

## UM ESTUDO DO MODELO DE BLACK-SCHOLES DE PRECIFICAÇÃO DE DERIVATIVOS

**Autor: Roberto Henrique Heiderich**

**Orientadora: Maria Aparecida Diniz Ehrhardt**

*roberto.h@hotmail.com*

*cheti@ime.unicamp.br*

IMECC - Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica

Rua Sérgio Buarque de Holanda, 651 , 13083-859, Campinas - SP - Brasil

**Resumo.** Neste trabalho propõe-se um estudo do modelo de Black-Scholes de precificação de derivativos, com aplicação a um caso e subsequente análise de comportamentos numéricos. As soluções aproximadas foram obtidas com o uso do Método de Diferenças Finitas, com todo o procedimento implementado no ambiente **MatLab**, disponível em laboratórios do IMECC.

**Palavras-chave:** Precificação de Derivativos. Processo de Wiener. Equações Diferenciais Estocásticas. Equação de Black-Scholes. Princípio da Retrodifusão. Método de Diferenças Finitas.

## 1. INTRODUÇÃO

Mercados futuros e de opções tornaram-se extremamente importantes no mundo das finanças e dos investimentos, sendo ativamente comercializados por diferentes bolsas de valores no mundo. O objetivo aqui será explorar um pouco as propriedades dos derivativos formados (derivados) com base nesses tipos de contratos (futuro e opções), e fornecer uma base teórica de precificação de tais derivativos a partir do modelo de Black-Scholes.

### CONTRATOS FUTUROS

Um contrato futuro é o compromisso de comprar e vender determinado ativo numa data específica futura, por um preço previamente estabelecido a partir do comportamento dos preços de um ativo. Basicamente utilizados quando da realização de um *hedge*, ou seja, na tentativa de investidores protegerem-se contra oscilações bruscas de preços das mercadorias. Também atuam no mercado de derivativos especuladores visando ganhos elevados e imediatos.

### CONTRATOS DE OPÇÕES

Muito semelhantes aos contratos futuros, existindo basicamente dois tipos de opções: *call* (opções de compra) e *puts* (opções de venda). Na opção de compra, o detentor (titular ou comprador da opção) tem o direito de comprar algo em certa data por determinado preço. Na opção de venda, o detentor tem o direito de vender algo também em certa data e por determinado preço. O preço do contrato (valor futuro pelo qual o bem será negociado) é conhecido como *preço de exercício* (*exercise price*) e sua data (o dia em que a posição será exercida) é conhecida como *data de vencimento*.

Deve-se enfatizar que o detentor de um direito não precisa, necessariamente, exercê-lo. Esse fato diferencia os contratos futuros dos de opção, pois o comprador de um contrato futuro assume o compromisso de comprar um bem por determinado preço numa data futura. Não há custos na efetivação de um contrato futuro, todavia, um investidor deve pagar um preço antecipado por um contrato de opções.

### DERIVATIVOS

Os contratos futuros e de opções são exemplos de derivativos ou produtos derivativos, que podem ser definidos como títulos cujos valores dependem de outras variáveis mais básicas. Uma opção da ação PETROBRAS, por exemplo, é um derivativo, porque seu valor depende do preço da ação PETROBRAS; um contrato futuro de soja também é um derivativo, pois seu valor depende do preço da soja; e assim por diante.

## 2. PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Variáveis cujo valor mudam no tempo de forma não prevista segue o que se convenção chamar de processo estocástico. Esta seção e a próxima baseiam-se na seqüência teórica exposta em Hull (1993) e em Prudente (2009).

### A PROPRIEDADE DE MARKOV

**Processo de Markov:** um tipo particular de processo estocástico em que somente o valor presente de uma variável é relevante para prever seu valor futuro. São irrelevantes o passado histórico da variável ou mesmo a maneira como o presente emerge do passado.

Usualmente se assume que evolução nos preços de ações obedece a um processo de Markov<sup>1</sup>, com previsões do futuro somente feitas em termos de distribuição de probabilidade. A propriedade de Markov implica que essa distribuição de probabilidade do preço, num tempo futuro qualquer, dependerá, unicamente, do preço presente.

Essa propriedade é consistente com a *forma fraca da eficiência de mercado* (o preço presente de uma ação encerra toda a informação contida num registro de preços passados). Se a forma fraca da eficiência de mercado não fosse verdadeira, decisões poderiam garantir ganhos acima da média somente a partir da análise de tendências do comportamento histórico de preços passados, que eventualmente se repetissem no presente. O que não é possível, pois, num mercado eficiente, supõe-se a atuação de grande número de investidores, que, se observassem tal tendência, atuariam no sentido de obter vantagem em suas posições, mas a atuação desses investidores, tão instantânea quanto o padrão fosse observado, eliminaria, imediatamente, tal efeito.

## 2.1 Processo de Wiener

Modelos que descrevem o comportamento de ações são usualmente expressos em termos do que se conhece como processo de Wiener, um tipo particular de processo estocástico de Markov. Usado na física para descrever o movimento de partículas sujeitas a um grande número de choques moleculares e algumas vezes referido como Movimento Browniano.

O comportamento de uma variável  $z$ , a qual segue um processo de Wiener, pode ser entendido considerando-se pequenas mudanças  $\Delta z$  nos seus valores em pequenos intervalos de tempo  $\Delta t$ .

