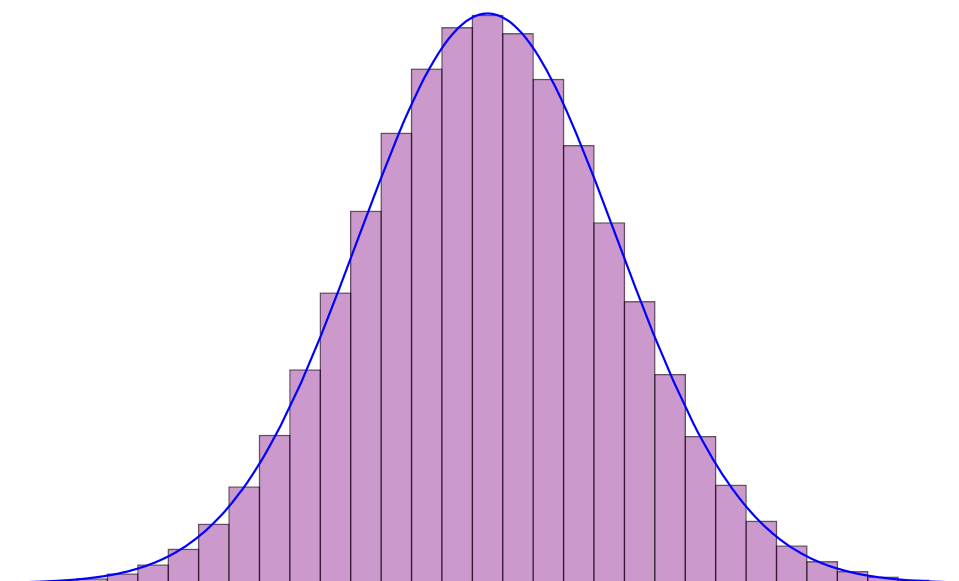


Exercícios de Probabilidade

Élcio Lebensztayn



Sumário

Prefácio	iii
Capítulo 1: Análise Combinatória	1
Exercícios.	3
Respostas.	15
Capítulo 2: Probabilidade	19
1. Definições e propriedades	19
2. Probabilidade condicional e independência	22
3. Conjuntos limites e continuidade da probabilidade.	24
Exercícios.	26
Respostas.	41
Capítulo 3: Variáveis aleatórias	45
1. Definições	45
2. Variáveis aleatórias conjuntamente distribuídas	47
3. Independência de variáveis aleatórias	48
4. Modelos de distribuições discretas.	49
5. Modelos de distribuições contínuas	51
6. Aproximação de Poisson à Binomial.	54
7. Aproximação Normal à Binomial	55
8. Funções de variáveis aleatórias	56
9. Estatísticas de ordem	60
10. Modelos multidimensionais.	60
11. Distribuições relacionadas com a normal	61
Exercícios.	63
Respostas.	88

Capítulo 4: Esperança	97
1. Definições e propriedades	97
2. Distribuição e esperança condicionais	100
3. Funções geradoras	101
4. Desigualdades	106
Exercícios.	107
Respostas.	132
Capítulo 5: Modos de Convergência e Teoremas Limites	139
1. Lema de Borel-Cantelli	139
2. Modos de Convergência	139
3. Teoremas Limites.	142
4. Outros Teoremas Limites	144
5. Convergência de momentos	145
Exercícios.	145
Respostas.	163
Apêndice	165
Distribuição Normal Padrão	169
Referências Bibliográficas	171

Prefácio

Este livro destina-se a estudantes de cursos de probabilidade em nível de Graduação e Mestrado. Os temas abordados são: Análise Combinatória, Probabilidade, Variáveis Aleatórias, Esperança e Teoremas Limites. No começo de cada capítulo, visando à recordação da matéria, reúnem-se em forma de tópicos as principais definições e resultados. Para mais detalhes e demonstrações, sugiro ao leitor que consulte as referências bibliográficas. Ao final de cada capítulo, enunciam-se os exercícios correspondentes à teoria exposta, alguns dos quais têm a solução apresentada.

Cumprе salientar que, por fins didáticos, decidi definir os principais modos de convergência para tratar dos teoremas limites. As seções e os tópicos marcados com asterisco correspondem a assuntos mais avançados, que podem ser omitidos em uma primeira leitura. Os exercícios que envolvem esses assuntos também estão assinalados. Aceitarei, com prazer, as críticas e sugestões que me permitam aperfeiçoar o livro.

Agradecimentos:

Aos meus familiares e amigos.

A Cristian Favio Coletti, pela colaboração no estágio inicial do livro.

A Fábio Prates Machado, pelo apoio e incentivo ao desenvolvimento do livro.

Aos autores e docentes cujos livros, listas de exercícios e provas me serviram de fonte.

Aos professores com os quais convivi nos anos de formação acadêmica.

À Comissão de Pós-Graduação em Estatística do IME-USP e à CAPES-PROEX, que editaram a primeira versão desse livro.

À FAPESP, à CAPES e ao CNPq, pelos apoios recebidos nesses anos.

A Deus e a todos que me ajudaram a chegar até aqui.

Élcio Lebensztayn.

Fevereiro de 2012.

Análise Combinatória

1.1. Princípio multiplicativo: Uma tarefa deve ser executada em uma sequência de r etapas. Existem n_1 maneiras de realizar a primeira etapa; para cada uma dessas n_1 maneiras, existem n_2 maneiras de realizar a segunda etapa; para cada uma dessas n_2 maneiras, existem n_3 maneiras de realizar a terceira etapa, e assim por diante. Então, o número total de maneiras de efetuar a tarefa completa é dado por $n_1 n_2 \dots n_r$.

Observação. Ao usar o princípio multiplicativo, é fundamental que o número de maneiras de realizar uma determinada etapa não seja influenciado por nenhuma das etapas predecessoras.

1.2. Princípio aditivo para partes disjuntas: Se A_1, \dots, A_n são conjuntos dois a dois disjuntos, então

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|.$$

Princípio da Inclusão-Exclusão: Em geral, devemos usar

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= \sum_i |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| \\ &\quad + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

1.3. Convém recordar uma técnica bastante útil em problemas de contagem: primeiro ignore uma restrição do problema, contando a mais. Depois, desconte o que foi indevidamente contado.

1.4. Um conjunto com n elementos tem 2^n subconjuntos.

1.5. Permutações: O número de maneiras de ordenar n objetos distintos é

$$n! = n(n-1) \dots 2 \cdot 1.$$

O número $n!$ é chamado o fatorial de n . Por convenção, $0! = 1$.

Observação. Uma fórmula muito importante quando se trata de fatoriais foi obtida por Stirling (1730):

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n},$$

onde o símbolo \sim indica que a razão entre os dois lados tende a 1 quando $n \rightarrow \infty$.

1.6. Permutações circulares: O número de maneiras de dispor n objetos distintos em torno de um círculo é $(n - 1)!$.

Nessa contagem, interessa apenas a posição relativa dos objetos entre si, ou seja, duas disposições são consideradas indistinguíveis se uma pode ser obtida a partir da outra por uma rotação conveniente dos objetos.

1.7. O número de palavras de comprimento k que podem ser compostas com n elementos dados é n^k .

1.8. Arranjos: O número de k -subconjuntos *ordenados* de um n -conjunto é

$$(n)_k = n(n - 1) \dots (n - k + 1).$$

1.9. Combinações: O número de k -subconjuntos de um n -conjunto é

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!},$$

que é chamado um *coeficiente binomial*. Estes números podem ser arrumados em uma disposição triangular, o famoso *Triângulo de Pascal*.

1.10. Teorema Binomial: Para quaisquer $n \geq 0$ inteiro e $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

1.11. O número de divisões possíveis de n objetos distintos em r grupos distintos de tamanhos respectivos n_1, n_2, \dots, n_r ($n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$) é

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}.$$

Esta fórmula também fornece o número de anagramas de uma palavra com n letras que contém n_1 vezes a letra ℓ_1 , n_2 vezes a letra ℓ_2 , \dots , n_r vezes a letra ℓ_r ($n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$).

1.12. Para qualquer inteiro $p > 0$ fixado, o número de vetores distintos (x_1, \dots, x_n) não-negativos e a valores inteiros que satisfazem a equação $x_1 + \dots + x_n = p$ é $\binom{p+n-1}{n-1}$.

Esse é o chamado número de *combinações completas* (ou com repetição), pois é o número de modos de escolher p objetos entre n objetos distintos dados, podendo repetir a escolha (x_i é o número de vezes que tomamos o objeto i).

Em outras palavras, o número de maneiras de distribuir p moedas idênticas a n crianças é $\binom{p+n-1}{n-1}$.

1.13. Para qualquer inteiro $p > 0$ fixado, o número de vetores distintos (x_1, \dots, x_n) a valores inteiros que satisfazem $x_1 + \dots + x_n = p$ e $x_i \geq 1$ para todo $i = 1, \dots, n$ é $\binom{p-1}{n-1}$.

Isto significa que o número de maneiras de distribuir p moedas idênticas a n crianças de forma que cada criança receba pelo menos uma moeda é $\binom{p-1}{n-1}$.

1.14. A tabela a seguir resume o número de maneiras de tomarmos uma amostra de tamanho k de uma população com n elementos distintos, dependendo se o mesmo objeto pode ser escolhido mais de uma vez (amostragem com ou sem reposição) e se vamos distinguir entre duas escolhas com os mesmos objetos escolhidos em ordem diferente (amostra ordenada ou não).

	Ordenada	Não-ordenada
Com reposição	n^k	$\binom{k+n-1}{n-1}$
Sem reposição	$(n)_k$	$\binom{n}{k}$

Exercícios

1. Quantas permutações diferentes existem das letras A, B, C, D, E, F

- que têm as letras A, B juntas em qualquer ordem?
- que têm a letra A em primeiro lugar ou a letra F em último?
- em que a letra A vem antes da letra B ?
- em que a letra E não é a última?

Solução. (a) Imaginamos as letras A e B coladas como uma letra só, na ordem AB , o que fornece $5!$ permutações. Como também existem $5!$ permutações nas quais a letra B está imediatamente antes da letra A , obtemos um total de $2 \cdot 5! = 240$ permutações diferentes.

(b) Sejam \mathcal{A} o conjunto das permutações que começam por A e \mathcal{F} o conjunto das permutações que terminam em F . Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, o número de permutações que começam por A ou terminam em F é

$$|\mathcal{A} \cup \mathcal{F}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{F}| - |\mathcal{A} \cap \mathcal{F}| = 5! + 5! - 4! = 216.$$

(c) Existe um total de $6! = 720$ permutações possíveis, e existem tantas com A antes de B quantas com B antes de A , logo a resposta é 360.

(d) Existem $5!$ permutações em que a letra E é a última, portanto $6! - 5! = 600$ permutações em que E não é a última letra.

2. Numa prova, um estudante deve responder exatamente 7 questões de um total de 10 questões. Quantas escolhas ele tem? Quantas escolhas ele tem se entre as 7 questões deve responder pelo menos 3 das primeiras 5 questões?

Solução. O estudante deve escolher um subconjunto de tamanho 7 de um conjunto com 10 elementos, logo tem $\binom{10}{7} = 120$ escolhas.

No caso em que entre as 7 questões deve responder pelo menos 3 das primeiras 5 questões, o estudante possui três opções (disjuntas):

- Escolher exatamente 3 das primeiras 5 questões e 4 das 5 últimas;
- Escolher exatamente 4 das primeiras 5 questões e 3 das 5 últimas;
- Escolher as 5 primeiras questões e 2 das 5 últimas.

Assim, o total de escolhas que tem é

$$\binom{5}{3} \binom{5}{4} + \binom{5}{4} \binom{5}{3} + \binom{5}{5} \binom{5}{2} = 110.$$

Outra resposta para a segunda pergunta: $120 - \binom{5}{2} \binom{5}{5} = 110.$

3. Um pai compra 7 presentes diferentes (entre os quais, um videogame e um relógio) para dar a seus três filhos.

- (a) De quantas maneiras ele pode dividir os 7 presentes entre os filhos, se decide dar 2 presentes ao filho mais velho, 2 presentes ao filho do meio e 3 presentes ao mais novo?
- (b) De quantas maneiras ele pode dividir os 7 presentes, se, além da divisão 2 ao mais velho, 2 ao do meio e 3 ao mais novo, ele resolve dar pelo menos um entre o videogame e o relógio ao filho mais velho?
- (c) De quantas maneiras ele pode dividir os 7 presentes, se, além da divisão 2 ao mais velho, 2 ao do meio e 3 ao mais novo, ele decide dar exatamente um entre o videogame e o relógio ao filho mais velho?

Solução. (a) O número de divisões possíveis de n objetos distintos em r grupos distintos de tamanhos respectivos n_1, n_2, \dots, n_r ($n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$) é

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}.$$

Assim, a resposta é

$$\binom{7}{2, 2, 3} = \frac{7!}{2! 2! 3!} = 210.$$

Outras respostas: • O pai dispõe os presentes numa fila, os dois primeiros destinados ao filho mais velho, os dois seguintes ao filho do meio e os três últimos ao mais novo. Existem $7!$ maneiras de ordenar os presentes, porém fixada uma ordenação entre os presentes, a ordem dos presentes de cada um dos filhos pode ser alterada, sem mudar a distribuição.

Dessa forma, o pai tem $\frac{7!}{2! 2! 3!} = 210$ maneiras de distribuir os presentes.

• O pai escolhe 2 dos 7 presentes para o filho mais velho, o que pode fazer de $\binom{7}{2} = 21$ modos; em seguida, deve escolher 2 dos 5 presentes restantes para o filho do meio ($\binom{5}{2} = 10$ modos); os 3 presentes que sobram são do mais novo. A resposta é $21 \cdot 10 = 210$.

(b) Sejam

n_v = Número de maneiras de dividir os presentes, sendo 2 ao filho mais velho, 2 ao do meio e 3 ao mais novo, com o mais velho ganhando o videogame;

n_r = Número de maneiras de dividir os presentes, sendo 2 ao filho mais velho, 2 ao do meio e 3 ao mais novo, com o mais velho ganhando o relógio;

n_{vr} = Número de maneiras de dividir os presentes, sendo o videogame e o relógio ao filho mais velho, 2 outros presentes ao do meio e 3 ao mais novo.

Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, a resposta é dada por:

$$n_v + n_r - n_{vr} = 2 \cdot \frac{6!}{1! 2! 3!} - \frac{5!}{2! 3!} = 110.$$

Outra resposta: $210 - \binom{5}{2} \binom{5}{2} = 110$.

(c) Sejam

N_1 = Número de maneiras de dividir os presentes, sendo 2 ao filho mais velho, 2 ao do meio e 3 ao mais novo, com o mais velho ganhando o videogame porém não o relógio;

N_2 = Número de maneiras de dividir os presentes, sendo 2 ao filho mais velho, 2 ao do meio e 3 ao mais novo, com o mais velho ganhando o relógio porém não o videogame.

Uma forma de obter N_1 é observar que o pai tem $\binom{5}{1} = 5$ escolhas para o outro presente para o filho mais velho e $\binom{5}{2} = 10$ maneiras de dividir os 5 presentes restantes entre os filhos menores, logo $N_1 = 5 \cdot 10 = 50$. (Outro modo seria notar que $N_1 = n_v - n_{vr}$). Analogamente, temos que $N_2 = 50$. Visto que N_1 e N_2 se referem a opções disjuntas, o número de maneiras é

$$N_1 + N_2 = 100.$$

Outra resposta: $110 - n_{vr} = 100$.

4. Quantos são os anagramas da palavra “COMBINATORIA”? (Considere O *sem acento*). Quantos deles começam por vogal ou terminam em consoante?

Solução. O número de permutações de n objetos, dos quais n_1 são do tipo 1, n_2 são do tipo 2, \dots , n_k são do tipo k ($n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$) é

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

A palavra “COMBINATORIA” tem 2A, 2I, 2O, 1B, 1C, 1M, 1N, 1R, 1T, logo o número total de anagramas (ordenações diferentes das letras) é

$$\frac{12!}{2! 2! 2!} = 59875200.$$

Outra resposta: Escolhemos 2 de 12 lugares para colocar as 2 letras A, o que pode ser feito de $\binom{12}{2} = 66$ modos; em seguida, devemos escolher 2 dos 10 lugares restantes para colocar as 2 letras I ($\binom{10}{2} = 45$ modos); a seguir, escolhemos 2 dos 8 lugares que restam para as 2 letras O ($\binom{8}{2} = 28$ modos) e finalmente temos 6 lugares para 6 letras distintas ($6! = 720$ modos). A resposta é $66 \cdot 45 \cdot 28 \cdot 720 = 59875200$.

Sejam \mathcal{V} o conjunto dos anagramas que começam por vogal e \mathcal{C} o conjunto dos anagramas que terminam em consoante. A fim de obter $|\mathcal{V}|$, notamos que temos 3 escolhas para a vogal inicial e, feita essa escolha, $\frac{11!}{2! 2!}$ formas de permutar as letras restantes. Para calcular $|\mathcal{C}|$, existem 6 escolhas para a consoante final e, tomada essa decisão, $\frac{11!}{2! 2! 2!}$ modos de permutar as letras restantes. Analogamente, $|\mathcal{V} \cap \mathcal{C}| = 3 \cdot 6 \cdot \frac{10!}{2! 2!}$.

Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, concluímos que o número de anagramas que começam por vogal ou terminam em consoante é:

$$|\mathcal{V} \cup \mathcal{C}| = |\mathcal{V}| + |\mathcal{C}| - |\mathcal{V} \cap \mathcal{C}| = 3 \cdot \frac{11!}{2! 2!} + 6 \cdot \frac{11!}{2! 2! 2!} - 3 \cdot 6 \cdot \frac{10!}{2! 2!} = 43545600.$$

5. Permutam-se de todas as formas possíveis os algarismos 1, 2, 4, 6, 7 e escrevem-se os números formados em ordem crescente. Determine:

- que lugar ocupa o número 62417.
- que número ocupa o 66º lugar.
- qual o 166º algarismo escrito.
- a soma dos números assim formados.

Solução. (a) Precisamos determinar quantos números antecedem o 62417. Antecedem-no todos os números começados em 1 ($4! = 24$), em 2 ($4! = 24$), em 4 ($4! = 24$), em 61 ($3! = 6$) e em 621 ($2! = 2$), logo 80 números. O número 62417 ocupa o 81º lugar.

(b) Contemos os números:

Começados por	Quantidade	Acumulado
1	$4! = 24$	24
2	$4! = 24$	48
41	$3! = 6$	54
42	$3! = 6$	60
46	$3! = 6$	66

Assim, o 66º número é o último (maior) que começa com 46, portanto o 46721.

(c) Visto que $166 = 5 \cdot 33 + 1$, o 166º algarismo escrito é o primeiro do 34º número. Os 24 primeiros números começam por 1 e os 24 seguintes por 2, logo o 34º número começa por 2. Assim, o 166º algarismo escrito é 2.

(d) Iniciamos como se deve: somando as unidades dos números formados. Cada um dos algarismos 1, 2, 4, 6, 7 aparece como algarismo das unidades em 24 números, portanto a soma das unidades dos números é $24 \cdot (1 + 2 + 4 + 6 + 7) = 480$. Analogamente, a soma das dezenas é 480 dezenas, isto é, 4800. A soma das centenas é 48000, a das unidades de milhar é 480000 e a das dezenas de milhar é 4800000. A soma total fica então

$$480 + 4800 + 48000 + 480000 + 4800000 = 480 \cdot 11111 = 5333280.$$

6. Quantos são os anagramas da palavra “PARAGUAIO” que não possuem consoantes adjacentes?

Solução. Arrumemos inicialmente as vogais, o que pode ser feito de $6!/3! = 120$ modos, e depois colocamos as consoantes de forma que não fiquem adjacentes. Arrumadas as vogais (digamos na ordem “AAUAIO”), temos 7 escolhas para a colocação do P, 6 para o R e 5 para o G. Assim, existem $120 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 25200$ anagramas de “PARAGUAIO” que não possuem consoantes adjacentes.

Outra resposta: Escolhida a ordem das consoantes, decidimos quantas vogais desejamos colocar nos quatro espaços disponíveis (de forma que não fiquem consoantes adjacentes) e finalmente permutamos as vogais. O total fica $3! \binom{7}{3} 6!/3! = 25200$.

7. Quantos são os números inteiros positivos menores que 360 e primos com 360?

Solução. Notamos que $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ e definimos os conjuntos

$$A = \{1, 2, \dots, 360\},$$

$$A_1 = \{x \in A : x \text{ é múltiplo de } 2\},$$

$$A_2 = \{x \in A : x \text{ é múltiplo de } 3\},$$

$$A_3 = \{x \in A : x \text{ é múltiplo de } 5\}.$$

Desejamos calcular a cardinalidade do conjunto $A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$. Porém,

$$|A_1| = \frac{360}{2} = 180, \quad |A_1 \cap A_2| = \frac{360}{2 \cdot 3} = 60, \quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \frac{360}{2 \cdot 3 \cdot 5} = 12.$$

$$|A_2| = \frac{360}{3} = 120, \quad |A_1 \cap A_3| = \frac{360}{2 \cdot 5} = 36,$$

$$|A_3| = \frac{360}{5} = 72, \quad |A_2 \cap A_3| = \frac{360}{3 \cdot 5} = 24,$$

Portanto, pelo Princípio da Inclusão-Exclusão,

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 180 + 120 + 72 - 60 - 36 - 24 + 12 = 264.$$

Assim, existem ao todo 96 números inteiros positivos menores que 360 e primos com 360.

8. Uma bolsa contém 8 moedas de 1 real, 7 moedas de 50 centavos, 4 moedas de 25 centavos e 3 moedas de 10 centavos. De quantos modos diferentes podemos retirar 6 moedas dessa bolsa?

Solução. Definimos

x_1 : número de moedas de 1 real,

x_2 : número de moedas de 50 centavos,

x_3 : número de moedas de 25 centavos,

x_4 : número de moedas de 10 centavos.

Queremos obter o número de soluções inteiras não-negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$, satisfazendo as condições $x_1 \leq 8, x_2 \leq 7, x_3 \leq 4$ e $x_4 \leq 3$. Sejam os conjuntos

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{N}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6\},$$

$$A_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in A : x_1 \geq 9\},$$

$$A_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in A : x_2 \geq 8\},$$

$$A_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in A : x_3 \geq 5\},$$

$$A_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in A : x_4 \geq 4\}.$$

Então, o número pedido é $y = |A| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$. No entanto,

$$|A| = \binom{9}{3} = 84, \quad |A_1| = |A_2| = 0, \quad |A_3| = \binom{4}{3} = 4, \quad |A_4| = \binom{5}{3} = 10,$$

$$|A_i \cap A_j| = 0, \quad 1 \leq i < j \leq 4,$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 0, \quad 1 \leq i < j < k \leq 4 \text{ e}$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0.$$

Usando o Princípio da Inclusão-Exclusão, obtemos que $y = 84 - 4 - 10 = 70$.

9. Quantos são os gabaritos possíveis de uma prova com 10 questões de verdadeiro ou falso?
10. De quantas maneiras 4 pessoas podem sentar-se em 10 cadeiras em fila?
11. O conjunto A possui 3 elementos, e o conjunto B , 10 elementos. Quantas funções $f : A \rightarrow B$ existem? Quantas delas são injetoras?
12. De quantos modos podemos colocar dois reis diferentes em casas não-adjacentes de um tabuleiro 6×6 ? E se os reis fossem iguais?
13. (a) Quantos divisores inteiros e positivos possui o número 1800?
(b) Quantos desses divisores são pares?
(c) Quantos são quadrados perfeitos?
14. De quantas maneiras diferentes podemos escolher subconjuntos S e T do conjunto $\{1, \dots, n\}$
(a) sem restrições?
(b) de forma que S contenha T ?
(c) com S e T disjuntos?
15. Quantos números pares de dois algarismos podem ser formados no sistema decimal
(a) podendo repetir algarismos?
(b) sem repetir algarismos?
16. Quantos números inteiros entre 100 e 999 são ímpares e possuem três algarismos distintos?
17. Quantos números inteiros maiores que 53000 e de cinco algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?
18. Quantas são as permutações dos números $1, 2, \dots, n$ nas quais o elemento que ocupa a k -ésima posição é inferior a $k + 4$, para todo k ?
19. Um estudante possui 5 livros de Cálculo, 4 livros de Álgebra Linear e 3 livros de Equações Diferenciais, todos diferentes. De quantas maneiras ele pode arrumá-los em uma prateleira, se deseja que os livros de cada assunto fiquem juntos?
20. Em uma corrida com dez cavalos, quantos são os resultados possíveis para os quatro primeiros lugares?
21. Quantos são os jogos de um campeonato de futebol disputado por 20 clubes, no qual todos se enfrentam uma única vez?
22. De quantas maneiras é possível colocar em fila m mulheres e h homens, todos com alturas diferentes, de forma que as mulheres entre si e os homens entre si fiquem em ordem crescente de altura?
23. Quantos são os subconjuntos de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ nos quais:
(a) a_1 figura.
(b) a_1 não figura.

- (c) a_1 e a_2 figuram.
- (d) pelo menos um de a_1 e a_2 figura.
- (e) exatamente um de a_1 e a_2 figura.

24. Quantos são os subconjuntos de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, com k elementos, nos quais:

- (a) a_1 figura.
- (b) a_1 não figura.
- (c) a_1 e a_2 figuram.
- (d) pelo menos um de a_1 e a_2 figura.
- (e) exatamente um de a_1 e a_2 figura.

25. Calcule o número de palavras de seis letras, sem consoantes nem vogais adjacentes, que se podem formar empregando dez consoantes e cinco vogais,

- (a) sendo permitido repetir letras.
- (b) não sendo permitidas repetições.

26. Um turista deseja conhecer cinco das nove capitais do Nordeste do Brasil. De quantos modos ele pode fazer isso, se a ordem das visitas

- (a) importa?
- (b) não importa?

27. Em um concurso, há três candidatos e cinco examinadores, devendo cada examinador votar em um candidato. Determine de quantos modos os votos podem ser distribuídos,

- (a) levando-se em conta a sequência de votação dos examinadores.
- (b) se importa apenas o número de votos que cada candidato recebe.

28. Um restaurante oferece 8 variedades de frutas no cardápio de sobremesa. De quantas maneiras é possível escolher 4 frutas

- (a) podendo repetir uma fruta?
- (b) sem repetir?

Responda os itens (a) e (b), supondo que cada uma das 4 frutas será destinada a uma criança.

29. Sejam A e B conjuntos de números naturais com $|A| = p$ e $|B| = n$.

- (a) Quantas são as funções $f : A \rightarrow B$?
- (b) Quantas são as funções $f : A \rightarrow B$ injetoras?
- (c) Quantas são as funções $f : A \rightarrow B$ crescentes?
- (d) Quantas são as funções $f : A \rightarrow B$ não-decrescentes?

30. Seja A um conjunto com $|A| = n$. Quantas são as funções $f : A \rightarrow A$ bijetoras?

31. De quantos modos os números de 1 a 9 podem ser arrumados de forma que

- (a) todos os números pares precedam todos os ímpares?
- (b) todos os números pares fiquem adjacentes?
- (c) a sequência comece com dois pares e termine com dois pares também?
- (d) os números pares apareçam em ordem crescente ou decrescente?

32. Quantos são os anagramas da palavra “URUGUAIO” que começam por vogal?

33. Quantos números de 5 algarismos podem ser formados usando apenas os algarismos 1, 1, 1, 1, 2 e 3?

34. Cinco moças e cinco rapazes vão posar para uma fotografia, ocupando cinco degraus de uma escadaria, de forma que em cada degrau fique uma moça e um rapaz. De quantas maneiras podemos arrumar este grupo?

35. De quantas maneiras 10 crianças podem formar uma roda de ciranda, se para cada uma delas importa apenas as duas crianças às quais dá as mãos, sem levar em conta se é a mão direita ou esquerda?

36. De quantos modos quatro casais podem sentar-se em torno de uma mesa redonda

- (a) não sentando juntos dois homens?
- (b) não sentando juntos dois homens e nenhum homem ficando perto de sua esposa?

37. Participam de um congresso 15 professores de Matemática e 15 professores de Física. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas:

- (a) sem restrições?
- (b) com pelo menos um professor de Matemática?
- (c) com pelo menos 4 professores de Matemática e pelo menos 2 professores de Física?

38. De quantas maneiras se pode preencher um cartão da loteria esportiva (com 13 jogos) com três prognósticos duplos e dois triplos?

39. Sinais luminosos são transmitidos de uma ilha para a costa por meio de seis lâmpadas brancas e seis lâmpadas vermelhas, colocadas nos vértices de um hexágono regular, de tal modo que

- (i) em cada vértice há duas lâmpadas de cores diferentes;
- (ii) em cada vértice não há mais do que uma lâmpada acesa;
- (iii) o número mínimo de vértices iluminados é três.

Determine o número total de sinais que podem ser transmitidos.

40. Suponha que João vai participar de uma reunião na qual estarão mais 4 homens e 6 mulheres. Ele sabe que há 4 casais, porém não conhece ninguém.

- (a) De quantas formas poderia João imaginar que estão formados os casais?
- (b) E se sabe que há exatamente 3 casais?

41. Uma loja exige que um funcionário recém-contratado trabalhe 4 ou 5 dias por semana, sendo pelo menos um dia de fim de semana. Calcule o número de cronogramas de trabalho possíveis desse trabalhador.
42. Um homem tem 5 amigas e 7 amigos, e sua esposa tem 7 amigas e 5 amigos. De quantos modos eles podem convidar 6 amigas e 6 amigos para uma festa, se cada um deve convidar 6 pessoas?
43. Suponha que n carros estão em fila para entrar em um estacionamento que possui n vagas, lado a lado. Se o primeiro carro pode escolher qualquer vaga e cada um dos outros carros ao estacionar deve justapor-se a um carro já estacionado, quantas são as maneiras possíveis de os carros ocuparem as n vagas?
44. (a) De quantos modos é possível dividir 15 atletas em três times de 5 atletas, denominados Esporte, Tupi e Minas?
- (b) De quantos modos é possível dividir 15 atletas em três times de 5 atletas?
45. Doze professores serão separados em 3 grupos de 4 pessoas. Calcule de quantas maneiras isso pode ser feito se
- (a) os grupos vão discutir o mesmo assunto.
- (b) caberá um tema de discussão diferente a cada grupo.
- (c) cada grupo designará um presidente e tratará de um assunto diferente.
46. Quantos são os anagramas da palavra “ARARAQUARA” que não possuem duas letras A juntas?
47. Quantos são os anagramas da palavra “CONTADORIA”
- (a) em que aparecem juntas, nesta ordem, as letras da palavra CONTO?
- (b) em que aparecem juntas, numa ordem qualquer, as letras da palavra CONTO?
- (c) em que as letras da palavra CONTO aparecem nesta ordem?
48. De quantos modos podemos colocar em fila 7 letras A , 6 letras B e 5 letras C , de forma que não haja duas letras B juntas?
49. Uma fila de lugares em um cinema tem 18 poltronas. De quantas maneiras 4 casais podem sentar-se nessas poltronas, de forma que nenhum marido se sente separado de sua mulher?
50. Uma partícula parte do ponto $(0, 0, 0)$ e, estando em um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$, pode mover-se para um dos pontos $(x + 1, y, z)$, $(x, y + 1, z)$ ou $(x, y, z + 1)$. Quantos são os caminhos possíveis para a partícula chegar ao ponto $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$?
51. Considerando o alfabeto com 26 letras, existem quantas sequências de 4 letras distintas com pelo menos uma vogal?
52. Dentre todos os números de 7 algarismos, quantos possuem exatamente três algarismos 9 e os quatro algarismos restantes todos diferentes?
53. Quantas são as permutações dos 10 números $0, 1, \dots, 9$ em que o primeiro dígito é maior do que 1 e o último dígito menor do que 7?

54. Representantes de dez países, incluindo a Rússia, França, Inglaterra e Estados Unidos, serão dispostos em uma fila. De quantas maneiras isso pode ser feito, se os representantes da França e da Inglaterra devem ficar um ao lado do outro, e o americano e o russo não devem?

55. Teresa pretende convidar 5 de 11 amigos para um jantar em sua casa.

(a) Quantas escolhas Teresa possui, se 2 dos 11 amigos são desafetos e não aceitam estar juntos?

(b) Quantas escolhas Teresa tem, se 3 dos 11 amigos não aceitam participar do jantar a menos que juntos?

56. De quantos modos se podem repartir 27 livros diferentes entre Ana, Beto e Carla, de forma que Ana e Beto, juntos, recebam o dobro de livros de Carla e que ninguém fique sem livro?

57. Nos próximos meses, um agente turístico deve viajar às quatro cidades A , B , C e D , a cada uma delas três vezes. Calcule de quantas maneiras ele pode escolher a ordem das viagens

(a) se não deseja fazer duas visitas seguidas à cidade B .

(b) se não quer que a primeira e a última cidades sejam a mesma.

58. Quantos números de 6 algarismos podemos formar com 3 pares distintos de algarismos iguais?

59. Uma fábrica produz 8 tipos de bombons, que são vendidos em caixas de 30 bombons, de um mesmo tipo ou sortidos. Quantas caixas diferentes podem ser formadas?

60. De quantas maneiras se podem pintar seis esferas iguais, usando-se apenas três cores diferentes?

61. De quantas maneiras podemos distribuir 30 laranjas para 4 crianças de forma que cada uma receba pelo menos duas laranjas?

62. Obtenha uma fórmula para o número de soluções inteiras não-negativas da inequação

$$x_1 + \cdots + x_n \leq p \quad (p > 0 \text{ inteiro dado}).$$

63. Obtenha uma fórmula para o número de soluções inteiras não-negativas da equação

$$x_1 + \cdots + x_n = p \quad (p > 0 \text{ inteiro dado})$$

satisfazendo $x_i \geq a_i$ para todo $i = 1, \dots, n$, onde a_1, \dots, a_n são inteiros não-negativos tais que $a_1 + \cdots + a_n \leq p$.

64. Quantos inteiros entre 1 e 100000 têm a propriedade de que cada dígito é menor ou igual ao seu sucessor?

65. Quantas permutações de 7 letras A e 7 letras B existem, nas quais não há 3 letras A adjacentes?

66. Determine o número de permutações de $(1, 2, \dots, 8)$ em que os números 4 e 6 não ocupam seus lugares primitivos.
67. Uma sequência de DNA é uma sucessão de bases nitrogenadas, as quais podem ser de quatro tipos: adenina, citosina, guanina ou timina. Obtenha o número de sequências de DNA possíveis, com comprimento 8,
- (a) que têm pelo menos uma base citosina.
 - (b) que têm exatamente três adeninas ou exatamente três guaninas.
68. Em um amigo secreto, dizemos que o sorteio é viável se nenhuma pessoa fica com seu próprio nome. Quantos sorteios viáveis existem em um amigo secreto com 4 pessoas?
69. Obtenha o número total de permutações de $(1, 2, \dots, 2n)$ em que nenhum número ímpar ocupa o seu lugar primitivo.
70. Se quatro americanos, três franceses e três ingleses são colocados em uma fila, determine o número de maneiras de dispô-los de forma que nenhum grupo de mesma nacionalidade fique todo junto.
71. Uma pessoa compra 5 bolas e 5 cubos de isopor, sendo indistinguíveis os objetos de mesma forma. Ela pretende pintar cada um dos objetos de uma cor, e vai usar as cores azul, vermelho e preto.
- (a) De quantas maneiras ela pode fazer isso?
 - (b) De quantas maneiras ela pode fazer isso, usando cada cor pelo menos uma vez?
72. Quantos inteiros entre 1 e 33000 não são divisíveis por 3, por 5 e nem por 11?
73. Quantos inteiros entre 1 e 1000000 não são quadrados perfeitos, cubos perfeitos e nem quartas potências perfeitas?
74. Quantos números de n algarismos ($n \geq 3$) podemos formar com os algarismos 1, 2 e 3, de forma que em cada número figure cada um desses três algarismos pelo menos uma vez?
75. Quantos inteiros entre 1 e 10000 têm soma de seus algarismos igual a 23?
76. No elevador de um edifício entram seis pessoas. De quantas maneiras essas seis pessoas podem saltar no primeiro, segundo e terceiro andares, de forma que salte pelo menos uma pessoa em cada um desses andares?
77. De quantos modos podemos distribuir 3 moedas de 25 centavos, 5 moedas de 50 centavos e 4 moedas de 1 real entre dois meninos, de maneira que cada menino receba pelo menos uma moeda?
78. De quantas maneiras podemos distribuir 8 maçãs, 10 peras e 7 laranjas em quatro caixas, se cada caixa deve receber ao menos uma fruta?
79. Mostre que o produto de p números naturais consecutivos é divisível por $p!$.
80. Prove, usando um argumento combinatório, que
- (a) $\binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}$ para $0 < k \leq m \leq n$.

$$(b) \binom{n+m}{r} = \binom{n}{0} \binom{m}{r} + \binom{n}{1} \binom{m}{r-1} + \cdots + \binom{n}{r} \binom{m}{0} \text{ para } r \leq n, r \leq m.$$

$$(c) \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^3 = 2^{n-3} n^2 (n+3) \text{ para } n \geq 3.$$

$$(d) \frac{(3n)!}{2^n 3^n} \text{ é um número inteiro } (n \geq 1).$$

$$(e) \frac{(3n)!}{n! 2^n 3^n} \text{ é um número inteiro } (n \geq 1).$$

Sugestão: (c) Considere n pessoas e conte de duas formas diferentes o número de modos de escolher um grupo com pelo menos uma pessoa e selecionar desse grupo um presidente, um vice e um secretário, os cargos podendo ser cumulativos.

(d) e (e) Pense qual é o número de maneiras de separar $3n$ objetos distintos em n grupos de tamanho 3.

Respostas

9. 1024

10. 5040

11. 1000 funções, 720 injetoras

12. 1040, 520

13. (a) 36 (b) 27 (c) 8

14. (a) 4^n (b) 3^n (c) 3^n

15. (a) 45 (b) 41

16. 320

17. 2160

18. $6 \cdot 4^{n-3}$

19. 103680

20. 5040

21. 190

22. $(m+h)!/(m!h!)$

23. (a) 2^{n-1} (b) 2^{n-1} (c) 2^{n-2} (d) $3 \cdot 2^{n-2}$ (e) 2^{n-1}

24. (a) $\binom{n-1}{k-1}$ (b) $\binom{n-1}{k}$ (c) $\binom{n-2}{k-2}$ (d) $2\binom{n-1}{k-1} - \binom{n-2}{k-2} = \binom{n}{k} - \binom{n-2}{k}$ (e) $2\binom{n-2}{k-1}$

25. (a) 250000 (b) 86400

26. (a) 15120 (b) 126

27. (a) 243 (b) 21

28. (a) 330 (b) 70 (c) 4096 (d) 1680

29. (a) n^p (b) $(n)_p$ (c) $\binom{n}{p}$ (d) $\binom{p+n-1}{n-1}$

30. $n!$

31. (a) 2880 (b) 17280 (c) 2880 (d) 30240

32. 5040

33. 30

34. 460800

35. 181440

36. (a) 144 (b) 12

37. (a) 5852925 (b) 5846490 (c) 3755115

38. 2279881890

39. 656

40. (a) 360 (b) 480

41. 50

42. 267148

43. 2^{n-1}

44. (a) 756756 (b) 126126

45. (a) 5775 (b) 34650 (c) 2217600

46. 120

47. (a) 360 (b) 21600 (c) 15120

48. 1359072

49. 384384

50. $(a + b + c)! / (a! b! c!)$

51. 215160

52. 99120

53. 2056320

54. 564480

55. (a) 378 (b) 84

56. $\approx 1,23 \cdot 10^{12}$

57. (a) 201600 (b) 302400

58. 9720

59. 10295472

60. 28

61. 2300

62. $\binom{p+n}{n}$

63. $\binom{p-a_1-\dots-a_n+n-1}{n-1}$

64. 2001

65. 1016

66. 30960

67. (a) 58975 (b) 24976

68. 9

69. $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (2n - k)!$

70. 3079296

71. (a) 441 (b) 336

72. 16000

73. 998910

74. $3^n - 3 \cdot 2^n + 3$

75. 480

76. 540

77. 118

78. 5239868

Probabilidade

1. Definições e propriedades

1.1. Um experimento é *aleatório* se, ao ser repetido nas mesmas condições, é impossível prever antecipadamente o resultado. Em contrapartida, um experimento é *determinístico* se, quando repetido nas mesmas condições, conduz ao mesmo resultado.

