Um Ponto de Vista sobre Programação Linear

Luiz Fernando Ramos Lemos

Orientador: Lúcio Tunes dos Santos

13 de dezembro de 2010

Resumo

Este trabalho constitui uma forma alternativa de olhar para o problema de programação linear. É realizada aqui a construção de um algoritmo para tratar o problema linear, com vetor de custo não-negativo, o mesmo será abordado na forma canônica de minimização. São utilizados para tal, artifícios básicos da teoria de cones. Ao final é realizado um exemplo numérico simples do funcionamento do algoritmo.

1 Proposição

Considere o seguinte problema linear de minimização

$$\begin{array}{rrcl} \min & c^T x & & \\ \text{s.a} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0, \end{array} \tag{1}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x, c \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. É evidente que este problema teria $x^* = 0$ como solução se ocorresse $b \leq 0$, e crescimento em qualquer direção positiva, isto é, $c \geq 0$.

Tomando isto como motivação, construiremos um método a partir do qual, através de sucessivas translações e mudanças de base, se obtém um problema equivalente que satisfaz as condições citadas. Ao contrário do método Simplex, não faremos hipóteses sobre o vetor b, no entanto, restringiremos a abordagem apenas para o caso em que $c \geq 0$.

2 Cones

Cones são estruturas bem definidas e muito utilizadas no campo da álgebra e otimização. A teoria aqui apresentada é fundamental para entendimento do algoritmo apresentado.

Definição 2.1. *Um* cone *é qualquer subconjunto de um espaço vetorial que seja fechado para a multiplicação por escalares positivos.*

2.1 Cones e restrições lineares

Cones podem ser definidos por restrições lineares, e, de fato, isto consta frequentemente na literatura de programação linear. Esta estrutura é chamada *cone convexo*. Analisaremos apenas o caso em que a matriz de coeficientes das restrições é invertível, e restrições de desigualdade.

Para os resultados a seguir tome que, dado um sistema $Bx \geq b$, subentende-se, B uma matriz quadrada de ordem n e invertível, e b um vetor dimensão n.

Teorema 2.1. *O conjunto $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^m | Bx \geq b\}$ é um cone se, e somente se, b é nulo.*

Prova. $\Rightarrow$ Dado d tal que $Bd \geq 0$ então para $t \geq 0$ segue-se que $B[td] = t[Bd] \geq 0$. Logo $\mathcal{C}$ é um cone para $b = 0$.

$\Leftarrow$ Para $b \neq 0$, existe então d tal que $Bd = b$. E ainda, para todo t segue que $B[td] = t[Bd] = tb$. No entanto é sempre possível $t \geq 0$ tal que a relação $tb \geq b$ não seja satisfeita. ■

Definição 2.2. *Chamaremos um cone convexo de* cone invertível *quando sua matriz de coeficientes é invertível.*

Teorema 2.2. *Seja $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^m | Bx \geq b, b \neq 0\}$. Existe, então, uma translação $x = x' + \overline{x}$ tal que o conjunto $\mathcal{C}' = \{x \in \mathbb{R}^m | x = x' + \overline{x}, Ax \geq b\}$ é um cone.*

Prova. Tome $\overline{x} = B^{-1}b$, logo $Bx = Bx' + B\overline{x} \geq b$. Logo, temos que $Bx \geq 0$. Logo, para esta translação $\mathcal{C}' = \{x' \in \mathbb{R}^m | Bx' \geq 0\}$, que é um cone. ■

Definição 2.3. *Como é natural de se pensar, chamaremos de* cone transladado *um conjunto que satisfaça as hipóteses do teorema acima.*

Definição 2.4. *Dado um cone linear invertível, transladado ou não, chamaremos* ponta do cone *o ponto $x = B^{-1}b$.*

Uma forma mais simples de analisar o comportamento de um cone linear invertível sujeito a restrições lineares é colocado na forma $x' \geq 0$. Para tal, sendo B a matriz de coeficientes deste cone, basta tomarmos a mudança de base $x = B^{-1}x'$.

Definição 2.5. *Chamaremos de* cone identidade *um cone na forma $x \geq 0$.*

2.2 Cones de crescimento

Nesta seção, definiremos a estrutura *cone de crescimento*, também chamado de *cone de direções de subida*, o qual formará a célula básica de funcionamento do algoritmo proposto.