Há duas propriedades básicas que deve apresentar  $\Delta z$  para que  $z$  siga um tal processo:

### Propriedade 1

$$\Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t}, \quad (1)$$

com  $\varepsilon$  uma variável randômica (*random drawing*), ou seja,  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ , uma distribuição normal padrão;

### Propriedade 2

*Os valores de  $\Delta z$  para cada dois distintos intervalos de tempo  $\Delta t$  são independentes.*

Da *propriedade 1*:  $E[\Delta z] = 0$ , pois  $E[\varepsilon] = 0$ ;  $Var(\Delta z) = \Delta t$ , pois, novamente,  $E[\varepsilon] = 0$ ;  $\sigma(\Delta z) = \sqrt{\Delta t}$ . Conclusões que decorrem de propriedades estatísticas conhe-

<sup>1</sup>Propriedades estatísticas como volatilidade da ação será útil, no entanto, não o será, por exemplo, tendências comportamentais seguidas pelo preço histórico de tais ações.

cidas<sup>2</sup>.

Da *propriedade 2*:  $z$  segue um processo de Markov.

Considerando agora um incremento em  $z$  durante um relativamente longo período de tempo  $T$  ( $z(T) - z(0)$ ), e tomando  $N \frac{T}{\Delta t}$ , teremos:

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}, \quad (2)$$

com  $\varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, N$ , variáveis randômicas com  $\varepsilon_i \sim N(0, 1)$ .

Da *propriedade 2* decorre que os  $\varepsilon_i$ 's são independentes dois a dois. Assim, da Equação (2) temos  $z(T) - z(0) \sim N(0, N\Delta t = T)$ , ou seja,  $E[z(T) - z(0)] = 0$ ,  $Var(z(T) - z(0)) = N\Delta t = T$ ,  $\sigma(z(T) - z(0)) = \sqrt{T}$ . Conclusões que decorrem de propriedades estatísticas conhecidas<sup>3</sup>.

Há coerência em obtermos um desvio padrão crescente em relação a  $T$ , pois é o desvio padrão quem mensura a incerteza de quanto será o valor da variável num tempo  $T$ , e, evidentemente, quanto maior for  $T$ , maior será essa incerteza. Fica claro também o porquê de definirmos  $\Delta z$  como o produto de  $\varepsilon$  e  $\sqrt{\Delta t}$ , pois é a variância, e não o desvio padrão, aditiva para distribuições normais independentes, ou seja, a variância da soma será a soma das variâncias. Assim procedendo, surge uma informação que depende apenas linearmente do tempo. Note que o mesmo não seria possível ao considerarmos uma definição de  $\Delta z$  como um produto de  $\varepsilon$  e  $\Delta t$ .

O processo de Wiener é o limite com  $\Delta t \rightarrow 0$  do processo descrito acima para  $z$ . A Figura 1 ilustra o comportamento de  $z$  quando tomamos o limite  $\Delta t \rightarrow 0$ . O caso limite da equação Equação (1), será dado por:

$$dz = \varepsilon \sqrt{dt},$$

representando a adoção do cálculo infinitesimal.

---

<sup>2</sup>Tomando-se duas variáveis aleatórias independentes  $X$  e  $Y$  e uma constante  $\alpha$ , temos:

$$\begin{aligned} E[g(X)h(Y)] &= E[g(X)]E[h(Y)] \\ Var(\alpha X) &= \alpha^2 Var(X) = \alpha^2 E[(X - E[X])^2] \\ \sigma(X) &= \sqrt{Var(X)} \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Tomando-se duas variáveis aleatórias independentes  $X$  e  $Y$ , temos:

$$\begin{aligned} Var\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) &= \sum_{i=1}^N Var(X_i) + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} Cov(X_i, X_j) \\ Cov(X, Y) &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \end{aligned}$$