Denominamos *espaço amostral* o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, e o denotamos por Ω . Um subconjunto $A \subset \Omega$ é chamado *evento*.

Dados dois eventos A e B , dizemos que $A \subset B$ se $\omega \in A$ implica que $\omega \in B$. Em palavras, a ocorrência de A implica a ocorrência de B .

A *união* de dois eventos A e B é $A \cup B = \{\omega : \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$ e representa o evento de que pelo menos um dos dois eventos A e B ocorre.

A *intersecção* de dois eventos A e B é $A \cap B = \{\omega : \omega \in A \text{ e } \omega \in B\}$ e representa o evento de que ambos A e B ocorrem.

Dois eventos A e B são *disjuntos* ou *mutuamente exclusivos* se $A \cap B = \emptyset$. Isso significa que A e B não ocorrem simultaneamente.

Para qualquer evento A , o *complementar* de A é $A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$ e representa o evento de que A não ocorre.

1.2. Leis de De Morgan:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c, \quad (\text{DM1})$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c. \quad (\text{DM2})$$

Notamos que (DM1) estabelece que o evento de que nenhum dos A_i 's ocorre é igual ao complementar do evento de que pelo menos um dos A_i 's ocorre. Já (DM2) expressa que o complementar do evento de que todos os A_i 's ocorrem é exatamente o evento de que ao menos um deles não ocorre.

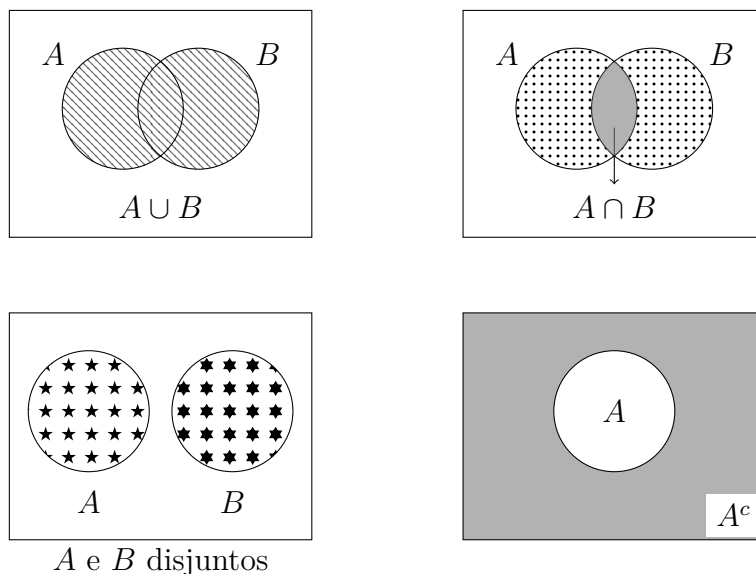


Figura 2.1: União e intersecção dos eventos A e B ; A e B disjuntos; Complementar de A .

1.3. Definição clássica (Cardano (1663), De Moivre (1718), Laplace (1812)):

Seja Ω finito, não-vazio, e suponhamos que cada subconjunto elementar de Ω é igualmente provável. Então, para qualquer $A \subset \Omega$, definimos a probabilidade de A como

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Observação. A definição anterior formaliza a primeira definição conhecida de probabilidade: “relação entre o número de casos favoráveis ao acontecimento (evento) e o número total de casos possíveis, supondo todos os casos igualmente possíveis”.

1.4. Definição axiomática (Kolmogorov (1933)): Uma *probabilidade* é uma função $P(\cdot)$ a valores reais definida em uma classe \mathcal{F} de eventos de um espaço amostral Ω , que satisfaz as seguintes condições:

(A1) $0 \leq P(A) \leq 1$ para todo $A \in \mathcal{F}$,

(A2) $P(\Omega) = 1$,

(A3) Aditividade enumerável: para qualquer seqüência $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ de eventos dois a dois disjuntos,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

A tripla (Ω, \mathcal{F}, P) é chamada um *espaço de probabilidade*.

Observação. No caso de Ω finito ou infinito enumerável, podemos definir a probabilidade na classe \mathcal{F} de todos os subconjuntos de Ω , a qual é usualmente denotada por 2^Ω ou $\mathcal{P}(\Omega)$ (conjunto das partes de Ω). Neste caso, escrevendo Ω como $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, associamos a cada ω_i , $i = 1, 2, \dots$, um número $p(\omega_i)$ tal que $p(\omega_i) \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{\infty} p(\omega_i) = 1$. Para $i = 1, 2, \dots$, $p(\omega_i)$ é a probabilidade do evento simples $\{\omega_i\}$. A probabilidade de um evento $A \subset \Omega$ é definida por

$$P(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} p(\omega_i).$$

Quando Ω é infinito não-enumerável, é em geral impossível associar uma probabilidade bem definida a todos os subconjuntos de Ω . Define-se então uma probabilidade em uma classe mais restrita de subconjuntos de Ω ; apenas esses subconjuntos são denominados eventos. O ponto essencial é que essa classe contém todos os subconjuntos (eventos) de interesse prático. Um exemplo importante é Ω igual a um intervalo da reta, para o qual se considera a classe de subconjuntos conhecida como σ -álgebra de Borel. Para mais detalhes sobre esse tema, sem ainda abordar profundamente a Teoria da Medida, veja-se o livro de James [15].

1.5. Propriedades de uma probabilidade:

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. Aditividade finita: Se A_1, \dots, A_n são eventos dois a dois disjuntos, então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

3. $P(A^c) = 1 - P(A)$ para todo evento A .
4. Para quaisquer eventos A e B ,

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B).$$

5. Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.
6. Para quaisquer eventos A e B ,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

7. Princípio da Inclusão-Exclusão: Para qualquer sequência finita A_1, A_2, \dots, A_n de eventos,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n).$$

8. Subaditividade finita: Para qualquer sequência finita A_1, A_2, \dots, A_n de eventos,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

9. Subaditividade enumerável: Para qualquer sequência A_1, A_2, \dots de eventos,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

As propriedades 8 e 9 são conhecidas como Desigualdades de Boole.

2. Probabilidade condicional e independência

2.1. Seja (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade. Para eventos A e B com $P(B) > 0$, a *probabilidade condicional* de A dado que B ocorreu é definida por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

2.2. Regra da multiplicação (ou da probabilidade composta): Se A_1, A_2, \dots, A_n são eventos com $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$, então

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) P(A_2 | A_1) \dots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

2.3. Condicionamento: Se A e B são eventos com $0 < P(B) < 1$, então

$$P(A) = P(A|B) P(B) + P(A|B^c) P(B^c).$$

2.4. Fórmula da probabilidade total: Seja $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ uma partição do espaço amostral Ω em eventos de probabilidade positiva, isto é, esses eventos são dois a dois disjuntos, $\Omega = \bigcup_{i=1}^n B_i$ e $P(B_i) > 0$ para todo i . Então, para qualquer evento A ,

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) P(B_i).$$

2.5. Fórmula de Bayes (1763): Seja $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ uma partição do espaço amostral Ω em eventos de probabilidade positiva. Se A é um evento com $P(A) > 0$, então, para todo $j = 1, \dots, n$,

$$P(B_j | A) = \frac{P(A | B_j) P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A | B_i) P(B_i)}.$$

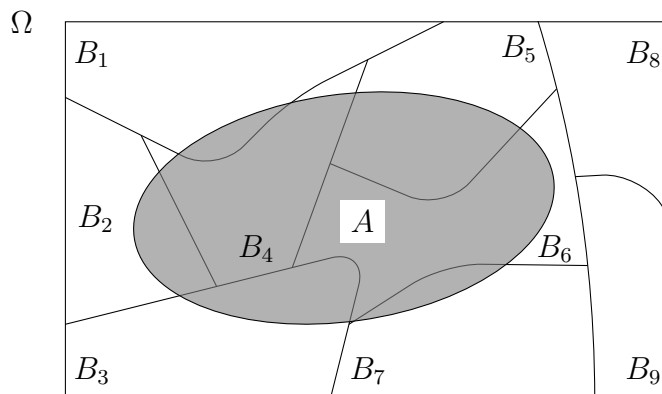


Figura 2.2: Partição de Ω em $\{B_1, B_2, \dots, B_9\}$ e um evento A .

2.6. Para um evento B fixado tal que $P(B) > 0$, temos que $P(\cdot | B)$ é uma probabilidade.

2.7. Dois eventos A e B são *independentes* se $P(A \cap B) = P(A) P(B)$.

Observação. Em palavras, A e B são independentes se o conhecimento da ocorrência de um deles não influencia a probabilidade do outro.

2.8. Os eventos A_1, \dots, A_n são *independentes* se para qualquer escolha de k ($2 \leq k \leq n$) e índices $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$,

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}).$$

2.9. Uma coleção infinita de eventos é *independente* se toda subcoleção finita desses eventos é independente.

2.10. Se A_1, \dots, A_n são independentes, então, para qualquer escolha de B_j com $B_j = A_j$ ou A_j^c ,

$$P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) = P(B_1) P(B_2) \dots P(B_n).$$

2.11. Frequentemente, um experimento aleatório consiste em realizar uma sequência de ensaios (subexperimentos). Por exemplo, se o experimento aleatório é lançar uma moeda repetidamente, cada lançamento pode ser considerado como um ensaio. Neste caso, dizer que os ensaios são *independentes* significa dizer que a seguinte condição é válida: se A_i é um evento cuja ocorrência é completamente determinada pelo resultado do i -ésimo ensaio, então A_1, A_2, \dots são independentes.

3. Conjuntos limites e continuidade da probabilidade*

3.1. Sejam A_1, A_2, \dots eventos em um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) .

Por $A_n \uparrow A$, denotamos que

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \quad \text{e} \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Assim, $A_n \uparrow A$ significa que a ocorrência de A_n implica a ocorrência de A_{n+1} para todo n e A é o evento de que pelo menos um dos A_n 's ocorre.

Por $A_n \downarrow A$, denotamos que

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \quad \text{e} \quad A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Dessa forma, $A_n \downarrow A$ significa que a ocorrência de A_{n+1} implica a ocorrência de A_n para todo n e A é o evento de que todos os A_n 's ocorrem.

3.2. Continuidade por baixo da probabilidade: Se $A_n \uparrow A$, então $P(A_n) \uparrow P(A)$ quando $n \rightarrow \infty$.

Continuidade por cima da probabilidade: Se $A_n \downarrow A$, então $P(A_n) \downarrow P(A)$ quando $n \rightarrow \infty$.

3.3. Conjuntos limites: Para uma sequência A_1, A_2, \dots de eventos em um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) , definimos os eventos

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{e}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

denominados respectivamente *limite inferior* e *limite superior* da sequência $\{A_n\}$.

Observamos que

$$\begin{aligned}\omega \in \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n &\iff \text{Existe } n \text{ tal que } \omega \in A_k \text{ para todo } k \geq n \\ &\iff |\{n : \omega \notin A_n\}| < \infty,\end{aligned}$$

ou seja, $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ é o evento de que ocorre A_n para todo n suficientemente grande.

Ademais,

$$\begin{aligned}\omega \in \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n &\iff \text{Para todo } n \geq 1, \text{ existe } k \geq n \text{ tal que } \omega \in A_k \\ &\iff |\{n : \omega \in A_n\}| = \infty,\end{aligned}$$

ou seja, $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ é o evento de que ocorre A_n para uma infinidade de n 's.

Isso justifica as seguintes notações:

$$\begin{aligned}\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n &= \{A_n \text{ para todo } n \text{ suficientemente grande}\} \quad \text{e} \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n &= \{A_n \text{ infinitas vezes}\}.\end{aligned}$$

É fácil ver que $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$. Se vale a inclusão oposta, dizemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ existe e é definido por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

3.4. Vale que

$$P\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \leq P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right).$$

3.5. Continuidade da probabilidade: Se $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ existe, então

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

Isso generaliza as propriedades dadas no tópico **3.2**.

Exercícios

Probabilidade: Definições e propriedades

1. Descreva um espaço amostral Ω adequado aos seguintes experimentos aleatórios. Responda se Ω é finito, infinito enumerável ou infinito não-enumerável, e determine a sua cardinalidade no caso finito.

- (a) Escolhe-se ao acaso uma família com duas crianças de um município e são registrados os sexos do primeiro e do segundo filhos.
- (b) No item (a), observa-se apenas o número de meninas na família selecionada.
- (c) No item (a), registra-se o peso (em quilogramas) com que cada uma das crianças nasceu.
- (d) Vinte produtos eletrônicos são sorteados de um lote e a quantidade de produtos com defeito é contada.
- (e) Um dado é lançado quatro vezes e a sequência de números obtida é anotada.
- (f) Registra-se o total de pontos quando um dado é lançado quatro vezes.
- (g) Anota-se o número de vezes que a face 6 ocorre quando um dado é lançado quatro vezes.
- (h) Um dado é lançado quatro vezes e registra-se o número de vezes que ocorre cada face.
- (i) Considere uma urna com 8 bolas, numeradas de 1 a 8. Retiram-se 3 bolas da urna, com reposição, e anota-se o número a cada bola retirada.
- (j) Mesmo que o item (i), porém registra-se o número de vezes que cada número de 1 a 8 é obtido, em vez de anotar o número a cada bola retirada.
- (k) Retiram-se 3 bolas da urna descrita no item (i), sem reposição, e anota-se o número a cada bola retirada.
- (l) Da urna descrita no item (i), retiram-se 3 bolas simultaneamente, anotando-se o conjunto de números obtido.
- (m) Conta-se o número de partículas emitidas por um isótopo radioativo durante um intervalo de tempo.
- (n) A partir de certo momento, registra-se a quantidade de veículos que passam por um pedágio até que passe a primeira motocicleta.
- (o) Registram-se os números de carros e de caminhões que passam em uma ponte durante uma semana.
- (p) Uma árvore é selecionada em um parque e sua altura em centímetros é medida.
- (q) Mede-se o tempo decorrido até a primeira emissão de uma partícula por um isótopo radioativo.
- (r) Um dardo é lançado em um alvo circular de raio unitário e observa-se o ponto acertado.

- (s) No item (r), em vez de observar onde o dardo cai, a sua distância ao centro do alvo é medida.
- (t) Registram-se o número de dias chuvosos e a precipitação total (em centímetros) durante uma semana em uma localidade.
2. Sejam A , B e C três eventos em um espaço de probabilidade. Expresse os seguintes eventos em termos de A , B e C :
- (a) Apenas A ocorre.
- (b) A e B ocorrem, mas C não ocorre.
- (c) Os três eventos ocorrem.
- (d) Pelo menos um dos três eventos ocorre.
- (e) Nenhum dos três eventos ocorre.
- (f) Exatamente um dos três eventos ocorre.
- (g) No máximo um dos três eventos ocorre.
- (h) Pelo menos dois dos três eventos ocorrem.

3. Um baralho comum consiste de 52 cartas separadas em 4 naipes com 13 cartas de cada um. Para cada naipe, os valores das cartas são 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K e A. Um baralho comum é embaralhado. Qual é a probabilidade de que as quatro cartas do topo tenham

- (a) valores diferentes?
(b) naipes diferentes?

Solução. Se consideramos como relevante a ordem entre as quatro cartas do topo, então o espaço amostral consiste de $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49$ resultados. Além disso, existem $52 \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40$ resultados em que as cartas têm valores diferentes e $52 \cdot 39 \cdot 26 \cdot 13$ resultados em que as cartas têm naipes diferentes. Portanto, assumindo que o “embaralhamento” significa que cada resultado no espaço amostral é igualmente provável, temos que as probabilidades desejadas são

$$(a) \frac{52 \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} \approx 0,676; \quad (b) \frac{52 \cdot 39 \cdot 26 \cdot 13}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} \approx 0,105.$$

Observação. Claramente as mesmas respostas seriam obtidas se considerássemos as quatro cartas do topo como um conjunto não ordenado de cartas.

4. Em uma classe, estudam dez crianças, entre as quais os irmãos Ana e Beto. A professora decide separar ao acaso a turma em dois grupos de cinco crianças cada um; o primeiro grupo fará um trabalho sobre os planetas e o segundo sobre as civilizações antigas. Qual é a probabilidade de que os irmãos Ana e Beto façam parte do mesmo grupo? Há alguma diferença (no raciocínio e no resultado) se ambos os grupos farão trabalhos sobre o mesmo assunto?

5. Extraem-se 4 cartas de um baralho com 52 cartas. Qual é a probabilidade de que 2 sejam pretas e 2 vermelhas?

6. Quatro números são sorteados ao acaso, sem reposição, do conjunto $\{0, 1, \dots, 9\}$. Calcule as probabilidades de que

- (a) os quatro números formem uma seguida (por exemplo, 2, 3, 4, 5).
- (b) todos sejam maiores que 5.
- (c) o número 0 seja escolhido.
- (d) pelo menos um seja maior que 7.
- (e) todos sejam ímpares.

7. Qual é a probabilidade de que os aniversários de doze pessoas sejam em meses diferentes? E a probabilidade de que os aniversários de quatro pessoas sejam em dois meses?

8. Uma pessoa possui 5 livros diferentes de Matemática, 2 livros diferentes de Química e 3 livros diferentes de Física, que serão dispostos aleatoriamente em uma prateleira. Calcule as probabilidades de que

- (a) os livros de cada assunto fiquem juntos.
- (b) os livros de Matemática não fiquem todos juntos.
- (c) os livros de Física fiquem todos separados.
- (d) os livros de um mesmo assunto apareçam em ordem alfabética, mas não necessariamente adjacentes.

9. Uma caixa contém 40 parafusos bons e 10 defeituosos. Seleciona-se uma amostra de 5 parafusos. Calcule as probabilidades dos seguintes eventos:

- (a) Nenhum parafuso na amostra é defeituoso.
- (b) Nenhum, um ou dois parafusos na amostra são defeituosos.
- (c) A amostra contém pelo menos um parafuso bom.

10. Uma urna contém 3 bolas vermelhas e 3 azuis. São retiradas 3 bolas ao acaso e então uma bola é selecionada das restantes. Qual a probabilidade de que essa bola seja vermelha?

11. Distribuímos 12 bolas em 5 caixas numeradas 1, 2, 3, 4, 5. Calcule a probabilidade da caixa 1 conter exatamente 3 bolas se

- (a) as bolas são distinguíveis.
- (b) as bolas são indistinguíveis.

12. Os clubes de xadrez de duas escolas consistem, respectivamente, de 8 e 9 jogadores. Quatro membros de cada clube são escolhidos ao acaso para participar de uma competição entre as duas escolas. Os jogadores selecionados de uma equipe são pareados aleatoriamente com aqueles da outra equipe, e cada par joga uma partida de xadrez. Suponha que Rosa e sua irmã Margarida estão nos clubes de xadrez em escolas diferentes. Obtenha as probabilidades de que

- (a) Rosa e Margarida sejam pareadas.

(b) Rosa e Margarida sejam escolhidas para representar suas escolas mas não joguem entre si.

(c) exatamente uma das irmãs seja selecionada para representar sua escola.

13. Dez pessoas chegam a um consultório médico em horários ligeiramente diferentes, e são chamadas em ordem aleatória. Dizemos que a i -ésima pessoa a chegar tem sorte se está entre as i primeiras pessoas chamadas. Encontre a probabilidade de que, entre a 3^a, a 5^a e a 8^a pessoas, pelo menos uma não tenha sorte.

14. O jardineiro de um parque prepara um local para plantar três quaresmeiras, quatro ipês amarelos e cinco aroeiras. Ele vai plantar as árvores alinhadas, escolhendo a ordem de maneira aleatória. Obtenha a probabilidade de que não fiquem duas aroeiras adjacentes.

15. Se André e Pedro estão entre n homens dispostos aleatoriamente em uma fila, qual é a probabilidade de que haja exatamente r homens entre eles?

16. Suponha que cada uma de um total de n varetas seja quebrada em uma parte longa e uma curta. As $2n$ partes são arrumadas ao acaso em n pares a partir dos quais novas varetas são formadas. Calcule a probabilidade de que

(a) as partes sejam unidas na ordem original.

(b) todas as partes longas sejam emparelhadas com partes curtas.

17. Um armário contém n pares diferentes de sapatos. Se $2r$ sapatos são escolhidos ao acaso (com $2r < n$), determine a probabilidade de que dentre os sapatos selecionados

(a) não exista par algum completo.

(b) exista exatamente um par completo.

(c) existam exatamente dois pares completos.

Considere $n = 10$ e $r = 2$ e calcule de duas maneiras diferentes a probabilidade de que exista pelo menos um par completo dentre os sapatos selecionados.

18. Uma urna contém a bolas azuis e b bolas brancas. As bolas são retiradas uma a uma da urna, ao acaso e sem reposição, até que a urna fique vazia. Calcule a probabilidade de que a última bola retirada seja azul nos seguintes casos:

(a) as bolas são todas distintas.

(b) as bolas são distinguíveis apenas pela cor.

19. Em uma loteria, selecionam-se ao acaso r números dentre os números de 1 a n . Obtenha a probabilidade de que não haja dois números consecutivos entre os selecionados, ou seja, de que a sequência escolhida não contenha uma seguida.

Qual a probabilidade de aparecer ao menos uma seguida entre os números sorteados na Mega Sena ($n = 60$ e $r = 6$)?

20. Aos números inteiros de 1 a n são designadas probabilidades proporcionais aos seus valores. Determine $p(i)$ para $i = 1, \dots, n$.

21. Sejam A e B dois eventos em um espaço de probabilidade, tais que $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/4$ e $P(A \cap B) = 1/5$. Calcule as probabilidades dos seguintes eventos:

- (a) A não ocorre.
- (b) B não ocorre.
- (c) Pelo menos um de A e B ocorre.
- (d) A não ocorre e B sim.
- (e) B não ocorre e A sim.
- (f) Ocorre exatamente um de A e B .
- (g) Não ocorre nenhum de A e B .
- (h) Pelo menos um de A e B não ocorre.

22. Em uma escola, 60% dos estudantes não usam anel nem colar; 20% usam anel e 30% colar. Se um aluno é escolhido aleatoriamente, qual a probabilidade de que esteja usando

- (a) pelo menos uma das joias?
- (b) ambas as joias?
- (c) um anel mas não um colar?

23. Da população de uma cidade, 28% fumam cigarro, 7% fumam charuto e 5% ambos. Calcule a porcentagem da população

- (a) que não fuma nem cigarro nem charuto.
- (b) que fuma charuto mas não cigarro.

24. Uma escola oferece três cursos optativos de idiomas: espanhol, francês e alemão. As turmas são abertas a qualquer um dos 100 alunos matriculados. Há 28 estudantes na turma de espanhol, 26 na turma de francês e 16 na turma de alemão. Há 12 alunos cursando espanhol e francês, 4 fazendo espanhol e alemão, e 6 cursando francês e alemão. Além disso, 2 estudantes acompanham os três cursos.

- (a) Se um aluno é escolhido ao acaso, qual a probabilidade de que não acompanhe nenhum dos cursos?
- (b) Se um estudante é escolhido aleatoriamente, qual a probabilidade de que esteja fazendo exatamente um dos cursos?
- (c) Se dois alunos são escolhidos ao acaso, qual a probabilidade de que pelo menos um deles esteja cursando uma língua?

25. Em uma cidade, existem três jornais: I, II e III. As proporções de munícipes que leem esses jornais são as seguintes:

I: 10%	I e II: 8%	I, II e III: 1%
II: 30%	I e III: 2%	
III: 5%	II e III: 4%	

Os jornais I e III são matutinos, e o II vespertino. Obtenha a probabilidade de que um morador da cidade selecionado ao acaso

- (a) leia só o jornal III.
- (b) leia apenas um jornal.
- (c) leia pelo menos dois jornais.
- (d) não leia nenhum jornal.
- (e) leia pelo menos um jornal matutino e o jornal vespertino.
- (f) leia somente um jornal matutino e o jornal vespertino.

26. Prove que se A_1, A_2, \dots e B_1, B_2, \dots são eventos do mesmo espaço de probabilidade tais que $P(A_n) \rightarrow 1$ e $P(B_n) \rightarrow p$ quando $n \rightarrow \infty$, então $P(A_n \cap B_n) \rightarrow p$ quando $n \rightarrow \infty$.

27. Sejam A_1, A_2, \dots eventos em um espaço de probabilidade. Prove que

- (a) Se $P(A_n) = 0$ para todo $n \geq 1$, então $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$.
- (b) Se $P(A_n) = 1$ para todo $n \geq 1$, então $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$.

28. Uma secretária atrapalhada prepara quatro cartas com conteúdos distintos para enviar a quatro firmas distintas. Na hora de envelopá-las, bate um vento que derruba as cartas e os envelopes, e, com pressa, a secretária coloca aleatoriamente as cartas nos envelopes. Determine a probabilidade de que nenhuma carta tenha sido corretamente envelopada.

Solução. Sejam os eventos

A : Pelo menos uma carta foi colocada no envelope certo.

A_i : A i -ésima carta foi colocada no envelope certo, $i = 1, 2, 3, 4$.

Como $A = \bigcup_{i=1}^4 A_i$, temos que, pelo Princípio da Inclusão-Exclusão,

$$P(A) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4).$$

Porém,

$$P(A_i) = \frac{3!}{4!} = \frac{1}{4}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{2!}{4!} = \frac{1}{12}, \quad 1 \leq i < j \leq 4,$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}, \quad 1 \leq i < j < k \leq 4 \text{ e}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}.$$

Portanto,

$$P(A) = 4 \cdot \frac{1}{4} - \binom{4}{2} \frac{1}{12} + \binom{4}{3} \frac{1}{24} - \frac{1}{24} = \frac{5}{8}.$$

Assim, a probabilidade de que nenhuma carta tenha sido corretamente envelopada é:

$$P(A^c) = 1 - P(A) = \frac{3}{8}.$$

29. Se quatro casais de namorados são dispostos aleatoriamente em uma fila, determine a probabilidade de que nenhum dos casais fique junto.

30. Cinco bolas são selecionadas aleatoriamente, sem reposição, de uma urna que contém 5 bolas vermelhas, 6 bolas brancas e 7 bolas azuis, todas distintas. Determine a probabilidade de que pelo menos uma bola de cada cor seja selecionada.

31. Um colégio tem em seu corpo docente sete professores de Biológicas, oito professores de Exatas e nove professores de Humanas. Uma comissão de sete professores será selecionada aleatoriamente. Determine a probabilidade de que nesta comissão haja pelo menos um professor de cada área.

32. Um baralho comum consiste de 52 cartas diferentes sendo 13 cartas de cada naipe. Uma pessoa retira ao acaso 13 cartas de um baralho. Calcule a probabilidade de que pelo menos um naipe esteja ausente entre as cartas selecionadas.

33. As cartas de um baralho são misturadas e distribuídas entre 4 jogadores de modo que cada um recebe 13 cartas. Calcule a probabilidade de que pelo menos um jogador receba todas as cartas do mesmo naipe.

34. Em cada extração de uma loteria, selecionam-se ao acaso m números dentre os números de 1 a n . Obtenha a probabilidade de que todo número seja sorteado ao menos uma vez em d extrações.

35. Sabe-se que com probabilidade 1 pelo menos um dos eventos A_i , $1 \leq i \leq n$, ocorre, e que não mais que dois ocorrem simultaneamente. Se $P(A_i) = p$ e $P(A_i \cap A_j) = q$, $i \neq j$, mostre que $p \geq 1/n$ e $q \leq 2/n$.

Probabilidade condicional e independência

36. Escolhe-se ao acaso um número entre 1 e 50. Se o número é primo, qual a probabilidade de que seja ímpar?

37. Em um programa de auditório, o participante lança um dado honesto seis vezes. Ele ganha um prêmio de participação se obtiver o mesmo número pelo menos duas vezes, e ganha um prêmio milionário se a face 6 aparecer ao menos quatro vezes. Qual a probabilidade de que o participante

(a) ganhe o prêmio de participação?

(b) ganhe o prêmio milionário?

(c) tenha ganho o prêmio milionário, dado que ganhou o prêmio de participação?

38. Três aventureiros devem escolher um deles para uma missão arriscada. Para isso, pegam uma urna com duas bolas brancas e uma bola vermelha, e cada um retira sucessivamente uma bola, sem reposição. Aquele que pegue a bola vermelha será o escolhido para realizar a missão. Mostre que todos têm a mesma probabilidade de ser o escolhido, qualquer que seja a ordem em que realizem as extrações.

39. Um contador tem sobre a sua mesa dois grupos de 20 planilhas cada um. No primeiro grupo existem duas planilhas com erros de cálculo e no segundo há três. Um vento faz com que as planilhas caiam da mesa, e, ao arrumá-las, uma do primeiro grupo se mistura às do segundo grupo. Qual a probabilidade de que, ao revisar uma planilha do segundo grupo, o contador encontre um erro?

40. Em uma rifa com 100 bilhetes, numerados de 1 a 100, sorteiam-se dois bilhetes ao acaso, sem reposição. O primeiro bilhete sorteado premia o seu comprador com uma bateadeira, e o segundo prêmio é um liquidificador. Uma pessoa compra quatro bilhetes. Calcule a probabilidade de que essa pessoa tenha ganho ambos os prêmios

- (a) dado que ganhou o liquidificador.
- (b) dado que ganhou algum prêmio na rifa.

41. De um armário com 12 pares diferentes de sapatos, selecionam-se 6 sapatos ao acaso. Dado que há pelo menos um par completo entre os sapatos escolhidos, qual a probabilidade de que existam exatamente dois pares completos?

42. Suponha que n crianças, todas com alturas diferentes, são dispostas aleatoriamente em uma fila indiana.

- (a) Encontre a probabilidade de que a k -ésima criança da fila seja mais alta do que todas as crianças à sua frente.
- (b) Obtenha a probabilidade de que cada uma das k primeiras crianças da fila seja mais alta do que aquelas à sua frente.
- (c) Dado que a k -ésima criança da fila é mais alta do que todas as crianças à sua frente, qual a probabilidade de que essa criança seja a mais alta do grupo?

43. Suponha que 60% das pessoas assinem o jornal A , 40% o jornal B , e 30% ambos.

- (a) Se selecionarmos ao acaso uma pessoa que assina ao menos um dos jornais, qual a probabilidade de que assine o jornal A ?
- (b) Dado que uma pessoa não assina o jornal A , qual a probabilidade de que também não assine B ?

44. Em uma cidade, 40% das famílias possuem cachorro e 30% gato. Das famílias com cachorro, 25% também têm gato.

- (a) Que fração de famílias não possui nenhum dos dois animais?
- (b) Dentre as famílias que não têm gato, qual é a proporção com cachorro?

45. Um cliente que visita o departamento de roupas masculinas de uma loja compra um terno com probabilidade $2/5$, uma gravata com probabilidade $5/12$ e uma camisa com probabilidade $1/2$. O cliente compra um terno e uma gravata com probabilidade $2/15$, um terno e uma camisa com probabilidade $17/60$ e uma gravata e uma camisa com probabilidade $1/4$; compra os três itens com probabilidade $1/12$. Considere os eventos

A : O cliente compra um terno.

B : O cliente compra uma gravata.

C : O cliente compra uma camisa.

- Os eventos A , B e C são independentes?
- Qual a probabilidade de que o cliente não compre nenhum dos itens?
- Dado que o cliente não vai comprar uma gravata, qual a probabilidade de que compre um terno?
- Dado que o cliente vai comprar uma camisa, qual a probabilidade de que também compre uma gravata e um terno?

46. Dos sócios de um clube esportivo, $3/4$ são adultos e $1/4$ crianças. São do sexo masculino $3/4$ dos adultos e $3/5$ das crianças. Metade dos homens adultos e um terço das mulheres adultas usam a piscina do clube; a proporção correspondente às crianças é $4/5$, independentemente do sexo.

- Calcule a probabilidade de que um sócio do clube escolhido ao acaso use a piscina.
- Qual a proporção de sócios do sexo feminino entre os que usam a piscina?
- Obtenha a probabilidade de que um sócio selecionado aleatoriamente seja do sexo feminino.
- Dado que um sócio não usa a piscina, qual a probabilidade de que seja do sexo feminino ou adulto?

47. Em um curso secundário, $1/3$ dos estudantes são do sexo masculino e $2/3$ dos estudantes são do sexo feminino. A proporção de rapazes que estudam ciências é 20% e apenas 10% das moças dedicam-se às ciências. Obtenha as probabilidades de que

- um estudante escolhido ao acaso estude ciências.
- um estudante de ciências selecionado ao acaso seja do sexo feminino.

Solução. Sejam os eventos

A : O estudante é do sexo feminino.

B : O estudante estuda ciências.

(a) Pela Fórmula da probabilidade total,

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}.$$

(b) Pela Fórmula de Bayes,

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{(1/10)(2/3)}{2/15} = \frac{1}{2}.$$

48. Uma fábrica de sorvete recebe o leite que utiliza de três fazendas: 20% da fazenda 1, 30% da fazenda 2 e 50% da fazenda 3. Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas e constatou que 20% do leite produzido na fazenda 1 estava adulterado por adição de água, enquanto que para as fazendas 2 e 3 essa proporção era de 5% e 2%, respectivamente. A fábrica de sorvete recebe o leite em galões, que são armazenados em um refrigerador, sem identificação da fazenda de proveniência. Um galão é escolhido ao acaso e seu conteúdo é testado para verificar adulteração.

(a) Qual a probabilidade de que o galão contenha leite adulterado?

(b) Sabendo que o teste constatou que o leite do galão está adulterado, obtenha a probabilidade de que o galão seja proveniente da fazenda 1.

49. Considere duas moedas, uma honesta e a outra que resulta cara em cada lançamento com probabilidade 0,6. Uma moeda é escolhida ao acaso e, após lançada quatro vezes, observa-se cara três vezes. Qual a probabilidade de que a moeda escolhida tenha sido a moeda honesta?

50. Todo domingo, um pescador vai a um de três lugares perto de sua casa: ao mar com probabilidade $1/2$, a um rio com probabilidade $1/4$, ou a um lago com probabilidade $1/4$. No mar, ele consegue fregar um peixe com probabilidade 80%; no rio e no lago essa probabilidade vale 40% e 60%, respectivamente. Se em um domingo o pescador volta para casa sem peixe algum, para onde é mais provável que tenha ido?

51. Jogamos um dado honesto e em seguida lançamos tantas moedas honestas como os pontos indicados no dado.

(a) Qual a probabilidade de obter quatro caras?

(b) Dado que foram obtidas quatro caras, qual a probabilidade de que o dado tenha mostrado seis pontos?

52. O estoque de um armazém consiste de caixas de lâmpadas de qualidade alta, média ou baixa, nas proporções respectivas 1 : 2 : 2. Para cada um dos três tipos, a probabilidade de uma lâmpada ser defeituosa é 0, 0,1 e 0,2. Se uma caixa é selecionada ao acaso e duas lâmpadas retiradas dela são perfeitas, qual a probabilidade de que contenha lâmpadas de alta qualidade?

53. A caixa I contém 4 bolas brancas e 2 pretas, a caixa II contém 3 bolas brancas e 1 preta e a caixa III contém 1 bola branca e 2 pretas.

(a) Extraí-se uma bola de cada caixa. Determine a probabilidade de que todas as bolas sejam brancas.

(b) Seleciona-se uma caixa e dela extraí-se uma bola. Determine a probabilidade de que a bola extraída seja branca.

- (c) Calcule em (b) a probabilidade de que a primeira caixa tenha sido escolhida, dado que a bola extraída é branca.

54. Uma urna contém a bolas azuis e b bolas brancas. Uma bola é retirada aleatoriamente e depois reposta à urna com mais c bolas da mesma cor. A seguir, retira-se ao acaso uma segunda bola da urna. Qual a probabilidade de que essa bola seja azul?

55. Em um restaurante, três cozinheiros A , B e C preparam um tipo especial de bolo, e com probabilidades respectivas 0,02, 0,03 e 0,05 a massa do bolo não cresce. Sabe-se que A prepara 50 por cento desses bolos, B 30 por cento e C 20 por cento. Se uma massa de bolo não cresceu, qual a probabilidade de que tenha sido preparada pelo cozinheiro A ?

56. Uma senhora da alta sociedade dá uma festa em sua mansão. Ao término da festa, ela descobre que sua coleção de joias foi roubada. Após as investigações, a polícia tem certeza de que o ladrão foi precisamente uma das 76 pessoas presentes à festa (entre convidados e garçons). Ademais, os investigadores encontram na cena do crime o perfil de DNA do ladrão, e sabe-se que este perfil de DNA ocorre em 2% de toda população. Dado que o DNA do Sr. João, o primeiro suspeito cujo DNA é analisado, combina com o perfil achado na cena do crime, qual é a probabilidade de que ele tenha roubado as joias?

57. Em uma cidade, os motoristas são parados pela polícia para fazer um teste sobre o teor de álcool no sangue. Suponha que a probabilidade de que um motorista detido esteja embriagado é 5% e que o teste realizado acerta o estado de embriaguez em 80% das ocasiões.

- (a) Qual a probabilidade de que o teste de um motorista detido resulte positivo?

Os motoristas cujos testes dão positivo são submetidos a um segundo exame, que nunca falha em um motorista sóbrio, porém tem probabilidade 10% de erro nos embriagados.

- (b) Dado que o segundo teste de um motorista resultou negativo, qual a probabilidade de que estava dirigindo com um índice alcoólico acima do permitido?

58. Lança-se um dado duas vezes. Considere os eventos

A : Obtém-se 2 ou 5 no primeiro lançamento.

B : A soma das faces obtidas nos dois lançamentos é pelo menos 7.

São A e B independentes?

59. Um dado é lançado duas vezes. Defina os eventos

A : A soma das faces obtidas é par.

B : A soma das faces obtidas é divisível por 3.

São A e B independentes?

60. Nove crianças escolhem lugares ao acaso em três fileiras de três carteiras. Sejam os eventos

A: João e Pedro sentam-se na mesma fileira.

