)\Big] - \frac{f_g^{''}(x_0)}{2}\left[\int_{x_0}^{x} 2g(w)\,\mathrm{dg}(w) - \int_{x_0}^{x} 2g(x_0)\,\mathrm{dg}(w)\right] =$$
$$= f(x)-f(x_0)-f_g^{'}(x_0)\Big[g(x)-g(x_0)\Big] - \frac{f_g^{''}(x_0)}{2}\left[\Big[g(w)^2\Big]\Big|_{x_0}^{x} - 2g(x_0)g(w)\Big|_{x_0}^{x}\right] =$$
$$= f(x)-f(x_0)-f_g^{'}(x_0)\Big[g(x)-g(x_0)\Big] - \frac{f_g^{''}(x_0)}{2}\Big[g(x)^2-g(x_0)^2-2g(x_0)\big[g(x)-g(x_0)\big]\Big] =$$
$$= f(x)-f(x_0)-f_g^{'}(x_0)\Big[g(x)-g(x_0)\Big] - \frac{f_g^{''}(x_0)}{2}\Big[g(x)^2-2g(x)g(x_0)+g(x_0)^2\Big] =$$
$$= f(x)-f(x_0)-f_g^{'}(x_0)\Big[g(x)-g(x_0)\Big] - \frac{f_g^{''}(x_0)}{2}\Big[g(x)-g(x_0)\Big]^2 \quad . \tag{12}$$

Agora $R(x)$ é calculado mudando-se a ordem de integração. Inicialmente considere (por simplicidade de notação) a integral $\int_{x_0}^{w}\int_{x_0}^{v} f(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$. Para cada v fixo, a variável de integração u varia de x_0 a v (ver figura). Integrando em u, obtém-se uma função em v. Então v se torna a variável de integração, que varia entre x_0 e w. Logo, fixando u, v varia entre u e w. Mas como v assume valores entre x_0 e w, se v variar em função de u então u deve variar entre x_0 e w.



Portanto,

$$\int_{x_0}^{w}\int_{x_0}^{v} f(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_{x_0}^{w}\int_{u}^{w} f(u)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u =$$
$$= \int_{x_0}^{w} f(u)\int_{u}^{w} 1\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \int_{x_0}^{w}(w-u)f(u)\,\mathrm{d}u$$

Aplicando este raciocínio a $R(x)$ obtém-se:

$$\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{w}\int_{x_0}^{v} f_g^{(3)}(u)\,\mathrm{dg}(u)\,\mathrm{dg}(v)\,\mathrm{dg}(w) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{w}\int_{u}^{w} f_g^{(3)}(u)\,\mathrm{dg}(v)\,\mathrm{dg}(u)\,\mathrm{dg}(w) = \\
&= \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{w} f_g^{(3)}(u)\int_{u}^{w} 1\,\mathrm{dg}(v)\,\mathrm{dg}(u)\,\mathrm{dg}(w) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{w} f_g^{(3)}(u)\big[g(w)-g(u)\big]\,\mathrm{dg}(u)\,\mathrm{dg}(w) = \\
&= \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{w} \big[g(w)-g(u)\big] f_g^{(3)}(u)\,\mathrm{dg}(u)\,\mathrm{dg}(w) = \int_{x_0}^{x}\int_{u}^{x} \big[g(w)-g(u)\big] f_g^{(3)}(u)\,\mathrm{dg}(w)\,\mathrm{dg}(u) = \\
&= \int_{x_0}^{x}\int_{u}^{x} g(w) f_g^{(3)}(u)\,\mathrm{dg}(w)\,\mathrm{dg}(u) - \int_{x_0}^{x}\int_{u}^{x} g(u) f_g^{(3)}(u)\,\mathrm{dg}(w)\,\mathrm{dg}(u) = \\
&= \int_{x_0}^{x} \frac{f_g^{(3)}(u)}{2}\big[g(x)^2-g(u)^2\big]\,\mathrm{dg}(u) - \int_{x_0}^{x} \frac{f_g^{(3)}(u)}{2} g(u)\big[2g(x)-2g(u)\big]\,\mathrm{dg}(u) = \\
&= \int_{x_0}^{x} \frac{f_g^{(3)}(u)}{2}\big[g(x)^2-g(u)^2\big]\,\mathrm{dg}(u) - \int_{x_0}^{x} \frac{f_g^{(3)}(u)}{2}\big[2g(x)g(u)-2g(u)^2\big]\,\mathrm{dg}(u) = \\
&= \int_{x_0}^{x} \frac{f_g^{(3)}(u)}{2}\big[g(x)^2-2g(x)g(u)+g(u)^2\big]\,\mathrm{dg}(u) = \\
&= \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f_g^{(3)}(u)\big[g(x)-g(u)\big]^2\,\mathrm{dg}(u) \qquad (13)
\end{aligned}$$

Pelas equações (12) e (13) segue que

$$f(x) = f(x_0) + f_g^{'}(x_0)\big[g(x)-g(x_0)\big] + \frac{f_g^{''}(x_0)}{2}\big[g(x)-g(x_0)\big]^2 + R(x) \quad ,$$

onde $R(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x_0}^{x} f_g^{(3)}(u)\big[g(x)-g(u)\big]^2\,\mathrm{dg}(u)$.

Em [3] encontra-se o seguinte teorema:

Teorema 7. *Se h é real e de variação limitada no intervalo* [a, b] *e g é real e contínua neste intervalo, então*

$$\int_{a}^{b} h\,\mathrm{dg} \leq \big(\inf h\big)\big(g(b)-g(a)\big) + S[a,b]V[h] \quad ,$$

onde $V[h]$ é a variação total de h e $S[a,b] = \sup\limits_{a\leq\alpha<\beta\leq b}\big(g(\beta)-g(\alpha)\big)$.

Então, se $h(u) = f_g^{(3)}(u)\big[g(x)-g(u)\big]^2$ tiver variação limitada em $[\mathrm{x}_0, \mathrm{x}]$, tem-se um limitante superior para $R(x)$.

Referências Bibliográficas

[1] Mihai Gradinaru: *On the derivative with respect to a function with applications to Riemann-Stieltjes integral.*

[2] Dimitri Kountourogiannis, Paul Loya: *A derivation of Taylor's formula with integral remainder* (junho 2003).

[3] Richard Darst, Harry Pollard: *An inequality for the Riemann-Stieltjes integral* (1969).

[4] Elon Lages Lima: *Análise real volume 1. Funções de uma variável* - Coleção Matemática Universitária, IMPA (2007).

[5] Walter Rudin: *Principles of Mathematical Analysis*, 2^{nd} edition, McGraw-Hill (1964).