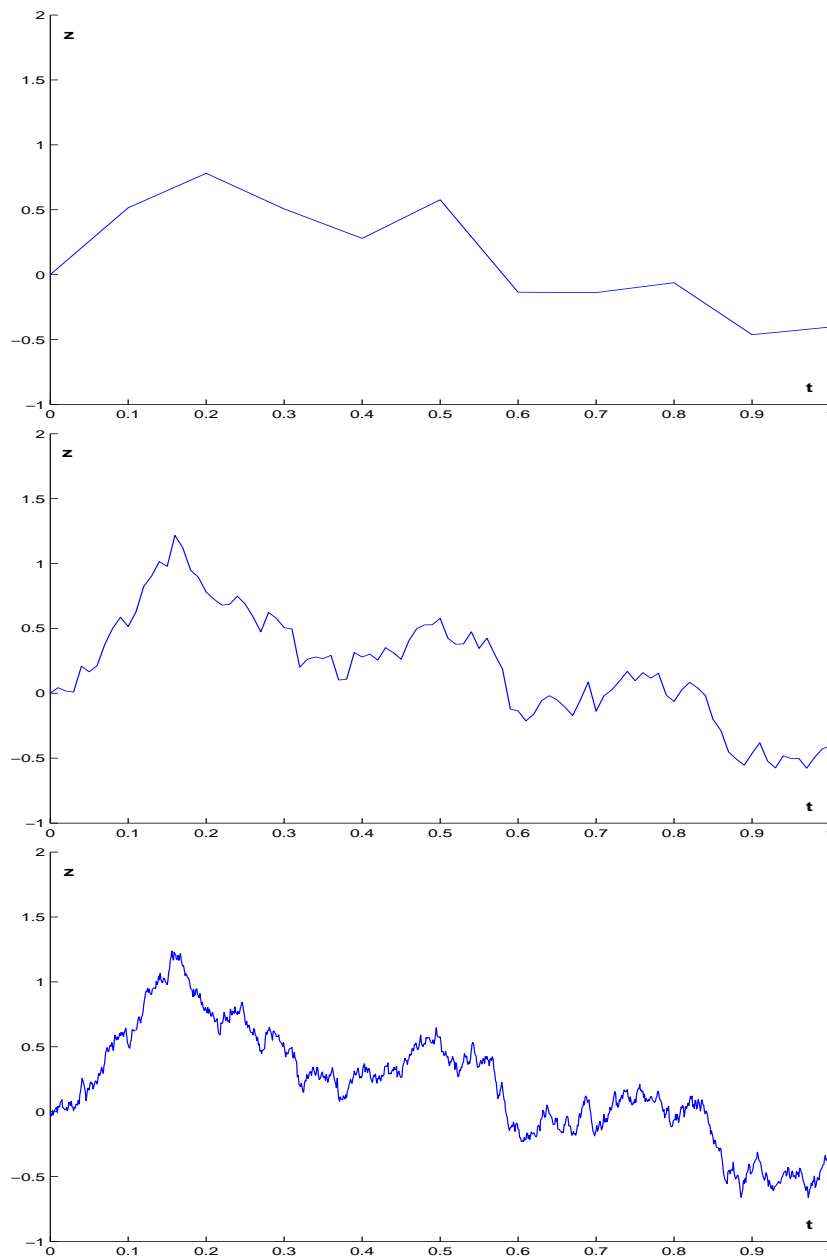


Figura 1: Ilustra como se obtém o Pocesso de Weiner com  $\Delta t \rightarrow 0$  na Equação (1).

As figuras acima, e a que se apresenta na subsecção 2.2 abaixo, foram obtidas com o pequeno programa que segue, com implementação em **MatLab**.

```
%arquivo wp.m
T=1;
DeltaT=0.001;
a=1;
Deltaz=0;
n=10^3;
VDeltaT=[0:DeltaT:T];
Vz=zeros(1,n+1);
eps=randn(1,n+1);
sqrtDeltaT=sqrt(DeltaT);
for j=2:1:n+1
```

```

    Deltaz=eps(j)*sqrtDeltaT;
    Vz(1,j)=Vz(j-1)+Deltaz;
end

figure(1)
hold on axis([0 1 -1 2])
plot(VDeltaT(1:100:1001),Vz(1:100:1001))

figure(2)
hold on axis([0 1 -1 2])
plot(VDeltaT(1:10:1001),Vz(1:10:1001))

figure(3)
hold on axis([0 1 -1 2])
plot(VDeltaT,Vz)

figure(4)
hold on axis([0 1 -1 2])

for j=2:1:n+1
    Vz(1,j)=Vz(j-1)+a*DeltaT;
end

plot(VDeltaT,Vz)

for j=2:1:n+1
    Deltaz=eps(j)*sqrtDeltaT;
    Vz(1,j)=Vz(j-1)+Deltaz;
end

plot(VDeltaT,Vz,'m')

for j=2:1:n+1
    Deltaz=eps(j)*sqrtDeltaT;
    Vz(1,j)=Vz(j-1)+a*DeltaT+Deltaz;
end

plot(VDeltaT,Vz,'g')

hold off

clear all

```

## 2.2 Processo de Wiener Generalizado

Notemos pela Figura 1 que  $z$  oscila próximo de zero. Tal fato decorre de que a média de mudança de  $dz$  (conhecida em processos estocásticos como parâmetro de deriva) tomada na unidade de tempo, será zero em um tal processo. Isso significa dizer que o valor esperado para  $z$  em qualquer tempo futuro é igual ao valor atual. Aos nossos propósitos interessará uma generalização do processo de Wiener, que para uma variável  $x$  pode ser definido em termos de  $dz$  como segue:

$$dx = a dt + b dz, \quad (3)$$

em que  $a$  e  $b$  são constantes.

Para entender a Equação (3), é conveniente considerarmos os dois termos do lado direito da igualdade, separadamente. O termo  $a dt$  implica que  $x$  tem uma taxa de deriva constante  $a$  por unidade de tempo. Sem o termo  $b dz$ , a Equação (3) torna-se

$$dx = a dt,$$

o que implicará

$$\frac{dx}{dt} = a,$$

ou

$$x = x_0 + a t,$$

onde  $x_0$  é o valor de  $x$  no tempo zero. No intervalo de tempo  $T$ ,  $x$  cresce uma quantidade  $a T$ . O termo  $dz$ , representando um processo de Wiener, ficará responsável pela incerteza na mudança na variável  $x$ , ou, de outra forma, por um ruído adicionado, ou variabilidade no caminho seguido por  $x$ . A quantidade do ruído ou variabilidade adicionada é dada pelo produto de  $b$  pelo processo de Wiener. Das Equações (1) e (3), considerando um pequeno intervalo de tempo  $\Delta t$ , uma mudança  $\Delta x$  em  $x$  será dada por

$$\Delta x = a \Delta t + b \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