B: Ambos João e Pedro sentam-se em uma das quatro carteiras de canto.

São *A* e *B* independentes?

61. Um experimento consiste em lançar duas vezes uma moeda honesta. Considere os eventos

A: O primeiro lançamento resulta em cara.

B: O segundo lançamento resulta em cara.

C: O resultado do primeiro lançamento coincide com o resultado do segundo lançamento.

Prove que *A*, *B* e *C* são independentes dois a dois, porém não são independentes.

62. Duas estudantes, Gabriela e Juliana, estão matriculadas em uma turma de Cálculo. Gabriela comparece a 80% das aulas, Juliana a 60%, e suas presenças são independentes. Qual a probabilidade de que, em determinado dia,

(a) pelo menos uma das estudantes compareça à aula?

(b) apenas uma delas esteja presente?

63. Um livro é lido por três revisores, de modo independente. As probabilidades de que eles detectem um erro específico são 0,92, 0,85 e 0,95, respectivamente. Calcule a probabilidade de que o erro seja percebido por

(a) ao menos um revisor.

(b) exatamente dois revisores.

64. Suponha que 30% da população de uma cidade pretende votar no candidato *A* na próxima eleição municipal. Calcule a probabilidade de, em uma amostra de 10 pessoas, haver ao menos um eleitor de *A*. Esclareça as suas hipóteses.

65. Um par de dados honestos é lançado repetidamente. Supondo que os ensaios são independentes, qual a probabilidade de que um total 8 apareça antes de um total 7?

Sugestão: Defina A_n o evento de que os totais 7 e 8 não ocorrem nos primeiros $n - 1$ ensaios e ocorre um total 8 no n -ésimo ensaio.

66. Existem duas estradas de *A* a *B* e duas estradas de *B* a *C*. Cada uma das quatro estradas é bloqueada por queda de barreira com probabilidade $p = 1/10$, independentemente das demais. Determine a probabilidade de que exista uma estrada aberta de *A* a *B* dado que não existe um caminho aberto de *A* a *C*.

Se, além disso, existe uma estrada direta de *A* a *C*, esta estrada sendo bloqueada com probabilidade $p = 1/10$ independentemente das demais, encontre a probabilidade condicional pedida.

67. Duas pessoas lançam uma moeda honesta n vezes, de forma independente. Mostre que a probabilidade delas obterem igual número de caras é a mesma que a de obterem ao todo n caras.

68. (a) Sejam A e B dois eventos com probabilidade positiva. Se a ocorrência de B faz de A um evento mais provável, então a ocorrência de A faz de B um evento mais provável?

(b) Mostre que se A é um evento tal que $P(A)$ é igual a 0 ou 1, então A é independente de todo evento B .

69. Suponha que $\Omega = \{1, \dots, p\}$, onde p é um número primo. Seja $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e, para $A \in \mathcal{F}$, defina $P(A) = |A|/p$. Mostre que se A e B são independentes, então ao menos um dos dois eventos é \emptyset ou Ω .

Sugestão: Prove que p é um divisor de $|A||B|$.

70. Seja P uma probabilidade sobre um espaço amostral Ω e suponha que A é um evento com $0 < P(A) < 1$. Mostre que A e B são independentes se e somente se $P(B|A) = P(B|A^c)$.

Sugestão: Use que $P(A^c \cap B) + P(A \cap B) = P(B)$.

71. Seja P uma probabilidade sobre um espaço amostral Ω .

(a) Mostre que se A e B são eventos tais que $P(A) < 1$, $P(B) > 0$ e $P(A|B) = 1$, então $P(B^c|A^c) = 1$.

(b) Prove que se E , F e G são eventos tais que $P(F \cap G) > 0$ e $P(F \cap G^c) > 0$, então

$$P(E|F) = P(E|F \cap G)P(G|F) + P(E|F \cap G^c)P(G^c|F).$$

Conjuntos limites e continuidade da probabilidade*

72*. **Continuidade por baixo e por cima da probabilidade:** Sejam A, A_1, A_2, \dots eventos em um espaço de probabilidade.

(a) Suponha que $A_n \uparrow A$ e defina $B_1 = A_1$ e $B_k = A_k \cap A_{k-1}^c$, $k \geq 2$.

(a1) Mostre que B_1, B_2, \dots são dois a dois disjuntos, $A_n = \bigcup_{k=1}^n B_k$ e $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$.

(a2) Use a aditividade finita e enumerável para provar que $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$.

(b) Suponha que $A_n \downarrow A$. Mostre que $A_n^c \uparrow A^c$ e conclua que $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$.

73*. Uma moeda com probabilidade p de cara em cada lançamento é lançada infinitas vezes, de maneira independente. Definimos os eventos

A_n : Ocorre pelo menos uma cara nos n primeiros lançamentos.

A : Ocorre pelo menos uma cara.

Mostre que

(a) $A_n \uparrow A$.

$$(b) P(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < p \leq 1, \\ 0 & \text{se } p = 0. \end{cases}$$

74*. Sejam A, B, A_1, A_2, \dots eventos em um espaço de probabilidade. Suponha que $A_n \uparrow A$ e que B é independente de A_n para todo $n \geq 1$. Prove que A e B são independentes.

Solução. Como $A_n \uparrow A$, temos que:

$$(i) A_n \cap B \subset A_{n+1} \cap B \text{ para todo } n \geq 1 \text{ e}$$

$$(ii) \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap B = A \cap B,$$

ou seja, $A_n \cap B \uparrow A \cap B$. Então, usando a continuidade por baixo da probabilidade e a independência entre A_n e B ,

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n \cap B) = \lim_{n \rightarrow \infty} [P(A_n) P(B)] \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \right) P(B) = P(A) P(B). \end{aligned}$$

Assim, A e B são independentes.

75*. Subaditividade finita e enumerável: Sejam A_1, A_2, \dots eventos em um espaço de probabilidade. Demonstre que

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) &\leq \sum_{k=1}^n P(A_k) \text{ para todo } n \geq 2 \quad (\text{Subaditividade finita}) \text{ e} \\ P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \quad (\text{Subaditividade enumerável}). \end{aligned}$$

Sugestão: Prove a subaditividade finita por indução em n . Para mostrar a subaditividade enumerável, comece com

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

e use que $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k \uparrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ quando $n \rightarrow \infty$.

76*. Sejam A_1, A_2, \dots eventos independentes em um espaço de probabilidade. Mostre que

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) &\geq 1 - \exp\left\{-\sum_{k=1}^n P(A_k)\right\}. \\ \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \infty &\implies P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = 1. \end{aligned}$$

Sugestão: Para mostrar a desigualdade, use que $1 - x \leq e^{-x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

77*. Sejam A_1, A_2, \dots eventos independentes em um espaço de probabilidade. Prove que

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \prod_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

78*. Demonstre que

$$\begin{aligned} \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n\right)^c &= \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n^c, \\ \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right)^c &= \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n^c, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n) &\subset \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \cap \limsup_{n \rightarrow \infty} B_n, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} (A \cap B_n) &= A \cap \limsup_{n \rightarrow \infty} B_n, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \cup \limsup_{n \rightarrow \infty} B_n, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) &\supset \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \cup \liminf_{n \rightarrow \infty} B_n, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} (A \cup B_n) &= A \cup \liminf_{n \rightarrow \infty} B_n, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \cap \liminf_{n \rightarrow \infty} B_n, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \cap \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n\right)^c &= \limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap A_{n+1}^c) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n^c \cap A_{n+1}), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n) = A \cap B \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) = A \cup B. \end{aligned}$$

79*. **Continuidade da probabilidade:** Sejam A_1, A_2, \dots eventos em um espaço de probabilidade. Para $n \geq 1$, defina $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ e $C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

(a) Prove que

$$B_n \uparrow \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \quad \text{e} \quad C_n \downarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

(b) Usando que $B_n \subset A_n \subset C_n$ para todo n , mostre que

$$P\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \leq P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right).$$

(c) Conclua que se existe $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, então existe $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$ e $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$.

80*. Sejam B_1, B_2, \dots eventos independentes tais que $P(B_n) < 1$ para todo $n \geq 1$. Demonstre que

$$P(B_n \text{ infinitas vezes}) = 1 \quad \iff \quad P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = 1.$$

Dê um exemplo para mostrar que a condição $P(B_n) < 1$ para todo $n \geq 1$ não pode ser dispensada.

Sugestão: Para provar a implicação \Leftarrow , defina $A_k = B_k^c$, $k = 1, 2, \dots$, e, usando o exercício 77, mostre que $P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 0$ para todo $n \geq 1$.

Respostas

1. (a) $\Omega = \{F, M\}^2 = \{F, M\} \times \{F, M\} = \{(s_1, s_2) : s_i \in \{F, M\}, i = 1, 2\}$, $|\Omega| = 4$.
 (b) $\Omega = \{0, 1, 2\}$, $|\Omega| = 3$.
 (c) $\Omega = (0, \infty)^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$, infinito não-enumerável.
 (d) $\Omega = \{0, 1, \dots, 20\}$, $|\Omega| = 21$.
 (e) $\Omega = \{1, \dots, 6\}^4 = \{(r_1, \dots, r_4) : r_i \in \{1, \dots, 6\}, i = 1, \dots, 4\}$, $|\Omega| = 1296$.
 (f) $\Omega = \{4, 5, \dots, 24\}$, $|\Omega| = 21$.
 (g) $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $|\Omega| = 5$.
 (h) $\Omega = \{(x_1, \dots, x_6) \in \mathbb{N}^6 : \sum_{i=1}^6 x_i = 4\}$, $|\Omega| = 126$.
 (i) $\Omega = \{1, \dots, 8\}^3 = \{(b_1, b_2, b_3) : b_i \in \{1, \dots, 8\}, i = 1, 2, 3\}$, $|\Omega| = 512$.
 (j) $\Omega = \{(x_1, \dots, x_8) \in \mathbb{N}^8 : \sum_{i=1}^8 x_i = 3\}$, $|\Omega| = 120$.
 (k) $\Omega = \{(b_1, b_2, b_3) : b_i \in \{1, \dots, 8\}, i = 1, 2, 3 \text{ e } b_1, b_2, b_3 \text{ todos distintos}\}$, $|\Omega| = 336$.
 (l) Ω é o conjunto de todos os subconjuntos com tamanho 3 de $\{1, \dots, 8\}$, $|\Omega| = 56$.
 (m) $\Omega = \mathbb{N}$, infinito enumerável.
 (n) $\Omega = \{1, 2, \dots\}$, infinito enumerável.
 (o) $\Omega = \mathbb{N}^2$, infinito enumerável.
 (p) $\Omega = (0, \infty)$, infinito não-enumerável.
 (q) $\Omega = [0, \infty)$, infinito não-enumerável.
 (r) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, infinito não-enumerável.
 (s) $\Omega = [0, 1]$, infinito não-enumerável.
 (t) $\Omega = \{0, 1, \dots, 7\} \times [0, \infty) = \{(i, x) : i \in \{0, 1, \dots, 7\} \text{ e } x \in [0, \infty)\}$, infinito não-enumerável.
2. (a) $A \cap B^c \cap C^c$ (b) $A \cap B \cap C^c$ (c) $A \cap B \cap C$ (d) $A \cup B \cup C$
 (e) $A^c \cap B^c \cap C^c = (A \cup B \cup C)^c$
 (f) $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$
 (g) $(A^c \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$
 (h) $(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C) = \text{Complementar de (g)}$
4. $4/9$, muda o raciocínio mas não o resultado.
5. $325/833$

6. (a) $1/30$ (b) $1/210$ (c) $2/5$ (d) $2/3$ (e) $1/42$

7. $5,4 \cdot 10^{-5}$ e $0,044$.

8. (a) $1/420$ (b) $41/42$ (c) $7/15$ (d) $1/1440$

9. (a) $0,310$ (b) $0,952$ (c) $0,999$

10. $1/2$

11. (a) $0,236$ (b) $0,121$

12. (a) $1/18$ (b) $1/6$ (c) $1/2$

13. $9/10$

14. $7/99$

15. $2(n - r - 1)/(n(n - 1))$

16. (a) $2^n n!/(2n)!$ (b) $2^n / \binom{2n}{n}$

17. (a) $\binom{n}{2r} 2^{2r} / \binom{2n}{2r}$ (b) $n \binom{n-1}{2r-2} 2^{2r-2} / \binom{2n}{2r}$ (c) $\binom{n}{2} \binom{n-2}{2r-4} 2^{2r-4} / \binom{2n}{2r}$

$99/323$ (Complementar do evento em (a) e Princípio da Inclusão-Exclusão).

18. A probabilidade é igual a $a/(a+b)$ em ambos os casos. O espaço amostral no item (a) consiste das $(a+b)!$ ordenações entre as bolas; em (b) é formado pelas $(a+b)!/(a!b!)$ permutações com elementos repetidos.

19. Há uma correspondência biunívoca entre as escolhas de r números dentre os números de 1 a n sem haver dois consecutivos e as escolhas (sem restrições) de r números dentre os números de 1 a $n - (r - 1)$. A probabilidade pedida é igual a $\binom{n+1-r}{r} / \binom{n}{r}$.

A probabilidade de ao menos uma seguida no sorteio da Mega Sena é $42,1\%$.

20. $p(i) = \frac{2i}{n(n+1)}$, $i = 1, \dots, n$

21. (a) $1/2$ (b) $3/4$ (c) $11/20$ (d) $1/20$ (e) $3/10$ (f) $7/20$ (g) $9/20$ (h) $4/5$

22. (a) $0,4$ (b) $0,1$ (c) $0,1$

23. (a) 70% (b) 2%

24. (a) $1/2$ (b) $8/25$ (c) $149/198$

25. (a) 0 (b) 0,2 (c) 0,12 (d) 0,68 (e) 0,11 (f) 0,1

29. 12/35

30. 6055/8568

31. 903/1012

32. 0,051

33. $2,5 \cdot 10^{-11}$

34. $\sum_{k=0}^{n-m} \binom{n}{k} (-1)^k a_k^d$, onde $a_k = a_k(n, m) = \binom{n-k}{m} \binom{n}{m}^{-1}$

36. 14/15

37. (a) 319/324 (b) 203/23328 (c) 7/792

38. Defina V_i o evento de selecionar a bola vermelha na i -ésima extração e mostre que $P(V_i) = 1/3$ para $i = 1, 2, 3$.

39. 31/210

40. (a) 1/33 (b) 1/65

41. 54/343

42. (a) $\binom{n}{k} (k-1)! (n-k)! / n! = 1/k$ (b) $1/k!$ (c) k/n

43. (a) 6/7 (b) 3/4

44. (a) 2/5 (b) 3/7

45. (a) Não (b) 4/15 (c) 16/35 (d) 1/6

46. (a) 87/160 (b) 38/145 (c) 23/80 (d) 341/365

48. (a) 13/200 (b) 8/13

49. 0,42

50. Ao rio (Probabilidades condicionais: mar = 2/7, rio = 3/7 e lago = 2/7).

51. (a) 29/384 (b) 15/29

52. $10/39$

53. (a) $1/6$ (b) $7/12$ (c) $8/21$

54. $a/(a + b)$

55. $0,345$

56. $2/5$

57. (a) $23/100$ (b) $2/97$

58. Sim: $P(A \cap B) = 7/36$, $P(A) = 1/3$ e $P(B) = 7/12$.

59. Sim: $P(A \cap B) = 1/6$, $P(A) = 1/2$ e $P(B) = 1/3$.

60. Não: $P(A \cap B) = 1/18$, $P(A) = 1/4$ e $P(B) = 1/6$.

62. (a) $0,92$ (b) $0,44$

63. (a) $0,9994$ (b) $0,2348$

64. $0,9718$

65. $5/11$

66. $99/199$ em ambos os casos.

68. (a) Sim. Quando afirmamos que a ocorrência de B faz de A um evento mais provável, queremos dizer que $P(A|B) > P(A)$.

(b) Considere separadamente os casos $P(A) = 0$ e $P(A) = 1$. No segundo, use que $P(A \cap B) = P(B) - P(A^c \cap B)$.

Variáveis aleatórias

1. Definições

1.1. Uma *variável aleatória* X em um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) é uma função a valores reais definida em Ω , tal que

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

As variáveis aleatórias que assumem valores em um conjunto finito ou infinito enumerável são chamadas *discretas* e aquelas que assumem valores em um intervalo da reta real são chamadas *contínuas*.

1.2. A *função de distribuição acumulada* de uma variável aleatória X é a função $F = F_X$ definida por

$$F(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Propriedades fundamentais de uma função de distribuição:

(F1) F é uma função não-decrescente: se $x < y$, então $F(x) \leq F(y)$.

(F2) F é contínua à direita: se $x_n \downarrow x$, então $F(x_n) \downarrow F(x)$.

(F3) Se $x_n \downarrow -\infty$, então $F(x_n) \downarrow 0$; se $x_n \uparrow +\infty$, então $F(x_n) \uparrow 1$.

Outras propriedades:

(i) Para $x, y \in \mathbb{R}$ com $x < y$, $P(x < X \leq y) = F(y) - F(x)$.

(ii) Para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$P(X = x) = F(x) - F(x^-) = \text{Salto de } F \text{ no ponto } x,$$

onde $F(x^-) = \lim_{\substack{x_n \uparrow x, \\ x_n \neq x}} F(x_n)$ é o limite lateral à esquerda de F em x .

Assim, F é contínua em x se e somente se $P(X = x) = 0$.

(iii) Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $P(X < x) = F(x^-)$.

(iv) O conjunto de pontos de descontinuidade de F é finito ou enumerável.

Observação. Uma função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz (F1), (F2) e (F3) é a função de distribuição de alguma variável aleatória X .

1.3. (a) A variável aleatória X é *discreta* se assume um número finito ou enumerável de valores, isto é, se existe um conjunto finito ou enumerável $\{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ tal que $X(\omega) \in \{x_1, x_2, \dots\}$, $\forall \omega \in \Omega$. A função $p(x) = P(X = x)$ é chamada *função de probabilidade* de X .

(b) A variável aleatória X é (*absolutamente*) *contínua* se existe uma função $f(x) \geq 0$ tal que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, dizemos que f é uma *função densidade de probabilidade* de X .

Observação. Uma variável aleatória discreta é definida quando definimos os seus valores possíveis $\{x_i\}_{i \geq 1}$ e as respectivas probabilidades $\{p_i\}_{i \geq 1}$ satisfazendo

$$p_i > 0, \quad \forall i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Uma variável aleatória contínua é definida quando definimos uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

1.4. A *função indicadora* de um evento A é a variável aleatória discreta que assume os valores 1 ou 0 conforme A ocorra ou não, ou seja,

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A, \\ 0 & \text{se } \omega \notin A. \end{cases}$$

1.5. Para qualquer $B \subset \mathbb{R}$ (boreliano),

$$P(X \in B) = \begin{cases} \sum_{i: x_i \in B} p(x_i) & \text{se } X \text{ é discreta,} \\ \int_B f(x) dx & \text{se } X \text{ é contínua com densidade } f. \end{cases}$$

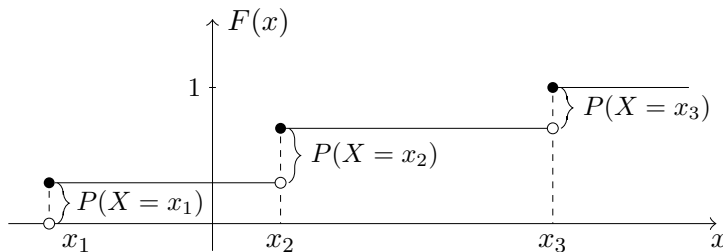


Figura 3.1: Função de distribuição de uma variável aleatória discreta.

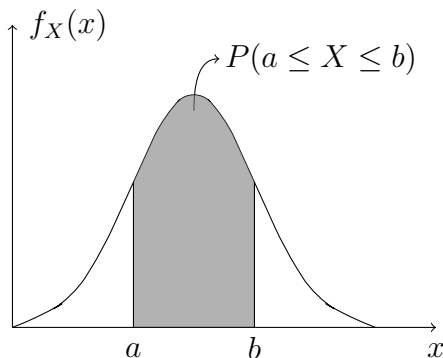


Figura 3.2: Densidade de uma variável aleatória contínua.

2. Variáveis aleatórias conjuntamente distribuídas

2.1. Sejam X e Y variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço de probabilidade. A *função de distribuição acumulada conjunta* do par (X, Y) é definida por

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

As *funções de distribuição marginais* de X e Y são respectivamente dadas por

$$F_X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y), \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

2.2. Sejam X e Y variáveis aleatórias discretas definidas no mesmo espaço de probabilidade. A *função de probabilidade conjunta* de X e Y é

$$p(x, y) = P(X = x, Y = y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Note que $p(x, y) > 0$ apenas para (x, y) em um subconjunto finito ou enumerável de \mathbb{R}^2 . As *funções de probabilidade marginais* de X e Y são

$$p_X(x) = \sum_y p(x, y), \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad p_Y(y) = \sum_x p(x, y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

2.3. Sejam X e Y variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço de probabilidade. Dizemos que X e Y são *conjuntamente contínuas* se existe uma função $f(x, y) \geq 0$, chamada uma *função densidade de probabilidade conjunta*, tal que para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$,

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv.$$

Se X e Y são conjuntamente contínuas com função densidade conjunta $f(x, y)$, então são individualmente contínuas com *funções densidade marginais* respectivas

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx, y \in \mathbb{R}.$$

2.4. É natural a extensão das definições e resultados anteriores para o caso de n variáveis aleatórias X_1, \dots, X_n definidas no mesmo espaço de probabilidade. Nesse caso, chamamos $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ de *vetor aleatório* ou *variável aleatória n -dimensional*.

3. Independência de variáveis aleatórias

3.1. As variáveis aleatórias X_1, \dots, X_n são *independentes* se para quaisquer conjuntos $A_i \subset \mathbb{R}$ (borelianos), $i = 1, \dots, n$,

$$P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in A_i).$$

3.2. Sejam X_1, \dots, X_n variáveis aleatórias com função de distribuição conjunta $F(x_1, \dots, x_n)$ e funções de distribuição marginais F_{X_1}, \dots, F_{X_n} , respectivamente. Então, X_1, \dots, X_n são independentes se e somente se

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \dots F_{X_n}(x_n)$$

para qualquer escolha de x_1, \dots, x_n . (Em palavras, a função de distribuição conjunta se fatora como o produto das funções de distribuição individuais).

3.3. Critério para independência no caso discreto:

As variáveis aleatórias discretas X_1, \dots, X_n são independentes se e somente se

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \dots P(X_n = x_n)$$

para qualquer escolha de x_1, \dots, x_n .

3.4. Critério para independência no caso contínuo:

(a) Se X_1, \dots, X_n são variáveis aleatórias contínuas e independentes, com densidades respectivas f_{X_1}, \dots, f_{X_n} , então a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n), (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

é uma densidade conjunta de X_1, \dots, X_n .

(b) Suponha que X_1, \dots, X_n são variáveis aleatórias conjuntamente contínuas, cuja função densidade conjunta f satisfaz

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n), \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

onde f_1, \dots, f_n são funções tais que $f_i(x) \geq 0$ e $\int_{-\infty}^{\infty} f_i(x) dx = 1$ para todo $i = 1, \dots, n$. Então, X_1, \dots, X_n são independentes e f_i é uma densidade de X_i para $i = 1, \dots, n$.

Corolário: Sejam X_1, \dots, X_n variáveis aleatórias conjuntamente contínuas com função densidade conjunta $f(x_1, \dots, x_n)$ e funções densidade marginais f_{X_1}, \dots, f_{X_n} , respectivamente. Então, X_1, \dots, X_n são independentes se e somente se

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n)$$

para qualquer escolha de x_1, \dots, x_n .

3.5. Uma coleção infinita de variáveis aleatórias é *independente* se toda subcoleção finita dessas variáveis aleatórias é independente.

3.6. Se X_1, \dots, X_n são variáveis aleatórias independentes, então funções contínuas de famílias disjuntas das X_i 's são independentes.

3.7. Quando falamos de variáveis aleatórias, a abreviatura i.i.d. significa independentes e identicamente distribuídas.

4. Modelos de distribuições discretas

Como é usual quando se trata de variáveis aleatórias, lê-se o símbolo \sim como “tem distribuição”.

1. $X \sim$ Uniforme discreta sobre o conjunto $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ se tem função de probabilidade dada por

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n}, i = 1, \dots, n.$$

X representa a escolha ao acaso de um elemento do conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$. O caso particular em que $x_1 = 1, \dots, x_n = n$ é denotado por $X \sim$ Uniforme Discreta(n).

2. $X \sim$ Bernoulli(p), $0 \leq p \leq 1$, se tem função de probabilidade dada por

$$P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}, x = 0, 1.$$

X é a função indicadora da ocorrência de sucesso em um ensaio de Bernoulli (experimento que tem somente dois resultados possíveis: sucesso e fracasso, com probabilidades respectivas p e $(1 - p)$).

3. $X \sim$ Binomial(n, p), $n \geq 1$ inteiro e $0 \leq p \leq 1$, se tem função de probabilidade dada por

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, x = 0, 1, \dots, n.$$

X é o número de sucessos obtidos em n ensaios de Bernoulli independentes com probabilidade de sucesso p em cada ensaio.

É importante observar que uma variável aleatória com distribuição Binomial(n, p) pode ser escrita como a soma de n variáveis aleatórias independentes com distribuição Bernoulli(p).

Propriedade: Se $X \sim$ Binomial(n, p), onde $0 < p < 1$, então, à medida que k vai de 0 a n , $P(X = k)$ primeiro cresce e depois decresce, atingindo seu valor máximo quando k é o maior inteiro menor ou igual a $(n + 1)p$.

4. $X \sim$ Poisson(λ), $\lambda > 0$, se tem função de probabilidade dada por

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, x = 0, 1, \dots$$

5. $X \sim$ Geométrica(p), $0 < p \leq 1$, se tem função de probabilidade dada por

$$P(X = x) = p(1 - p)^{x-1}, x = 1, 2, \dots$$

X é o número de ensaios necessários para obter o primeiro sucesso quando se realiza uma sequência de ensaios de Bernoulli independentes com probabilidade de sucesso p em cada ensaio.

Propriedade fundamental: Falta de memória.

$$P(X \geq m + n | X \geq m) = P(X \geq n) \text{ para } m, n = 1, 2, \dots$$

6. $X \sim$ Binomial Negativa(r, p), $r \geq 1$ inteiro e $0 < p \leq 1$, se tem função de probabilidade dada por

$$P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}, \quad x = r, r+1, \dots$$

X é o número de ensaios necessários para obter o r -ésimo sucesso quando se realiza uma sequência de ensaios de Bernoulli independentes com probabilidade de sucesso p em cada ensaio.

Cumpramos enfatizar que uma variável aleatória com distribuição Binomial Negativa(r, p) pode ser escrita como a soma de r variáveis aleatórias independentes com distribuição Geométrica(p).

7. $X \sim$ Hipergeométrica(n, R, N), n, R, N inteiros, $n \leq N$, $R \leq N$, se tem função de probabilidade dada por

$$P(X = x) = \binom{N-R}{n-x} \binom{R}{x} \binom{N}{n}^{-1},$$

para x inteiro tal que $\max(0, n - N + R) \leq x \leq \min(n, R)$. X é o número de bolas vermelhas em uma amostra de tamanho n , extraída sem reposição de uma urna com N bolas, das quais R são vermelhas e $N - R$ azuis.

5. Modelos de distribuições contínuas

1. $X \sim$ Uniforme(a, b), $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, se tem densidade dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a < x < b.$$

X representa um ponto escolhido ao acaso no intervalo (a, b) .

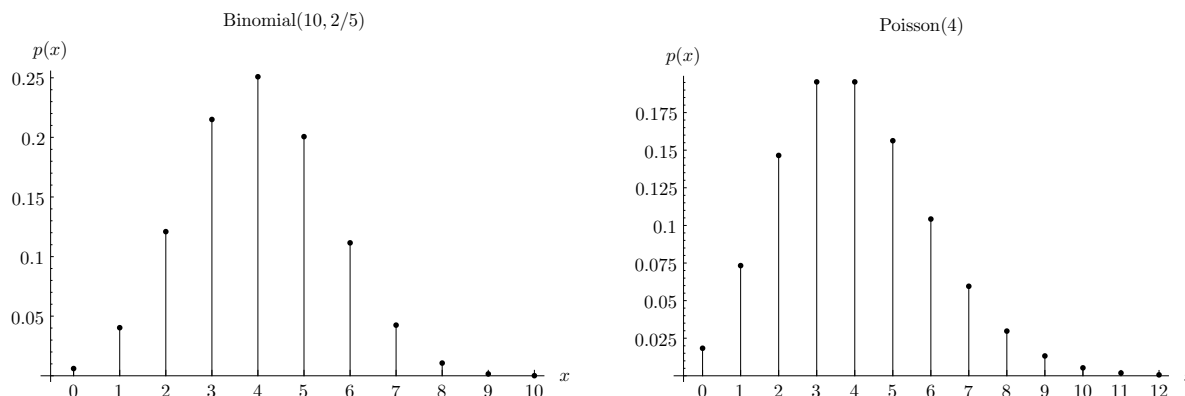


Figura 3.3: Funções de probabilidade das distribuições Binomial(10, 2/5) e Poisson(4).

2. $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, se tem densidade dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Essa distribuição também é chamada distribuição de Laplace-Gauss. O gráfico da densidade f_X é uma curva com forma de sino, centrada no ponto $x = \mu$. Essa curva, ilustrada na Figura 3.4, é denominada *normal* ou *gaussiana*. O parâmetro σ é uma medida da variabilidade da distribuição de X : quanto maior o valor de σ , mais variabilidade há na curva (ou seja, menos concentrada perto de μ a densidade é). Pode-se demonstrar que:

- (i) A função f_X é simétrica em torno de μ : $f_X(\mu + x) = f_X(\mu - x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- (ii) Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $F_X(\mu + x) + F_X(\mu - x) = 1$.
- (iii) $x = \mu$ é o único ponto de máximo de f_X , e o valor máximo é $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$.
- (iv) f_X tem dois pontos de inflexão (pontos de mudança de concavidade): $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$.
- (v) $f_X(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \pm\infty$.

A distribuição normal de parâmetros $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ é conhecida como normal padrão. Sua importância deriva do fato de que se pode obter uma variável aleatória normal padrão a partir de uma normal qualquer. De fato, se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

A função distribuição da normal padrão, denotada por $\Phi(\cdot)$, é tabelada e satisfaz $\Phi(z) + \Phi(-z) = 1$ para todo z . A partir dela, podem-se obter probabilidades para uma variável aleatória normal qualquer.

3. $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$, $\lambda > 0$, se tem densidade dada por

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0.$$

Propriedade fundamental: Falta de memória.

$$P(X \geq s + t | X \geq s) = P(X \geq t) \text{ para } s, t \in \mathbb{R} \text{ com } s \geq 0 \text{ e } t \geq 0.$$

4. $X \sim \text{Gama}(\alpha, \lambda)$, $\alpha > 0, \lambda > 0$, se tem densidade dada por

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, x \geq 0.$$

Observação. A função gama de Euler $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0,$$

e possui as seguintes propriedades:

(i) $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$, $\alpha > 0$.

(ii) $\Gamma(n + 1) = n!$ para $n \geq 0$ inteiro.

Frequentemente, é útil saber que

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha} \text{ se } \alpha > 0 \text{ e } \lambda > 0.$$

5. $X \sim \text{Beta}(a, b)$, $a > 0, b > 0$, se tem densidade dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}, 0 \leq x \leq 1.$$

Observação. A função beta de Euler $B : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx, a > 0, b > 0,$$

e satisfaz $B(a, b) = \Gamma(a) \Gamma(b) / \Gamma(a + b)$.

6. $X \sim \text{Cauchy}(a, b)$, $a \in \mathbb{R}, b > 0$, se tem densidade dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi b \left\{ 1 + \left[\frac{(x-a)}{b} \right]^2 \right\}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A distribuição de Cauchy com parâmetros $a = 0$ e $b = 1$ é denominada Cauchy padrão.

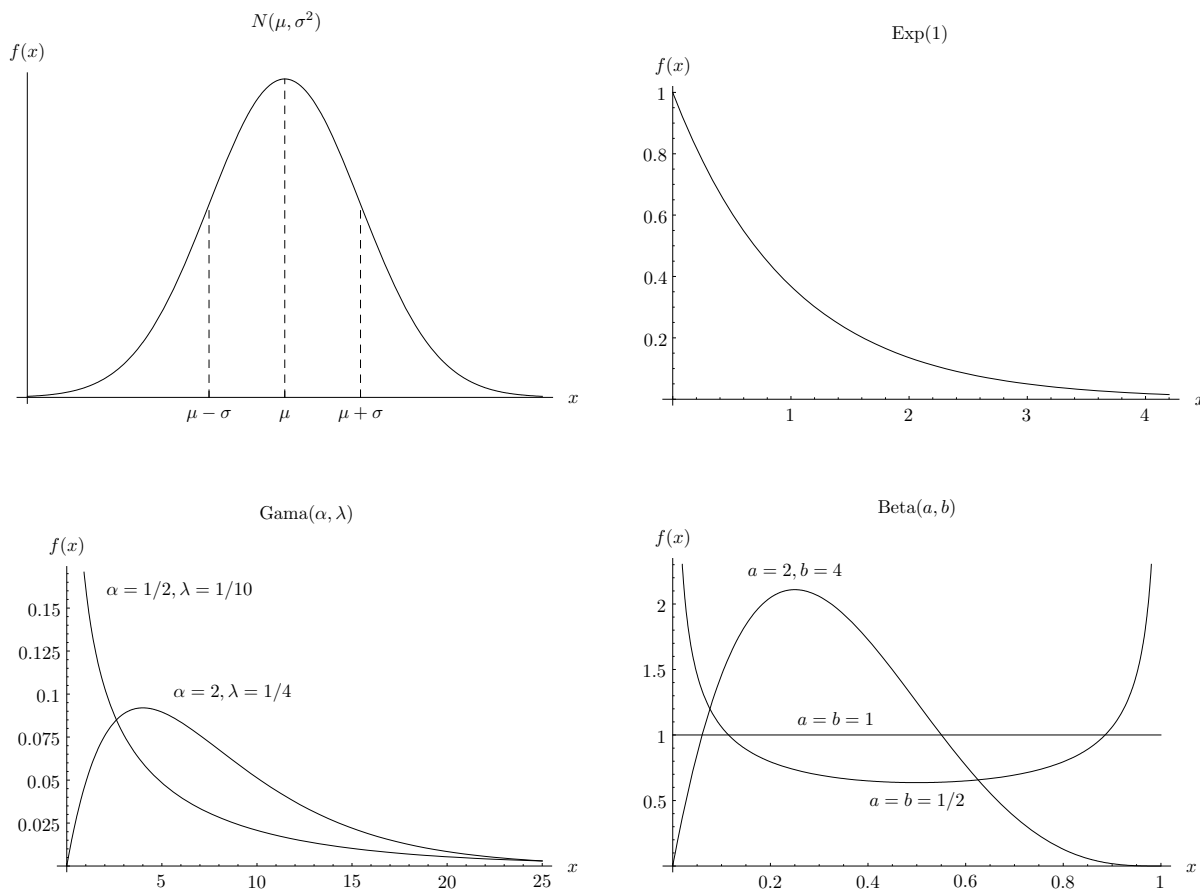


Figura 3.4: Densidades de algumas distribuições contínuas.

6. Aproximação de Poisson à Binomial

Seja $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, e consideremos $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$, com $\lambda = np$. Se n é grande e p é pequeno de modo que o valor de λ é moderado, podemos aproximar a função de probabilidade de X pela função de probabilidade de Y , isto é, para qualquer inteiro k entre 0 e n ,

$$P(X = k) \approx P(Y = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}.$$

Essa aproximação é justificada pelo Teorema de Poisson (veja-se **3.8** do Capítulo 5, p. 143). Em palavras, se são realizados n ensaios de Bernoulli independentes, cada um resultando em sucesso com probabilidade p , então, quando n é grande e p pequeno o suficiente a fazer np moderado, o número de sucessos que ocorrem tem aproximadamente distribuição de Poisson com parâmetro np . De acordo com duas regras práticas, a aproximação é considerada boa se $n \geq 20$ e $p \leq 0,05$ ou se $n \geq 100$ e $np \leq 10$.

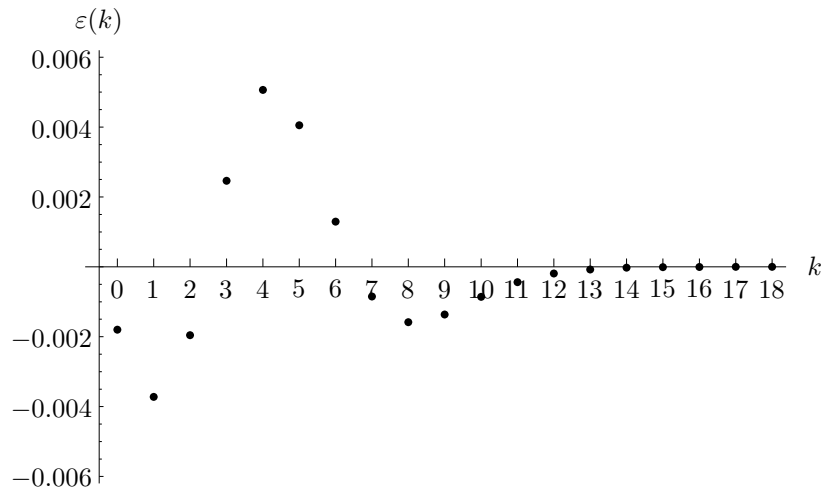


Figura 3.5: Gráfico da função $\varepsilon(k) = P(X = k) - P(Y = k)$, $k = 0, \dots, 18$, onde $X \sim \text{Binomial}(80, 1/20)$ e $Y \sim \text{Poisson}(4)$.

7. Aproximação Normal à Binomial

Se n é grande, então uma variável aleatória X com distribuição Binomial(n, p) tem aproximadamente a mesma distribuição de uma variável aleatória normal com parâmetros $\mu = np$ e $\sigma^2 = np(1-p)$. Essa afirmação é justificada pelo Teorema Central do Limite de De Moivre e Laplace (**3.7** do Capítulo 5, p. 143), o qual estabelece que, quando $n \rightarrow \infty$, a função de distribuição da variável

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

converge em todo ponto para a função de distribuição Φ da normal padrão.

Assim, para qualquer inteiro i entre 0 e n ,

$$P(X \leq i) = P\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{i - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \approx \Phi\left(\frac{i - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Visto que estamos aproximando uma variável aleatória discreta por uma variável contínua, podemos fazer o seguinte ajuste:

$$P(X \leq i) = P(X \leq i + 0,5) \approx \Phi \left(\frac{i + 0,5 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right),$$

e, para $i \leq j$ inteiros entre 0 e n ,

$$P(i \leq X \leq j) \approx \Phi \left(\frac{j + 0,5 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right) - \Phi \left(\frac{i - 0,5 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right).$$

Esse procedimento de subtrair e somar 0,5 é conhecido como *correção de continuidade de Fisher* e fornece uma aproximação ligeiramente mais precisa, sendo especialmente recomendável quando n não for muito grande.