Definição 2.6. *Dizemos o cone $\mathcal{C}$, transladado ou não, é* cone de crescimento *em relação a função objetiva $c^T x$, se para todo $d \in \mathcal{C}$, $c^T d \geq 0$.*

Teorema 2.3. *Um cone identidade é de crescimento em relação a função $c^T x$ se, e somente se, $c \geq 0$.*

Prova. $\Rightarrow$ Em um cone identidade, temos que sempre $d \geq 0$. Logo, se $c \geq 0$, $c^T d \geq 0$ para todo d pertencente ao cone.
$\Leftarrow$ Suponha que exista uma componente i de c tal que $c_i < 0$, tomando $d_i = \delta_{ij}$, temos que $c^T d < 0$, o que contraria a definição de cone de crescimento. ■

Teorema 2.4. *Um cone convexo $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^m | Bx \geq b\}$, transladado ou não, é um cone de crescimento em relação a função objetiva $c^T x$ se, e somente se, $c^T B^{-1} \geq 0$.*

Prova. O resultado é evidente, basta tomar a mudança de base $x = B^{-1}x'$ e relacionar com o teorema anterior. ∎

3 Vendo o problema através de cones

Trataremos a partir daqui sobre o problema linear de minimização na forma canônica, problema (1), com $c \geq 0$.

Com intuito de facilitar a compreensão deste, faremos uma breve interpretação dele através de cones de crescimento.

O problema é definido por sua função objetiva, não-negatividade, e restrições lineares. Em termos de cones, poderíamos pensar no par, função objetiva e não-negatividade como sendo um cone de crescimento identidade. Se o conjunto de restrições não inviabiliza a ponta do cone de não-negatividade, este ponto, $x^* = 0$, é ótimo. Isto nos sugere buscar um cone de crescimento com ponta factível definido por um subconjunto de restrições do problema.

Os procedimentos adiante visam obter tal cone por meio de transformações lineares do problema, tentando recair em um problema equivalente de solução trivial.

4 Factibilidade e Otimalidade

Considerando um problema linear, duas questões são levantadas, factibilidade e otimalidade. Veremos para certos casos como retirar estas informações da representação do problema.

4.1 Factibilidade

A factibilidade é uma questão difícil de se avaliar prontamente. Porém, em certas circunstâncias, a verificação é imediata. Analisaremos a seguir os casos imediatos.

Teorema 4.1. *Dado problema (1), assumindo* $A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix}$, *se existir uma restrição* i *tal que* $b_i > 0$ *e* $a_i \leq 0$ *então o problema é infactível.*

Prova. A verificação deste teorema é imediata. Basta notar que $a_i^T x \leq 0 < b_i$ para todo $x \geq 0$. ∎

Definição 4.1. *Chamaremos esta ocorrência de infactibilidade explícita.*

Teorema 4.2. *O problema abordado é factível se $b \leq 0$.*

Prova. Para o ponto $x^* = 0$ teremos $Ax^* = 0 \geq b$. Além disso, o ponto também satisfaz $x \geq 0$, logo pelo menos este ponto é factível. ∎

4.2 Otimalidade

Dado um ponto, ele é ótimo se é factível e se todo ponto factível tiver valor objetivo maior ou igual ao seu. Trataremos apenas o caso em que o ponto ótimo é evidente.

Teorema 4.3. *Um problema linear de minimização na forma padrão, com o vetor de custos positivo, tem solução ótima $x^* = 0$ se este ponto for factível.*

Prova. Todo ponto factível do problema pertence ao cone de crescimento identidade definido pelo vetor de custo e a não-negatividade. Logo, se a origem é factível, todo ponto factível necessariamente tem valor objetivo maior, sendo então, $x^* = 0$ ótimo. ∎

5 Reescrevendo um problema linear através de cones

Um problema linear pode ser reescrito em outro equivalente, a fim de obtermos um que contenha claramente a informação sobre o ponto ótimo. Analisaremos, primeiramente, formas de reescrever um problema linear por meio de cones sem o intuito de buscar uma solução.

5.1 Translações

Definição 5.1. *Definimos por transladar um problema linear para um ponto $\overline{x}$ como fazer a mudança de variável $x = x' + \overline{x}$.*

Exemplificaremos, agora, este mecanismo para o problema (1). Faremos sua translação para o ponto $\overline{x}$, tomando $x = x' + \overline{x}$, temos

$$\begin{array}{rrcccl} \min & c^T x & = & c^T x' + c^T \overline{x} & & \\ \text{s.a} & Ax & = & Ax' + A\overline{x} & \geq & b \\ & x & = & x' + \overline{x} & \geq & 0, \end{array} \tag{2}$$

ou seja,

$$\begin{array}{lrcl} \min & c^T x' + c^T \overline{x} & & \\ \text{s.a} & Ax' & \geq & b - A\overline{x} \\ & x' & \geq & -\overline{x}. \end{array} \tag{3}$$

Vemos que este problema não está na forma canônica de minimização. Mostraremos, mais tarde, como fazer operações que resultam em mesmo formato. No entanto, é evidente a relação de equivalência entre o problema inicial e o transladado, bastando tomar $x = x' + \overline{x}$ para relacionar seus valores.