Podemos, de forma similar ao que fizemos para a Equação (2), concluir que uma mudança no valor de  $x$ , em um intervalo de tempo  $T$ , é normalmente distribuída com

$$\begin{aligned} \text{média de uma variação em } x &= a T \\ \text{variância de uma variação em } x &= b^2 T \\ \text{desvio padrão de uma variação em } x &= b \sqrt{T} \end{aligned}$$

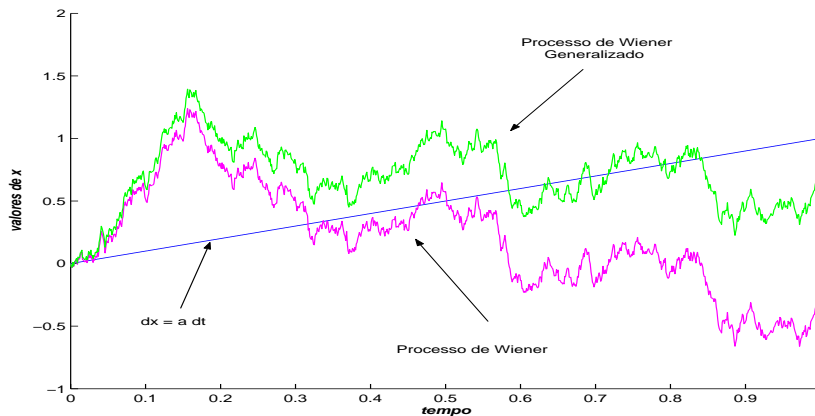


Figura 2: O Pocesso de Weiner generalizado com  $a = b = 1.0$

### 2.3 Processo de Itô ou Movimento Browniano Generalizado

Podemos permitir que os parâmetros  $a$  e  $b$  no Processo de Wiener Generalizado variem em função dos valores de  $x$  e  $t$ . Fazendo isso a variável  $x$  seguirá um processo de Itô descrito pela equação

$$dx = a(x, t) dt + b(x, t) dz \tag{4}$$

## 2.4 Movimento Browniano Geométrico

Não é razoável supormos, dentro de nossa pretensão de construirmos um modelo para o movimento de preço de ativos perfeitamente divisíveis, ou seja, o investidor pode comprar qualquer fração de um ativo (a compra de ativos de menor preço não lhe garante menor risco), que o retorno esperado por um investidor dependa do preço do ativo,  $a = a(x, t)$ . Mais razoável é supormos que o retorno percentual esperado por um investidor seja constante. Razoável também supormos que esse mesmo investidor possua a mesma incerteza quanto ao retorno desse percentual quando o ativo estiver valendo 10 ou 100 unidades monetárias.

Feitas essas considerações, melhor assumirmos que o preço dos ativos sigam um Movimento Browniano Geométrico, que aparece como caso particular aos processos de Itô, no qual  $a(x, t) = \mu x$  e  $b(x, t) = \sigma x$ , com  $\mu$  e  $\sigma$  constantes, ficando a Equação (4) na forma

$$dx = \mu x dt + \sigma x dz \quad (5)$$

Sim, pois, considerando que a variável  $x$  não assume o valor nulo, podemos dividir ambos os lados da Equação (5) por  $x$ , daí resultando:

$$\frac{dx}{x} = \mu dt + \sigma dz,$$

que para um pequeno intervalo de tempo  $\Delta t$ , e definindo como  $S$  o preço do ativo no tempo  $t$ , fornece o modelo:

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t},$$

ou seja,  $\frac{\Delta S}{S} \sim N(\mu \Delta t, \sigma \sqrt{\Delta t})$ , comportamento válido pelo menos em um intervalo de tempo muito pequeno. Nesse momento podemos dar uma interpretação às constantes  $\mu$  e  $\sigma$ . A primeira representa a taxa esperada de retorno do preço do ativo, e a segunda, sua volatilidade.

## 3. A EQUAÇÃO DE BLACK-SCHOLES

### 3.1 Equações Diferenciais Estocásticas e o Lema de Itô

Agora, desenvolveremos uma argumentação informal para justificar o lema de Itô. Lembrando que um processo de Itô  $x(t)$  satisfaz a uma equação diferencial estocástica do tipo dado pela Equação (4), que, com o uso da notação usada na subseção 2.2, pode ser discretizada a

$$\Delta x = a(x, t) \Delta t + b(x, t) \varepsilon \sqrt{\Delta t}, \quad (6)$$



com  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ . Nosso objetivo será obter uma equação diferencial estocástica para uma função  $F(x, t)$  de  $x(t)$ . Iniciamos com a fórmula da derivada de uma função  $G(x, y)$  qualquer de duas variáveis dada por