Dois critérios frequentemente usados são que $np \geq 5$ e $n(1-p) \geq 5$ ou $np(1-p) \geq 10$ implicam uma boa aproximação.

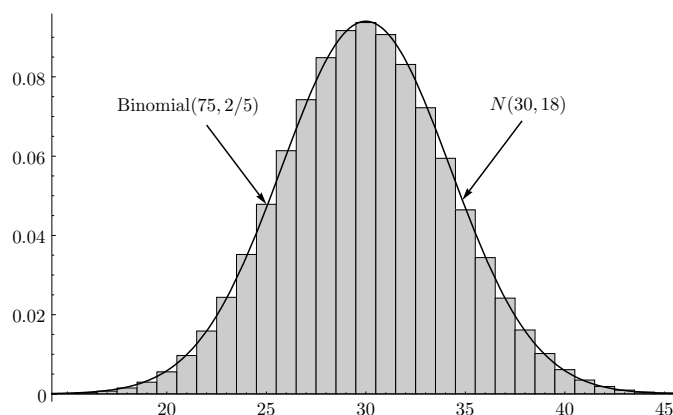


Figura 3.6: Função de probabilidade da distribuição Binomial(75, 2/5) e densidade da distribuição $N(30, 18)$.

8. Funções de variáveis aleatórias

8.1. Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade f tal que $f(x) > 0$ para $x \in (a, b)$, com $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Suponhamos que $\phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função estritamente monótona, diferenciável em (a, b) , e seja ϕ^{-1} a inversa de ϕ . Então, a variável aleatória definida por $Y = \phi(X)$ tem densidade dada por

$$g(y) = \begin{cases} f(\phi^{-1}(y)) \left| \frac{d\phi^{-1}(y)}{dy} \right| & \text{se } y \in \phi((a, b)), \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

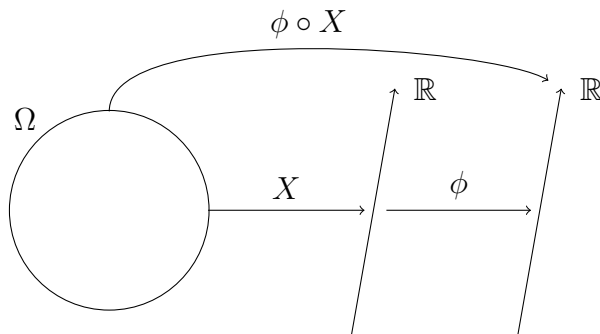


Figura 3.7: Função de uma variável aleatória.

Observação. Ao aplicar o resultado anterior, atente para os seguintes tópicos:

1. Obtenção da função inversa: $y = y(x) \iff x = x(y)$.
2. Cálculo da derivada da inversa $\frac{dx}{dy}$.
3. Estudo dos valores possíveis de Y .
4. Densidade de Y : $g(y) = f(x(y)) \left| \frac{dx}{dy} \right|$.

No caso da função não ser monótona, a regra geral é expressar F_Y em termos de F_X .

8.2. Método do Jacobiano: Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias conjuntamente contínuas com função densidade conjunta f e suponhamos que $f(x_1, x_2) > 0$ para $(x_1, x_2) \in A$, com A um conjunto aberto de \mathbb{R}^2 .

Definimos novas variáveis aleatórias Y_1 e Y_2 , obtidas a partir das primeiras pela transformação

$$y_1 = \phi_1(x_1, x_2), \quad y_2 = \phi_2(x_1, x_2). \tag{*}$$

Suponhamos que:

1. As funções (*) são contínuas e têm derivadas parciais $\partial y_i / \partial x_j$, $i, j = 1, 2$, contínuas em todos os pontos $(x_1, x_2) \in A$.
2. As funções (*) definem uma bijeção de A em A^* , onde A^* é a imagem da transformação.
3. A transformação inversa

$$x_1 = \psi_1(y_1, y_2), \quad x_2 = \psi_2(y_1, y_2), \tag{**}$$

que existe e é única, tem Jacobiano não-nulo em A^*

$$J(y_1, y_2) = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \det \begin{bmatrix} \partial x_1 / \partial y_1 & \partial x_1 / \partial y_2 \\ \partial x_2 / \partial y_1 & \partial x_2 / \partial y_2 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Então, Y_1 e Y_2 são conjuntamente contínuas com função densidade conjunta dada por

$$g(y_1, y_2) = \begin{cases} f(x_1, x_2) |J(y_1, y_2)| & \text{se } (y_1, y_2) \in A^*, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde x_1 e x_2 são dados por (**).

Como frequentemente é mais fácil obter $J(x_1, x_2) = \partial(y_1, y_2) / \partial(x_1, x_2)$, é importante recordar a seguinte relação:

$$J(y_1, y_2) = J(x_1, x_2)^{-1},$$

onde x_1 e x_2 são dados por (**).

Observação. O Método do Jacobiano é naturalmente estendido ao caso n -dimensional. Seja $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ um vetor aleatório com densidade $f(x_1, \dots, x_n)$ e suponhamos que $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_n) = \phi(\underline{X})$, com ϕ bijetora. A aplicação do método consiste, em resumo, dos seguintes itens:

1. Obtenção da transformação inversa: $\underline{y} = \underline{y}(\underline{x}) \iff \underline{x} = \underline{x}(\underline{y})$.
2. Cálculo do determinante Jacobiano da inversa $J(\underline{y}) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{y}}$.
3. Estudo dos valores possíveis de \underline{Y} .
4. Densidade de \underline{Y} : $g(\underline{y}) = f(\underline{x}(\underline{y})) |J(\underline{y})|$.

O Método do Jacobiano possui uma generalização no caso de a função ϕ ser bijetora quando restrita a cada uma de k regiões abertas disjuntas cuja união contém o valor de \underline{X} com probabilidade 1. O leitor interessado pode olhar o Teorema 2.1' da Seção 2.7 de James [15] e o exercício 105.

8.3. (a) Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes, a valores inteiros, com funções de probabilidade p_X e p_Y , respectivamente. A *convolução* de p_X e p_Y é a função $p = p_X * p_Y$ definida por

$$p(z) = \sum_x p_X(x) p_Y(z - x), \quad z \in \mathbb{Z}.$$

A função $p(z)$ é a função de probabilidade da variável aleatória $Z = X + Y$.

(b) Sejam X e Y duas variáveis aleatórias contínuas e independentes, com funções densidade respectivas f_X e f_Y . A *convolução* de f_X e f_Y é a função $f = f_X * f_Y$ definida por

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Então, $Z = X + Y$ tem função densidade f .

8.4. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias contínuas e independentes, com funções densidade respectivas f_X e f_Y . Então,

(i) $X - Y$ tem função densidade dada por

$$f_{X-Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(x-z) dx, \quad z \in \mathbb{R}.$$

(ii) XY tem função densidade dada por

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) dx, \quad z \in \mathbb{R}.$$

(iii) Y/X tem função densidade dada por

$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) f_Y(xz) dx, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Observação. O exercício 106 ilustra como o Método do Jacobiano é útil na determinação das densidades da soma, diferença, produto e quociente de variáveis aleatórias contínuas.

8.5. Sejam X_1, \dots, X_k variáveis aleatórias independentes.

- Se $X_i \sim \text{Binomial}(n_i, p)$, $i = 1, \dots, k$, então $\sum_{i=1}^k X_i \sim \text{Binomial}(\sum_{i=1}^k n_i, p)$.
- Se $X_i \sim \text{Binomial Negativa}(r_i, p)$, $i = 1, \dots, k$, então $\sum_{i=1}^k X_i \sim \text{Binomial Negativa}(\sum_{i=1}^k r_i, p)$.
- Se $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, k$, então $\sum_{i=1}^k X_i \sim \text{Poisson}(\sum_{i=1}^k \lambda_i)$.
- Se $X_i \sim \text{Gama}(\alpha_i, \lambda)$, $i = 1, \dots, k$, então $\sum_{i=1}^k X_i \sim \text{Gama}(\sum_{i=1}^k \alpha_i, \lambda)$.
- Se $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \dots, k$, e a_1, \dots, a_k são números reais não todos nulos, então $\sum_{i=1}^k a_i X_i \sim N(\sum_{i=1}^k a_i \mu_i, \sum_{i=1}^k a_i^2 \sigma_i^2)$.

9. Estatísticas de ordem

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias i.i.d., contínuas com função densidade comum f e função de distribuição F . Defina Y_i a i -ésima menor de X_1, X_2, \dots, X_n . As variáveis aleatórias $Y_1 \leq Y_2 \leq \dots \leq Y_n$ são denominadas as *estatísticas de ordem* associadas a X_1, X_2, \dots, X_n .

A densidade conjunta de Y_1, \dots, Y_n é dada por

$$f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n) = n! f(y_1) \dots f(y_n), \quad y_1 < y_2 < \dots < y_n.$$

Para $i < j$, a densidade conjunta de Y_i e Y_j é dada por

$$f_{Y_i, Y_j}(x, y) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} [F(x)]^{i-1} [F(y) - F(x)]^{j-i-1} [1 - F(y)]^{n-j} f(x) f(y)$$

para $x < y$.

A densidade de Y_i é dada por

$$f_{Y_i}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} [F(x)]^{i-1} [1 - F(x)]^{n-i} f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Em particular, as densidades de $Y_1 = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ e $Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ são, respectivamente,

$$f_{Y_1}(x) = n f(x) [1 - F(x)]^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{e}$$

$$f_{Y_n}(x) = n f(x) [F(x)]^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

10. Modelos multidimensionais

1. **Distribuição multinomial:** Seja Ω o espaço amostral associado a um experimento aleatório, e suponhamos que $\{A_1, \dots, A_n\}$ é uma partição de Ω em n eventos. Obviamente, se $p_i = P(A_i)$, então $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Realizam-se m repetições independentes desse experimento. Seja X_i o número de vezes que ocorre o evento A_i nas m repetições. A variável n -dimensional (X_1, \dots, X_n) tem distribuição multinomial de parâmetros m, p_1, \dots, p_n . A função de probabilidade conjunta é dada por

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \frac{m!}{x_1! \dots x_n!} p_1^{x_1} \dots p_n^{x_n},$$

para $x_i \in \{0, 1, \dots, m\}$ com $x_1 + \dots + x_n = m$.

Note que $X_i \sim \text{Binomial}(m, p_i)$ para $i = 1, \dots, n$.

2. **Distribuição hipergeométrica multivariada:** Uma urna contém N bolas, das quais N_1 são da cor 1, N_2 da cor 2, \dots , N_r da cor r ($N = N_1 + \dots + N_r$). Retiram-se n bolas sem reposição ($n \leq N$), e seja X_i o número de bolas da cor i extraídas. A variável r -dimensional (X_1, \dots, X_r) tem distribuição hipergeométrica multivariada de parâmetros n, N_1, \dots, N_r, N . A função de probabilidade conjunta é dada por

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_r = x_r) = \binom{N_1}{x_1} \dots \binom{N_r}{x_r} \binom{N}{n}^{-1},$$

para $x_i \in \{0, 1, \dots, n\}$ com $x_1 + \dots + x_r = n$.

Observe que $X_i \sim \text{Hipergeométrica}(n, N_i, N)$ para $i = 1, \dots, r$.

3. **Distribuição uniforme:** Seja $G \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto tal que $\text{Vol}(G) > 0$, onde $\text{Vol}(G)$ é o volume n -dimensional de G , definido por

$$\text{Vol}(G) = \int_G \dots \int dx_1 \dots dx_n.$$

A variável n -dimensional $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ tem distribuição uniforme em G se tem densidade

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 / \text{Vol}(G) & \text{se } (x_1, \dots, x_n) \in G, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, para $B \subset \mathbb{R}^n$,

$$P(\underline{X} \in B) = \frac{\text{Vol}(B \cap G)}{\text{Vol}(G)}.$$

Esse modelo corresponde à escolha ao acaso de um ponto em G .

11. Distribuições relacionadas com a normal

11.1. As distribuições definidas a seguir são fundamentais no estudo de procedimentos de estimação estatística.

1. Se Z_1, \dots, Z_n são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição $N(0, 1)$, então a variável $X = Z_1^2 + \dots + Z_n^2$ tem *distribuição qui-quadrado com n graus de liberdade*, denotada χ_n^2 .

A distribuição χ_n^2 é a $\text{Gama}(n/2, 1/2)$.

2. Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, $X \sim N(0, 1)$ e $Y \sim \chi_n^2$, então a variável

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

tem *distribuição t de Student com n graus de liberdade*, denotada t_n . A densidade dessa variável é dada por

$$f_T(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi} \Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{(1 + t^2/n)^{(n+1)/2}}, t \in \mathbb{R}.$$

A distribuição t_1 é a Cauchy padrão.

3. Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, $X \sim \chi_m^2$ e $Y \sim \chi_n^2$, então a variável

$$U = \frac{X/m}{Y/n}$$

tem *distribuição F de Snedecor com m e n graus de liberdade*, denotada $F(m, n)$. A densidade dessa variável é dada por

$$f_U(u) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{n}{2})} m^{m/2} n^{n/2} u^{m/2-1} (n + mu)^{-(m+n)/2}, u > 0.$$

Se $X \sim F(m, n)$, então $1/X \sim F(n, m)$.

11.2. Sejam X_1, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$. Definimos

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \text{Média amostral} \quad \text{e}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1} = \text{Variância amostral}.$$

Então, \bar{X} e S^2 são variáveis aleatórias independentes, com $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ e $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi_{n-1}^2$. Daí, segue que

$$\sqrt{n} \frac{(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t_{n-1}.$$

Exercícios

Variáveis aleatórias: Definições e propriedades básicas, Modelos discretos e contínuos

1. Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade dada por

$$p(x) = cx, \quad x = 1, 2, \dots, 6.$$

Encontre:

- (a) o valor de c .
- (b) a probabilidade de X ser um número ímpar.

2. Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade dada por

$$p(x) = \frac{c}{4^x}, \quad x = 0, 1, \dots$$

Obtenha:

- (a) o valor de c .
- (b) a probabilidade de X ser um número par.

3. Seja X uma variável aleatória discreta com função de distribuição dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 1/2 & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 3/5 & \text{se } 1 \leq x < 2, \\ 4/5 & \text{se } 2 \leq x < 3, \\ 9/10 & \text{se } 3 \leq x < 4, \\ 1 & \text{se } x \geq 4. \end{cases}$$

- (a) Determine a função de probabilidade de X .
- (b) Calcule $P(X = 0 \mid X \text{ é par})$.

4. Quinze pessoas portadoras de determinada doença são selecionadas para se submeter a um tratamento. Sabe-se que este tratamento é eficaz na cura da doença em 80% dos casos. Suponha que os indivíduos submetidos ao tratamento curam-se (ou não) independentemente uns dos outros e considere X o número de curados dentre os 15 pacientes submetidos ao tratamento.

- (a) Qual a distribuição de X ?
- (b) Qual a probabilidade de que os 15 pacientes sejam curados?
- (c) Qual a probabilidade de que pelo menos dois não sejam curados?

5. Um estudante preenche por adivinhação um exame de múltipla escolha com 5 respostas possíveis (das quais uma correta) para cada uma de 10 questões.

- (a) Qual a distribuição do número de respostas certas?

- (b) Qual a probabilidade de que o estudante obtenha 9 ou mais respostas certas?
- (c) Qual a probabilidade de que acerte pelo menos duas questões?
- 6.** Um computador foi usado para gerar sete números aleatórios no intervalo $[0, 1]$. Calcule a probabilidade de que
- (a) exatamente três números estejam entre $1/2$ e 1 .
- (b) menos do que três sejam maiores que $3/4$.
- 7.** Em 1693, Samuel Pepys escreveu uma carta para Isaac Newton propondo-lhe um problema de probabilidade, relacionado a uma aposta que planejava fazer. Pepys perguntou o que é mais provável: obter pelo menos um 6 quando 6 dados são lançados, obter pelo menos dois 6 quando 12 dados são lançados, ou obter pelo menos três 6 quando 18 dados são lançados. Newton escreveu três cartas a Pepys e finalmente o convenceu de que o primeiro evento é mais provável. Calcule as três probabilidades.
- 8.** Um aluno estuda 12 exercícios, dos quais o professor vai escolher 6 aleatoriamente para uma prova. O estudante sabe resolver 9 dos 12 problemas. Seja X o número de exercícios resolvidos por ele na prova.
- (a) Qual a distribuição de X ?
- (b) Calcule a probabilidade de que o aluno resolva ao menos 5 exercícios da prova.
- 9.** Um lote de componentes eletrônicos contém 20 itens, dos quais 5 são defeituosos. Seleciona-se ao acaso uma amostra de 5 itens. Calcule a probabilidade de que a amostra contenha no máximo um item defeituoso se
- (a) a amostragem é feita com reposição.
- (b) a amostragem é feita sem reposição.
- 10.** Um aquário tem 3 peixes exóticos gordinhos e 7 desnutridos. O gato Félix pega ao acaso 3 peixes do aquário; os 3 são gordinhos e Félix se prepara para comê-los. Nesse momento, aparece o seu dono, um probabilista famoso, que diz: “Félix, você vai tentar repetir 3 vezes isso que acaba de fazer. Se você conseguir o feito de pegar os 3 gordinhos em pelo menos duas das três vezes, eu deixarei que você os coma. Se não conseguir, vai comer a sua ração de costume.” Qual é a probabilidade de que Félix coma os peixes?
- 11.** Em uma pizzaria com entrega em domicílio, 30% dos pedidos por telefone são de mais de uma pizza. Certo dia, o dono decide mandar um brinde ao cliente que fizer o primeiro pedido com mais de uma pizza. Seja X o número de pedidos recebidos até o ganhador do brinde.
- (a) Qual a distribuição de X ?
- (b) Determine o menor número de pedidos necessário para garantir que o brinde saia com probabilidade maior que 0,9.

12. Setenta por cento da população de uma cidade têm computador em casa. Se um pesquisador para munícipes ao acaso na rua até encontrar uma pessoa que tenha computador em casa, qual a probabilidade de que ele precise

- (a) de exatamente quatro tentativas?
- (b) de pelo menos quatro tentativas?

13. Um vendedor de porta em porta consegue realizar a venda em 40% das visitas que faz. Ele planeja efetuar no mínimo duas vendas por dia. Seja X o número de visitas feitas até que a segunda venda seja efetivada.

- (a) Qual a distribuição de X ?
- (b) Calcule a probabilidade de que o vendedor faça no máximo seis visitas para concluir as duas vendas.

14. O número de erros tipográficos numa página de determinado livro é uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro $1/2$. Encontre a probabilidade de que haja três ou mais erros tipográficos nesta página. Calcule esta probabilidade dado que há pelo menos um erro nesta página.

15. Um contador Geiger registra o número de partículas emitidas por um material radioativo. Suponha que o número de partículas que o material emite por segundo é uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro 3. Obtenha a probabilidade de que, em um segundo, sejam registradas

- (a) no máximo duas partículas.
- (b) no mínimo duas partículas.

16. O número X de acidentes de trabalho que ocorrem em uma fábrica por semana segue uma distribuição de Poisson. Sabendo que a porcentagem de semanas em que ocorre um acidente é um terço da porcentagem de semanas em que não acontece nenhum, calcule:

- (a) o parâmetro da distribuição.
- (b) a probabilidade de que ocorra um acidente em uma semana e também um na semana seguinte.

A partir de uma data, a direção da fábrica vai registrar o número Y de semanas decorridas até uma semana com ao menos um acidente.

- (c) Qual a distribuição de Y ?
- (d) Obtenha a probabilidade de que a semana com acidente seja a quarta na contagem.

17. A liga de futebol de um país tem quatro times: time 1, time 2, time 3 e time 4. Um time estrangeiro em excursão pelo país vai jogar um amistoso contra cada um dos times 1, 2 e 3. Suponha que contra o time 1 este time tem probabilidade $1/4$ de conquistar a vitória, enquanto que essa probabilidade vale $1/2$ quando o adversário é o time 2 e vale $2/5$ quando o adversário é o time 3. Assuma também que os resultados dos três amistosos são independentes. Seja X o número de vitórias conquistadas pelo time estrangeiro nos três amistosos.

- (a) Obtenha a função de probabilidade de X .
 (b) Qual a probabilidade de que o time estrangeiro obtenha pelo menos uma vitória?

Suponha agora que, dependendo do seu desempenho nos três amistosos, o time estrangeiro decidirá fazer um quarto jogo, contra o time 4. Caso conquiste três vitórias nos três amistosos, jogará contra o time 4; caso obtenha exatamente duas vitórias, fará o quarto jogo com probabilidade $4/5$ e não realizará o quarto jogo caso obtenha apenas uma vitória ou não vença nenhum dos três amistosos.

- (c) Determine a probabilidade de que o quarto jogo seja realizado.
 (d) Dado que o quarto jogo se realizou, qual a probabilidade de que o time estrangeiro tenha vencido os três amistosos iniciais?

Solução. (a) Notamos que X assume os valores 0, 1, 2, 3 e consideramos os eventos

V_i : O time estrangeiro conquista a vitória contra o time i , $i = 1, 2, 3$.

Sabemos que V_1 , V_2 e V_3 são independentes, com $P(V_1) = 1/4$, $P(V_2) = 1/2$ e $P(V_3) = 2/5$. Então,

$$P(X = 0) = P(V_1^c \cap V_2^c \cap V_3^c) = P(V_1^c) P(V_2^c) P(V_3^c) = \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{3}{5} = \frac{9}{40},$$

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(V_1 \cap V_2^c \cap V_3^c) + P(V_1^c \cap V_2 \cap V_3^c) + P(V_1^c \cap V_2^c \cap V_3) \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{2} \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{2}{5} = \frac{9}{20}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= P(V_1 \cap V_2 \cap V_3^c) + P(V_1 \cap V_2^c \cap V_3) + P(V_1^c \cap V_2 \cap V_3) \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{2} \frac{3}{5} + \frac{1}{4} \frac{1}{2} \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{2}{5} = \frac{11}{40}, \end{aligned}$$

$$P(X = 3) = P(V_1 \cap V_2 \cap V_3) = \frac{1}{4} \frac{1}{2} \frac{2}{5} = \frac{1}{20}.$$

- (b) A probabilidade de que o time estrangeiro obtenha pelo menos uma vitória é

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = \frac{31}{40}.$$

- (c) Denotando por F o evento de que o time estrangeiro faz o quarto jogo, temos

$$P(F | X = 3) = 1, \quad P(F | X = 2) = 4/5, \quad P(F | X = 1) = P(F | X = 0) = 0,$$

portanto, pela Fórmula da probabilidade total,

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F | X = 3) P(X = 3) + P(F | X = 2) P(X = 2) + \\ &\quad + P(F | X = 1) P(X = 1) + P(F | X = 0) P(X = 0) \\ &= 1 \frac{1}{20} + \frac{4}{5} \frac{11}{40} = 0,27. \end{aligned}$$

(d) Pela Fórmula de Bayes,

$$P(X = 3 | F) = \frac{P(F | X = 3) P(X = 3)}{P(F)} = \frac{1/20}{27/100} = \frac{5}{27} \approx 0,185.$$

18. Quatro casais convidados para um jantar comparecem independentemente, com probabilidades 0,9, 0,8, 0,75 e 0,64. Encontre a função de probabilidade do número de casais presentes ao jantar.

19. Um revendedor de componentes elétricos os compra em lotes de 10 peças. Seu controle de qualidade consiste em inspecionar 3 componentes selecionados aleatoriamente de um lote e aceitar o lote somente se os 3 componentes não são defeituosos. Sabe-se que 30% dos lotes têm 4 componentes defeituosos e 70% têm apenas 1 componente defeituoso. Dos 3 componentes selecionados de um lote, seja X o número de componentes defeituosos.

(a) Obtenha a função de probabilidade de X .

(b) Qual a probabilidade de que um lote seja aceito?

20. Uma urna contém cinco bolas numeradas de 1 a 5. Duas bolas são retiradas simultaneamente. Obtenha a função de probabilidade e faça o gráfico da função de distribuição das seguintes variáveis aleatórias:

(a) o maior número sorteado.

(b) a soma dos números retirados.

21. Um encanador tem em sua caixa de ferramentas dez pares de parafusos e porcas, de tamanhos distintos, de forma que os elementos de um par não se intercambiam com os de outro. Ele escolhe ao acaso dois parafusos e duas porcas.

(a) Obtenha a função de probabilidade do número de pares certos.

(b) Qual a probabilidade de que o encanador retire ao menos um par correto?

22. Quatro bombons iguais são distribuídos aleatoriamente a quatro pessoas. Seja X o número de pessoas que não ganham nenhum bombom.

(a) Encontre a função de probabilidade de X .

(b) Repita o item (a), supondo que os bombons são diferentes entre si.

23. Verifique que as seguintes funções são densidades:

$$(a) f(x) = \begin{cases} 1/8 & \text{se } 0 \leq x \leq 2, \\ 3/4 & \text{se } 4 \leq x \leq 5, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} 1 - |1 - x| & \text{se } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} 2/3 & \text{se } -1 \leq x \leq 0, \\ -2(x - 1)/3 & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(d) $f(x) = 3(1-x)^2, 0 \leq x \leq 1.$

(e) $f(x) = 4x e^{-2x}, x \geq 0.$

(f) $f(x) = \text{sen } x, 0 \leq x \leq \pi/2.$

24. Seja X uma variável aleatória contínua com densidade dada por

$$f(x) = \frac{c}{x^3}, x \geq 1.$$

Obtenha:

(a) o valor de $c.$

(b) a probabilidade de X ser maior que 2.

(c) a função de distribuição de $X.$

25. Seja X uma variável aleatória com densidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} a(1+x) & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 2/3 & \text{se } 1 < x \leq 2, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Obtenha:

(a) o valor de $a.$ (b) $P(0,5 < X \leq 1,5).$

26. Seja X uma variável aleatória com função de distribuição dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1, \\ \log x & \text{se } 1 \leq x < e, \\ 1 & \text{se } x \geq e. \end{cases}$$

(a) Prove que de fato F é uma função de distribuição.

(b) Explique por que X é contínua e obtenha a densidade de $X.$

27. Seja X uma variável aleatória com função de distribuição dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ x^2/2 & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 3/4 & \text{se } 1 \leq x < 2, \\ (x+1)/4 & \text{se } 2 \leq x < 3, \\ 1 & \text{se } x \geq 3. \end{cases}$$

(a) Demonstre que de fato F é uma função de distribuição.

(b) Determine as seguintes probabilidades: $P(X = 1/2), P(X = 1), P(X < 1), P(X > 2), P(1/2 < X < 5/2)$ e $P(X = 1 | X < 2).$

(c) Justifique por que X não é discreta, nem contínua.

28. Se Y tem distribuição uniforme em $(0, 5)$, qual é a probabilidade de que as raízes da equação $4x^2 + 4xY + Y + 2 = 0$ sejam ambas reais?

29. Numa população, o nível sérico de colesterol em adultos (medido em mg/dl) é uma variável aleatória com distribuição normal com parâmetros $\mu = 225$ e $\sigma = 75$. Calcule:

- a proporção de pessoas com nível de colesterol entre 200 e 350.
- o valor acima do qual se encontra o colesterol da parcela de 10% da população que tem os níveis mais elevados.

Solução. (a) Seja X o nível de colesterol de uma pessoa selecionada aleatoriamente da população. Então, $X \sim N(225, 75^2)$ e portanto:

$$Z = \frac{X - 225}{75} \sim N(0, 1).$$

Daí, consultando a tabela da função de distribuição da normal padrão (apresentada no final do livro),

$$\begin{aligned} P(200 \leq X \leq 350) &= P\left(\frac{200 - 225}{75} \leq Z \leq \frac{350 - 225}{75}\right) = P(-0,33 \leq Z \leq 1,67) \\ &= \Phi(1,67) - \Phi(-0,33) = \Phi(1,67) - (1 - \Phi(0,33)) \\ &\approx 0,9525 - (1 - 0,6293) = 0,5818. \end{aligned}$$

Assim, 58,2% da população tem nível de colesterol entre 200 e 350.

(b) Desejamos obter o valor de a tal que $P(X \geq a) = 0,1$. Então, $P(X \leq a) = 0,9$, logo

$$P\left(Z \leq \frac{a - 225}{75}\right) = 0,9.$$

Procurando na tabela da distribuição normal padrão, temos que o valor de z tal que $\Phi(z) = 0,9$ é $z = 1,28$. Consequentemente,

$$\frac{a - 225}{75} = 1,28 \Rightarrow a = 225 + 1,28 \cdot 75 = 321.$$

Portanto, a parcela de 10% da população que tem os níveis mais elevados de colesterol é delimitada pelo limiar 321.

30. Seja $X \sim N(5, 16)$. Obtenha:

- $P(X \leq 13)$.
- $P(X \geq 1)$.
- $P(4 \leq X \leq 9)$.
- o valor de a tal que $P(X \leq a) = 0,04$.
- o valor de b tal que $P(X \geq b) = 0,01$.
- o intervalo que contém 95% dos valores centrais de X .

31. Em uma fábrica de refrigerante, uma máquina é usada para encher garrafas de 600 ml. O conteúdo líquido (em ml) por garrafa varia segundo a distribuição normal com parâmetros $\mu = 600$ e $\sigma = 4$. Calcule:

- (a) a porcentagem de garrafas produzidas com conteúdo inferior a 592 ml ou superior a 612 ml.
- (b) o valor do conteúdo excedido por 96% das garrafas fabricadas.

32. Suponha que o tempo em horas que um estudante precisa para aprender uma matéria de Geografia é uma variável aleatória com distribuição normal. Se 84,13% dos alunos usam mais de 3 horas e somente 2,28% levam mais de 9 horas para aprender a matéria, quais são os parâmetros da distribuição?

33. O peso em gramas dos recém-nascidos em uma maternidade tem distribuição normal com parâmetro $\mu = 3000$. Sabe-se que 98% dos bebês nascem com um peso compreendido entre 2,5 e 3,5 quilos. Determine:

- (a) o parâmetro σ .
- (b) o peso abaixo do qual nascem 0,4% dos bebês dessa maternidade.

34. O diâmetro em centímetros das bolinhas de gude em um lote tem distribuição normal com parâmetro $\mu = 1$. Um terço das bolinhas tem diâmetro maior que 1,1 cm. Obtenha:

- (a) o parâmetro σ .
- (b) a proporção de bolinhas cujo diâmetro está entre 0,8 e 1,2 cm.
- (c) o valor do diâmetro superado por 80% das bolinhas do lote.

35. O salário mensal em reais de um trabalhador da empresa A tem distribuição normal com parâmetros $\mu_A = 1800$ e $\sigma_A = 300$; para a empresa B , os parâmetros da distribuição normal são $\mu_B = 2000$ e $\sigma_B = 200$. A empresa A tem o triplo de funcionários da empresa B . Se uma pessoa é escolhida aleatoriamente entre os trabalhadores das duas empresas, qual a probabilidade de que receba mais de 2200 reais por mês?

36. Uma fábrica utiliza dois métodos para a produção de lâmpadas: 70% delas são produzidas pelo método A e o resto pelo método B . A duração em horas das lâmpadas tem distribuição exponencial com parâmetro $1/80$ ou $1/100$, conforme se utilize o método A ou o B . Em um grupo de 10 lâmpadas selecionadas ao acaso, qual a probabilidade de que 6 delas durem pelo menos 90 horas?

37. O tempo de vida útil em anos de um eletrodoméstico é uma variável aleatória com densidade dada por

$$f(x) = \frac{x e^{-x/2}}{4}, \quad x > 0.$$

- (a) Mostre que de fato f é uma densidade.
- (b) Se o fabricante dá um tempo de garantia de seis meses para o produto, qual a proporção de aparelhos que devem usar essa garantia?

- (c) Dado que um aparelho está funcionando após um ano, qual a probabilidade de que dure pelo menos dois anos?

38. Uma loja de comércio eletrônico envia *e-mails* com ofertas especiais a seus clientes cadastrados. Suponha que, após o recebimento de uma mensagem, a proporção de clientes que efetivam uma compra é uma variável aleatória com densidade dada por

$$f(x) = cx(1-x)^5, 0 \leq x \leq 1.$$

- (a) Encontre o valor de c .
 (b) Calcule a probabilidade de que um *e-mail* resulte em alguma compra para mais de 50% dos seus destinatários.

39. A proporção de ferro puro em amostras de hematita extraídas de uma região tem distribuição Beta(4, 2). Obtenha a probabilidade de que uma amostra contenha

- (a) mais de 75% de ferro puro.
 (b) menos de 30% de ferro puro.

40. Uma reserva ecológica tem um pássaro raro, que costuma aparecer aos turistas em um bosque. Suponha que um turista que chega ao bosque espera para vê-lo um tempo em minutos com densidade dada por

$$f(x) = \frac{e^{-x/2} + e^{-x/4}}{6}, x \geq 0.$$

- (a) Prove que de fato f é uma densidade.
 (b) Calcule a probabilidade de que um turista espere mais de dois minutos para avistar o pássaro.
 (c) Um turista que já esperou dois minutos sem ter visto o pássaro tem qual probabilidade de vê-lo se aguardar mais cinco minutos?

41. Defina uma coleção de eventos E_a , $0 < a < 1$, satisfazendo a propriedade de que $P(E_a) = 1$ para todo a , mas $P(\bigcap_a E_a) = 0$.

Sugestão: Seja X com distribuição uniforme em $(0, 1)$ e defina cada E_a em termos de X .

42. Razão de Mill: Denote respectivamente por ϕ e Φ a densidade e a função de distribuição de uma variável aleatória com distribuição $N(0, 1)$.

- (a) Prove que para todo $x > 0$,

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)\phi(x) \leq 1 - \Phi(x) \leq \frac{\phi(x)}{x}.$$

A importância desses limitantes decorre do fato de não haver uma fórmula fechada para Φ .

- (b) Obtenha de (a) que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \Phi(x)}{\phi(x)/x} = 1.$$

Sugestão: (a) Use que $1 - \frac{3}{y^4} \leq 1 \leq 1 + \frac{1}{y^2}$ para $y > 0$ e que

$$\frac{d}{dy} \left[\frac{\phi(y)}{y} \right] = - \left(1 + \frac{1}{y^2} \right) \phi(y), \quad \frac{d}{dy} \left[\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y^3} \right) \phi(y) \right] = - \left(1 - \frac{3}{y^4} \right) \phi(y).$$

Aproximações de Poisson e normal à distribuição binomial

43. Suponha que 1% das lâmpadas de enfeite de Natal de certa marca apresentem defeito. Estime a probabilidade de que uma caixa com 30 lâmpadas contenha no máximo uma lâmpada com defeito.

44. Sabe-se que 0,6% dos parafusos produzidos em uma fábrica são defeituosos. Estime a probabilidade de que, em um pacote com 1000 parafusos,

- (a) haja exatamente 4 parafusos defeituosos.
- (b) não haja mais do que 4 parafusos defeituosos.
- (c) encontrem-se pelo menos 3 parafusos defeituosos.

45. Há 180 inscritos em um congresso com duração de 5 dias. Obtenha uma aproximação para a probabilidade de que ao menos um deles faça aniversário durante o congresso.

46. Aproximadamente 80000 casamentos foram celebrados no Rio de Janeiro durante o ano passado. Estime a probabilidade de que para pelo menos um desses casais ambos os cônjuges tenham nascido no dia 30 de abril. Deixe claras as suas hipóteses.

47. Doze por cento da população é canhota. Aproxime a probabilidade de que haja pelo menos 20 canhotos em uma escola com 200 alunos. Esclareça as suas hipóteses.

48. Em um museu, vendem-se mil entradas diariamente, sendo de 35% a proporção diária de visitantes estrangeiros. Estime a probabilidade de que em uma semana mais de 5000 brasileiros visitem o museu.

49. Em uma indústria, fabricam-se dispositivos elétricos, que são vendidos em caixas com 400 unidades. Suponha que cada dispositivo funciona adequadamente com probabilidade 0,98. A companhia deseja garantir aos revendedores que mais de k dispositivos por caixa funcionam. Qual o maior valor de k tal que pelo menos 93% das caixas satisfaçam essa garantia?

50. Se apenas 10% das pessoas conseguem perceber a diferença entre duas marcas de cerveja, estime a probabilidade de que, em uma amostra aleatória de 196 pessoas, mais de 29 consigam distingui-las.

51. Uma prova consiste de 108 questões de verdadeiro ou falso.

- (a) Suponha que um estudante tem probabilidade $3/4$ de acertar cada questão. Estime a probabilidade de que ele acerte pelo menos 86 questões.
- (b) Responda a questão anterior, supondo que o estudante sabe as respostas de metade das questões da prova e simplesmente chuta a outra metade.

52. Se 55% da população de uma cidade é a favor de um projeto proposto pelo prefeito, estime a probabilidade de que, em uma amostra aleatória de 176 pessoas, no máximo 93 sejam favoráveis ao projeto.

53. Uma companhia aérea sabe que, das pessoas que fazem uma reserva para certo voo, somente 90% comparecem. Por isso, ela aceita reservas em quantidade maior do que a capacidade do avião, de 144 assentos. Supondo que as decisões das pessoas em comparecer ao voo são independentes, quantas reservas a companhia pode fazer, se quer estar 99% certa de que haverá lugar para todos os passageiros que compareçam?

54. O tempo de vida em horas de chips de computador produzidos por uma indústria tem distribuição normal com parâmetros $\mu = 1,4 \cdot 10^6$ e $\sigma^2 = 9 \cdot 10^{10}$. Obtenha uma estimativa para a probabilidade de que um lote de 100 chips contenha pelo menos 20 chips que durem menos que $1,8 \cdot 10^6$ horas.

55. Um produtor de sementes as vende em pacotes com 50 unidades. Suponha que cada semente germina com probabilidade 99%, independentemente das demais. O produtor promete substituir, sem custo ao comprador, qualquer pacote com 3 ou mais sementes que não germinem.

- Use a aproximação de Poisson para estimar a probabilidade de que um pacote precise ser substituído.
- Use a aproximação normal para estimar a probabilidade de que o produtor tenha que substituir mais que 70 dos últimos 4000 pacotes vendidos.

Distribuições conjuntas, Independência e transformações de variáveis aleatórias

56. Sejam X e Y variáveis aleatórias discretas cuja função de probabilidade conjunta é dada pela seguinte tabela:

$X \setminus Y$	1	2
0	0,05	0,15
1	0,3	0
2	0,05	0,45

- Obtenha as funções de probabilidade marginais de X e Y .
- São X e Y independentes?
- Determine as seguintes probabilidades: $P(X = 2 | Y = 2)$, $P(Y = 2 | X \leq 1)$, $P(X + Y > 2)$, $P(0 < X \leq 2 | Y = 1)$ e $P(XY \leq 1)$.
- Encontre as distribuições conjunta e marginais de $U = X + Y$ e $V = \max\{X, Y\}$.

57. Sejam X e Y variáveis aleatórias discretas com função de probabilidade conjunta

$$p(x, y) = \begin{cases} cxy & \text{se } x \in \{1, 2, 3, 4\}, y \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ e } x + y \geq 5, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Determine o valor de c .