Podemos simplificar a representação do problema transladado ainda mais. Temos que $c^T \overline{x}$ é constante e, portanto, não influi processo de minimização, podendo, então, ser eliminado. Assim, tomando $b' = b - A\overline{x}$,

$$\begin{array}{lrcl} \min & c^T x' & & \\ \text{s.a} & Ax' & \geq & b' \\ & x' & \geq & -\overline{x}. \end{array} \tag{4}$$

5.2 Mudança de base

A mudança de base é uma outra etapa a ser utilizada no algoritmo, com objetivo de chegarmos a um problema de mesmo formato do original. A mudança de base utilizada consiste, sendo x o vetor de variáveis, em reescreveremos o problema na forma $x = B^{-1}x'$, onde B representa os coeficientes das restrições escolhidas.

Particionaremos o conjunto de restrições escolhendo uma matriz invertível B, reordenando as linhas sem perda de generalidade obtemos

$$\begin{array}{rcl} Ax & \geq & b \\ x & \geq & 0 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} Nx & \geq & b_N \\ Bx & \geq & b_B, \end{array} \tag{5}$$

Aplicando a mudança de base $x = B^{-1}x'$, temos, por fim,

$$\begin{array}{lrcl} \min & c^T B^{-1} x' & & \\ \text{s.a} & NB^{-1}x' & \geq & b_N \\ & x' & \geq & b_B \end{array} \tag{6}$$

A solução do problema na base inicial e do problema transformado seguem a relação $x = B^{-1}x'$ para todo ponto. Ainda, a informação de mudanças de base sucessivas se acumulam no locus da não-negatividade inicial, de forma que sempre é possível voltar a base original.

5.3 Reescrevendo um problema linear mantendo a forma canônica de minimização

Agora, uniremos a translação e mudança de base, de forma a reescrever o problema em um equivalente de mesmo formato. Baseado na escolha de um conjunto de restrições, faremos uma translação e mudança de base que torna o conjunto de restrições selecionado uma não-negatividade.

Dado o problema (1), escolheremos um subconjunto das restrições tal que sua matriz de coeficientes B seja invertível, podendo incluir restrições de não-negatividade. Denotaremos as restrições não escolhidas por $Nx \geq b_N$ e o conjunto escolhido por $Bx \geq b_B$. Notamos que o conjunto de restrições escolhido define um cone transladado com ponta $\overline{x} = B^{-1}b_B$. Para facilitar a análise, exibiremos o problema representado de duas formas, diferentes apenas pela ordem das linhas.

$$\begin{array}{rrcl} \min & c^T x & & \\ \text{s.a} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array} \iff \begin{array}{rrcl} \min & c^T x & & \\ \text{s.a} & Nx & \geq & b_N \\ & Bx & \geq & b_B. \end{array} \tag{7}$$

Aplicaremos a translação, $x = x' + \overline{x}$, e teremos por resultado

$$\begin{array}{rrcc} \min & c^T x' & + & c^T\overline{x} \\ \text{s.a} & Ax' & \geq & b - A\overline{x} \\ & x' & \geq & -\overline{x} \end{array} \iff \begin{array}{rrcr} \min & c^T x' & + & c^T\overline{x} \\ \text{s.a} & Nx' & \geq & b_N - N\overline{x} \\ & Bx' & \geq & 0. \end{array} \tag{8}$$

Agora, realizando a mudança de base $x' = B^{-1}x''$, temos, por fim

$$\begin{array}{rrcc} \min & c^T B^{-1}x'' & + & c^T\overline{x} \\ \text{s.a} & AB^{-1}x'' & \geq & b - A\overline{x} \\ & B^{-1}x'' & \geq & -\overline{x} \end{array} \iff \begin{array}{rrcr} \min & c^T B^{-1}x'' & + & c^T\overline{x} \\ \text{s.a} & NB^{-1}x'' & \geq & b_N - N\overline{x} \\ & x'' & \geq & 0 \end{array} \tag{9}$$