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy,$$

obtida a partir da fórmula de Taylor

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial G}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} (\Delta y)^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \dots,$$

com  $\Delta x \rightarrow 0$ . Aplicaremos esta expansão de Taylor à função  $F(x, t)$ , limitando-nos aos termos significativos de primeira ordem, dando uma atenção especial ao termo  $\sqrt{\Delta t}$ , na Equação (6), quando elevado ao quadrado. O quadrado desse termo fornecerá

$$(\Delta x)^2 = b^2 \varepsilon^2 \Delta t,$$

se desconsiderados os termos não significativos de ordem dois ou maior (procedimento possível, pois assumiremos  $b$  relativamente pequeno na unidade de tempo considerada). Mostraremos que  $(\Delta x)^2$  não pode ser negligenciado numa tal aproximação, por tratar-se de termo significativo, na verdade. Outro aspecto relevante decorre do fato de que o termo  $\varepsilon^2 \Delta t$  poderá ser tratado como termo não estocástico, igual ao seu valor esperado<sup>4</sup>, quando  $\Delta x \rightarrow 0$ . Mas sendo  $\varepsilon$  uma variável normal padrão, isso implicará  $E[\varepsilon^2] = 1$  e, assim,  $E[\varepsilon^2 \Delta t] = \Delta t$ . Portanto, na expansão de Taylor

$$(\Delta x)^2 \rightarrow b^2 \Delta t$$

Assim, numa expansão de Taylor de  $F(x, t)$ , tomando ambos,  $\Delta x$  e  $\Delta t$  tendendo a zero, teremos

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} b^2 dt,$$

a qual, substituindo-se por  $dx$  dado pela Equação (4), torna-se

$$dF = \left( a \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) dt + b \frac{\partial F}{\partial x} dz \quad (7)$$

Este será um resultado importante na obtenção do modelo de Black-Scholes.

<sup>4</sup>Uma demonstração de tal fato pode ser encontrada em Braumann (2005).

### 3.2 Obtendo a Equação Diferencial de Black-Scholes

Obteremos agora a equação diferencial de Black-Scholes<sup>5</sup>, admitindo que o preço  $S$  do ativo respeite às premissas abaixo.

#### PREMISSAS DE BLACK-SCHOLES

1. o comportamento do preço da ação corresponde ao modelo lognormal. Equivale a dizer que o preço do ativo segue um Movimento Browniano Geométrico, mostrando coerência do modelo, que não permite que se atribua valores negativos ao preço do ativo;
2. não há custos operacionais nem impostos. Tal suposição simplifica o modelo, evitando termos adicionais na equação diferencial, e permitindo, a partir de certas condições de contorno, uma solução analítica;
3. Todos os títulos são perfeitamente divisíveis. Permite a construção do modelo contínuo no preço do ativo;
4. a ação não receberá dividendos durante a vida da opção. Também simplifica a equação diferencial;
5. não há oportunidades de arbitragem de risco. Todos os participantes no mercado sujeitos à mesma taxa de juros livre de risco;
6. a negociação com títulos é contínua. Permite a construção do modelo contínuo no tempo;
7. os investidores podem tomar emprestado ou emprestar à mesma taxa de juro livre de risco;
8. a taxa de juro livre de risco de curto prazo,  $r$ , é constante.

Ou seja, assumindo que  $S$  siga o processo dado pela Equação (5), e que  $f$  seja o preço do derivativo contingenciado sobre  $S$ . Segue da Equação (7),

$$\begin{aligned} df &= \left( \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} dt \end{aligned} \quad (8)$$

---

<sup>5</sup>Uma alternativa muito interessante de derivação da equação de Black-Scholes encontra-se em <http://www.ime.unicamp.br/~martinez/topicospo/blackscholes.pdf>. Nela o autor obtém a equação a partir do Princípio da Retrodifusão (o preço de um derivativo no dia  $t + 1$  deve ser "na média" igual ao preço real no dia  $t$ ). Na abordagem feita pelo autor, uma importante hipótese está em escolher o preço do ativo no tempo  $t + 1$  obedecendo a uma distribuição de probabilidade com medida de dispersão implícita proporcional ao preço do ativo. O fato de ser a dispersão uma medida implícita, corresponde bem às hipóteses do modelo de Black-Scholes, onde análise de comportamentos passados não são possíveis já que admitimos a hipótese de um mercado eficiente.

Esta é uma equação diferencial estocástica. que pode ser simplificada, explorando a hipótese de não arbitragem, ou, de outra forma, escolhendo um *portfolio*<sup>6</sup> adequado, transformando-se numa equação diferencial determinística (eliminando-se o processo de Wiener), mais adequada a soluções por métodos numéricos. Em alguns casos, a depender das condições de contorno, mesmo serem resolvidas analiticamente.

Consideremos um *portfolio* composto de uma posição curta<sup>7</sup> numa opção e uma posição longa (fixa durante um intervalo diferencial de tempo) definida sobre um certo número, digamos  $\Delta$ , de ativos subjacentes a essa opção. O valor<sup>8</sup> desse *portfolio* será

$$\Pi = f(S, t) - \Delta S$$

Diferenciando  $\Pi$  e usando a Equação (8), teremos

$$d\Pi = df - \Delta dS = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt + \left( \frac{\partial f}{\partial S} - \Delta \right) dS \quad (9)$$

Podemos eliminar o termo em  $dS$  escolhendo um *portfolio* tal que

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}$$

Com esta escolha de  $\Delta$  o incremento de  $d\Pi$  fica totalmente determinístico, ou seja, nosso *portfolio* será livre de risco. Na prática, ao fazermos essa combinação de opções e ativos subjacentes numa mesma carteira, apenas reduzimos o risco associado ao comportamento aleatório do ativo. Assim, sobre a hipótese de não arbitragem devemos ter

$$d\Pi = r \Pi dt, \quad (10)$$

ou seja, sobre a hipótese de não arbitragem, o retorno de  $d\Pi$ , no fim do tempo  $dt$  (um lucro instantâneo), deve ser baseado na taxa de juros livre de risco. Se  $d\Pi$  for maior que esse valor, uma oportunidade de arbitragem surge ao tomarmos  $\Pi$  emprestado, à taxa de juros livre de risco, e comprarmos o *portfolio*. Caso  $d\Pi$  for menor que esse valor, um ganho sem risco pode ser obtido ao vender o *portfolio* a descoberto e emprestar o dinheiro à taxa de juros livre de risco (representa a compra de uma opção livre de risco). Os dois casos representando um lucro instantâneo *sem custo (de transação)* e sem qualquer risco