- (b) São X e Y independentes?
 (c) Qual a probabilidade de que X seja ímpar, dado que $X + Y$ é par?

58. Uma urna contém três bolas brancas e duas bolas azuis. Realizam-se três extrações, sem reposição. Sejam X o número de bolas brancas obtidas e Y o número de bolas azuis extraídas antes de obter a primeira bola branca. Determine a função de probabilidade conjunta de X e Y , bem como as marginais.

59. A diretoria de uma organização feminina é formada por quatro mulheres solteiras, três divorciadas, duas viúvas e uma casada. Uma comissão de três pessoas é escolhida ao acaso para elaborar folhetos de propaganda da organização. Sejam X e Y o número de mulheres solteiras e viúvas na comissão, respectivamente.

- (a) Determine a função de probabilidade conjunta de X e Y , bem como as marginais.
 (b) Calcule a probabilidade de que pelo menos uma viúva integre a comissão.
 (c) Qual a probabilidade de que haja na comissão mais solteiras que viúvas?

60. Dois dados honestos são lançados. Obtenha a função de probabilidade conjunta do maior valor X e do menor valor Y obtidos, bem como as marginais.

61. Sejam X o mínimo e Y o máximo de três números sorteados ao acaso, sem reposição, do conjunto $\{0, 1, \dots, 9\}$.

- (a) Determine a função de probabilidade conjunta de X e Y , bem como as marginais.
 (b) Obtenha a função de probabilidade de $Z = Y - X$.

62. Um número aleatório N de dados são lançados. Suponha que

$$P(N = i) = \frac{1}{2^i}, i = 1, 2, \dots$$

A soma dos resultados é S . Encontre as probabilidades de que

- (a) $N = 2$ dado que $S = 3$.
 (b) $S = 3$ dado que N é par.

63. Um dado honesto é lançado 20 vezes, de modo independente. Para $i = 1, \dots, 6$, seja X_i o número de vezes que ocorre a face i .

- (a) Qual a distribuição do vetor aleatório (X_1, \dots, X_6) ?
 (b) Dado que a face 6 foi obtida em 5 lançamentos, qual a probabilidade de que as faces 1, 2 e 5 tenham ocorrido 8, 3 e 4 vezes, respectivamente?

64. O conselho de um departamento universitário é formado por dois professores titulares, seis associados, quatro adjuntos, um assistente e um aluno. Visando a preparar uma revisão da estrutura curricular, seleciona-se ao acaso uma comissão de cinco membros. Denote por X_1, X_2, X_3, X_4 e X_5 o número de titulares, associados, adjuntos, assistentes e alunos na comissão, respectivamente.

- (a) Qual a distribuição do vetor aleatório (X_1, \dots, X_5) ?

- (b) Calcule a probabilidade de que na comissão haja um professor titular, dois associados e um aluno.

65. Modelo de Maxwell-Boltzmann. Distribuem-se k bolas distinguíveis em n urnas, sendo permitido colocar mais de uma bola na mesma urna. Suponha que todas as configurações são igualmente prováveis. Seja X_j o número de bolas na urna j .

Demonstre que

$$(a) P(X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n) = \frac{k!}{k_1! \dots k_n!} n^{-k} \text{ para } k_j \geq 0 \text{ com } \sum_{j=1}^n k_j = k.$$

$$(b) P(X_1 = i) = \binom{k}{i} \left(\frac{1}{n}\right)^i \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-i}, \quad i = 0, \dots, k.$$

$$(c) \lim_{n, k \rightarrow \infty, k/n \rightarrow \lambda \in (0, \infty)} P(X_1 = i) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!}, \quad i = 0, 1, \dots$$

66. Modelo de Bose-Einstein. Distribuem-se k bolas indistinguíveis em n urnas, sendo permitido colocar mais de uma bola na mesma urna. Suponha que todas as configurações são igualmente prováveis. Seja X_j o número de bolas na urna j .

Mostre que

$$(a) P(X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n) = \binom{n+k-1}{n-1}^{-1} \text{ para } k_j \geq 0 \text{ com } \sum_{j=1}^n k_j = k.$$

$$(b) P(X_1 = i) = \binom{n+k-i-2}{n-2} \binom{n+k-1}{n-1}^{-1}, \quad i = 0, \dots, k.$$

$$(c) \lim_{n, k \rightarrow \infty, k/n \rightarrow \lambda \in (0, \infty)} P(X_1 = i) = \frac{1}{\lambda+1} \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^i, \quad i = 0, 1, \dots$$

67. Considere a distribuição aleatória de k bolas em n urnas como explicada nos exercícios 65 e 66. Suponha que $k \geq n$ e seja A o evento de que nenhuma urna fique vazia.

Prove que, no caso do modelo de Maxwell-Boltzmann,

$$P(A) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^k$$

e, para o modelo de Bose-Einstein,

$$P(A) = \binom{k-1}{n-1} \binom{n+k-1}{n-1}^{-1}.$$

68. Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = 1/2$. Considere $X_3 = X_1 X_2$. As variáveis aleatórias X_1 , X_2 e X_3 são independentes? São independentes duas a duas?

69. Uma urna contém X bolas, onde X é uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro λ . As bolas são pintadas, de maneira independente, de vermelho com probabilidade p ou azul com probabilidade $(1-p)$. Sejam Y o número de bolas vermelhas e Z o número de bolas azuis. Prove que Y e Z são variáveis aleatórias independentes, com $Y \sim \text{Poisson}(\lambda p)$ e $Z \sim \text{Poisson}(\lambda(1-p))$.

Sugestão: Para $y, z \in \mathbb{N}$, seja $x = y + z$. Justifique e use que

$$P(Y = y, Z = z) = P(Y = y, Z = z | X = x) P(X = x) = \binom{x}{y} p^y (1-p)^z \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}.$$

70. O número de pessoas atendidas a cada dia no pronto-socorro do hospital de uma cidade tem distribuição de Poisson com parâmetro 8. A porcentagem de pessoas que requerem hospitalização é de 10%.

- Calcule a probabilidade de que em um dia mais de uma pessoa seja encaminhada à hospitalização.
- Dado que nenhuma pessoa foi hospitalizada em certo dia, qual a probabilidade de que mais de duas pessoas tenham sido atendidas no pronto-socorro?

71. Sejam X_0, X_1, \dots variáveis aleatórias i.i.d., com $P(X_0 = 1) = P(X_0 = -1) = 1/2$. Considere $Z_n = \prod_{j=0}^n X_j$, $n \geq 0$. Mostre que Z_0, Z_1, \dots são independentes.

Sugestão: Por indução em n , prove que para todo $n \geq 0$,

$$P(Z_n = 1) = P(Z_n = -1) = 1/2 \text{ e}$$

$$P(Z_0 = 1, Z_1 = 1, \dots, Z_n = 1) = 1/2^{n+1}.$$

Daí, use o tópico **2.10** para concluir que Z_0, Z_1, \dots são independentes.

72. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x, y) = \frac{6}{7} \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right), \quad 0 < x < 1, 0 < y < 2.$$

- Prove que de fato f é uma densidade.
- Determine as densidades marginais de X e Y .
- Calcule $P(X > Y)$.
- Obtenha $P(Y > 1 | X < 1/2)$.

73. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} c(y-x) & \text{se } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Obtenha o valor de c e as distribuições marginais de X e Y .

74. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x, y) = c \exp \left\{ -\frac{25}{32} \left(x^2 - \frac{3xy}{5} + \frac{y^2}{4} \right) \right\}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Determine o valor de c e as distribuições marginais de X e Y .

75. Um romancista se comprometeu com seu editor a entregar a cada 30 dias um capítulo do livro que está escrevendo; esse tem sido o seu método de trabalho há vários anos. Sejam X o número de dias que o escritor demora para redigir a primeira versão de um capítulo, e Y o número total de dias que tarda para ter o capítulo pronto, incluindo a revisão e a correção de erros. Suponha que X e Y têm densidade conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} cx(30 - y) & \text{se } 0 \leq x \leq y \leq 30, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Obtenha o valor de c .
- São X e Y independentes?
- Calcule a probabilidade de que o romancista termine um capítulo em no máximo 25 dias.
- Encontre a probabilidade de que o tempo gasto redigindo a primeira versão seja superior ao tempo de revisão e correção de erros.
- Qual a probabilidade de que o escritor demore menos de 15 dias revisando e corrigindo um capítulo?

76. Uma empresa de varejo vende produtos em uma rede de lojas físicas e por meio da internet. Sejam X a proporção mensal de vendas de eletrodomésticos sobre o total de vendas das lojas físicas, e Y a proporção mensal correspondente ao comércio virtual. Suponha que a densidade conjunta de X e Y é dada por

$$f(x, y) = 2 - x - y, \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1.$$

- Mostre que de fato f é uma densidade conjunta.
- São X e Y independentes?
- Obtenha a probabilidade de que em um mês a venda de eletrodomésticos represente mais de 80% das vendas das lojas físicas.
- Calcule a probabilidade de que a proporção mensal de eletrodomésticos vendidos pela internet seja maior do que aquela das lojas físicas.
- Dado que os eletrodomésticos representaram mais de 60% das vendas das lojas físicas em um mês, qual a probabilidade de que o mesmo tenha acontecido com a loja virtual?
- Encontre a probabilidade de que em um mês as proporções X e Y não difiram por mais de 50%.

77. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x, y) = 2(x + y - 2xy), \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$$

- (a) Determine as distribuições marginais de X e Y e responda se são independentes.
 (b) Calcule $P(|X - Y| \geq 1/2)$.

78. Sejam X e Y variáveis aleatórias com densidade conjunta dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 120x(y-x)(1-y) & \text{se } 0 < x < y < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Determine as distribuições marginais de X e Y .
 (b) Mostre que $P(X \leq zY) = 3z^2 - 2z^3$ para $z \in (0, 1)$.
 (c) Usando o item (b), obtenha a distribuição de X/Y .

79. Seja \overline{OA} um segmento de \mathbb{R} de comprimento a . Escolhem-se dois pontos P_1 e P_2 em \overline{OA} de forma aleatória e independente. Denote por X_1 e X_2 os comprimentos dos segmentos $\overline{OP_1}$ e $\overline{OP_2}$, respectivamente.

Dentre P_1 e P_2 , sejam Y_1 o ponto mais próximo a O e Y_2 o ponto mais próximo a A . Defina M_1 e M_2 os comprimentos dos segmentos $\overline{OY_1}$ e $\overline{OY_2}$, respectivamente.

- (a) Calcule a função de distribuição da variável aleatória $M = \text{distância entre } P_1 \text{ e } P_2$.
 (b) Encontre a densidade de M .
 (c) Determine a probabilidade de que com os três segmentos $\overline{OY_1}$, $\overline{Y_1Y_2}$ e $\overline{Y_2A}$ seja possível construir um triângulo.

Solução. (a) Temos que X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes, ambas com distribuição uniforme em $[0, a]$. Então, o par (X_1, X_2) tem distribuição uniforme em $B = [0, a] \times [0, a]$. Além disso,

$$\begin{aligned} M_1 &= \min\{X_1, X_2\}, \\ M_2 &= \max\{X_1, X_2\} \text{ e} \\ M &= M_2 - M_1 = |X_1 - X_2|. \end{aligned}$$

Queremos calcular $F_M(y) = P(M \leq y) = P(|X_1 - X_2| \leq y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Claramente, se $y \leq 0$, então $F_M(y) = 0$.

Para $y > 0$, definimos o conjunto $A_y = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : |u - v| \leq y\}$, portanto

$$F_M(y) = P((X_1, X_2) \in A_y) = \frac{\text{área}(A_y \cap B)}{\text{área}(B)}.$$

Se $y > a$, então $A_y \cap B = B$, logo $F_M(y) = 1$.

Por outro lado, se $0 < y \leq a$, então (veja-se a Figura 3.8)

$$F_M(y) = \frac{a^2 - (a - y)^2}{a^2} = \frac{2ay - y^2}{a^2}.$$

Assim, a função de distribuição de M é dada por

$$F_M(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq 0, \\ (2ay - y^2)/a^2 & \text{se } 0 < y \leq a, \\ 1 & \text{se } y > a. \end{cases}$$

(b) Como F_M é contínua e derivável por partes, obtemos a densidade de M derivando F_M :

$$f_M(y) = \begin{cases} 2(a - y)/a^2 & \text{se } 0 < y < a, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que os valores de f_M nos pontos 0 e a são arbitrários.

(c) Recordamos que $M_1 = \min\{X_1, X_2\}$, $M_2 = \max\{X_1, X_2\}$ e $M = M_2 - M_1$. Os segmentos com os quais se deseja construir um triângulo têm comprimentos M_1 , M e $a - M_2$, logo poder construí-lo é equivalente a pedir que

$$M_1 < M + a - M_2, \quad M < M_1 + a - M_2 \text{ e } a - M_2 < M_1 + M.$$

Assim, precisamos calcular $P(M_1 < a/2, M < a/2, M_2 > a/2)$. Definimos o conjunto $C = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \min\{u, v\} < a/2, |u - v| < a/2, \max\{u, v\} > a/2\}$. Então,

$$P(M_1 < a/2, M < a/2, M_2 > a/2) = P((X_1, X_2) \in C) = \frac{\text{área}(C \cap B)}{\text{área}(B)} = \frac{1}{4}.$$

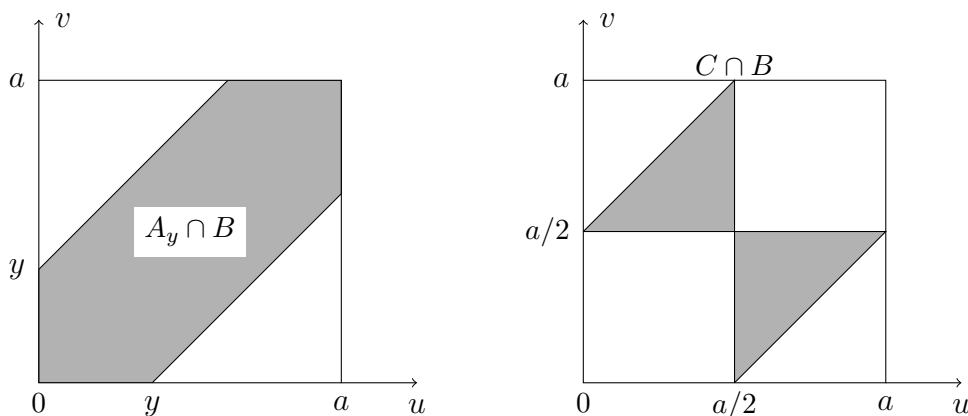


Figura 3.8: Exercício 79 – Cálculos de F_M e do item (c).

80. Um casal combina de se encontrar em certo local perto das 12:30 h. Suponha que o homem chega em uma hora uniformemente distribuída entre 12:15 h e 12:45 h e a mulher independentemente chega em uma hora uniformemente distribuída entre 12 h e 13 h. Encontre as probabilidades de que

- (a) o primeiro a chegar não espere mais que 5 minutos pelo segundo.
 (b) a mulher chegue primeiro.

81. Em uma espécie de ave de rapina, a envergadura em centímetros das fêmeas tem distribuição normal com parâmetros $\mu_F = 168,75$ e $\sigma_F = 6,5$. Nos machos, a envergadura tem distribuição normal com parâmetros $\mu_M = 162,5$ e $\sigma_M = 6$. Se uma fêmea e um macho serão capturados para anilhamento, qual a probabilidade de que o macho tenha envergadura maior que a fêmea?

82. Um elevador tem capacidade máxima de 500 kg. Suponha que o peso em kg de uma pessoa adulta tem distribuição normal com parâmetros $\mu = 75$ e $\sigma^2 = 96$. Obtenha a probabilidade de que o peso total de seis passageiros adultos exceda a capacidade máxima do elevador.

83. A precipitação anual (medida em centímetros) em uma localidade tem distribuição normal com parâmetros $\mu = 240$ e $\sigma^2 = 900$. Calcule as seguintes probabilidades:

- (a) de que em cada um dos próximos dois anos a precipitação fique entre 204 e 276 cm.
 (b) de que a precipitação total durante os próximos dois anos fique entre 420 e 540 cm.
 (c) de que a precipitação no ano que vem exceda a do ano seguinte por mais que 90 cm.

Suponha que as precipitações totais dos próximos dois anos são independentes.

84. A nota de um estudante em um exame vestibular tem distribuição normal com parâmetros $\mu = 75$ e $\sigma^2 = 64$. Uma amostra aleatória de nove provas é selecionada. Obtenha as seguintes probabilidades:

- (a) de que exatamente duas provas na amostra tenham nota superior a 83.
 (b) de que a média das nove provas escolhidas seja maior que 80.

85. Lançamos seis vezes uma moeda honesta de forma independente. Seja Y a diferença entre o número de caras e coroas obtidas. Encontre a distribuição de Y .

86. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, com distribuição de Poisson com parâmetros respectivos λ e μ . Prove que $Z = X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda + \mu)$.

87. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, com $X \sim \text{Geométrica}(p_1)$ e $Y \sim \text{Geométrica}(p_2)$. Determine a distribuição de $Z = \min\{X, Y\}$.

88. Seja U uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo aberto $(0, 1)$. Dado $p \in (0, 1)$, obtenha a distribuição da variável aleatória

$$X = [\log_{1-p} U] = \left[\frac{\log U}{\log(1-p)} \right],$$

onde $[a]$ denota a parte inteira de a .

89. Seja X uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro λ . Definimos uma nova variável aleatória por $Y = [X] + 1$, onde $[X]$ denota a parte inteira de X . Obtenha a distribuição de Y .

90. Seja F uma função de distribuição. A *inversa contínua à esquerda de F* é a função $F^{-1} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F^{-1}(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\} \text{ para } t \in (0, 1).$$

(a) Explique por que F^{-1} está bem definida e mostre que

$$F^{-1}(t) \leq x \iff t \leq F(x).$$

(b) Prove que se $U \sim U(0, 1)$, então a variável aleatória $X = F^{-1}(U)$ tem função de distribuição F .

91. Em uma indústria, uma máquina é usada para fabricar esferas de rolamentos com 5 centímetros de diâmetro. Desajustes na máquina fazem com que as esferas tenham tamanhos diferentes do padrão. Suponha que o erro no diâmetro (em cm) de uma esfera produzida é uma variável aleatória X com densidade

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

No processo de fabricação, são aceitas apenas as esferas cujos erros no diâmetro estiverem entre $-0,5$ e $0,5$ cm; as demais são descartadas. Seja Y o erro no diâmetro de uma esfera aceita segundo essa especificação.

(a) Determine a função de distribuição de Y .

(b) Obtenha a densidade de Y .

(c) Qual a probabilidade de que uma esfera aceita tenha diâmetro maior que 5,2 cm?

92. O tempo de duração em horas de um componente eletrônico tem distribuição exponencial de parâmetro $1/8$. O departamento de controle de qualidade da fábrica que o produz descarta todos os componentes que falham nas três primeiras horas, e os restantes são comercializados.

(a) Determine a densidade da duração em horas de um componente comercializado.

(b) Qual a probabilidade de um componente comercializado durar mais que 12 horas?

93. Seja X uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $[0, 10]$. Determine a função de distribuição das seguintes variáveis aleatórias:

(a) $Y = X^2 + 2$.

(b) $W = \max\{2, \min\{4, X\}\}$.

(c) $Z = |X - 4|$.

Observação. Cumpramos observar que W dada no item (b) é uma variável aleatória, pois é uma função contínua da variável aleatória X . Note entretanto que W não é discreta (já que pode assumir qualquer valor no intervalo $[2, 4]$) e nem absolutamente contínua (pois assume os valores 2 e 4 com probabilidades positivas). A variável W é uma mistura dos dois tipos. Mais detalhes a respeito de tipos de variáveis aleatórias são encontrados na Seção 2.2 de James [15].

94. Encontre a densidade de $Y = e^{-2X}$, onde X tem distribuição exponencial de parâmetro 1.

Solução. A densidade de X é dada por

$$f(x) = e^{-x}, \quad x > 0.$$

Consideremos a função $\phi : (0, \infty) \rightarrow (0, 1)$ dada por $\phi(x) = e^{-2x}$. Então, ϕ é decrescente, diferenciável e

$$y = \phi(x) = e^{-2x} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \phi^{-1}(y) = -\frac{1}{2} \log y,$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{2y}.$$

A densidade de $Y = e^{-2X}$ é, portanto,

$$g(y) = f(\phi^{-1}(y)) \left| \frac{dx}{dy} \right| = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad 0 < y < 1.$$

95. Distribuição Log-normal. Seja $Y = e^X$, onde X tem distribuição $N(0, 1)$. Encontre a densidade de Y .

96. Seja X uma variável aleatória com distribuição uniforme em $(0, \pi/2)$. Obtenha a densidade de $Y = \sin X$.

97. Determine a densidade de $Y = \arcsen X$ quando

(a) X tem distribuição uniforme em $(0, 1)$.

(b) X tem distribuição uniforme em $(-1, 1)$.

98. Seja $X \sim \text{Gama}(\alpha, \lambda)$, $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, e considere $a > 0$. Encontre a distribuição da variável aleatória $Y = aX$.

99. Seja $X \sim F(m, n)$, $m, n \geq 1$ inteiros, ou seja, X tem densidade dada por

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} m^{m/2} n^{n/2} x^{m/2-1} (n+mx)^{-(m+n)/2}, \quad x > 0.$$

Mostre que $1/X \sim F(n, m)$.

100. Encontre a densidade de $Y = |X|$, onde X tem distribuição $N(0, 1)$.

101. Seja $X \sim N(0, 1)$. Por definição, a variável aleatória $Y = X^2$ tem distribuição qui-quadrado com 1 grau de liberdade, denotada χ_1^2 .

(a) Obtenha a densidade de Y .

(b) Deduza que a distribuição χ_1^2 é idêntica à $\text{Gama}(1/2, 1/2)$ e que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

102. Seja X uma variável aleatória com densidade dada por

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}, \quad x \in \mathbb{R},$$

onde $\lambda > 0$. Determine a distribuição da variável aleatória $Y = |X|$.

103. Seja X uma variável aleatória com densidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } -1 < x < 0, \\ e^{-x}/2 & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Obtenha a densidade de $Y = X^2$.

104. Sejam X e Y variáveis aleatórias i.i.d. com função densidade comum

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{se } x > 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Calcule a densidade conjunta de Z e W , onde $Z = XY$ e $W = X/Y$.

(b) São Z e W independentes?

Solução. (a) Notamos que a densidade conjunta de X e Y é dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1/(x^2 y^2) & \text{se } x > 1, y > 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Sejam $B_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, y > 1\}$ e $B = \{(z, w) : z > w > 0, zw > 1\}$. Consideremos a função $\phi : B_0 \rightarrow B$ definida por $\phi(x, y) = (xy, x/y)$. Então, ϕ é uma função bijetora, $\phi^{-1}(z, w) = (\sqrt{zw}, \sqrt{z/w})$ e o Jacobiano de ϕ^{-1} é igual a $-1/(2w)$. Como $(Z, W) = \phi(X, Y)$, a densidade conjunta de Z e W é dada por

$$f_{Z,W}(z, w) = \begin{cases} f_{X,Y}(\sqrt{zw}, \sqrt{z/w}) \frac{1}{2w} & \text{se } z > w > 0, zw > 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim,

$$f_{Z,W}(z, w) = \begin{cases} 1/(2z^2w) & \text{se } z > w > 0, zw > 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(b) Observamos que

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_{1/z}^z 1/(2z^2w) dw & \text{se } z > 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo,

$$f_Z(z) = \begin{cases} \log(z)/z^2 & \text{se } z > 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ademais,

$$f_W(w) = \begin{cases} \int_{1/w}^{\infty} 1/(2z^2w) dz & \text{se } 0 < w \leq 1, \\ \int_w^{\infty} 1/(2z^2w) dz & \text{se } w > 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto,

$$f_W(w) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } 0 < w \leq 1, \\ 1/(2w^2) & \text{se } w > 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Visto que a densidade conjunta não é o produto das marginais, concluímos que Z e W não são independentes.

105. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, ambas com distribuição exponencial de parâmetro 1. Calcule a densidade conjunta de $U = |X - Y|$ e $V = X + Y$, bem como as marginais.

Solução. Sejam $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$, $A^* = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < v\}$ e definimos a função $\phi : A \rightarrow A^*$ por $\phi(x, y) = (|x - y|, x + y)$. Observamos que ϕ não é bijetora, mas podemos utilizar o método resumido no Teorema 2.1' da Seção 2.7 de James [15]. Definimos $A^{(1)} = \{(x, y) \in A : y - x > 0\}$ e $A^{(2)} = \{(x, y) \in A : y - x < 0\}$. Então, $\phi_1 := \phi|_{A^{(1)}}$ e $\phi_2 := \phi|_{A^{(2)}}$ são funções bijetoras com inversas

$$\phi_1^{-1}(u, v) = \left(\frac{v - u}{2}, \frac{u + v}{2} \right) \quad \text{e} \quad \phi_2^{-1}(u, v) = \left(\frac{u + v}{2}, \frac{v - u}{2} \right).$$

Aplicando o teorema, obtemos que, para $0 < u < v$, a densidade conjunta de U e V é

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y} \left(\frac{v - u}{2}, \frac{u + v}{2} \right) \frac{1}{2} + f_{X,Y} \left(\frac{u + v}{2}, \frac{v - u}{2} \right) \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$f_{U,V}(u, v) = \begin{cases} e^{-v} & \text{se } 0 < u < v, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Com respeito às marginais, um cálculo simples mostra que $U \sim \text{Exp}(1)$ e $V \sim \text{Gama}(2, 1)$.

106. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta f . Usando o Método do Jacobiano, determine a densidade de $Z = XY$. Escreva a densidade de Z no caso em que X e Y são independentes, com densidades f_X e f_Y , respectivamente.

Solução. Consideremos a transformação e sua inversa

$$\begin{cases} w = x \\ z = xy \end{cases} \iff \begin{cases} x = w \\ y = z/w \end{cases}$$

com Jacobiano $J(w, z) = 1/w$. (Recorde-se de que $P(W = 0) = 0$).

Então, a densidade conjunta de W e Z é

$$g(w, z) = f \left(w, \frac{z}{w} \right) \frac{1}{|w|}.$$

Portanto, a densidade de $Z = XY$ é dada por

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f \left(x, \frac{z}{x} \right) \frac{1}{|x|} dx.$$

Assim, se X e Y são independentes com densidades respectivas f_X e f_Y ,

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx.$$

No cálculo de um caso particular, caso se prefira aplicar diretamente a fórmula obtida, é preciso estar atento aos valores que Z assume e aos limites da integral.

107. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, com $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ e $Y \sim \text{Exp}(\mu)$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Determine a densidade de $Z = X + Y$ nos seguintes casos:

(a) $\lambda \neq \mu$.

(b) $\lambda = \mu$.

108. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x, y) = \frac{x}{(1+x)^2(1+xy)^2}, \quad x > 0, y > 0.$$

Mostre que X e XY são independentes e identicamente distribuídas e determine a sua distribuição.

109. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x, y) = e^{-x^2y}, \quad x > 1, y > 0.$$

Prove que $U = 1/X$ e $V = X^2Y$ são independentes, $U \sim U(0, 1)$ e $V \sim \text{Exp}(1)$.

110. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, com distribuição comum $N(0, 1)$. Mostre que $U = (X + Y)/\sqrt{2}$ e $V = (X - Y)/\sqrt{2}$ também são independentes e $N(0, 1)$.

111. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, com distribuição comum $N(0, 1)$. Prove que $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ e $\Phi = \text{arctg}(Y/X)$ também são independentes, $\Phi \sim U(0, 2\pi)$ e R tem distribuição de Rayleigh, ou seja, tem densidade

$$f_R(r) = r e^{-r^2/2}, \quad r > 0.$$

112. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, $X \sim \text{Gama}(r, \lambda)$ e $Y \sim \text{Gama}(s, \lambda)$, onde $\lambda > 0$, $r > 0$ e $s > 0$. Mostre que $P = X + Y$ e $Q = X/(X + Y)$ também são independentes, $P \sim \text{Gama}(r + s, \lambda)$ e $Q \sim \text{Beta}(r, s)$.

113. Encontre a distribuição de $(X - Y)/(X + Y)$ se X e Y são variáveis aleatórias independentes e

(a) $X, Y \sim \text{Exp}(1)$.

(b) $X, Y \sim N(0, 1)$.

114. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 6y & \text{se } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Determine as densidades marginais de X e Y . São X e Y independentes?
 (b) Calcule a função densidade de $Z = Y/X$.

115. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} x e^{-y} & \text{se } 0 < x < y < \infty, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Obtenha as densidades marginais de X e Y . São X e Y independentes?
 (b) Determine a densidade de $Z = Y - X$.

116. As variáveis aleatórias X e Y representam, respectivamente, a renda e o consumo por mês, em milhões de reais, dos trabalhadores de uma empresa. Suponha que a densidade conjunta de X e Y é dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{6} x^{1/2} y^{1/2} & \text{se } 0 < y < x < 3, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) A renda e o consumo são independentes?
 (b) Determine a função densidade do quociente entre o consumo e a renda desses trabalhadores.

117. Seja X a variável aleatória que representa o peso em toneladas de uma certa mercadoria que uma loja armazena no início de cada mês de forma a satisfazer a demanda dos clientes. Seja Y o peso em toneladas da mercadoria vendida durante o mês. Suponha que a função densidade conjunta de X e Y é dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{10x} & \text{se } 0 < y < x < 10, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Obtenha a densidade do peso da mercadoria que sobra armazenada ao final do mês.
 (b) Calcule a probabilidade de que o peso da mercadoria armazenada ao início do mês seja superior a 8 toneladas e o peso da mercadoria vendida inferior a 4 toneladas.
 (c) Dado que em um mês as vendas não superaram 5 toneladas, qual a probabilidade de que ao final do mês restem armazenadas mais do que 3 toneladas?

118. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} kxy & \text{se } x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } x + y \leq 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Obtenha k .
 (b) Calcule as densidades marginais de X e Y .

- (c) São X e Y independentes?
- (d) Calcule as seguintes probabilidades: $P(X \geq Y)$, $P(X \geq 1/2 | X + Y \leq 3/4)$ e $P(X^2 + Y^2 \leq 1)$.
- (e) Obtenha a densidade conjunta de $U = X + Y$ e $V = X - Y$, bem como as marginais.

119. Sejam X_1 , X_2 e X_3 variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{2x_1^2 x_2 e^{x_1 x_2 x_3}}{2e - 5}, \quad 0 < x_1, x_2, x_3 < 1.$$

Obtenha a densidade de $X_1 X_2 X_3$.

120. Sejam X , Y e Z variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x, y, z) = \frac{6}{(1 + x + y + z)^4}, \quad x, y, z > 0.$$

Determine a densidade de $X + Y + Z$.

121. Sejam Y_1 , Y_2 e Y_3 as estatísticas de ordem associadas às variáveis aleatórias independentes X_1 , X_2 e X_3 , uniformemente distribuídas em $(0, 1)$. Obtenha:

- (a) $P(Y_1 + Y_3 \leq 1)$.
- (b) $P(Y_3 < Y_1 + Y_2)$.
- (c) $P(Y_3 > 2Y_1)$.
- (d) o valor de a tal que $P(Y_3 > aY_1) = 1/2$.

122. Uma máquina tem quatro componentes idênticos, cujos tempos de duração em anos são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição exponencial de parâmetro $1/4$. Determine a densidade do tempo de duração da máquina, supondo que ela falha

- (a) quando todos os componentes tiverem falhado.
- (b) quando um dos componentes falhar.
- (c) quando restar apenas um componente funcionando.

Nos três casos anteriores, obtenha a probabilidade de que a máquina dure pelo menos 5 anos.

123. Três pessoas A , B e C chegam ao mesmo tempo a uma central telefônica que possui dois aparelhos telefônicos. Os dois aparelhos são utilizados imediatamente por A e B . A pessoa C substitui a primeira pessoa que finalize a sua ligação e cada pessoa se retira da central uma vez terminado o seu telefonema. Sejam X_1 , X_2 e X_3 os tempos das ligações de A , B e C , respectivamente. Suponha que X_1 , X_2 e X_3 são variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição exponencial de parâmetro λ .

- (a) Determine a densidade de $Z = \max\{X_1, X_2\} - \min\{X_1, X_2\}$.
- (b) Calcule $P(Z < X_3)$.
- (c) O que representa a probabilidade calculada no item (b)?

124. Sejam X_1, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição exponencial de parâmetro λ . Considere Y_1, \dots, Y_n as estatísticas de ordem associadas, e defina

$$Z_1 = Y_1 \quad \text{e} \quad Z_j = Y_j - Y_{j-1}, \quad j = 2, \dots, n.$$

Prove que Z_1, \dots, Z_n são independentes e $Z_j \sim \text{Exp}(\lambda(n - j + 1))$, $j = 1, \dots, n$.

125. Sejam X_1, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição uniforme em $(0, 1)$. Considere Y_1, \dots, Y_n as estatísticas de ordem associadas, e defina

$$V_i = \frac{Y_i}{Y_{i+1}}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad \text{e} \quad V_n = Y_n.$$

Demonstre que V_1, \dots, V_n são independentes e $V_i \sim \text{Beta}(i, 1)$, $i = 1, \dots, n$.

126. Um ponto é escolhido ao acaso em um triângulo com base b e altura h . Determine a densidade da distância do ponto à base do triângulo.

127. Escolhe-se ao acaso um ponto $P = (X, Y)$ do quadrado unitário $(0, 1) \times (0, 1)$. Seja Θ o ângulo formado entre o eixo x e o segmento que une a origem e P . Encontre a densidade de Θ .

128. Sejam Θ_1 e Θ_2 variáveis aleatórias independentes, ambas com distribuição uniforme em $(0, 2\pi)$. Então, $P_1 = (X_1, Y_1) = (\cos \Theta_1, \sin \Theta_1)$ e $P_2 = (X_2, Y_2) = (\cos \Theta_2, \sin \Theta_2)$ são dois pontos escolhidos de forma aleatória e independente na circunferência de raio unitário. Considere $Z = (X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2$ o quadrado da distância entre P_1 e P_2 . Calcule a densidade da variável aleatória Z .

Sugestão: Defina

$$\Theta = \begin{cases} |\Theta_1 - \Theta_2| & \text{se } |\Theta_1 - \Theta_2| < \pi, \\ 2\pi - |\Theta_1 - \Theta_2| & \text{se } \pi \leq |\Theta_1 - \Theta_2| < 2\pi \end{cases}$$

e mostre que para $0 < y < \pi$,

$$P(\Theta \leq y) = P(|\Theta_1 - \Theta_2| \leq y) + P(2\pi - y \leq |\Theta_1 - \Theta_2| < 2\pi) = \frac{y}{\pi}.$$

(Ou seja, Θ tem distribuição uniforme em $(0, \pi)$). Então, use que $Z = 2 - 2 \cos \Theta$.

Respostas

1. (a) $1/21$ (b) $3/7$

2. (a) $3/4$ (b) $4/5$

3. (a) $P(X = 0) = 1/2$, $P(X = 1) = P(X = 3) = P(X = 4) = 1/10$, $P(X = 2) = 1/5$
(b) $5/8$

4. (a) Binomial(15, 0,8) (b) 0,035 (c) 0,83
5. (a) Binomial(10, 1/5) (b) $4,2 \cdot 10^{-6}$ (c) 0,62
6. (a) 35/128 (b) 12393/16384
7. As probabilidades são 0,665, 0,619 e 0,597, aproximadamente.
8. (a) Hipergeométrica(6, 9, 12) (b) 1/2
9. (a) 81/128 (b) 819/1292
10. $358/120^3 \approx 0,000207$
11. (a) Geométrica(0,3) (b) 7
12. (a) 0,0189 (b) 0,027
13. (a) Binomial Negativa(2, 2/5) (b) 0,7667
14. 0,014; 0,036
15. (a) 0,4232 (b) 0,8009
16. (a) 1/3 (b) 0,057 (c) Geométrica($1 - e^{-1/3}$) (d) 0,1043
18. $p(0) = 0,0018$, $p(1) = 0,032$, $p(2) = 0,1862$, $p(3) = 0,4344$, $p(4) = 0,3456$
19. (a) $P(X = 0) = 0,54$, $P(X = 1) = 0,36$, $P(X = 2) = 0,09$, $P(X = 3) = 0,01$
(b) 0,54
20. (a) $p(2) = 1/10$, $p(3) = 1/5$, $p(4) = 3/10$, $p(5) = 2/5$
(b) $p(x) = 1/10$ para $x \in \{3, 4, 8, 9\}$ e $p(x) = 1/5$ para $x \in \{5, 6, 7\}$
21. (a) $p(0) = 28/45$, $p(1) = 16/45$, $p(2) = 1/45$ (b) 17/45
22. (a) $p(0) = 1/35$, $p(1) = 12/35$, $p(2) = 18/35$, $p(3) = 4/35$
(b) $p(0) = 3/32$, $p(1) = 9/16$, $p(2) = 21/64$, $p(3) = 1/64$
24. (a) 2 (b) 1/4 (c) $F(x) = \begin{cases} 1 - x^{-2} & \text{se } x \geq 1, \\ 0 & \text{se } x < 1. \end{cases}$
25. (a) 2/9 (b) 19/36

26. (a) Verifique que F é não-decrescente, contínua, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

(b) F é contínua em \mathbb{R} e derivável em toda a reta, com exceção de um número finito de pontos. Uma densidade de X é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{se } 1 \leq x \leq e, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

27. (a) F é não-decrescente, contínua à direita, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

(b) 0, 1/4, 1/2, 1/4, 3/4 e 1/3, respectivamente.

(c) F é crescente no intervalo (2, 3) e descontínua no ponto 1.

28. 3/5

30. (a) 0,9772 (b) 0,8413 (c) 0,44 (d) -2 (e) 14,32 (f) [-2,84; 12,84]

31. (a) 2,41% (b) 593 ml

32. $\mu = 5$ e $\sigma = 2$

33. (a) 214,6 (b) 2431 g

34. (a) 0,2325 (b) 0,6102 (c) 0,805 cm

35. 0,1085

36. 0,068

37. (b) 2,65% (c) 0,8087

38. (a) 42 (b) 0,0625

39. (a) 0,3672 (b) 0,0308

40. (b) 0,527 (c) 0,7611

43. 0,9631

44. (a) 0,1339 (b) 0,2851 (c) 0,9380

45. 0,9151

46. 0,4515

47. 0,8363

48. 0

49. 387

50. 0,0125

51. (a) 0,1335 (b) 0,0869

52. 0,281

53. 150

54. 1

55. (a) 0,0144 (b) 0,0495

56. (a) $p_X(0) = 0,2$, $p_X(1) = 0,3$, $p_X(2) = 0,5$ e $p_Y(1) = 0,4$, $p_Y(2) = 0,6$.

(b) Não.

(c) 0,75, 0,3, 0,5, 0,875 e 0,5, respectivamente.

(d)

$U \setminus V$	1	2	$p_U(u)$
1	0,05	0	0,05
2	0,3	0,15	0,45
3	0	0,05	0,05
4	0	0,45	0,45
$p_V(v)$	0,35	0,65	1

57. (a) $1/85$ (b) Não (c) $9/41$

58.