Veja que podemos ter a informação da base escolhida observando as restrições de não-negatividade iniciais. A equivalência entre valores dos problemas segue relação biunívoca $x = B^{-1}x'' + \overline{x}$. E ainda, este problema consta em seu formato original, canônico de minimização, a menos da constante $c^T\overline{x}$, que pode ser eliminada. Tomando $b' = b - A\overline{x}$ e $c'^T = c^T B^{-1}$, podemos reescrever o nosso resultado final da seguinte forma

$$\begin{array}{rrcl} \min & c'^T x'' & & \\ \text{s.a} & AB^{-1}x'' & \geq & b' \\ & B^{-1}x'' & \geq & -\overline{x}. \end{array} \tag{10}$$

Notamos que ao fazermos transformações sucessivas a mudança de base se acumulam no locus da não-negatividade inicial assim como as translações, estas, com sinal trocado mas com valores na base inicial.

5.4 Selecionando cones de crescimento transladados

Mostraremos aqui, especificamente, como selecionar cones de crescimento que tenham ponta não-negativa. Mais especificamente, abordaremos exclusivamente cones formados pelas restrições de não-negatividade, exceto uma, a qual será substituída por uma restrição qualquer do problema. Representaremos o cone transladado escolhido por $Bx \geq b_B$.

Trataremos do problema (1), com $c > 0$, denotando A por $\begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix}$.

Teorema 5.1. *Se existe $b_i > 0$, onde a_i possui pelo menos uma componente a_{ij} positiva, então, existe um cone de crescimento transladado formado por $a_i^T x \geq b_i$ e $n-1$ restrições de não-negatividade.*

Prova. A ponta de um cone linear ocorre quando obtemos a saturação de todas suas restrições, para todo par b_i e a_{ij} que satisfaça a hipótese, o ponto $\overline{x} = (b_i/a_{ij})\delta_{kj}$ satura a restrição i e $n-1$ não-negatividades. Portanto satura n restrições linearmente independentes, configurando a ponta de um cone transladado invertível. Basta, agora, demonstrar que uma destas escolhas define a ponta de um cone de crescimento.

Tendo escolhido uma restrição i onde $b_i > 0$, queremos que ocorra $c^T B^{-1} \geq 0$. Assim,

$$c^T B^{-1} = \left[(c_1 - a_{i1}\tfrac{c_j}{a_{ij}}) \dots \tfrac{c_j}{a_{ij}} \dots (c_n - a_{in}\tfrac{c_j}{a_{ij}}) \right] \geq 0. \qquad (11)$$

Logo, queremos que $c_k - a_{ik}c_j/a_{ij} \geq 0$ para todo k, assim $c_k/a_{ik} \geq c_j/a_{ij}$. Escolhendo j tal que c_j/a_{ij} seja mínimo temos a ponta de um cone de crescimento. ■

6 Algoritmos de cones

Com as ferramentas definidas até agora, já temos o suficiente para definir uma classe de algoritmos iterativos para o problema apresentado. Faremos uma definição genérica de um algoritmo iterativo usando os conceitos especificados até aqui.

6.1 Algoritmo de cones genérico

Dado um problema na forma canônica de minimização, com $c \geq 0$.

1. Verifique se o problema é factível para o ponto $x^* = 0$. Se sim, pare, ponto ótimo encontrado.

2. Verifique se o problema é explicitamente infactível. Se sim, pare.

3. Se a resposta aos itens anteriores for não, selecione um cone de crescimento transladado com ponta não-negativa.

4. Aplique as transformações lineares, conforme indicado na seção 5.3, e repita iterativamente enquanto não se verifica infactibilidade ou otimalidade.

(1) e (2) são possíveis conforme descrito na seção 4. (3) é um processo descrito ao final da subseção 5.2, aprofundaremos posteriormente em critérios de seleção para este cone. O procedimento (4) é descrito na subseção 5.3.

A resposta, ponto ótimo, se encontra a frente da não-negatividade original com sinal trocado, conforme a relação estabelecida entre problemas transformados ao final da subseção 5.3.

6.2 Exemplo

Aplicaremos o algoritmo a um problema simples

$$\begin{array}{lrcrcr}
\min & 4x_1 & + & x_2 & & \\
\text{s.a} & -x_1 & - & x_2 & \geq & 8 \\
& -x_1 & - & x_2 & \geq & -8 \\
& 2x_1 & + & x_2 & \geq & 4 \\
& x_1 & - & 2x_2 & \geq & 2 \\
& x_1 & & & \geq & 0 \\
& & & x_2 & \geq & 0.
\end{array}$$