Eliminando  $d\Pi$  entre as Equações (9) e (10), obtemos

<sup>6</sup>Porta-fólio, única expressão presente no dicionário Aurélio, seria a mais indicada se se busca uma identidade nacional ao termo. O verbete em inglês é o usado pela Bovespa.

<sup>7</sup>Quem adquire uma opção assume uma posição longa (*long position*). Quem vende assume uma posição curta (*short position*).

<sup>8</sup>A escolha da correta composição da carteira representará uma forma de se impedir perdas (reduzi-las, em um mercado real) a partir de posições vendidas e compradas que a compõem. Se previsível a perda com ativos  $S$ , bastaria vendê-los todos preventivamente.

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt = r \left( f - S \frac{\partial f}{\partial S} \right) dt,$$

e, finalmente,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + r S \frac{\partial f}{\partial S} - r f = 0 \quad (11)$$

A Equação (11) é a equação diferencial de Black-Scholes, que, surpreendentemente, não depende da taxa de variação média do ativo subjacente.

#### 4. RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE BLACK-SCHOLES

A hipótese de volatilidade constante, como um parâmetro intrínscio ao ativo, não é considerada razoável. Sabe-se, do comportamento do mercado de ações, sujeitos a momentos de intensa instabilidade, que o preço de ativos não variam da mesma forma ao longo do tempo. Então, melhor supor  $\sigma = \sigma(S, t)$  continuamente diferenciável no tempo e no preço do ativo. Dessa hipótese, temos a Equação de Black-Scholes Generalizada

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} (\sigma(S, t))^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + r S \frac{\partial f}{\partial S} - r f = 0$$

Esta é uma equação que não possui solução analítica conhecida, independente das condições de contorno adotadas. Então, resolvê-la, apenas numericamente, e após discretizada por método apropriado.

A equação que reflete o Princípio da Retrodifusão parece-nos ser a forma mais adequada à resolução numérica da Equação de Black-Scholes Generalizada. Representa esse princípio, de fato, a formulação discreta do problema de precificação de derivativos, e nos indica, de forma correta, os necessários avanços e recuos sobre a malha que discretizará o espaço de definição de  $f$ .

As seguintes hipóteses serão adotadas: (i) considera-se como sendo conhecido *a priori* o que podemos chamar agora de superfície de volatilidade ( $\sigma$  como função de duas variáveis)<sup>9</sup>; (ii) as condições de contorno para o problema serão as de uma opção *call* européia para o modelo contínuo com volatilidade constante<sup>10</sup>, adequadamente relaxadas, ou, de outra forma, adaptadas ao problema discreto.

As condições de contorno de uma opção *call* européia são

$$\left\{ \begin{array}{l} f(S, T) = \max\{S - K, 0\}, 0 < S < \infty; \\ f(0, t) = 0, 0 \leq t \leq T; \\ \lim_{S \rightarrow \infty} f(S, t) - S = 0, 0 \leq t \leq T \end{array} \right.$$

<sup>9</sup>Uma abordagem muito interessante de como se obter a superfície de volatilidade pode ser encontrada em Prudente (2009).

<sup>10</sup>As soluções analíticas para opções *call* e *put* européias estão previamente implementadas no **MatLab**. A função é `[Call, Put]=blsprice(S, K, r, T, sigma)`

A primeira condição vem da definição da opção, sendo razoável supormos que em  $T$ , tempo de maturação (*strike*) do ativo, a opção será exercida com preço  $S - K$  ( $K$  é o *strike price*, ou preço do ativo base na data de hoje), caso contrário a opção não será exercida, tendo preço nulo. Este contrato é "equivalente" a oferecermos uma opção de compra de um ativo de  $K$  unidades monetárias no momento  $T$ . Tanto faz pagarmos ao portador da opção  $S - K$  unidades monetárias como vender o ativo subjacente por  $K$  unidades monetárias, já que o portador vai ao mercado, vende o ativo e obtém a diferença. As duas outras condições decorrem da hipótese de termos o preço do ativo seguindo um Movimento Browniano Geométrico, ou, de outra forma, de considerarmos no modelo a hipótese de não arbitragem<sup>11</sup>. Se  $S = 0$  para algum  $t < T$ , será também nula em  $T$ , e a opção novamente não será exercida, obtendo a segunda condição. Agora, permitindo  $S \gg K$  para  $t < T$ , então, com grande probabilidade teremos o mesmo  $S \gg K$  para  $t = T$ , e a opção será exercida ao preço  $S - K \approx S$ , obtendo a terceira condição.