$X \setminus Y$	0	1	2	$p_X(x)$
1	$1/10$	$1/10$	$1/10$	$3/10$
2	$2/5$	$1/5$	0	$3/5$
3	$1/10$	0	0	$1/10$
$p_Y(y)$	$3/5$	$3/10$	$1/10$	1

59. (a)

$X \setminus Y$	0	1	2	$p_X(x)$
0	$1/30$	$1/10$	$1/30$	$1/6$
1	$1/5$	$4/15$	$1/30$	$1/2$
2	$1/5$	$1/10$	0	$3/10$
3	$1/30$	0	0	$1/30$
$p_Y(y)$	$7/15$	$7/15$	$1/15$	1

(b) $P(Y \geq 1) = 8/15$ (c) $P(X > Y) = 8/15$

$X \setminus Y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	1/36	0	0	0	0	0	1/36
2	1/18	1/36	0	0	0	0	3/36
3	1/18	1/18	1/36	0	0	0	5/36
4	1/18	1/18	1/18	1/36	0	0	7/36
5	1/18	1/18	1/18	1/18	1/36	0	9/36
6	1/18	1/18	1/18	1/18	1/18	1/36	11/36
$p_Y(y)$	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36	1

61. (a) $P(X = x, Y = y) = \frac{y - x - 1}{120}, 0 \leq x \leq 7, x + 2 \leq y \leq 9$

$$P(X = x) = \frac{(9 - x)(8 - x)}{240}, 0 \leq x \leq 7 \quad P(Y = y) = \frac{y(y - 1)}{240}, 2 \leq y \leq 9$$

(b) $P(Z = z) = \frac{(10 - z)(z - 1)}{120}, 2 \leq z \leq 9$

62. (a) 24/169 (b) 1/24

63. (a) Distribuição multinomial com parâmetros $m = 20$ e $p_i = 1/6, i = 1, \dots, 6$.

(b) $7,4 \cdot 10^{-6}$

64. (a) Distribuição hipergeométrica multivariada com parâmetros $n = 5, N_1 = 2, N_2 = 6, N_3 = 4, N_4 = 1, N_5 = 1$ e $N = 14$.

(b) 0,0749

68. X_1, X_2 e X_3 não são independentes, mas são independentes duas a duas.

70. (a) 0,1912 (b) 0,9745

72. (b) $f_X(x) = \frac{6}{7}x(2x + 1), 0 < x < 1, f_Y(y) = \frac{1}{14}(3y + 4), 0 < y < 2$

(c) 15/56 (d) 13/20

73. $c = 6, X \sim \text{Beta}(1, 3)$ e $Y \sim \text{Beta}(3, 1)$

74. $c = \frac{5}{16\pi}, X \sim N(0, 1)$ e $Y \sim N(0, 4)$

75. (a) 1/33750 (b) Não (c) $P(Y \leq 25) = 125/144$

(d) $P(X > Y - X) = P(Y < 2X) = 3/4$ (e) $P(Y - X < 15) = 15/16$

76. (b) Não (c) $P(X > 0,8) = 0,12$ (d) $P(X < Y) = 0,5$

(e) $P(Y > 0,6 | X > 0,6) = 0,2286$ (f) $P(|X - Y| \leq 0,5) = 0,75$

77. (a) $X, Y \sim U[0, 1]$, não são independentes. (b) 17/48

78. (a) $X \sim \text{Beta}(2, 4)$ e $Y \sim \text{Beta}(4, 2)$ (c) $X/Y \sim \text{Beta}(2, 2)$

80. (a) $1/6$ (b) $1/2$

81. 0,2389

82. 0,0188

83. (a) 0,5926 (b) 0,8414 (c) 0,017

84. (a) 0,2705 (b) 0,0301

85. $P(Y = k) = \binom{6}{(k+6)/2} \left(\frac{1}{2}\right)^6$, $k = -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$

87. Geométrica($1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$)

88. $P(X = k) = p(1 - p)^k$, $k = 0, 1, \dots$

89. Geométrica($1 - e^{-\lambda}$)

$$91. (a) F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < -0,5, \\ \frac{0,5 e^y - 0,5 e^{-0,5}}{1 - e^{-0,5}} & \text{se } -0,5 \leq y < 0, \\ \frac{1 - 0,5 e^{-y} - 0,5 e^{-0,5}}{1 - e^{-0,5}} & \text{se } 0 \leq y < 0,5, \\ 1 & \text{se } y \geq 0,5. \end{cases}$$

$$(b) f_Y(y) = \frac{0,5 e^{-|y|}}{1 - e^{-0,5}}, \quad -0,5 \leq y \leq 0,5$$

(c) 0,2697

92. (a) $f(y) = (1/8) \exp\{-(y - 3)/8\}$, $y > 3$ (b) 0,3247

$$93. (a) F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 2, \\ \sqrt{y - 2}/10 & \text{se } 2 \leq y < 102, \\ 1 & \text{se } y \geq 102. \end{cases}$$

$$(b) F_W(w) = \begin{cases} 0 & \text{se } w < 2, \\ w/10 & \text{se } 2 \leq w < 4, \\ 1 & \text{se } w \geq 4. \end{cases}$$

$$(c) F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z < 0, \\ z/5 & \text{se } 0 \leq z < 4, \\ z/10 + 2/5 & \text{se } 4 \leq z < 6, \\ 1 & \text{se } z \geq 6. \end{cases}$$

95. $f_Y(y) = y^{-1}(2\pi)^{-1/2} \exp\{-(\log y)^2/2\}, y > 0$

96. $f_Y(y) = 2/(\pi\sqrt{1-y^2}), 0 < y < 1$

97. (a) $f_Y(y) = \cos y, 0 < y < \pi/2$ (b) $f_Y(y) = (1/2) \cos y, -\pi/2 < y < \pi/2$

98. Gama($\alpha, \lambda/a$)

100. $f_Y(y) = (2/\pi)^{1/2} \exp\{-y^2/2\}, y > 0$

101. (a) $f_Y(y) = y^{-1/2} e^{-y/2}/\sqrt{2\pi}, y > 0$

102. $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$

$$103. f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{y}} (1 + e^{-\sqrt{y}}) & \text{se } 0 \leq y < 1, \\ \frac{1}{4\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}} & \text{se } y \geq 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

107. (a) $f_Z(z) = \frac{\lambda\mu}{\lambda - \mu} (e^{-\mu z} - e^{-\lambda z}), z > 0$

(b) $f_Z(z) = \lambda^2 z e^{-\lambda z}, z > 0$ ($Z \sim \text{Gama}(2, \lambda)$).

108. $f_X(x) = f_{XY}(x) = \frac{1}{(1+x)^2}, x > 0$

113. (a) $U(-1, 1)$ (b) Cauchy(0, 1)

114. (a) $f_X(x) = 3x^2, 0 < x < 1, f_Y(y) = 6y(1-y), 0 < y < 1;$

X e Y não são independentes.

(b) $f_Z(z) = 2z, 0 < z < 1$

115. (a) $f_X(x) = x e^{-x}, x > 0, f_Y(y) = \frac{1}{2} y^2 e^{-y}, y > 0;$

X e Y não são independentes.

(b) $f_Z(z) = e^{-z}, z > 0$

116. (a) $f_X(x) = \frac{1}{9}x^2, 0 < x < 3, f_Y(y) = \frac{1}{9}y^{1/2}(3^{3/2} - y^{3/2}), 0 < y < 3;$

X e Y não são independentes.

(b) $f_{Y/X}(z) = \frac{3}{2}z^{1/2}, 0 < z < 1$

117. (a) $f_Z(z) = (1/10)\log(10/z), 0 < z < 10$

(b) $P(X > 8, Y < 4) = 0,0893$

(c) $P(X - Y > 3 | Y \leq 5) = 0,375$

118. (a) $k = 24$ (b) $f_X(x) = f_Y(x) = 12x(1-x)^2, 0 \leq x \leq 1$ (c) Não

(d) $P(X \geq Y) = 1/2, P(X \geq 1/2 | X + Y \leq 3/4) = 1/9$ e $P(X^2 + Y^2 \leq 1) = 1$

(e) $g(u, v) = 3(u^2 - v^2), -u \leq v \leq u \leq 1;$

$f_U(u) = 4u^3, 0 \leq u \leq 1; f_V(v) = 1 - 3v^2 + 2|v^3|, -1 \leq v \leq 1$

119. $f_{X_1 X_2 X_3}(y) = \frac{(1-y)^2 e^y}{2e-5}, 0 < y < 1$

120. $f_{X+Y+Z}(w) = \frac{3w^2}{(1+w)^4}, w > 0$

121. (a) $1/2$ (b) $1/2$ (c) $3/4$ (d) $2 + \sqrt{2}$

122. (a) $f(y) = e^{-y/4}(1 - e^{-y/4})^3, y > 0$

(b) $f(y) = e^{-y}, y > 0$

(c) $f(y) = 3e^{-y/2}(1 - e^{-y/4})^2, y > 0$

Probabilidades: (a) 0,7408 (b) 0,006738 (c) 0,3246

123. (a) $Z \sim \text{Exp}(\lambda)$ (Primeiro, obtenha a densidade conjunta de $Y_1 = \min\{X_1, X_2\}$ e $Y_2 = \max\{X_1, X_2\}$ e depois use o Método do Jacobiano para mostrar que Y_1 e Z são independentes com $Y_1 \sim \text{Exp}(2\lambda)$ e $Z \sim \text{Exp}(\lambda)$).

(b) $1/2$ (Note que X_3 e Z são independentes, ambas com distribuição $\text{Exp}(\lambda)$).

(c) É a probabilidade de que, dentre as três pessoas, C seja a última a sair da central telefônica.

126. $f(y) = 2(h-y)/h^2, y \in [0, h]$

127. $f_{Y/X}(z) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } 0 < z \leq 1, \\ 1/(2z^2) & \text{se } z > 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \Rightarrow f_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} 1/(2\cos^2\theta) & \text{se } 0 < \theta \leq \pi/4, \\ 1/(2\sin^2\theta) & \text{se } \pi/4 < \theta < \pi/2, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

128. $f_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{z - z^2/4}}, z \in (0, 4)$

Esperança

1. Definições e propriedades

1.1. A *esperança* (*média*, *valor esperado*) de uma variável aleatória X é definida por

$$\mu_X = E(X) = \begin{cases} \sum_x x P(X = x) & \text{se } X \text{ é discreta,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx & \text{se } X \text{ é contínua com densidade } f. \end{cases}$$

A esperança está definida somente quando a soma (integral) é bem definida. Assim,

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{x \geq 0} x P(X = x) - \sum_{x < 0} (-x) P(X = x) & \text{se } X \text{ é discreta,} \\ \int_{x \geq 0} x f(x) dx - \int_{x < 0} (-x) f(x) dx & \text{se } X \text{ é contínua com densidade } f \end{cases}$$

e portanto $E(X)$ está definida desde que ambas as somas (integrais) não sejam $+\infty$. Em caso contrário, dizemos que $E(X)$ não existe (ou que X não tem valor esperado).

Observamos que, em particular, $E(X)$ está bem definida se $P(X \geq 0) = 1$.

Como um exemplo de uma variável aleatória cuja esperança não existe, seja X assumindo valores em $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ com função de probabilidade dada por

$$P(X = x) = \frac{1}{2|x|(1+|x|)}, \quad x \in \mathbb{Z}^*.$$

Para ver por que esta é uma função de probabilidade, note que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(1+k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{1+k} \right] = 1.$$

Como $\sum_{x>0} x P(X = x) = \sum_{x<0} (-x) P(X = x) = \infty$, $E(X)$ não existe.

Observação. A esperança pode ser definida de uma forma mais geral, sem se restringir à hipótese de que a variável aleatória seja discreta ou contínua. Matematicamente, esperanças são integrais com respeito a funções de distribuição ou medidas de probabilidade. Para mais detalhes, veja-se, por exemplo, a Seção 4 do Capítulo 2 de Gut [13].

1.2. Para qualquer função g a valores reais,

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_x g(x) P(X = x) & \text{se } X \text{ é discreta,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx & \text{se } X \text{ é contínua com densidade } f, \end{cases}$$

desde que a soma (integral) exista.

Observação. Esse teorema possibilita a obtenção da média da variável aleatória $Y = g(X)$, mesmo que não se conheça a distribuição de Y . Por ter sido erroneamente tratada como se fosse a definição de $E(Y)$, essa fórmula recebeu o famigerado nome de *Lei do estatístico inconsciente*.

1.3. Dizemos que a variável aleatória X é *integrável* se $E(X)$ é finita. Isto é equivalente a que $E|X| < \infty$.

1.4. Para $n \geq 1$, o n -ésimo momento de uma variável aleatória X é $E(X^n)$ (se existe).

1.5. A *variância* de uma variável aleatória X integrável com esperança μ é dada por

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = E((X - \mu)^2) = E(X^2) - \mu^2.$$

Se $\sigma_X^2 < \infty$, então $\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$ é chamado o *desvio padrão* de X .

1.6. Nas tabelas 4.1 e 4.2 (p. 104 e 105), são apresentadas a esperança e a variância das principais distribuições discretas e contínuas.

1.7. Se a e b são constantes, então

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad \text{e} \quad \text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X).$$

1.8. Se $E|X|^t$ é finita para algum $t > 0$, então $E|X|^s$ é finita para todo $0 \leq s \leq t$.

1.9. (a) Se X é uma variável aleatória inteira e não-negativa, então

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n).$$

(b) Se X é uma variável aleatória contínua que assume apenas valores não-negativos, então

$$E(X) = \int_0^{\infty} P(X > t) dt.$$

1.10. Critério para integrabilidade: Seja X uma variável aleatória qualquer. Então,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n) \leq E|X| \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n).$$

Assim, X é integrável se e somente se $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n) < \infty$.

1.11. (a) Se X e Y têm uma função de probabilidade conjunta $p(x, y)$, então

$$E[\varphi(X, Y)] = \sum_x \sum_y \varphi(x, y) p(x, y).$$

(b) Se X e Y têm uma função densidade conjunta $f(x, y)$, então

$$E[\varphi(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) f(x, y) dx dy.$$

1.12. Se $P(X \geq Y) = 1$, então $E(X) \geq E(Y)$.

1.13. $E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$.

1.14. Se X_1, \dots, X_n são independentes, então

$$E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n E(X_i).$$

1.15. A *covariância* entre duas variáveis aleatórias X e Y integráveis é dada por

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Assim, $\text{Cov}(X, Y) = 0$ se X e Y são independentes. (Porém a recíproca *não* é sempre verdadeira).

1.16. $\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i, \sum_{j=1}^m b_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \text{Cov}(X_i, Y_j)$, onde os a_i e b_j são números reais.

1.17. $\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$.

1.18. $\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)$ se X_1, \dots, X_n são independentes.

Observação. Recorde-se de que **1.13** e **1.17** são úteis para determinar a esperança e a variância de muitas variáveis aleatórias pelo uso de funções indicadoras.

1.19. Sejam X e Y variáveis aleatórias com variâncias finitas e positivas. O *coeficiente de correlação* entre X e Y é definido por

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = E \left[\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \right) \left(\frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} \right) \right],$$

onde $\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$ e $\sigma_Y = \sqrt{\text{Var}(Y)}$.

Propriedades:

(i) $|\rho(X, Y)| \leq 1$.

(ii) Se $\rho(X, Y) = \pm 1$, então os valores de X e Y pertencem a uma reta.

2. Distribuição e esperança condicionais

2.1. Caso discreto: Se X e Y são variáveis aleatórias discretas, a *função de probabilidade condicional* de X dado que $Y = y$ é definida por

$$p_{X|Y}(x | y) = P(X = x | Y = y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)},$$

para todos os valores de y tais que $p_Y(y) > 0$. Neste caso, a *esperança condicional* de X dado que $Y = y$ é

$$E(X | Y = y) = \sum_x x p_{X|Y}(x | y).$$

2.2. Caso contínuo: Se X e Y são conjuntamente contínuas com função densidade conjunta $f(x, y)$, a *função densidade condicional* de X dado que $Y = y$ é definida para todos os valores de y tais que $f_Y(y) > 0$ por

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}.$$

A *esperança condicional* de X dado que $Y = y$ é, neste caso,

$$E(X | Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x | y) dx.$$

2.3. Para $B \subset \mathbb{R}$,

$$P(X \in B | Y = y) = \begin{cases} \sum_{x \in B} P(X = x | Y = y) & \text{no caso discreto,} \\ \int_B f_{X|Y}(x | y) dx & \text{no caso contínuo.} \end{cases}$$

2.4. A esperança condicional de X dado que $Y = y$ é simplesmente a esperança de X com respeito à distribuição condicional de X dado que $Y = y$. Assim, desfruta de propriedades análogas às da esperança comum. Por exemplo,

$$E(a X_1 + b X_2 | Y = y) = a E(X_1 | Y = y) + b E(X_2 | Y = y);$$

$$E(g(X) | Y = y) = \begin{cases} \sum_x g(x) P(X = x | Y = y) & \text{no caso discreto,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|Y}(x | y) dx & \text{no caso contínuo.} \end{cases}$$

2.5. Princípio da substituição para a esperança condicional:

Se $\varphi(X, Y)$ é integrável, então

$$E(\varphi(X, Y) | Y = y) = E(\varphi(X, y) | Y = y).$$

Corolário: Se $g(X)$ e $g(X) h(Y)$ são integráveis, então

$$E(g(X) h(Y) | Y = y) = h(y) E(g(X) | Y = y).$$

2.6. Propriedade fundamental: Seja X uma variável aleatória integrável. Então,

$$E(E(X | Y)) = E(X).$$

(a) $E(X | Y)$ é uma variável aleatória (uma função de Y) cuja esperança é igual a $E(X)$.

$$(b) E(X) = \begin{cases} \sum_y E(X | Y = y) P(Y = y) & \text{se } Y \text{ é discreta,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} E(X | Y = y) f_Y(y) dy & \text{se } Y \text{ é contínua com densidade } f_Y. \end{cases}$$

Corolário: Para qualquer evento A ,

$$P(A) = \begin{cases} \sum_y P(A | Y = y) P(Y = y) & \text{se } Y \text{ é discreta,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} P(A | Y = y) f_Y(y) dy & \text{se } Y \text{ é contínua com densidade } f_Y. \end{cases}$$

3. Funções geradoras

3.1. A função geradora de momentos da variável aleatória X é definida por

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} P(X = x) & \text{se } X \text{ é discreta,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx & \text{se } X \text{ é contínua com densidade } f, \end{cases}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que a esperança seja finita.

Observação. Suporemos que o domínio de M_X contém um intervalo em torno de $t = 0$.

3.2. Propriedades:

1. $M_X^{(n)}(0) = \left. \frac{d^n M_X(t)}{dt^n} \right|_{t=0} = E(X^n)$, $n \geq 1$.
2. Para $a, b \in \mathbb{R}$, $M_{aX+b}(t) = e^{tb} M_X(at)$.
3. A função geradora de momentos determina unicamente a distribuição. Isso significa que se X e Y são variáveis aleatórias tais que $M_X(t) = M_Y(t)$ para $|t| < c$, onde $c > 0$ é uma constante, então $F_X(x) = F_Y(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
4. Se X_1, \dots, X_k são variáveis aleatórias independentes com funções geradoras de momentos respectivas $M_{X_1}(t), \dots, M_{X_k}(t)$, então a função geradora de momentos de $X_1 + \dots + X_k$ é dada por

$$M_{X_1 + \dots + X_k}(t) = M_{X_1}(t) \dots M_{X_k}(t).$$

3.3. Sejam X_1, \dots, X_k variáveis aleatórias independentes.

- Se $X_i \sim \text{Binomial}(n_i, p)$, $i = 1, \dots, k$, então $\sum_{i=1}^k X_i \sim \text{Binomial}(\sum_{i=1}^k n_i, p)$.
- Se $X_i \sim \text{Binomial Negativa}(r_i, p)$, $i = 1, \dots, k$, então $\sum_{i=1}^k X_i \sim \text{Binomial Negativa}(\sum_{i=1}^k r_i, p)$.
- Se $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, k$, então $\sum_{i=1}^k X_i \sim \text{Poisson}(\sum_{i=1}^k \lambda_i)$.
- Se $X_i \sim \text{Gama}(\alpha_i, \lambda)$, $i = 1, \dots, k$, então $\sum_{i=1}^k X_i \sim \text{Gama}(\sum_{i=1}^k \alpha_i, \lambda)$.
- Se $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \dots, k$, e a_1, \dots, a_k são números reais não todos nulos, então $\sum_{i=1}^k a_i X_i \sim N(\sum_{i=1}^k a_i \mu_i, \sum_{i=1}^k a_i^2 \sigma_i^2)$.

Observação. Se X é uma variável aleatória inteira e não-negativa, é preferível trabalhar com a *função geradora de probabilidade* de X , que é definida por

$$G_X(s) = E(s^X) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(X = n), \quad s \in [-1, 1].$$

Note que G_X é uma série de potências com raio de convergência maior ou igual a 1, já que $G_X(1) = P(X < \infty) = 1$. A função geradora de probabilidade também determina

unicamente a distribuição. Ademais, a função geradora de probabilidade da soma de variáveis aleatórias independentes é igual ao produto das funções geradoras de probabilidade individuais.

Outras propriedades:

$$(i) P(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}, n \geq 0.$$

$$(ii) G_X^{(n)}(1) = E[X(X-1)\dots(X-n+1)], n \geq 1, \text{ onde } G_X^{(n)}(1) = \lim_{s \uparrow 1} G_X^{(n)}(s) \text{ quando o raio de convergência de } G_X \text{ é igual a } 1.$$

A *função característica* de uma variável aleatória X é a função $\varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = E(\cos(tX)) + i E(\sin(tX)), t \in \mathbb{R},$$

onde o símbolo i representa a unidade imaginária $\sqrt{-1}$. A principal vantagem de trabalhar com a função característica reside no fato de ser definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

	$p_X(x)$	$M_X(t)$	μ_X	σ_X^2
Uniforme Discreta(n)	$\frac{1}{n}, x = 1, \dots, n$	$\frac{e^t (e^{nt} - 1)}{n(e^t - 1)}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2 - 1}{12}$
Binomial(n, p)	$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}, x = 0, 1, \dots, n$	$(pe^t + q)^n$	np	npq
Poisson(λ)	$\frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, x = 0, 1, \dots$	$e^{\lambda(e^t - 1)}$	λ	λ
Geométrica(p)	$pq^{x-1}, x = 1, 2, \dots$	$\frac{pe^t}{1 - qe^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Binomial Negativa(r, p)	$\binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}, x = r, r+1, \dots$	$\left(\frac{pe^t}{1 - qe^t}\right)^r$	$\frac{r}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$
Hipergeométrica(n, R, N)	$\binom{N-R}{n-x} \binom{R}{x} \binom{N}{n}^{-1}$	*	$\frac{nR}{N}$	$n \left(\frac{R}{N}\right) \left(1 - \frac{R}{N}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

Tabela 4.1: Distribuições discretas. Como de costume, $q = 1 - p$. Para a distribuição uniforme discreta, a fórmula indicada para $M_X(t)$ é válida para $t \neq 0$. Para as distribuições geométrica e binomial negativa, o domínio de M_X é $(-\infty, -\log(1 - p))$. Para a distribuição hipergeométrica, os valores possíveis são $\max(0, n - N + R) \leq x \leq \min(n, R)$ e a função geradora de momentos foi substituída por um asterisco pois não é útil.

	$f_X(x)$	$M_X(t)$	μ_X	σ_X^2
Uniforme(a, b)	$\frac{1}{b-a}, a \leq x \leq b$	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Normal(μ, σ^2)	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$	$e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$	μ	σ^2
Exponencial(λ)	$\lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$ para $t < \lambda$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Gama(α, λ)	$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, x \geq 0$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha$ para $t < \lambda$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$
Beta(a, b)	$\frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}, 0 \leq x \leq 1$	*	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$
Cauchy(a, b)	$\frac{1}{\pi b \left\{ 1 + \left[\frac{(x-a)}{b} \right]^2 \right\}}, x \in \mathbb{R}$	$\varphi_X(t) = e^{iat-b t }$	-	-

Tabela 4.2: Distribuições contínuas. Para a distribuição uniforme, a fórmula indicada para $M_X(t)$ é válida para $t \neq 0$. A função geradora de momentos da distribuição Beta foi substituída por um asterisco pois não é útil. Para a distribuição de Cauchy, é indicada a função característica.

4. Desigualdades

4.1. Desigualdade de Markov: Se $X \geq 0$, então, para qualquer $\lambda > 0$,

$$P(X \geq \lambda) \leq \frac{E(X)}{\lambda}.$$

4.2. Desigualdade de Markov Generalizada: Seja X uma variável aleatória qualquer. Para todo $t > 0$,

$$P(|X| \geq \lambda) \leq \frac{E|X|^t}{\lambda^t}, \forall \lambda > 0.$$

4.3. Desigualdade de Chebyshev: Seja X uma variável aleatória com $E(X) < \infty$. Então, para qualquer $\lambda > 0$,

$$P(|X - E(X)| \geq \lambda) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\lambda^2}.$$

4.4. Limitantes de Chernoff: Para quaisquer variável aleatória X e $a \in \mathbb{R}$,

$$P(X \geq a) \leq e^{-ta} M_X(t) \quad \text{para todo } t > 0;$$

$$P(X \leq a) \leq e^{-ta} M_X(t) \quad \text{para todo } t < 0.$$

4.5. Desigualdade de Jensen: Seja $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Se a variável aleatória X é integrável, então

$$E(\varphi(X)) \geq \varphi(E(X)).$$

Observação. A Desigualdade de Jensen é válida se φ é convexa em um intervalo (a, b) tal que $P(a < X < b) = 1$, em que se admite a possibilidade de $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

4.6. Desigualdade de Cauchy-Schwarz: Se as variáveis aleatórias X e Y têm variâncias finitas, então

$$|E(XY)| \leq (E(X^2) E(Y^2))^{1/2}.$$

Exercícios

Esperança: Definições e propriedades básicas, Momentos, Variância

- Duas bolas são escolhidas aleatoriamente de uma urna contendo 4 bolas azuis, 3 vermelhas e 2 laranjas. Suponha que ganhamos 10 reais para cada bola azul selecionada, ganhamos 1 real para cada bola laranja, porém perdemos 8 reais para cada bola vermelha. Seja X o nosso lucro.
 - Determine a função de probabilidade de X .
 - Obtenha o valor esperado e a variância de X .
- Considere o seguinte jogo. Um indivíduo aposta em um dos números de 1 a 6. Três dados honestos são então lançados, de maneira independente, e, se o número apostado aparecer i vezes, $i = 1, 2, 3$, o apostador ganha i reais; caso o número apostado não apareça em nenhum dos dados, o apostador perde 1 real. Seja X o ganho do apostador no jogo. Determine a função de probabilidade de X e, com base na esperança de X , julgue se o jogo é honesto ou não para o apostador.
- Exatamente uma de seis chaves de aspecto semelhante abre uma determinada porta. Testa-se uma chave após a outra. Qual o número médio de tentativas necessárias para se conseguir abrir a porta?
- Em um experimento de hibridação com ervilhas, a descendência é formada por plantas com vagens amarelas ou verdes. Segundo a teoria de Gregor Mendel, a probabilidade de uma planta com vagem amarela é $1/4$. Quais são a esperança e a variância do número de plantas com vagem amarela em uma descendência de 580 plantas?
- Cinquenta pessoas lançam uma moeda honesta dez vezes. Obtenha a média e a variância do número de pessoas que obtêm exatamente cinco caras.
- No niquelamento de certas lâminas metálicas, ocorrem imperfeições que se distribuem aleatoriamente sobre a superfície niquelada. O número de imperfeições por lâmina é uma variável aleatória com distribuição de Poisson de média 2.
 - Qual a porcentagem de lâminas niqueladas com pelo menos quatro imperfeições?
 - Dez lâminas são escolhidas ao acaso da linha de montagem. Calcule a probabilidade de que exatamente três delas tenham imperfeições.
 - Observam-se as lâminas da linha de montagem até que apareça a primeira lâmina sem imperfeições. Qual o número esperado de lâminas observadas?
- Um atleta de tiro com arco tem probabilidade 5% de acertar na mosca em cada tiro. Qual o número esperado de tiros que deve realizar para completar uma série com dois acertos na mosca?
- Se a variável aleatória X tem distribuição de Poisson e $P(X = 0) = 1/2$, quanto vale a variância de X ?
- Existe uma variável aleatória X com $E(X) = 3$ e $E(X^2) = 8$?

10. Suponha que n pessoas, incluindo você e um amigo, alinham-se aleatoriamente para tirar uma foto. Seja X o número de pessoas que ficam entre você e o seu amigo. Determine o valor esperado de X .

Sugestão: Use que $\sum_{x=1}^{n-2} x(n-1-x) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

11. Obtenha a esperança das variáveis aleatórias contínuas cujas densidades são dadas no exercício 23 do Capítulo 3.

12. A duração de uma ligação telefônica à central de atendimento ao consumidor de uma empresa é uma variável aleatória exponencialmente distribuída, com média de 6 minutos.

(a) Determine a probabilidade de que uma ligação dure no máximo 4 minutos.

(b) Dado que uma ligação já durou 3 minutos, qual a probabilidade de que dure pelo menos outros 6 minutos?

13. Em uma faculdade, a proporção de alunos aprovados anualmente em um curso de Estatística é uma variável aleatória com distribuição Beta(3, 2).

(a) Calcule a probabilidade de que menos de 20% dos alunos sejam reprovados em um ano.

(b) Qual a proporção média de aprovados por ano?

14. Seja X uma variável aleatória com distribuição logística, isto é, X tem densidade

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Obtenha o valor esperado de X .

Solução. Temos:

$$E(X) = \int_0^{\infty} x f(x) dx - \int_{-\infty}^0 (-x) f(x) dx,$$

desde que as integrais não sejam ambas $+\infty$. Como f é simétrica em torno de 0 (ou seja, $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$), obtemos:

$$\int_{-\infty}^0 (-x) f(x) dx = \int_{-\infty}^0 (-x) f(-x) dx = - \int_{\infty}^0 y f(y) dy = \int_0^{\infty} y f(y) dy.$$

Finalmente, visto que

$$\int_0^{\infty} x f(x) dx \leq \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 1 < \infty,$$

concluimos que $E(X) = 0$.

15. Seja X uma variável aleatória com densidade

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x \geq 1.$$

(a) Mostre que de fato f é uma densidade.

(b) A esperança de X existe? Se existe, é igual a quanto?

16. Seja $X \sim N(0, 1)$.

(a) Mostre que $E(X) = 0$ e $\text{Var}(X) = 1$.

(b) Calcule $E|X|$.

17. Seja X uma variável aleatória com distribuição de Laplace (também conhecida como exponencial dupla), isto é, com densidade

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Obtenha:

(a) $E(X)$ (b) $E|X|$ (c) $\text{Var}(X)$.

18. Seja $X \sim \text{Cauchy}(0, 1)$, com densidade

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Determine a função de distribuição de X .

(b) Prove que $E(X)$ não existe e que $E|X| = \infty$.

19. Suponha que X é uma variável aleatória com distribuição binomial com $n = 20$ e $p = 2/5$. Calcule a esperança e a variância de $Y = 3X - 4$.

20. Seja X uma variável aleatória com distribuição de Poisson com parâmetro λ , $\lambda > 0$.

Obtenha:

(a) $E[(1+X)^{-1}]$.

(b) $E(2^X)$.

(c) $E(X!)$.

Para quais valores de λ a variável aleatória $X!$ é integrável?

21. Seja X uma variável aleatória com distribuição geométrica de parâmetro p . Mostre que

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = -\frac{p \log p}{1-p}.$$

Sugestão: Use que $\int (1-p)^{x-1} dp = -\frac{(1-p)^x}{x}$.

22. Calcule o n -ésimo momento de uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $[a, b]$.

23. Determine o n -ésimo momento de uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro λ .

24. Obtenha o valor esperado da área de um triângulo retângulo isósceles cuja hipotenusa tem comprimento uniformemente distribuído no intervalo $[2, 8]$.

25. Um ponto é escolhido ao acaso no intervalo $[0, 1]$, dividindo-o em duas partes. Calcule o valor esperado da razão entre os tamanhos do menor segmento e do maior segmento formados.

26. Seja Z uma variável aleatória com distribuição normal padrão. Para $x \in \mathbb{R}$ fixado, defina

$$X = \begin{cases} Z & \text{se } Z > x, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mostre que $E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

27. Demonstre o critério para integrabilidade enunciado em **1.10** (p. 99).

Sugestão: Considere a variável aleatória $Y = \lceil |X| \rceil$ (parte inteira de $|X|$) e observe que Y assume valores inteiros e não-negativos e satisfaz $0 \leq Y \leq |X| \leq Y + 1$.

28. Um estacionamento cobra 10 reais pela primeira hora ou fração e 2 reais a partir da segunda hora ou fração. Suponha que o tempo em horas que um carro permanece no estacionamento é uma variável aleatória com distribuição Gama(2, 1). Determine o preço médio pago por um cliente para estacionar um carro.

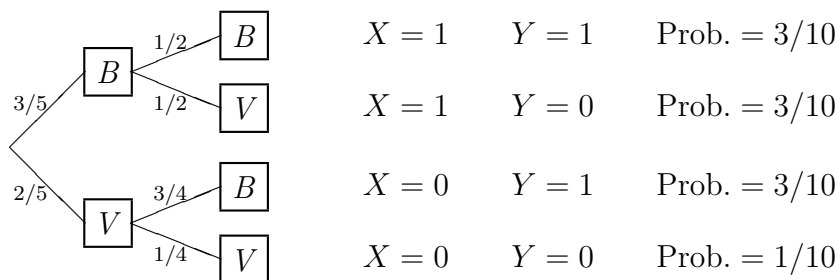
Sugestão: Defina Y o número de horas que um carro permanece no estacionamento, incluindo a última hora incompleta.

Esperança de funções de vetores aleatórios, Covariância, Uso de funções indicadoras

29. Uma urna contém três bolas brancas e duas bolas vermelhas. Retiram-se duas bolas da urna, uma após a outra, sem reposição. Seja X igual a 0 ou 1, conforme a primeira bola retirada seja vermelha ou branca, e seja Y igual a 0 ou 1, conforme a segunda bola retirada seja vermelha ou branca. Determine:

- (a) a função de probabilidade conjunta de X e Y , bem como as marginais.
- (b) se X e Y são independentes.
- (c) $E(2X + 8Y)$.
- (d) a covariância entre X e Y .

Solução. (a) Utilizando uma árvore, podemos obter o espaço amostral, probabilidades e valores de X e Y correspondentes:



onde B e V denotam respectivamente ‘bola branca’ e ‘bola vermelha’.

Dessa forma, a função de probabilidade conjunta de X e Y e as marginais ficam:

$X \setminus Y$	0	1	$p_X(x)$
0	$1/10$	$3/10$	$2/5$
1	$3/10$	$3/10$	$3/5$
$p_Y(y)$	$2/5$	$3/5$	1

(b) X e Y não são independentes:

$$P(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{10} \neq P(X = 0) P(Y = 0) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}.$$

(c) Temos

$$E(X) = E(Y) = 0 \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5},$$

portanto, pela linearidade da esperança,

$$E(2X + 8Y) = 2E(X) + 8E(Y) = 6.$$

(d) Visto que $E(XY) = 1 \cdot 1 \cdot 3/10 = 3/10$, obtemos

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{3}{50}.$$

30. Cada lançamento de um dado não honesto resulta em cada um dos números ímpares 1, 3, 5 com probabilidade C e em cada um dos números pares 2, 4, 6 com probabilidade $2C$.

(a) Determine C .

Suponha que o dado é lançado e considere as seguintes variáveis aleatórias:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se o resultado é um número par,} \\ 0 & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{se o resultado é um número maior que 3,} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(b) Determine a função de probabilidade conjunta de X e Y , bem como as marginais. X e Y são independentes?

(c) Obtenha $P(X = 0 | Y = 1)$.

(d) Calcule $E(2^X - 12Y + 6)$.

(e) Calcule $\text{Var}(X + Y)$.

31. Sejam X e Y variáveis aleatórias discretas com função de probabilidade conjunta

$$p(x, y) = \begin{cases} cxy & \text{se } x \in \{1, 2, 3\}, y \in \{1, 2, 3\} \text{ e } x + y \leq 4, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Determine o valor de c .

- (b) São X e Y independentes?
 (c) Calcule o coeficiente de correlação entre X e Y .

32. Em um problema envolvendo variáveis aleatórias independentes X e Y , um estudante calcula, corretamente, que

$$E(Y) = 2, \quad E(X^2Y) = 6, \quad E(XY^2) = 8, \quad E((XY)^2) = 24.$$

Você pode ajudá-lo, determinando o valor de $E(X)$?

33. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} c(y^2 - x^2)e^{-y} & \text{se } -y \leq x \leq y \text{ e } y > 0, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Mostre que Y tem distribuição Gama e daí deduza qual o valor de c .
 (b) Obtenha a densidade de $Z = e^{-Y}$.
 (c) Explique por que $E|X| \leq 4$.

34. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, com $X \sim U(0, 1)$ e $Y \sim \text{Exp}(1)$. Obtenha:

- (a) $E(X + Y)$.
 (b) $E(XY)$.
 (c) $E((X - Y)^2)$.
 (d) $E(X^2 e^{2Y})$.

35. Após uma troca de unidades, a relação entre a renda mensal X de uma família em um país e sua despesa mensal Y é expressa pela seguinte densidade conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy & \text{se } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Obtenha o valor esperado do quociente Y/X .
 (b) Determine a covariância entre X e Y .

36. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-2x}/x & \text{se } 0 \leq y \leq x < \infty, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule a covariância entre X e Y .

37. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)e^{-(x+y)}, \quad x \geq 0, y \geq 0.$$

- (a) X e Y são independentes?
- (b) Calcule a função densidade de $Z = X + Y$.
- (c) Obtenha $E[(X + Y)^{-1}]$.

38. Seja (X, Y) um ponto escolhido ao acaso no conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1 \text{ e } xy \geq 0\}.$$

- (a) São X e Y independentes?
- (b) Calcule a covariância entre X e Y .

39. Seja (X, Y) um ponto escolhido aleatoriamente no conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}.$$

- (a) São X e Y independentes?
- (b) Encontre a covariância entre X e Y .

40. Sejam X , Y e Z variáveis aleatórias independentes, com variâncias iguais e positivas. Determine o coeficiente de correlação entre $X + Y$ e $X + Z$.

41. Sejam X e Y variáveis aleatórias com variâncias iguais a $\sigma^2 > 0$ e coeficiente de correlação ρ . Calcule a variância da média aritmética de X e Y . Conclua que a média aritmética de X e Y tem variância menor ou igual a σ^2 .

42. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, com distribuição uniforme em $[0, 1]$, e considere $U = \min\{X, Y\}$ e $V = \max\{X, Y\}$. Calcule $\text{Cov}(U, V)$.

Sugestão: Não é necessário obter a densidade conjunta de U e V para determinar $E(UV)$.

43. Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes, tal que, para cada $n \geq 1$, $X_n \sim \text{Exp}(n)$, ou seja, X_n tem densidade de probabilidade dada por

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} n e^{-nx} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Obtenha a distribuição de $Y = \min\{X_1, X_2, X_3\}$.
- (b) Determine $E\left(\exp\left\{-\sum_{n=1}^{100} X_n\right\}\right)$.

44. Sejam X_1 , X_2 e X_3 variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição exponencial de parâmetro 1. Defina $U_1 = \sqrt{X_1 X_2}$, $U_2 = \sqrt{X_1 X_3}$ e $U_3 = \sqrt{X_2 X_3}$.

- (a) Calcule a média e a variância de cada U_i , $i = 1, 2, 3$.
- (b) Obtenha a média e a variância de $T = (U_1 + U_2 + U_3)/3$.

45. Um vaso contém 20 cartões, dois deles marcados 1, dois marcados 2, ..., dois marcados 10. Cinco cartões são retirados ao acaso do vaso. Qual é o número esperado de pares que permanecem ainda no vaso?

(Este problema foi colocado e resolvido no século XVIII por Daniel Bernoulli, como um modelo probabilístico para determinar o número de casamentos que permanecem intactos quando ocorre um total de m mortes entre N casais; em nosso caso, $m = 5$ e $N = 10$).

Solução. Seja X o número de pares que permanecem no vaso após a retirada dos cinco cartões. Então,

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10},$$

onde, para $i = 1, 2, \dots, 10$,

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se o } i\text{-ésimo par permanece no vaso,} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Porém, para $i = 1, 2, \dots, 10$,

$$E(X_i) = P(X_i = 1) = \frac{\binom{18}{5}}{\binom{20}{5}} = \frac{21}{38}.$$

Assim, obtemos

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_{10}) = 10 \cdot \frac{21}{38} = \frac{105}{19} \approx 5,53.$$

Observação. Embora mais trabalhoso, pode-se obter a distribuição de X e calcular o valor esperado pela definição. De fato,

$$P(X = 5) = \frac{\binom{10}{5} 2^5}{\binom{20}{5}} = \frac{168}{323},$$

$$P(X = 6) = \frac{\binom{10}{1} \binom{9}{3} 2^3}{\binom{20}{5}} = \frac{140}{323},$$

$$P(X = 7) = \frac{\binom{10}{2} \binom{16}{1}}{\binom{20}{5}} = \frac{15}{323},$$

portanto

$$E(X) = \sum_x x P(X = x) = \frac{105}{19} \approx 5,53.$$

46. Um ônibus parte com 20 pessoas e tem em seu trajeto 10 pontos diferentes, parando em um ponto somente se uma ou mais pessoas solicitarem. Suponha que cada passageiro escolhe com igual probabilidade o ponto em que vai parar e que as escolhas são independentes de passageiro para passageiro. Determine o número esperado de paradas feitas pelo ônibus.

Solução. Se X é o número de de paradas feitas pelo ônibus, escrevemos

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10},$$

onde

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se pelo menos uma pessoa solicita a parada no ponto } i, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, para $i = 1, \dots, 10$,

$$\begin{aligned} E(X_i) &= P(X_i = 1) \\ &= P(\text{Pelo menos uma pessoa solicita a parada no ponto } i) \\ &= 1 - P(\text{Nenhuma pessoa solicita a parada no ponto } i) \\ &= 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}. \end{aligned}$$

Portanto, pela linearidade da esperança,

$$E(X) = 10 \cdot E(X_1) = 10 \cdot \left(1 - (0,9)^{20}\right) \approx 8,78.$$

Observação. É possível, porém mais trabalhoso, obter a distribuição de X e calcular o valor esperado pela definição. Para $x = 1, \dots, 10$,

$$P(X = x) = \binom{10}{x} \left[\sum_{j=0}^{x-1} (-1)^j \binom{x}{j} (x-j)^{20} \right] \left(\frac{1}{10}\right)^{20},$$

onde o termo entre colchetes é o número de maneiras com que podemos distribuir $n = 20$ bolas distintas em x urnas distintas de modo que nenhuma urna fique vazia (o qual pode ser obtido pelo Princípio da Inclusão-Exclusão). Assim,

$$E(X) = \sum_{x=1}^{10} x P(X = x) \approx 8,78.$$

47. Uma prova consiste de duas partes: a parte I, com 50 questões de verdadeiro ou falso, e a parte II, formada por 40 questões de múltipla escolha, cada uma com 4 alternativas, das quais somente uma correta. Por não ter estudado, um aluno pretende fazer a prova escolhendo ao acaso as respostas das questões, de modo independente. Determine a esperança e a variância do número de questões que acertará.

48. Uma sorveteria oferece 36 sabores diferentes de sorvete. Uma pessoa é encarregada de escolher ao acaso 10 sorvetes dessa sorveteria, podendo repetir o sabor. Por ao acaso, queremos dizer que todas as escolhas possíveis têm a mesma probabilidade. Qual o número esperado de sabores diferentes que serão escolhidos?

49. Seis pares diferentes de meias são colocados em uma lavadora (doze meias ao todo, e cada meia tem um único par), porém apenas sete meias retornam. Qual o número esperado de pares de meias que retornam?

50. Um círculo de raio 1 é lançado em uma folha de tamanho infinito dividida em quadrados iguais de lado com comprimento 1. Suponha que o centro do círculo está uniformemente distribuído no quadrado em que cai. Calcule o número esperado de vértices do quadrado que estão dentro do círculo.

51. Escolhem-se ao acaso e sem reposição 10 números do conjunto $\{1, 2, \dots, 30\}$. Calcule o valor esperado da soma dos números escolhidos.

52. Uma marca de biscoitos lança uma promoção que consiste em oferecer um adesivo em cada pacote de biscoito. Existem n adesivos diferentes e a probabilidade de um pacote conter qualquer um dos adesivos é a mesma. Qual o número esperado de pacotes que devem ser comprados para juntar os n adesivos diferentes?

53. Suponha que 8 casais sentam-se ao acaso em um banco de 16 lugares. Determine a esperança e a variância do número de mulheres que estão sentadas ao lado dos maridos.

54. Um grupo de nove amigos que se reúnem para jogar futebol é composto por 2 goleiros, 3 zagueiros e 4 atacantes. Se os jogadores são agrupados ao acaso em três trios (grupos de tamanho 3), encontre a esperança e a variância do número de trios formados por um jogador de cada tipo.

55. São realizados n lançamentos independentes de uma moeda, com probabilidade p de cara em cada lançamento ($0 < p < 1$). Uma *seguida* é uma sequência de lançamentos de mesmo resultado; por exemplo, a sequência CCKCKKC contém 5 seguidas. Obtenha a esperança e a variância do número de seguidas nos n lançamentos.

56. Esperança e variância da distribuição hipergeométrica.

Suponha que temos uma população de N objetos, dos quais R são do tipo 1 e $N - R$ são do tipo 2. Escolhem-se desta população n objetos ao acaso, sem reposição ($n \leq N$). Determine a esperança e a variância do número de objetos do tipo 1 escolhidos.

57. Suponha que temos r bolas distintas que são aleatoriamente distribuídas em n urnas ($r > 0, n > 0$). Calcule a esperança e a variância do número de urnas vazias após a distribuição.

58. Seja (X_1, \dots, X_n) com distribuição multinomial de parâmetros m, p_1, \dots, p_n . Obtenha a covariância entre X_i e X_j para $i \neq j$.

59. Em uma festa, estão presentes 8 meninos, 10 meninas e 12 adultos. Doze dessas pessoas são sorteadas para participarem de uma brincadeira. Sejam X e Y o número de meninos e meninas que participam da brincadeira, respectivamente. Calcule a covariância entre X e Y .

60. Considere um grafo com n vértices numerados $1, 2, \dots, n$, e suponha que cada um dos $\binom{n}{2}$ pares de vértices distintos é ligado por um elo, independentemente, com probabilidade p . Seja D_i o grau do vértice i , isto é, o número de elos que têm o vértice i como uma de suas extremidades.

(a) Qual é a distribuição de D_i ?

(b) Determine a correlação entre D_i e D_j para $i \neq j$.

Sugestão: Defina $I_{i,j}$ a função indicadora do evento de que há um elo entre os vértices i e j .

Distribuição e esperança condicionais

61. Sejam X e Y variáveis aleatórias discretas cuja função de probabilidade conjunta é dada pela seguinte tabela:

$X \setminus Y$	1	2
1	1/20	1/5
2	0	1/10
3	1/10	1/10
4	1/20	2/5

(a) Obtenha a função de probabilidade de X dado que $Y = 2$.

(b) Calcule $E(X^2 | Y = 2)$.

62. Sejam X o mínimo e Y o máximo de três números sorteados ao acaso, sem reposição, do conjunto $\{1, 2, \dots, 6\}$.

(a) Determine a função de probabilidade conjunta de X e Y , bem como as marginais.

(b) Obtenha a função de probabilidade de X dado que $Y = 5$.

(c) Calcule $E(X | Y - X = 3)$.

63. Seja (X, Y) um ponto escolhido aleatoriamente no quadrado $(0, 1) \times (0, 1)$. Calcule $E(X|XY)$.

Solução. A densidade conjunta de X e Y é dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja $Z = XY$. Usando o Método do Jacobiano, obtemos a densidade conjunta de X e Z :

$$f_{X,Z}(x, z) = \begin{cases} 1/x & \text{se } 0 < z < x < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, calculamos a densidade marginal de Z . Para $0 < z < 1$,

$$f_Z(z) = \int_z^1 1/x \, dx = -\log z.$$

Portanto, para $0 < z < 1$,

$$f_{X|Z}(x|z) = -\frac{1}{x \log z}, \quad z < x < 1.$$

Assim,

$$E(X|Z = z) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Z}(x|z) \, dx = \int_z^1 \left(-\frac{1}{\log z} \right) dx = \frac{z-1}{\log z}.$$

Finalmente,

$$E(X|XY) = \frac{XY - 1}{\log(XY)}.$$

64. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy & \text{se } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule $E(X|Y)$ e $E(Y|X)$.

65. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 \exp\{-y^2\} & \text{se } 0 < x < y, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Obtenha a densidade condicional de X dado que $Y = y$.

(b) Calcule $E(X^3|Y = y)$.

66. Uma rede de supermercados encomendou um estudo sobre a relação entre a proporção X de clientes que compram apenas uma vez ao mês nos seus estabelecimentos e o lucro mensal Y em milhões de reais. Os estatísticos contratados obtiveram que a densidade conjunta de X e Y é dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} k(x + y)e^{-y} & \text{se } 0 < x < 1, y > 0, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde k é uma constante.

(a) Obtenha o valor de k .

(b) Determine a esperança condicional de X dado que $Y = y$.

67. O tempo em minutos que um professor gasta para corrigir uma prova é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-x/5} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Suponha que provas de alunos diferentes têm tempos de correção independentes.

(a) Obtenha a densidade do tempo utilizado pelo professor para corrigir duas provas.

(b) Dado que o professor gastou 15 minutos para corrigir duas provas, qual é a probabilidade de que tenha usado mais que 10 minutos na correção da primeira?

68. Uma farmácia possui uma quantidade X de centenas de unidades de um certo remédio no início de cada mês. Durante o mês, vendem-se Y centenas de unidades desse remédio. Suponha que

$$f(x, y) = \begin{cases} 2/9 & \text{se } 0 < y < x < 3, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é a função densidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y .

- (a) Mostre que de fato f é uma densidade.
- (b) Calcule a probabilidade de que ao final do mês a farmácia tenha vendido pelo menos a metade das unidades que havia inicialmente.
- (c) Dado que foram vendidas cem unidades, qual a probabilidade de que havia pelo menos duzentas unidades no começo do mês?

69. Uma companhia telefônica deseja realizar uma análise sobre a repercussão que as novas tarifas tiveram no número de chamadas. Levando em conta que as chamadas se classificam em locais, interurbanas e internacionais, um estudo realizado em um grupo de famílias revelou que as proporções de chamadas locais X e interurbanas Y durante um mês têm a seguinte densidade conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 6x & \text{se } x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } x + y \leq 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Calcule a probabilidade de que a proporção de chamadas locais realizadas por uma família em um mês seja superior a 70%.
- (b) Obtenha a probabilidade de que em uma família a proporção de chamadas locais em um mês seja inferior à de interurbanas.
- (c) Determine a densidade correspondente à proporção total de chamadas locais e interurbanas.
- (d) Calcule a probabilidade de que a proporção de chamadas internacionais realizadas por uma família em um mês seja superior a 20%.
- (e) Dado que em um mês uma família não fez chamadas internacionais, qual a probabilidade de que pelo menos 60% das chamadas tenham sido locais?

70. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, com distribuição de Poisson com parâmetros respectivos λ e μ , e considere $Z = X + Y$. Determine a distribuição condicional de X dado que $Z = z$.

71. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, com distribuições Binomial(m, p) e Binomial(n, p), respectivamente, e considere $Z = X + Y$. Obtenha a distribuição condicional de X dado que $Z = z$.

72. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, com distribuição comum geométrica com parâmetro p ($0 < p < 1$), e considere $Z = X + Y$. Determine a distribuição condicional de X dado que $Z = z$.

73. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, com distribuição comum exponencial de parâmetro λ , e considere $Z = X + Y$. Obtenha a densidade condicional de X dado que $Z = z$.

74. Duas pessoas chegam simultaneamente a um ponto de ônibus. Suponha que o tempo que a pessoa i espera pela sua condução é uma variável aleatória $T_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, com T_1 e T_2 independentes. Sejam $X = \min\{T_1, T_2\}$ o tempo transcorrido até o primeiro passageiro

tomar seu ônibus e $Y = \max\{T_1, T_2\}$ o tempo transcorrido até que ambas as pessoas tenham tomado a condução. Determine a distribuição de:

- (a) $X | Y = y$.
- (b) $Y | X = x$.
- (c) $(Y - X) | X = x$.

75. Sejam X_1, X_2 e X_3 variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição $\text{Exp}(1)$ e sejam Y_1, Y_2 e Y_3 as estatísticas de ordem associadas. Defina $Z_1 = Y_1, Z_2 = Y_2 - Y_1$ e $Z_3 = Y_3 - Y_2$.

- (a) Encontre a densidade conjunta de Z_1, Z_2 e Z_3 , bem como as marginais. São Z_1, Z_2 e Z_3 independentes?
- (b) Determine a densidade condicional de Z_2 dado Y_1 .
- (c) Calcule a densidade e a esperança condicionais de Y_3 dado Y_1 .

76. O número de clientes Y que chegam a um caixa eletrônico tem distribuição de Poisson com parâmetro X , sendo X a intensidade com que os clientes chegam ao caixa eletrônico. Supondo que X tem distribuição Gama($\alpha, 1$), encontre a função de probabilidade da variável aleatória Y .

Solução. Sabemos que X é uma variável aleatória com densidade

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x}, \quad x \geq 0.$$

Por outro lado,

$$P(Y = k | X = x) = \frac{e^{-x} x^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Logo, para $k = 0, 1, \dots$,

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(Y = k | X = x) f_X(x) dx \\ &= \frac{1}{k! \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{k+\alpha-1} e^{-2x} dx = \frac{\Gamma(k + \alpha)}{k! \Gamma(\alpha) 2^{k+\alpha}}. \end{aligned}$$

Note que, em particular, se $X \sim \text{Exp}(1)$, então

$$P(Y = k) = \frac{1}{2^{k+1}}, \quad k = 0, 1, \dots$$

77. Usando o resultado do exercício anterior, prove que para $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+n-1}{n} \frac{1}{2^k} = 2^n.$$

Sugestão: Tome $\alpha = n$ e use que $\sum_{k=1}^{\infty} k P(Y = k) = E(Y) = E(E(Y|X))$.

78. O número de *e-mails* que chegam a um servidor no intervalo de tempo $[0, t]$ é, para cada $t > 0$, uma variável aleatória N_t com distribuição de Poisson com parâmetro λt . Somente um computador é conectado ao servidor para ler os *e-mails* recebidos. O tempo de vida T desse computador tem distribuição exponencial de parâmetro θ . Além disso, N_t e T são independentes para todo t . Obtenha a distribuição do número de *e-mails* lidos até o computador falhar.

Solução. Para $j = 0, 1, \dots$,

$$\begin{aligned} P(N_T = j) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(N_T = j | T = t) f_T(t) dt = \int_0^{\infty} P(N_T = j | T = t) \theta e^{-\theta t} dt \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_0^{\infty} P(N_t = j | T = t) \theta e^{-\theta t} dt \stackrel{(**)}{=} \int_0^{\infty} P(N_t = j) \theta e^{-\theta t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^j}{j!} \theta e^{-\theta t} dt = \frac{\theta \lambda^j}{j!} \int_0^{\infty} t^j e^{-(\lambda+\theta)t} dt \\ &= \frac{\theta \lambda^j}{j!} \frac{\Gamma(j+1)}{(\lambda+\theta)^{j+1}} = \left(\frac{\theta}{\lambda+\theta} \right) \left(\frac{\lambda}{\lambda+\theta} \right)^j. \end{aligned}$$

A passagem (*) é justificada pelo Princípio da substituição; (**) decorre da independência de N_t e T para todo t .

79. Numa fábrica empacotam-se palitos de fósforo em caixas mediante uma máquina que não pode ser totalmente controlada. Para não perder clientes, a máquina se ajusta de forma que todas as caixas contenham pelo menos 50 palitos. O número de palitos em cada caixa é uma variável aleatória X com função de probabilidade dada por

$$P(X = x) = (0,8) (0,2)^{x-50}, \quad x = 50, 51, \dots$$

Ademais, o número de palitos defeituosos em uma caixa que contém x fósforos tem distribuição Binomial($x, 1/10$). Obtenha o número médio de palitos defeituosos em uma caixa.

Solução. Seja D o número de palitos defeituosos em uma caixa. Sabemos que D dado que $X = x$ tem distribuição Binomial($x, 1/10$), logo

$$E(D | X = x) = x/10.$$

Então, utilizando a propriedade fundamental da esperança condicional,

$$E(D) = E(E(D | X)) = E(X/10) = E(X)/10.$$

Para obter $E(X)$, observamos que a variável aleatória $Y = X - 49$ tem distribuição geométrica com parâmetro 0,8, pois

$$P(Y = k) = P(X = k + 49) = (0,8) (0,2)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Assim,

$$E(X) = E(Y) + 49 = \frac{1}{0,8} + 49 = 50,25$$

e portanto $E(D) = 5,025$.

80. Seja N uma variável aleatória com distribuição geométrica de parâmetro $p \in (0, 1)$, ou seja, N tem função de probabilidade dada por

$$P(N = n) = pq^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

onde $q = 1 - p$.

(a) Mostre que a função geradora de momentos de N é dada por

$$M(t) = \frac{pe^t}{1 - qe^t} = \frac{p}{e^{-t} - q}, \quad t < -\log q.$$

(b) Usando o item (a), prove que $E(N) = 1/p$.

Uma urna contém N bolas numeradas de 1 a N , onde N tem a distribuição dada anteriormente. Bolas são escolhidas ao acaso dessa urna, uma por vez, até que a bola com o número 1 seja selecionada. Suponha que as retiradas são feitas com reposição, isto é, cada bola escolhida é repostada na urna antes da próxima retirada. Seja X o número de retiradas feitas.

(c) Obtenha $P(X = x | N = n)$.

(d) Determine $E(X)$.

81. O número X de erros que uma digitadora comete por página é uma variável aleatória com distribuição de Poisson com parâmetro 2. Se uma página tem x erros, o número Y de minutos necessários para revisar e corrigir a página é uma variável aleatória com distribuição condicional

$$P(Y = y | X = x) = \begin{cases} 1/5 & \text{se } y = x + 1, \\ 3/5 & \text{se } y = x + 2, \\ 1/5 & \text{se } y = x + 3. \end{cases}$$

(a) Encontre a probabilidade de que sejam necessários 3 minutos para revisar e corrigir uma página.

(b) Dado que foram usados 3 minutos na revisão e correção de uma página, qual a probabilidade de que seja uma página sem erros?

(c) Usando a função geradora de momentos, encontre a esperança de X .

(d) Determine $E(Y | X = x)$.

(e) Obtenha $E(Y)$.

82. Escolhe-se ao acaso um número X entre os inteiros de 1 a n . A seguir, um número Y é escolhido aleatoriamente entre os mesmos números, excluídos os menores que X .

(a) Quanto vale $E(Y|X)$?

(b) Mostre que $\text{Cov}(X, Y) = \text{Var}(X)/2$.

83. Um inseto põe N ovos, onde N tem distribuição de Poisson com parâmetro λ . Cada ovo dá origem a um novo inseto com probabilidade p ($0 < p < 1$), independentemente dos demais. Seja X o número de novos insetos produzidos.

- (a) Qual a distribuição de X dado que $N = n$?
- (b) Obtenha a distribuição de X .
- (c) Qual o valor esperado de X ?

84. O número de partidas de futebol jogadas em uma semana em uma vila é uma variável aleatória com média μ e variância σ^2 . Os números de gols marcados em cada jogo são variáveis aleatórias i.i.d. com média ν e variância θ^2 e independentes do total de partidas jogadas. Seja X o número total de gols marcados em uma semana. Calcule $E(X)$ e $\text{Var}(X)$.

Sugestão: Escreva $X = \sum_{j=1}^Y X_j$, onde X_j é o número de gols marcados no j -ésimo jogo e Y é o número de partidas jogadas numa semana. Use condicionamento em Y para obter $E(X)$ e $E(X^2)$.

85. Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média μ finita. Seja N uma variável aleatória inteira e não-negativa, com variância finita, e independente de X_1, X_2, \dots . Obtenha $\text{Cov}(\sum_{k=1}^N X_k, N)$.

86. Rosana tem uma moeda com probabilidade p de cara em cada lançamento ($0 < p < 1$). Ela lança a moeda até obter cara. Lança então uma moeda honesta tantas vezes quantas lançou a primeira. Finalmente, para toda cara que obtém com a moeda honesta, Rosana lança um dado honesto. Determine a esperança e a variância da soma total dos pontos obtidos com o dado.

87. (a) Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes e positivas, e considere a variável aleatória $V = X/(X + Y)$. Prove que, para todo $v \in (0, 1)$,

$$P(V \leq v) = E \left[F_X \left(\frac{vY}{1-v} \right) \right],$$

onde F_X é a função de distribuição de X .

(b) Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, ambas com distribuição exponencial de parâmetro λ . Usando o item (a), obtenha a distribuição de $V = X/(X + Y)$.

88. Seja $Y \sim U(0, 1)$ e suponha que, dado que $Y = y$, X é uma variável aleatória com distribuição $U(-y, y)$. Obtenha a distribuição, a média e a variância de X .

89. Seja $Y \sim N(0, 1)$ e suponha que, dado que $Y = y$, X é uma variável aleatória com distribuição $N(y, 1)$.

- (a) Encontre a esperança e a variância de X .
- (b) Qual a distribuição de X ?
- (c) Determine a distribuição condicional de Y dado que $X = x$.

90. Este exercício tem como objetivo mostrar que, sem a hipótese de que $E|X| < \infty$, o resultado $E(X) = E(E(X|Y))$ pode não valer. Seja $Y \sim \text{Gama}(1/2, 1/2)$ e suponha que, dado que $Y = y$, X é uma variável aleatória com distribuição $N(0, 1/y)$.

(a) Mostre que $E(E(X|Y)) = 0$.

(b) Prove que $X \sim \text{Cauchy}(0, 1)$ e portanto o resultado referido não é válido.

91. Seja X o número de caras obtidas em n lançamentos de uma moeda cuja probabilidade de cara é uma variável aleatória Y com distribuição $\text{Beta}(2, 2)$. Mais precisamente, suponha que

$$X|Y = y \sim \text{Binomial}(n, y) \quad \text{com} \quad f_Y(y) = 6y(1-y), \quad 0 < y < 1.$$

(a) Calcule a esperança e a variância de X .

(b) Obtenha a distribuição de X .

(c) Encontre a distribuição condicional de Y dado que $X = x$.

92. Considere uma moeda cuja probabilidade de cara é uma variável aleatória Y com distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$. Seja X o número de lançamentos feitos com essa moeda até ser obtida a primeira cara. Mais precisamente,

$$X|Y = y \sim \text{Geométrica}(y) \quad \text{onde} \quad Y \sim U(0, 1).$$

(a) Determine a distribuição de X .

(b) Qual é o valor esperado de X ?

(c) Obtenha a distribuição condicional de Y dado que $X = x$.

93. Seja Y uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro λ . Suponha que, dado que $Y = y$, X é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $y + 1$. Obtenha $E(X)$.

94. Escolhe-se ao acaso um ponto (X, Y) no triângulo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x < 1\}$.

(a) Calcule $E(X|Y)$.

(b) Obtenha $E(Y|X)$ e $E(Y^2|X)$.

(c) Usando o item (b), determine $E((X - Y)^2|X)$.

95. Sejam X e Y variáveis aleatórias tais que $E(X|Y) = Y$ e $E(Y|X) = X$. Prove que $P(X = Y) = 1$.

Sugestão: Mostre que $E((X - Y)^2) = 0$.

96. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy^2 & \text{se } 0 < x < y < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Obtenha o valor de c .

- (b) Calcule a esperança condicional de X dado que $Y = y$.
 (c) Usando o item (b), determine $E(X/Y)$.

97. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade conjunta

$$f(x, y) = \frac{1}{y} e^{-(y+x/y)}, \quad x > 0, y > 0.$$

- (a) Determine a distribuição de Y .
 (b) Obtenha a distribuição condicional de X dado que $Y = y$.
 (c) Usando (a) e (b), calcule $\text{Cov}(X, Y)$.

98. Um dado honesto é lançado repetidamente, de modo independente. Sejam X e Y o número de lançamentos necessários para obter um 6 e um 5, respectivamente. Obtenha:

- (a) $E(X)$.
 (b) $E(X | Y = 1)$.
 (c) $E(X | Y = 5)$.

99. No labirinto mostrado na Figura 4.1, existem três quartos, numerados 1, 2 e 3, e mais dois quartos, um com um saboroso queijo e outro no qual está dormindo o gato Tom. O rato Jerry está inicialmente no quarto 1. Suponha que, quando Jerry entra no quarto i , lá permanece por um tempo em minutos com distribuição Gama($4, 3i$) e então sai do quarto escolhendo aleatoriamente uma das portas.

- (a) Calcule a probabilidade de que Jerry encontre Tom antes do queijo.
 (b) Obtenha o tempo esperado em minutos que Jerry demora até encontrar Tom ou o queijo.

Sugestão: No item (a), para $i = 1, 2, 3$, defina p_i a probabilidade de que Jerry encontre Tom antes do queijo, partindo do quarto i . Condicionando na primeira escolha de Jerry, escreva um sistema de equações para p_1, p_2 e p_3 . O item (b) é análogo.

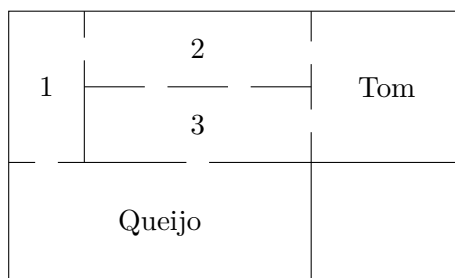


Figura 4.1: Exercício 99 – Tom e Jerry.

100. Passeio aleatório simétrico: Um homem caminha em um trecho com 5 quarteirões de uma avenida (Figura 4.2). Ele começa na esquina i e, com probabilidade uniforme, decide ir um quarteirão à direita ou um quarteirão à esquerda. Quando chega à próxima esquina, novamente escolhe ao acaso a sua direção ao longo da avenida. Ele prossegue até

chegar à esquina 5, que é sua casa, ou à esquina 0, que é um bar. Quando chega à casa ou ao bar, permanece lá. Para $i = 1, 2, 3, 4$, defina p_i a probabilidade de que o homem, começando na esquina i , chegue à casa antes do bar, e q_i a probabilidade de que partindo da esquina i chegue ao bar antes da casa.

- Obtenha p_1, p_2, p_3 e p_4 .
- Explique por que $q_i = p_{5-i}$ para $i = 1, 2, 3, 4$.
- Conclua que não há possibilidade de um passeio interminável, qualquer que seja a esquina da qual o homem parta.

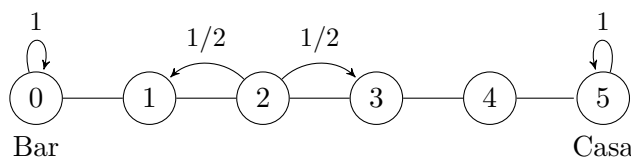


Figura 4.2: Exercício 100 – Passeio aleatório simétrico.

101. Uma urna contém a bolas brancas e b bolas pretas. Após uma bola ser retirada ao acaso, ela é devolvida à urna se é branca, mas se é preta então é substituída por uma bola branca de outra urna. Seja M_n o número esperado de bolas brancas na urna depois que a operação anterior foi repetida n vezes.

- Obtenha a equação recursiva

$$M_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{a+b}\right) M_n + 1, \quad n \geq 0.$$

- Use o item (a) para provar que

$$M_n = a + b - b \left(1 - \frac{1}{a+b}\right)^n, \quad n \geq 0.$$

- Qual é a probabilidade de que a $(n+1)$ -ésima bola retirada seja branca?

102. Um dado honesto é lançado repetidamente, de modo independente. Calcule o número esperado de lançamentos feitos até conseguir duas faces 6 consecutivas.

Sugestão: Condicione no tempo da primeira ocorrência de uma face diferente de 6.

103. Uma moeda com probabilidade p de cara em cada lançamento é lançada repetidamente, de modo independente. Seja T_r o número de lançamentos necessários para obter uma sequência de r caras consecutivas.

- Determine $E(T_r | T_{r-1})$.
- Escreva $E(T_r)$ em termos de $E(T_{r-1})$.
- Quanto vale $E(T_1)$?
- Obtenha $E(T_r)$.

104. Uma caixa contém duas moedas: a moeda 1, com probabilidade de cara igual a 0,4, e a moeda 2, com probabilidade de cara igual a 0,7. Uma moeda é escolhida ao acaso da caixa e lançada dez vezes. Dado que dois dos três primeiros lançamentos resultaram em cara, qual a esperança condicional do número de caras nos dez lançamentos?

Sugestão: Defina A o evento de que dois dos três primeiros lançamentos resultam em cara e N_j o número de caras nos j lançamentos finais. Então, $E(N_{10} | A) = 2 + E(N_7 | A)$. Para obter $E(N_7 | A)$, condicione na moeda que foi usada.

Funções geradoras

105. Demonstre o tópico **3.3** (p. 102).

106. Obtenha a função geradora de momentos de $Y = X^2$, onde X tem distribuição $N(0, 1)$. Conclua que a distribuição χ_1^2 é idêntica à Gama(1/2, 1/2).

107. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes tais que $P(X = -1) = P(X = 1) = 1/2$ e $Y \sim U(-1, 1)$. Determine a distribuição de $Z = X + Y$ de duas maneiras:

- Obtendo a função de distribuição de Z por condicionamento em X .
- Calculando a função geradora de momentos de Z .

108. Seja $\{U_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição uniforme em $(0, 1)$. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes uma da outra e de $\{U_n\}_{n \geq 1}$, com funções de probabilidade dadas por

$$P(X = x) = (e - 1) e^{-x}, x = 1, 2, \dots \quad e$$

$$P(Y = y) = \frac{1}{(e - 1) y!}, y = 1, 2, \dots$$

Defina $V = \max\{U_1, \dots, U_Y\}$ e $Z = X - V$.

- Obtenha a função de distribuição de V .
- Determine a função geradora de momentos de X .
- Calcule a função geradora de momentos de Z .
- Deduza qual é a distribuição de Z .

109. Sejam X_1, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial de parâmetro 1. Considere

$$V_n = \max\{X_1, \dots, X_n\} \quad e \quad W_n = X_1 + \frac{X_2}{2} + \frac{X_3}{3} + \dots + \frac{X_n}{n}.$$

Prove que V_n e W_n têm a mesma distribuição.

110. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes tais que $X \sim N(0, 1)$ e $Y \sim N(0, 2)$. Definimos $Z = X + Y$ e $W = X - Y$. Calcule as funções geradoras de momentos de Z e W e mostre que Z e W são idênticamente distribuídas mas não independentes.

111. As variáveis aleatórias inteiras e não-negativas X e Y são independentes e identicamente distribuídas. Prove que se $X + Y$ tem distribuição de Poisson, então X e Y também têm.

112. Sejam X_1, \dots, X_n variáveis aleatórias i.i.d. com densidade comum definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule a função geradora de momentos da variável aleatória $Y = -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log(1 - X_j)$ e daí conclua qual a sua distribuição.

113. Um aparelho de som é formado por n componentes, sendo que o i -ésimo componente tem probabilidade p_i de falhar. Suponha que os componentes falham de maneira independente e seja X o número de componentes que falham. Sabe-se que se $X = 0$ então o aparelho funciona, se $X = 1$ a probabilidade de funcionar é 0,7 e se $X \geq 2$ o aparelho não funciona.

- Obtenha a função geradora de probabilidade de X em função das p_i 's.
- Seja $n = 4$, $p_1 = 0,1$, $p_2 = 0,05$, $p_3 = 0,15$ e $p_4 = 0,1$, calcule a probabilidade do aparelho funcionar.

114. A função geradora de probabilidade de uma variável aleatória inteira e não-negativa X é dada por

$$G_X(s) = A \left(\frac{10 + 8s^2}{2 - s} \right), \quad s \in (-2, 2),$$

onde A é uma constante.

- Encontre o valor de A .
- Calcule a média de X .
- Obtenha a função de probabilidade de X .

115. (a) Seja X uma variável aleatória com distribuição geométrica de parâmetro $p \in (0, 1)$. Prove que para $n \geq 1$,

$$E(X(X-1)\dots(X-n+1)) = \frac{n!(1-p)^{n-1}}{p^n}.$$

(b) Seja X uma variável aleatória com distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$. Mostre que para $n \geq 1$,

$$E(X(X-1)\dots(X-n+1)) = \lambda^n.$$

Sugestão: Use a propriedade (ii) da função geradora de probabilidade. Por exemplo, para o item (a), prove que para $n \geq 1$,

$$\frac{d^n G_X(s)}{ds^n} = \frac{n! p (1-p)^{n-1}}{(1 - (1-p)s)^{n+1}}, \quad s < (1-p)^{-1}$$

e faça $s = 1$ para chegar ao resultado.

116. Duas partículas realizam passeios aleatórios independentes nos vértices de um triângulo. Isso significa que, a cada instante, cada partícula move-se para um novo vértice, escolhido no sentido horário com probabilidade p ou no anti-horário com probabilidade $q = 1 - p$. Todas essas escolhas são independentes. No instante $n = 0$, as duas partículas estão no mesmo vértice; seja T o número de passos até que novamente estejam em um mesmo vértice. Defina S o número de passos até que as partículas se encontrem pela primeira vez, se inicialmente estiverem em vértices diferentes.

(a) Prove que as funções geradoras de probabilidade de S e T satisfazem

$$\begin{aligned} G_S(s) &= pq s + (1 - pq) s G_S(s) \quad \text{e} \\ G_T(s) &= (p^2 + q^2) s + 2pq s G_S(s). \end{aligned}$$

(b) Obtenha $G_T(s)$ e $E(T)$.

117. Problema de Huygens: Considere três moedas A , B e C , que fornecem cara com probabilidades respectivas α , β e γ . Elas são lançadas repetidamente, na ordem $ABCABC\dots$. Seja X o número de lançamentos até ser obtida a primeira cara.

(a) Determine a função geradora de probabilidade de X .

(b) Encontre a probabilidade de que a primeira cara seja obtida com um lançamento da moeda C .

(c) Obtenha o valor esperado de X .

118. Seja X uma variável aleatória inteira e não-negativa, tal que

$$P(X = k) = \frac{\lambda}{k} P(X = k - 1),$$

para todo $k \geq 1$, onde $\lambda > 0$ é uma constante. Determine a distribuição de X .

Solução. Sejam $p_k = P(X = k)$, $k \geq 0$ e

$$G_X(s) = E(s^X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad s \in [-1, 1]$$

a função geradora de probabilidade de X . Podemos diferenciar a série de potências em todo ponto $s \in (-1, 1)$. Usando a igualdade dada no enunciado do exercício, obtemos

$$\frac{dG_X(s)}{ds} = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} p_{k-1} s^{k-1} = \lambda G_X(s).$$

Portanto,

$$\frac{d}{ds} (\log G_X(s)) = \lambda,$$

logo podemos escrever

$$G_X(s) = \exp\{\lambda s + K\},$$

onde K é uma constante. Visto que $\lim_{s \uparrow 1} G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, temos que $K = -\lambda$ e então

$$G_X(s) = \exp\{\lambda(s-1)\}.$$

Como a função geradora de probabilidade determina unicamente a distribuição, concluímos que $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Desigualdades

119. Um professor sabe que a nota de um estudante no exame final de uma disciplina é uma variável aleatória X com média 75.

- (a) Forneça um limitante superior para a probabilidade de um estudante tirar uma nota maior que 85 no exame final.

Suponha, ademais, que o professor sabe que $\text{Var}(X) = 25$.

- (b) O que pode ser dito sobre a probabilidade de que um estudante tire uma nota entre 65 e 85?
- (c) Quantos estudantes devem fazer o exame para garantir que a média da classe fique à distância no máximo 5 de 75 com probabilidade pelo menos 0,9?

120. O tempo (em minutos) em que um trabalhador espera o ônibus para levá-lo ao emprego é uma variável aleatória com média 8 e desvio padrão 4. Prove que a probabilidade de que ele aguarde pela condução mais de 14 minutos em um dia é menor que 41%.

121. O número de jornais que um jornaleiro vende diariamente é uma variável aleatória com média 200 e desvio padrão 10. Mostre que a probabilidade de que em um dia sejam vendidos entre 130 e 270 jornais é maior que 98%.

122. Seja $X \sim \text{Exp}(1)$.

- (a) Prove que $P(X \geq x) \leq 1/x$ para todo $x > 0$.
- (b) Quanto vale a probabilidade dada no item (a)?

123. Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Prove que f é uma função densidade de probabilidade.
- (b) Determine $E(X)$ e $\text{Var}(X)$.
- (c) Calcule $P(|X| \geq k)$, onde k é um número $0 < k < 1$.
- (d) Utilizando a Desigualdade de Chebyshev, obtenha uma cota superior para a probabilidade anterior.
- (e) Para $k = 0,2$ e $k = 0,8$, obtenha os valores numéricos da probabilidade calculada em (c) e da cota obtida em (d). Comente.

124. Uma prova é formada por 64 questões de múltipla escolha, cada uma com 5 respostas possíveis, das quais apenas uma é certa. Um estudante vai chutar a alternativa correta de todas as questões, independentemente.

- (a) Usando a Desigualdade de Chebyshev, obtenha um limitante superior para a probabilidade de que o aluno acerte pelo menos 20 questões.
 (b) Calcule uma estimativa para essa probabilidade.

125. Um dado honesto é lançado repetidamente, de modo independente, até que cada face ocorra pelo menos uma vez.

- (a) Determine a esperança e a variância do número de lançamentos feitos.
 (b) Prove que a probabilidade de que sejam necessários menos de 40 lançamentos é maior que 0,93.