1. Existe b_i, logo o ponto $x^* = 0$ não é factível, logo não é o ponto ótimo, podemos continuar.

2. A restrição $-x_1 - x_2 \geq 8$ é infactibilizante ao problema, e o algoritmo pararia. Assim, eliminaremos esta restrição e continuaremos em direção à demonstração. Assim, fica o problema

$$\begin{array}{lrcrcr}
\min & 4x_1 & + & x_2 & & \\
\text{s.a} & -x_1 & - & x_2 & \geq & -8 \\
& 2x_1 & + & x_2 & \geq & 4 \\
& x_1 & - & 2x_2 & \geq & 2 \\
& x_1 & & & \geq & 0 \\
& & & x_2 & \geq & 0.
\end{array}$$

3. Não definimos um critério de seleção de seleção para restrições, selecionaremos a primeira restrição com $b_i > 0$ para compor o cone conforme descrito

na subseção 5.4. Selecionamos, então, $2x_1 + x_2 \geq 4$. A ponta de mínimo valor ocorre em $\overline{x} = (0,4)^T$, pois $4/2 > 1/1$. Fica selecionado o seguinte cone de crescimento transladado

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & & & \geq & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & \geq & 4. \end{array}$$

4. Aplicando as transformações descritas em 5.3, temos uma translação para o ponto $\overline{x} = (0,4)^T$ e uma mudança da base a partir da matriz do cone:

   Translação: $b' = b - A\overline{x} = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$.

   Mudança de base: $x = B^{-1}x' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} x'$.

5. Resultado final,

$$\begin{array}{lrcrcr} \min & 2x'_1 & + & x'_2 & & \\ \text{s.a} & x'_1 & - & x'_2 & \geq & -4 \\ & & & x'_2 & \geq & 0 \\ & 5x'_1 & - & 2x'_2 & \geq & 10 \\ & x'_1 & & & \geq & 0 \\ & -2x'_1 & + & x'_2 & \geq & -4 \end{array}$$

Iterando, novamente:

1. O ponto $x* = 0$ não é factível.

2. O problema não demonstra nenhuma infactibilidade explícita.

3. Resta apenas a restrição $5x'_1 - 2x'_2 \geq 10$, tendo apenas uma ponta não-negativa, $\overline{x} = (2,0)^T$. Cone de crescimento transladado selecionado:

$$\begin{array}{rcrcr} 5x'_1 & - & 2x'_2 & \geq & 10 \\ & & x'_2 & \geq & 0. \end{array}$$

4. Translação: $b'' = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   Mudança de base: $x'' = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x'$.

5. Resultado final,

$$\begin{array}{lrcrcr}
\min & 0.4x_1'' & - & 1.8x_2'' & & \\
\text{s.a} & 0.2x_1'' & - & 0.6x_2'' & \geq & -6 \\
 & & & x_2'' & \geq & 0 \\
 & x_1' & & & \geq & 0 \\
 & 0.2x_1'' & + & 0.4x_2'' & \geq & -2 \\
 & -0.4x_1'' & + & 0.2x_2'' & \geq & 0
\end{array}$$

O resultado acima satisfaz o critério 1 da próxima iteração, sendo o ponto $x'' = 0$ ótimo. Conforme descrito na subseção 5.3, o ponto ótimo para x esta afrente da não-negatividade inicial com sinal trocado, sendo, então, $x^* = (2,0)^T$.

7 Considerações finais

O algoritmo apresentado aparentemente se difere muito do Método Simplex; não faz restrições quanto a factibilidade do ponto inicial, porém, exige que o vetor de custos seja não-negativo. É esperado que exista uma equivalência entre as duas condições por análise de dualidade.Visto que algoritmo configura um método de pontos infactíveis, a comparação com o Dual-Simplex é importante para avaliar as diferenças entre suas abordagens.

Não foi realizada nenhuma avaliação de convergência nem critérios de escolhas de restrições, o que limita muito qualquer avaliação sobre o desempenho do algoritmo. A proposição de critérios assim como um estudo computacional adicionariam muito a este trabalho.

A compreensão do problema linear por meio de cones de crescimento invertíveis, reduz muito a dificuldade de se pensar no problema, se mostrando mais simples que a análise de vértices de um poliedro. A aplicação deste conceito por meio de transformações lineares se valeu apenas de artifícios básicos de álgebra, mostrando que esta pode ser uma abordagem didática válida, principalmente para o ensino de programação linear em nível de graduação.

Referências

[1] M.S. Bazaraa, J.J. Jarvis & H.D. Sherali, *Linear Programming and Network Flows*, John Wiley, 2004.

[2] H.H. Domingues, C.A. Callioli & R.C.F. Costa, *Álgebra Linear e Aplicações*, Atual, 1990.