Adaptando as condições acima à discretização, definimos um preço máximo  $S_{\max}$ , tratando as duas primeiras condições no domínio  $[0, S_{\max}] \times [0, T]$ , com  $t = 0$  denotando a data de hoje, e relaxando a última condição, já que impossível uma representação numérica de  $S \rightarrow \infty$ . Portanto, as condições modificadas ficam como seguem

$$\begin{cases} f(S, T) = \max\{S - K, 0\}, 0 < S < S_{\max}; \\ f(0, t) = 0, 0 \leq t \leq T; \\ f(S_{\max}, t) = S_{\max} - Ke^{-r(T-t)}, 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Seguimos agora com a discretização do modelo. O Princípio da Retrodifusão fica

$$(1 + r) f\left(\frac{S}{1 + r}, t\right) = \frac{f(S - \sigma(S, t) S, t + 1) + f(S + \sigma(S, t) S, t + 1)}{2}$$

Tomando a aproximação  $\frac{1}{1 + r} \approx 1 - r$ , decorrente de supormos a taxa de juros livre de risco relativamente pequena na unidade de tempo considerada, de forma semelhante ao que fizemos para a volatilidade na subseção 3.1, e subtraindo  $f(S, t + 1)$  de ambos os lados da equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{f(S - \sigma(S, t) S, t + 1) - 2f(S, t + 1) + f(S + \sigma(S, t) S, t + 1)}{2} = \\ & = (1 + r) f(S - rS, t) - f(S, t + 1) \end{aligned}$$

Com  $\sigma$  e  $r$  suficientemente pequenos, efetuamos as aproximações

<sup>11</sup>Se em um determinado tempo  $T$  sabemos ser um *portfolio*  $B$  tão valioso quanto um *portfolio*  $A$ , ou seja,  $V_B(T) \geq V_A(T)$ , devemos ter  $V_B(t) \geq V_A(t)$  para qualquer  $t < T$  Uma demonstração deste fato encontra-se em Prudente (2009).

$$f(S - \sigma(S, t) S, t+1) - 2f(S, t+1) + f(S + \sigma(S, t) S, t+1) \approx \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(S, t+1) (\sigma(S, t))^2 S^2$$

e

$$f(S - rS, t) \approx f(S, t) - \frac{\partial f}{\partial S}(S, t) r S,$$

obtendo

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(S, t+1) (\sigma(S, t))^2 S^2 = (1+r) \left[ f(S, t) - \frac{\partial f}{\partial S}(S, t) r S \right] - f(S, t+1)$$

Do produto no lado direito da igualdade acima surge outro termo em  $r^2$ , novamente desprezado, assim

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(S, t+1) (\sigma(S, t))^2 S^2 = f(S, t) - f(S, t+1) + r f(S, t) - \frac{\partial f}{\partial S}(S, t) r S \quad (12)$$

Na malha, escolhemos  $S_{\max}$  e inteiros  $M > 0$  e  $p$  tais que  $p \frac{S_{\max}}{M} = K$ , e definimos  $h = \frac{S_{\max}}{M}$  o passo no eixo dos preços  $S$ . Os pontos da malha serão, então,  $(S_i, t_j)$ ,  $S_i = i \cdot h$  para  $i = 0, 1, \dots, M$ , e  $t_j = j$  para  $j = 0, 1, \dots, T$ .

Pelo Método de Diferenças Finitas temos as aproximações

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(S_i, t_j + 1) &\approx \frac{f(S_i - h, t_j + 1) - 2f(S_i, t_j + 1) + f(S_i + h, t_j + 1)}{h^2} \\ &= \frac{f(S_{i-1}, t_{j+1}) - 2f(S_i, t_{j+1}) + f(S_{i+1}, t_{j+1})}{h^2}, \end{aligned} \quad (13)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial S}(S_i, t_j) &\approx \frac{f(S_i + h, t_j) - f(S_i - h, t_j)}{2h} \\ &= \frac{f(S_{i+1}, t_j) - f(S_{i-1}, t_j)}{2h} \end{aligned} \quad (14)$$

Assim, da Equação (12), definida sobre os pontos da malha, com as aproximações dadas pelas Equações (13) e (14), e após um pequeno rearranjo, resulta

$$\begin{aligned} (1+r)f(S_i, t_j) - \alpha_i [f(S_{i+1}, t_j) - f(S_{i-1}, t_j)] &= \\ = (1 - 2\beta_{ij})f(S_i, t_{j+1}) + \beta_{ij} [f(S_{i-1}, t_{j+1}) + f(S_{i+1}, t_{j+1})], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{com } \alpha_i = \frac{rS_i}{2h} \text{ e } \beta_{ij} = \frac{(\sigma(S_i, t_j))^2 S_i^2}{2h^2}.$$

Numa iteração  $n = T - j$ ,  $1 \leq n \leq T$ , pela Equação (15), determinamos os valores da opção nos pontos  $f(S_i, t_j)$ ,  $i = 1, 2, \dots, M - 1$ .

Na forma matricial, temos

$$A f^j = B^j f^{j+1} + c^j,$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1+r & -\alpha_1 & & & & \\ \alpha_2 & 1+r & -\alpha_2 & & & \\ & \alpha_3 & 1+r & -\alpha_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha_{M-2} & 1+r & -\alpha_{M-2} \\ & & & \alpha_{M-1} & 1+r & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(S_1, t_j) \\ f(S_2, t_j) \\ f(S_3, t_j) \\ \vdots \\ f(S_{M-2}, t_j) \\ f(S_{M-1}, t_j) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1-2\beta_{1j} & \beta_{1j} & & & & \\ \beta_{2j} & 1-2\beta_{2j} & \beta_{2j} & & & \\ & \beta_{3j} & 1-2\beta_{3j} & \beta_{3j} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \beta_{M-2,j} & 1-2\beta_{M-2,j} & \beta_{M-2,j} \\ & & & & \beta_{M-1,j} & 1-2\beta_{M-1,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(S_1, t_{j+1}) \\ f(S_2, t_{j+1}) \\ f(S_3, t_{j+1}) \\ \vdots \\ f(S_{M-2}, t_{j+1}) \\ f(S_{M-1}, t_{j+1}) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_{M-1,j} f(S_M, t_{j+1}) + \alpha_{M-1} f(S_M, t_j) \end{bmatrix}$$

O vetor  $c^j$  decorre da terceira condição de contorno modificada. O vetor  $f^j$  contém as incógnitas a serem determinadas na  $n$ -ésima iteração, e o vetor  $f^{j+1}$  os valores determinados na iteração anterior,  $n - 1$ . Note que o procedimento representa uma determinação retroativa de valores, daí a denominada “retrodifusão” do princípio anteriormente exposto.  $A$  é matriz constante em todas as iterações, pois  $\alpha_i$  independe do tempo. A solução, computacionalmente barata, será dada pela resolução de um sistema linear  $(M - 1) \times (M - 1)$  tridiagonal.

## 5. RESULTADOS, ANÁLISES E DISCUSSÕES

Simularemos, para diferentes períodos, os preços de opções européias de compra de um ativo. Adotaremos para o preço  $K$  do ativo base hoje o valor de 100 unidades monetárias. A taxa de juros livre de risco será de 1%, e volatilidade de 2% considerada sobre todos os pontos da malha (volatilidade constante).

A solução analítica, usando a função `blsprice` do **MatLab**, nos dá 59.3430 unidades monetárias, para um contrato de opção de compra de 90 dias para um ativo base de 100

unidades monetárias. Já o programa baseado no *Princípio da Retrodifusão* nos dá o valor de 59.2029 unidades monetárias para uma mesma opção. Ou seja, um erro relativo de 0.2361%, indicando ser ótimo o método de aproximação numérica.

O gráfico a seguir mostra os preços da opção tendo por base diferentes preços ( $0 \leq S \leq S_{\max}$ ) do ativo base.

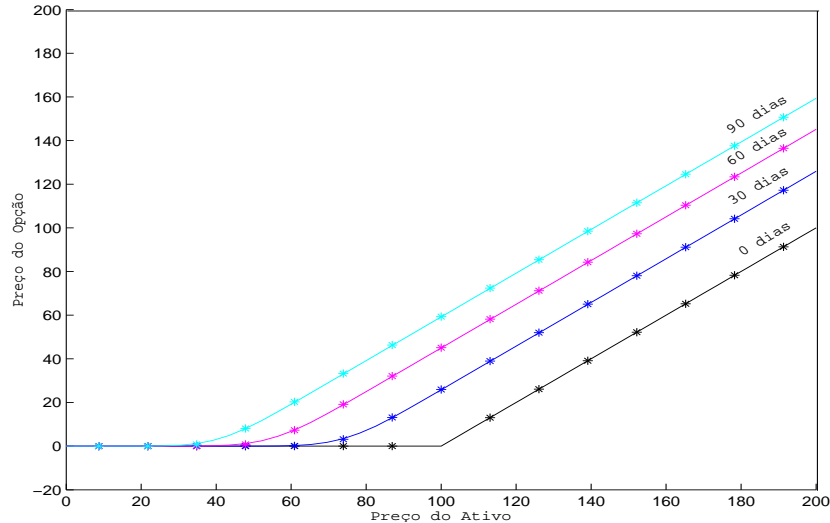


Figura 3: Preço da opção *call* europeia versus preço do ativo, para daqui a 0, 30, 60, e 90 dias. Os asteriscos (\*) representam os valores analíticos calculados em alguns pontos na malha.

Observação pertinente diz respeito aos valores de taxa de juros livre de risco e volatilidade, que devem, necessariamente, ser pequenos. Algo em torno de 0% e 5%, caso contrário, haverá instabilidades no método, que fornecerá soluções significativamente erradas. Tal fato comprova as imposições às aproximações feitas no processo de discretização da equação de Black-Scholes.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Princípio da Retrodifusão, na forma como neste trabalho se apresentou, compreende, sem dúvida, um grande *insight* do autor que primeiro o sugeriu (veja nota de rodapé na pg.10), além, é claro, de ser bastante preciso na resolução da Equação de Black-Scholes.

Como trabalho futuro, penso que seria interessante um estudo mais aprofundado dos processos estocástico que subjazem ao modelo de Black-Scholes.



## Referências

- Brandimarte, P., 2002. *Numerical Methods in Finance*. John Wiley & Sons, Inc.
- Braumann, C. A., 2005. *Introdução às Equações Diferenciais Estocásticas e aplicações*. Ericeira: Sociedade Portuguesa de Estatística.
- Hull, J. C., 1993. *Options, Futures, and other Derivative Securities*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Prudente, L. F, 2009. *Estimação da superfície de volatilidade dos ativos através da Equação de Black-Scholes Generalizada*. Dissertação de Mestrado, IMECC – UNICAMP, Campinas/SP.