126. Um grupo de 200 pessoas, com 100 mulheres e 100 homens, é dividido aleatoriamente em 100 pares. Seja X o número de homens pareados com uma mulher.

- (a) Determine a esperança e a variância de X .
 (b) Prove que a probabilidade de que haja no máximo 30 homens pareados com uma mulher é menor que 7%.

127. Seja $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Demonstre que, para qualquer $\delta > 0$,

$$P(X \geq \lambda(1 + \delta)) \leq e^{-\lambda} \left(\frac{e}{1 + \delta} \right)^{\lambda(1 + \delta)}.$$

128. Prove que se $X \sim \text{Geométrica}(1/2)$, então $E(X \log X) \geq 2 \log 2$.

129. Mostre que se X é uma variável aleatória positiva com média igual a 1, então $E(\log X) \leq 0$.

130. Seja X uma variável aleatória não-negativa. Demonstre que

$$E(X) \leq (E(X^2))^{1/2} \leq (E(X^3))^{1/3} \leq \dots$$

Sugestão: Use a Desigualdade de Jensen para uma variável aleatória Y não-negativa e a função $\varphi(y) = y^{n/(n-1)}$ e depois faça $Y = X^{n-1}$.

131. (a) Seja Y uma variável aleatória não-negativa tal que $0 < E(Y^2) < \infty$. Prove que para $a < E(Y)$,

$$P(Y > a) \geq \frac{(E(Y) - a)^2}{E(Y^2)}.$$

(b) Seja X uma variável aleatória com esperança μ , variância σ^2 e tal que $0 < M = E(|X - \mu|^4) < \infty$. Mostre que para $0 < x < \sigma$,

$$P(|X - \mu| > x) \geq \frac{(\sigma^2 - x^2)^2}{M}.$$

Sugestão: (a) Utilize a Desigualdade de Cauchy-Schwarz com as variáveis aleatórias Y e $I_{\{Y > a\}}$.

132. Sejam X e Y variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço de probabilidade. Mostre que para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$F_{X,Y}(x, y) \leq \sqrt{F_X(x) F_Y(y)}.$$

Sugestão: Use a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Respostas

1. (a)

x	-16	-7	2	11	20
$p_X(x)$	1/12	1/6	13/36	2/9	1/6

(b) $E(X) = 4$, $\text{Var}(X) = 108,5$

2.

x	-1	1	2	3
$p_X(x)$	125/216	75/216	15/216	1/216

$E(X) = -17/216$, Não

3. $7/2$ (O número de tentativas tem distribuição uniforme discreta em $\{1, 2, \dots, 6\}$).

4. 145 e 108,75

5. 12,3 e 9,3

6. (a) 14,3% (b) $6,5 \cdot 10^{-5}$ (c) $e^2 \approx 7,39$

7. 40

8. $\log 2$

9. Não

10. $E(X) = \frac{n-2}{3}$, pois $P(X=x) = \frac{2(n-1-x)}{n(n-1)}$ para $x \in \{0, \dots, n-2\}$.

11. (a) $29/8$ (b) 1 (c) $-2/9$ (d) $1/4$ (e) 1 (f) 1

12. (a) 0,4866 (b) 0,3679

13. (a) 0,1808 (b) 60%

15. (b) $E(X) = \infty$

16. (b) $\sqrt{2/\pi}$

17. (a) 0 (b) 1 (c) 2

18. (a) $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{\arctg x}{\pi}$, $x \in \mathbb{R}$

19. $E(Y) = 20$ e $\text{Var}(Y) = 216/5$

20. (a) $(1 - e^{-\lambda})/\lambda$ (b) e^λ (c) $e^{-\lambda}/(1 - \lambda)$ se $0 < \lambda < 1$, ∞ se $\lambda \geq 1$
 $X!$ é integrável para $0 < \lambda < 1$.

22. $\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)(b-a)}$

23. $n!/\lambda^n$

24. 7

25. $2 \log 2 - 1$

28. 13 reais

30. (a) $C = 1/9$

$X \setminus Y$	0	1	$p_X(x)$
(b) 0	2/9	1/9	1/3
1	2/9	4/9	2/3
$p_Y(y)$	4/9	5/9	1

X e Y não são independentes.

(c) 1/5 (d) 1 (e) 50/81

31. (a) 1/15 (b) Não (c) $-2/3$

32. 1

33. (a) $Y \sim \text{Gama}(4, 1)$, $c = 1/8$

(b) $f_Z(z) = -(\log z)^3/6$, $0 < z < 1$

(c) $P(|X| \leq Y) = 1$

34. (a) 3/2 (b) 1/2 (c) 4/3 (d) ∞

35. (a) 2/3 (b) 4/225

36. 1/8

37. (a) Não (b) $f_Z(z) = (1/2)e^{-z}z^2$, $z \geq 0$ (c) 1/2

38. (a) Não (b) $1/12$

39. (a) Não (b) 0

40. $1/2$

41. $(1 + \rho) \sigma^2/2$

42. $1/36$

43. (a) Exp(6) (b) $1/101$

44. (a) $\pi/4, 1 - \pi^2/16$ (b) $\pi/4, 1/3 + \pi/6 - \pi^2/16$

47. 35 e 20

48. 8

49. $21/11$

50. π

51. 155

52. $n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)$

53. 1, $14/15$

54. $6/7, 156/245$

55. $1 + 2(n-1)pq, 2pq(2n-3-2pq(3n-5))$ onde $q = 1 - p$.

56. $\frac{nR}{N}, n \binom{R}{N} \left(1 - \frac{R}{N} \right) \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$

57. $n(1 - 1/n)^r, n(1 - 1/n)^r [1 - (1 - 1/n)^r] + n(n-1)[(1 - 2/n)^r - (1 - 1/n)^{2r}]$

58. $-m p_i p_j$

59. $-96/145$

60. (a) Binomial($n-1, p$) (b) $1/(n-1)$

61. (a)

x	1	2	3	4
$p_{X Y}(x 2)$	$1/4$	$1/8$	$1/8$	$1/2$

(b) $79/8$

62. (a) $P(X = x, Y = y) = \frac{y - x - 1}{20}, 1 \leq x \leq 4, x + 2 \leq y \leq 6$
 $P(X = x) = \frac{(6 - x)(5 - x)}{40}, 1 \leq x \leq 4 \quad P(Y = y) = \frac{(y - 1)(y - 2)}{40}, 3 \leq y \leq 6$
 (b) $P(X = x | Y = 5) = \frac{4 - x}{6}, 1 \leq x \leq 3$
 (c) 2
64. $E(X | Y) = (2/3)(1 - Y^3)/(1 - Y^2), E(Y | X) = (2/3)X$
65. (a) Para $y > 0$: $f_{X|Y}(x|y) = 1/y, 0 < x < y$ (b) $E(X^3 | Y = y) = y^3/4$
66. (a) $k = \frac{2}{3}$ (b) $E(X | Y = y) = \frac{2 + 3y}{3(1 + 2y)}$
67. (a) $X, Y \sim \text{Exp}(1/5)$, independentes, $Z = X + Y \Rightarrow f_Z(z) = \frac{1}{25} z e^{-z/5}, z > 0$
 (b) $f_{X|Z}(x|15) = \frac{1}{15}, 0 < x < 15 \Rightarrow P(X > 10 | Z = 15) = \frac{1}{3}$
68. (b) $P(Y \geq X/2) = 1/2$ (c) $f_{X|Y}(x|1) = 1/2, 1 < x < 3 \Rightarrow P(X \geq 2 | Y = 1) = 1/2$
69. (a) $P(X > 0,7) = 0,216$ (b) $P(X < Y) = 0,25$
 (c) $Z = X + Y, f_Z(z) = 3z^2, 0 \leq z \leq 1$ (d) $P(Z \leq 0,8) = 0,512$
 (e) $f_{X|Z}(x|1) = 2x, 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow P(X \geq 0,6 | Z = 1) = 0,64$
70. Binomial($z, \lambda/(\lambda + \mu)$)
71. Hipergeométrica($m + n, m, z$)
72. Uniforme Discreta($z - 1$)
73. Uniforme($0, z$)
74. $f_{X,Y}(x, y) = 2\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}, 0 < x < y$
 (a) Para $y > 0, f_{X|Y}(x|y) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda y}}, 0 < x < y$
 (b) Para $x > 0, f_{Y|X}(y|x) = \lambda e^{-\lambda(y-x)}, y > x$
 (c) $(Y - X) | X = x \sim \text{Exp}(\lambda)$
75. (a) $Z_1 \sim \text{Exp}(3), Z_2 \sim \text{Exp}(2)$ e $Z_3 \sim \text{Exp}(1)$, independentes
 (b) $Z_2 | Y_1 \sim \text{Exp}(2)$ (decorre imediatamente de (a))
 (c) Para $y_1 > 0, f_{Y_3|Y_1}(y_3|y_1) = 2e^{2y_1 - y_3}(e^{-y_1} - e^{-y_3}), y_3 > y_1$ e $E(Y_3 | Y_1) = 3/2 + Y_1$

80. (c) Para $n \geq 1$: $P(X = x | N = n) = (1/n)(1 - 1/n)^{x-1}$, $x = 1, 2, \dots$ (d) $1/p$

81. (a) $(9/5)e^{-2}$ (b) $1/9$ (c) 2 (d) $E(Y | X = x) = x + 2$ (e) 4

82. (a) $(n + X)/2$ (b) Use que $E(XY|X) = X E(Y|X)$.

83. (a) $X|N = n \sim \text{Binomial}(n, p)$ (b) $\text{Poisson}(\lambda p)$ (c) λp

84. $E(X) = \nu\mu$ e $\text{Var}(X) = \mu\theta^2 + \nu^2\sigma^2$

85. $\mu \text{Var}(N)$

86. $\frac{7}{4p}$ e $\frac{35}{24p} + \frac{49}{16p^2}$

87. (b) $V \sim U(0, 1)$

88. $f_X(x) = -\log|x|/2$, $-1 < x < 1$, $x \neq 0$

$E(X) = 0$ e $\text{Var}(X) = 1/9$

89. (a) $E(X) = 0$ e $\text{Var}(X) = 2$ (b) $X \sim N(0, 2)$ (c) $Y | X = x \sim N(x/2, 1/2)$

91. (a) $E(X) = \frac{n}{2}$ e $\text{Var}(X) = \frac{n^2}{20} + \frac{n}{5}$

(b) $P(X = x) = \frac{6(x+1)(n-x+1)}{(n+3)(n+2)(n+1)}$, $x = 0, 1, \dots, n$

(c) $Y | X = x \sim \text{Beta}(x+2, n-x+2)$

92. (a) $P(X = x) = \frac{1}{x(x+1)}$, $x = 1, 2, \dots$

(b) $E(X) = \infty$

(c) $Y | X = x \sim \text{Beta}(2, x)$

93. $E(X) = (1 - e^{-\lambda})/\lambda$

94. (a) $E(X|Y) = \frac{Y+1}{2}$ (b) $E(Y|X) = \frac{X}{2}$; $E(Y^2|X) = \frac{X^2}{3}$

(c) $E((X-Y)^2|X) = \frac{X^2}{3}$

96. (a) $c = 10$ (b) $E(X|Y = y) = 2y/3$ (c) $2/3$

97. (a) $Y \sim \text{Exp}(1)$ (b) $X | Y = y \sim \text{Exp}(1/y)$ (c) 1

98. (a) 6 (b) 7 (c) 5,8192

99. (a) $p_1 = 1/2 p_2$, $p_2 = 1/4 p_1 + 2/4 p_3 + 1/4$, $p_3 = 2/4 p_2 + 1/4$

$$\Rightarrow p_1 = 0,3 \text{ (} p_2 = 0,6 \text{ e } p_3 = 0,55\text{)}.$$

(b) $\mu_1 = 4/3 + 1/2 \mu_2$, $\mu_2 = 4/6 + 1/4 \mu_1 + 2/4 \mu_3$, $\mu_3 = 4/9 + 2/4 \mu_2$

$$\Rightarrow \mu_1 = 104/45 \text{ (} \mu_2 = 88/45 \text{ e } \mu_3 = 64/45\text{)}.$$

100. (a) $p_1 = 1/2 p_2$, $p_2 = 1/2 p_1 + 1/2 p_3$, $p_3 = 1/2 p_2 + 1/2 p_4$, $p_4 = 1/2 p_3 + 1/2$

$$\Rightarrow p_i = i/5, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

(c) $p_i + q_i = 1$ para todo $i = 1, 2, 3, 4$.

101. (c) $M_n/(a + b)$

102. 42

103. (a) $1 + T_{r-1} + (1 - p) E(T_r)$ (b) $E(T_r) = 1/p + (1/p) E(T_{r-1})$

$$(c) \frac{1}{p} \quad (d) \sum_{i=1}^r \frac{1}{p^i} = \frac{1 - p^r}{p(1 - p)}$$

104. 6,0705

106. $M_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx^2} f_X(x) dx = \frac{1}{\sqrt{1 - 2t}}, \quad t < 1/2$

107. $Z \sim U(-2, 2)$

108. (a) $F_V(v) = \begin{cases} 0 & \text{se } v < 0, \\ \frac{e^v - 1}{e - 1} & \text{se } 0 \leq v \leq 1, \\ 1 & \text{se } v > 1. \end{cases}$ (b) $M_X(t) = \frac{(e - 1) e^{t-1}}{1 - e^{t-1}}, \quad t < 1$

$$(c) M_Z(t) = \frac{1}{1 - t}, \quad t < 1 \quad (d) \text{Exp}(1)$$

109. $M_{V_n}(t) = M_{W_n}(t) = \frac{n! \Gamma(1 - t)}{\Gamma(n + 1 - t)} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i - t)}, \quad t < 1$

110. $M_Z(t) = M_W(t) = e^{3t^2/2}, \quad t \in \mathbb{R}$, portanto Z e W têm distribuição $N(0, 3)$. Se fossem independentes, teríamos que $M_{Z+W}(t) = M_Z(t) M_W(t)$ para todo t .

112. $M_Y(t) = \left(\frac{2n}{2n - t} \right)^n$ para $t < 2n$, $Y \sim \text{Gama}(n, 2n)$

113. (a) $G_X(s) = \prod_{i=1}^n (1 - p_i + p_i s)$, $s \in \mathbb{R}$ (b) 0,860715

114. (a) $\frac{1}{18}$ (b) $\frac{17}{9}$

(c) $P(X = 0) = \frac{5}{18}$, $P(X = 1) = \frac{5}{36}$, $P(X = n) = \frac{7}{6 \cdot 2^n}$, $n \in \{2, 3, \dots\}$

116. (a) Condicionamento no primeiro passo.

(b) $G_T(s) = (p^2 + q^2)s + \frac{2p^2q^2s^2}{1 - (1 - pq)s}$, $s \in [-1, 1]$ e $E(T) = 3$.

117. (a) $G_X(s) = \frac{\alpha s + (1 - \alpha)\beta s^2 + (1 - \alpha)(1 - \beta)\gamma s^3}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)s^3}$, $s \in [-1, 1]$ (Condicionamento)

(b) $\frac{(1 - \alpha)(1 - \beta)\gamma}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)}$ (Soma dos coeficientes das potências de s^3 em $G_X(s)$)

(c) $\frac{1 + (1 - \alpha) + (1 - \alpha)(1 - \beta)}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)}$

119. (a) $15/17$ (b) $\geq 3/4$ (c) 10

120. Use a Desigualdade de Markov Generalizada.

121. Use a Desigualdade de Chebyshev.

122. (a) Desigualdade de Markov. (b) e^{-x}

123. (b) $0, 1/6$ (c) $(1 - k)^2$ (d) $1/(6k^2)$

124. (a) $16/81$ (b) $0,0122$

125. (a) $14,7$ e $38,99$ (b) Desigualdade de Chebyshev.

126. (a) $50,25$ e $25,126$ (b) Desigualdade de Chebyshev.

127. Use um dos limitantes de Chernoff.

Modos de Convergência e Teoremas Limites

A tabela seguinte resume os três tipos de convergência abordados nesse livro, as ferramentas úteis no estudo de cada um deles e os principais teoremas limites relacionados.

Convergência	Ferramenta	Teorema limite
Em distribuição	Função geradora / característica	Teorema Central do Limite
Em probabilidade	Desigualdades de Markov / Chebyshev	Lei Fraca dos Grandes Números
Quase certa	Lema de Borel-Cantelli	Lei Forte dos Grandes Números

1. Lema de Borel-Cantelli*

1.1. Lema de Borel-Cantelli (1909): Seja A_1, A_2, \dots uma sequência de eventos em um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) .

(a) Se $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, então $P(A_n \text{ infinitas vezes}) = 0$.

(b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ e A_1, A_2, \dots são independentes, então $P(A_n \text{ infinitas vezes}) = 1$.

Observação. Em vez da independência, basta em (b) que A_1, A_2, \dots sejam independentes aos pares. Outras generalizações desse resultado podem ser encontradas na Seção 18 do Capítulo 2 de Gut [13].

2. Modos de Convergência

2.1. Sejam X_1, X_2, \dots, X variáveis aleatórias em um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) .

Dizemos que

(a) X_n converge para X *quase certamente*, denotado por $X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} X$, se o evento

$$\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \rightarrow X(\omega) \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$$

tem probabilidade 1.

- (b) X_n converge para X em probabilidade, denotado por $X_n \xrightarrow{P} X$, se para qualquer $\varepsilon > 0$,

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

- (c) X_n converge para X em distribuição, denotado por $X_n \xrightarrow{D} X$, se

$$P(X_n \leq x) \rightarrow P(X \leq x) \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

para todo ponto x em que $F_X(x) = P(X \leq x)$ é contínua.

Observação. Note que a convergência em distribuição é definida em termos das funções de distribuição; a condição de que as variáveis aleatórias sejam definidas no mesmo espaço de probabilidade é supérflua. Outra terminologia para $X_n \xrightarrow{D} X$ é dizer que F_{X_n} converge fracamente para F_X .

2.2. Unicidade do limite:

- (i) Se $X_n \xrightarrow{q.c.} X$ e $X_n \xrightarrow{q.c.} Y$, então $P(X = Y) = 1$.
- (ii) Se $X_n \xrightarrow{P} X$ e $X_n \xrightarrow{P} Y$, então $P(X = Y) = 1$.
- (iii) Se $X_n \xrightarrow{D} X$ e $X_n \xrightarrow{D} Y$, então $F_X(x) = F_Y(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2.3. Relações entre os tipos de convergência:

$$1. X_n \xrightarrow{q.c.} X \implies X_n \xrightarrow{P} X \implies X_n \xrightarrow{D} X.$$

Nenhuma outra implicação vale em geral.

$$2. \text{ Se } X_n \xrightarrow{D} c, \text{ onde } c \text{ é uma constante, então } X_n \xrightarrow{P} c.$$

2.4. Condição necessária e suficiente para convergência quase certa*:

Sejam X_1, X_2, \dots, X variáveis aleatórias em um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) .

Então,

$$\begin{aligned} X_n \xrightarrow{q.c.} X &\iff P(|X_n - X| > \varepsilon \text{ infinitas vezes}) = 0 \text{ para todo } \varepsilon > 0 \\ &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{|X_k - X| > \varepsilon\}\right) = 0 \text{ para todo } \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Em particular, se $p_n(\varepsilon) = P(|X_n - X| > \varepsilon)$ satisfaz $\sum_{n=1}^{\infty} p_n(\varepsilon) < \infty$ para todo $\varepsilon > 0$, então $X_n \xrightarrow{q.c.} X$.

2.5. Teorema da continuidade* :

Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias com funções geradoras de momentos correspondentes $\{M_n(t)\}_{n \geq 1}$, que existem para $|t| < b$. Suponhamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(t) = M(t)$ para $|t| \leq a < b$, onde $M(t)$ é a função geradora de momentos da variável aleatória X . Então, $X_n \xrightarrow{D} X$.

Observação. O seguinte resultado é útil em muitas aplicações do Teorema da continuidade: se c_1, c_2, \dots e c são números reais tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{c_n}{n}\right)^n = e^c$.

2.6. Outras condições para convergência em distribuição:

(a) Sejam X_1, X_2, \dots e X variáveis aleatórias inteiras e não-negativas. Então,

$$X_n \xrightarrow{D} X \iff \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) = P(X = k) \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

No caso geral de variáveis aleatórias discretas assumindo valores em $\{x_0, x_1, \dots\}$, vale a implicação \Leftarrow com x_k no lugar de k .

(b) **Teorema de Scheffé:** Sejam X_1, X_2, \dots e X variáveis aleatórias contínuas, com densidades respectivas f_1, f_2, \dots e f . Se $f_n(x) \rightarrow f(x)$ quando $n \rightarrow \infty$ para quase todo x , então $X_n \xrightarrow{D} X$.

A condição de que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ para quase todo x significa que o conjunto $\{x : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}$ tem medida de Lebesgue nula, o que ocorre, por exemplo, se esse conjunto é finito ou enumerável. A recíproca do Teorema de Scheffé é falsa.

2.7. Preservação da convergência por uma função contínua:

Se $X_n \xrightarrow{q.c.} X$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então $g(X_n) \xrightarrow{q.c.} g(X)$.

Asserções análogas são válidas para \xrightarrow{P} e \xrightarrow{D} .

2.8. Convergência de somas de sequências:

(i) Se $X_n \xrightarrow{q.c.} X$ e $Y_n \xrightarrow{q.c.} Y$, então $X_n + Y_n \xrightarrow{q.c.} X + Y$.

(ii) Se $X_n \xrightarrow{P} X$ e $Y_n \xrightarrow{P} Y$, então $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$.

Essa afirmação em geral não é válida no caso de convergência em distribuição. Para valer, alguma hipótese adicional é requerida, por exemplo,

(iii) Suponha que $X_n \xrightarrow{D} X$ e $Y_n \xrightarrow{D} Y$, com X_n e Y_n independentes para todo n e X e Y independentes. Então, $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + Y$.

Observação. Nos itens (i) e (ii) de **2.8**, a soma pode ser substituída por diferença, produto ou quociente.

2.9. Teorema de Slutsky (1925): Se $X_n \xrightarrow{D} X$ e $Y_n \xrightarrow{D} c$, onde c é uma constante, então

$$(a) \quad X_n \pm Y_n \xrightarrow{D} X \pm c,$$

$$(b) \quad X_n Y_n \xrightarrow{D} cX,$$

$$(c) \quad X_n/Y_n \xrightarrow{D} X/c \text{ se } c \neq 0.$$

2.10. Método Delta: Sejam Y_1, Y_2, \dots variáveis aleatórias tais que $\sqrt{n}(Y_n - \mu) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2)$, onde μ e $\sigma^2 > 0$ são constantes. Se g é uma função derivável no ponto μ , então

$$\sqrt{n}(g(Y_n) - g(\mu)) \xrightarrow{D} N(0, (g'(\mu))^2 \sigma^2),$$

onde, no caso de $g'(\mu) = 0$, interpretamos a distribuição $N(0, 0)$ como a massa pontual em 0.

3. Teoremas Limites

3.1. Lei Fraca dos Grandes Números de Khintchine (1929):

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com média finita μ . As somas parciais $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ satisfazem

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu.$$

3.2. Lei Fraca dos Grandes Números de Bernoulli (1713):

Consideremos uma sequência de ensaios de Bernoulli independentes, tendo a mesma probabilidade p de sucesso em cada ensaio. Se S_n é o número de sucessos nos n primeiros ensaios, então

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p.$$

3.3. Lei Fraca dos Grandes Números de Chebyshev (1867):

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias e consideremos $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(S_n)/n^2 = 0$, então

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{P} 0. \quad (\star)$$

Em particular, (\star) é válida se X_1, X_2, \dots são variáveis aleatórias não-correlacionadas que tenham variâncias finitas e uniformemente limitadas.

3.4. Lei Forte dos Grandes Números de Kolmogorov (1933):

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com média finita μ . As somas parciais $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ satisfazem

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{q.c.}} \mu.$$

3.5. Lei Forte dos Grandes Números de Borel (1909):

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. tal que $P(X_n = 1) = p$, $P(X_n = 0) = 1 - p$. Então,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{q.c.}} p,$$

onde $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

3.6. Teorema Central do Limite (Liapunov (1901), Lindeberg (1922)):

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com média μ e variância σ^2 finita e positiva, e seja $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Então,

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{D}} N(0, 1).$$

Isto é, para qualquer $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-x^2/2} dx.$$

3.7. Teorema Central do Limite de De Moivre (1733) e Laplace (1812):

Seja S_n o número de sucessos em n ensaios de Bernoulli independentes, tendo a mesma probabilidade p de sucesso em cada ensaio, onde $0 < p < 1$. Então,

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\text{D}} N(0, 1).$$

3.8. Limite de binomiais para Poisson:

Se $X_n \sim \text{Binomial}(n, p_n)$, $n \geq 1$, e $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$, então

$$X_n \xrightarrow{\text{D}} \text{Poisson}(\lambda).$$

Observação. Tendo em vista o tópico **2.6** (a), no lugar da convergência em distribuição podemos escrever

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

(Teorema de Poisson (1832)).

4. Outros Teoremas Limites*

4.1. Uma Lei Forte sem supor distribuições idênticas (Kolmogorov (1933)):

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes e integráveis, e consideremos $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}(X_n)/n^2 < \infty$, então

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{\text{q.c.}} 0.$$

4.2. Um Teorema Central do Limite sem supor distribuições idênticas:

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias independentes, e seja $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Para cada i , sejam $\mu_i = E(X_i)$ e $\sigma_i^2 = \text{Var}(X_i)$, e denotemos por $m_n = \sum_{i=1}^n \mu_i$ e $s_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ a média e a variância de S_n , respectivamente.

Suponhamos que: (a) $s_n^2 \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, e (b) existe uma constante M tal que $P(|X_i| \leq M) = 1$ para todo i .

Então,

$$\frac{S_n - m_n}{s_n} \xrightarrow{\text{D}} N(0, 1).$$

Isto é, para qualquer $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - m_n}{s_n} \leq a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-x^2/2} dx.$$

Observação. Esse resultado segue de um Teorema Central do Limite mais geral que foi provado por J. W. Lindeberg (1922). Para mais detalhes, veja-se, por exemplo, o livro de Feller [9] (p. 254).

5. Convergência de momentos*

5.1. Teorema da convergência monótona: Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias não-negativas. Se $X_n \uparrow X$ quase certamente quando $n \rightarrow \infty$, então

$$E(X_n) \uparrow E(X) \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Observe que o limite pode ser infinito.

5.2. Lema de Fatou: Se X_1, X_2, \dots são variáveis aleatórias não-negativas, então

$$E\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(X_n).$$

5.3. Teorema da convergência dominada de Lebesgue: Suponha que $|X_n| \leq Y$ para todo n , onde Y é integrável, e que $X_n \xrightarrow{q.c.} X$. Então, X e X_n são integráveis e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = E(X).$$

Observação. Em **5.3**, a hipótese de que $X_n \xrightarrow{q.c.} X$ pode ser substituída por $X_n \xrightarrow{D} X$. No caso particular de Y ser uma constante, o resultado é conhecido como Teorema da convergência limitada.

Exercícios

Lema de Borel-Cantelli*

1*. Uma moeda honesta é lançada repetidamente, sendo os lançamentos independentes. Para $n \geq 1$, considere os eventos

A_n : O n -ésimo lançamento resulta cara.

B_n : O n -ésimo e o $(n + 1)$ -ésimo lançamentos ambos resultam cara.

Mostre que

(a) $P(A_n \text{ infinitas vezes}) = 1$.

(b) $P(B_n \text{ infinitas vezes}) = 1$.

Em palavras, o item (a) garante que com probabilidade 1 ocorrem infinitas caras e o item (b) estabelece que o evento “duas caras em seguida” ocorre infinitas vezes, com probabilidade 1.

Sugestão: (b) Para $n \geq 1$, defina C_n o evento de que o $(2n - 1)$ -ésimo e o $(2n)$ -ésimo lançamentos ambos resultam cara.

2*. Uma moeda honesta é lançada repetidamente, sendo os lançamentos independentes. Prove que qualquer sequência finita de resultados ocorre infinitas vezes, com probabilidade 1.

3*. Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição Bernoulli(1/2). Para $n \geq 1$, definimos Y_n o comprimento da sequência de 0's começando em X_n , isto é,

$$Y_n = \begin{cases} 0 & \text{se } X_n = 1, \\ k & \text{se } X_n = \dots = X_{n+k-1} = 0 \text{ e } X_{n+k} = 1. \end{cases}$$

- (a) Mostre que $P(Y_n = k) = 1/2^{k+1}$ para todo $k \geq 0$.
- (b) Prove que $P(Y_n = k \text{ infinitas vezes}) = 1$ para todo $k \geq 0$.
- (c) Mostre que $P(Y_n = n \text{ infinitas vezes}) = 0$.

4*. Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes, tais que $X_n \sim U[0, a_n]$, onde $a_n > 0$. Demonstre que:

- (a) Se $a_n = n^2$, então, com probabilidade 1, somente um número finito das X_n 's são menores que 1.
- (b) Se $a_n = n$, então, com probabilidade 1, um número infinito das X_n 's são menores que 1.

5*. (Barndorff-Nielsen (1961)). Sejam A_1, A_2, \dots eventos em um espaço de probabilidade tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap A_{n+1}^c) < \infty$. Prove que $P(A_n \text{ infinitas vezes}) = 0$.

6*. Sejam A_1, A_2, \dots eventos em um espaço de probabilidade.

- (a) Prove que $P(A_n \text{ infinitas vezes}) = 1$ se para cada k

$$\sum_{n>k} P(A_n | A_k^c \cap \dots \cap A_{n-1}^c) = \infty.$$

Deduza daí o item (b) do Lema de Borel-Cantelli.

- (b) Mostre por meio de um exemplo que $P(A_n \text{ infinitas vezes}) = 1$ não segue apenas da divergência de $\sum_n P(A_n | A_1^c \cap \dots \cap A_{n-1}^c)$.
- (c) Demonstre que $P(A_n \text{ infinitas vezes}) = 1$ se e somente se $\sum_{n=1}^{\infty} P(A \cap A_n) = \infty$ para todo evento A com $P(A) > 0$.

7*. Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição exponencial de parâmetro λ . Os itens (a) e (c) deste exercício provam que, com probabilidade 1,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\log n} = \frac{1}{\lambda},$$

o que fornece uma descrição bastante precisa dos valores grandes de X_n quando $n \rightarrow \infty$.

(a) Mostre que

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\log n} \geq \frac{1}{\lambda}\right) = 1.$$

(b) Prove que, para qualquer $\delta > 0$,

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\log n} \leq \frac{1 + \delta}{\lambda}\right) = 1.$$

(c) Obtenha de (b) que

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\log n} \leq \frac{1}{\lambda}\right) = 1.$$

Solução. (a) Para $n \geq 1$, seja $A_n = \{X_n \geq (\log n)/\lambda\}$. Como A_1, A_2, \dots são independentes e $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \infty$, temos, pelo Lema de Borel-Cantelli, que $P(A_n \text{ infinitas vezes}) = 1$. Então,

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\log n} \geq \frac{1}{\lambda}\right) = 1.$$

(b) Fixado $\delta > 0$, seja $B_n = \{X_n > (1 + \delta)(\log n)/\lambda\}$, $n \geq 1$. Visto que $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1+\delta} < \infty$, obtemos pelo Lema de Borel-Cantelli que $P(B_n \text{ infinitas vezes}) = 0$. Daí, segue que

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\log n} \leq \frac{1 + \delta}{\lambda}\right) = 1.$$

(c) Observamos que, quando $k \rightarrow \infty$,

$$\left\{\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\log n} \leq \frac{1 + 1/k}{\lambda}\right\} \downarrow \left\{\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\log n} \leq \frac{1}{\lambda}\right\},$$

portanto,

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\log n} \leq \frac{1}{\lambda}\right) = 1.$$

8*. Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição $N(0, 1)$. Os itens (a) e (c) deste exercício mostram que, com probabilidade 1,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\sqrt{2 \log n}} = 1,$$

o que descreve acuradamente os valores grandes de X_n quando $n \rightarrow \infty$.

(a) Prove que

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\sqrt{2 \log n}} \geq 1\right) = 1.$$

(b) Mostre que, para qualquer $\delta > 0$,

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\sqrt{2 \log n}} \leq \sqrt{1 + \delta}\right) = 1.$$

(c) Conclua de (b) que

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\sqrt{2 \log n}} \leq 1\right) = 1.$$

Sugestão: Use a Razão de Mill (Exercício 42(b) do Capítulo 3).

9*. Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição $N(0, 1)$, e considere $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Mostre que

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \log n}} \leq 1\right) = 1.$$

Sugestão: Observe que a independência das X_i 's não é usada na obtenção do item (c) do exercício 8.

Observação. Um resultado mais preciso é conhecido como Lei do Logaritmo Iterado, a qual estabelece que, para X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média 0 e variância 1,

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \log \log n}} = 1\right) = 1.$$

Encontram-se mais detalhes na Seção 1 do Capítulo 8 de Gut [13].

10*. Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias positivas tais que $E(X_n) \leq C$ para todo $n \geq 1$, onde C é uma constante. Mostre que, para qualquer $\delta > 0$,

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log X_n}{n} \leq \delta\right) = 1$$

e portanto

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log X_n}{n} \leq 0\right) = 1.$$

Modos de Convergência

11. Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias tal que cada X_n assume valores em $\{0, 1/n, \dots, (n-1)/n, 1\}$ com $P(X_n = j/n) = 1/(n+1)$ para $j = 0, \dots, n$. Mostre que $X_n \xrightarrow{D} U(0, 1)$.

Solução. Seja $X \sim U(0, 1)$, logo

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ x & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Para $n \geq 1$,

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ k/(n+1) & \text{se } (k-1)/n \leq x < k/n, k = 1, \dots, n, \\ 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Para $x < 0$ ou $x \geq 1$, temos que $F_{X_n}(x) = F_X(x)$, portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x). \quad (*)$$

Se $0 \leq x < 1$, então $F_{X_n}(x) = k/(n+1)$ onde $k \in \{1, \dots, n\}$ é tal que $(k-1)/n \leq x < k/n$. Como $F_X(x) = x$, temos

$$-\frac{1}{n+1} \leq \frac{k}{n+1} - \frac{k}{n} \leq F_{X_n}(x) - F_X(x) \leq \frac{k}{n+1} - \frac{k-1}{n} \leq \frac{1}{n+1}$$

e então também vale (*). Assim, $X_n \xrightarrow{D} X$.

12. Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias, sendo a densidade de X_n dada por

$$f_{X_n}(x) = \frac{n x^{n-1}}{\theta^n}, \quad 0 < x < \theta.$$

Prove que $X_n \xrightarrow{D} \theta$.

13. Suponha que $X_n \sim N(0, 1/n)$, $n \geq 1$. Prove que $X_n \xrightarrow{D} X \equiv 0$.

14. Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição exponencial de parâmetro 1. Para $n \geq 1$, definimos $Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\} - \log n$. Mostre que a sequência $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ converge em distribuição, determinando a distribuição limite.

15. Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com densidade comum dada por

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}, \quad x > 0.$$

Defina $W_n = n^{-1} \max\{X_1, \dots, X_n\}$, $n \geq 1$. Demonstre que a sequência $\{W_n\}_{n \geq 1}$ converge em distribuição, identificando a distribuição limite.

16. Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição uniforme em $(0, 1)$, e seja $N_k \sim \text{Poisson}(k)$ independente de X_1, X_2, \dots . Considere

$$Y_k = \begin{cases} 0 & \text{se } N_k = 0, \\ k \min\{X_1, \dots, X_{N_k}\} & \text{se } N_k \geq 1. \end{cases}$$

Prove que Y_k converge em distribuição quando $k \rightarrow \infty$, obtendo a distribuição limite.

17. Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias tal que $X_n \sim \text{Binomial}(n, 1/n^2)$. Demonstre que $X_n - 1/n \xrightarrow{P} 0$.

Solução. Observamos que $E(X_n) = 1/n$ e $\text{Var}(X_n) = (1/n)(1 - 1/n^2)$. Para qualquer $\varepsilon > 0$, temos, pela Desigualdade de Chebyshev,

$$P\left(\left|X_n - \frac{1}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Assim, $X_n - 1/n \xrightarrow{P} 0$.

18. Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias tais que

$$P(X_n = n) = 1 - P(X_n = 1/n) = 1/n^2.$$

Mostre que $X_n \xrightarrow{P} 0$.

19. Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição uniforme em $[0, 1]$. Definimos

$$Y_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}, Z_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}, U_n = n Y_n \text{ e } V_n = n(1 - Z_n), n \geq 1.$$

Mostre que

$$(a) Y_n \xrightarrow{P} 0 \text{ e } Z_n \xrightarrow{P} 1.$$

$$(b) U_n \xrightarrow{D} W \text{ e } V_n \xrightarrow{D} W, \text{ onde } W \sim \text{Exp}(1).$$

20. Seja X uma variável aleatória assumindo os valores 1 e -1 com probabilidade $1/2$ e suponha que $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes de X tais que

$$P(Y_n = 1) = 1 - P(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Definimos a sequência de variáveis aleatórias $\{X_n\}_{n \geq 1}$ por

$$X_n = \begin{cases} X & \text{se } Y_n = 1, \\ e^n & \text{se } Y_n = 0. \end{cases}$$

Responda se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas, justificando sua resposta.

$$(a) X_n \xrightarrow{P} X.$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - X|) = 0.$$

21. Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias com $E(X_n^2) < \infty$ para todo $n \geq 1$. Prove que se $\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = \alpha$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(X_n) = 0$, então $X_n \xrightarrow{P} \alpha$.

22*. Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes, com

$$P(X_n = 1) = p_n \quad \text{e} \quad P(X_n = 0) = 1 - p_n.$$

Prove que

$$(a) X_n \xrightarrow{P} 0 \text{ se e somente se } \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0.$$

$$(b) X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} 0 \text{ se e somente se } \sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty.$$

Solução. Recordamos que, pela definição de convergência em probabilidade,

$$X_n \xrightarrow{P} 0 \iff P(|X_n| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ para todo } \varepsilon > 0.$$

Além disso, o critério para convergência quase certa dado em 2.4 estabelece que

$$X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} 0 \iff P(|X_n| > \varepsilon \text{ infinitas vezes}) = 0 \text{ para todo } \varepsilon > 0.$$

(a) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$, então para qualquer $\varepsilon > 0$,

$$P(|X_n| > \varepsilon) \leq P(X_n \neq 0) = p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

e portanto $X_n \xrightarrow{P} 0$. Reciprocamente, se $X_n \xrightarrow{P} 0$, então

$$p_n = P(|X_n| > 1/2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

(b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$, então para qualquer $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) \leq \sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty.$$

Usando o Lema de Borel-Cantelli, concluímos que $P(|X_n| > \varepsilon \text{ infinitas vezes}) = 0$ para todo $\varepsilon > 0$, logo $X_n \xrightarrow{\text{a.c.}} 0$.

Por outro lado, se $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > 1/2) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty.$$

Como os eventos $\{|X_n| > 1/2\}$ são independentes (pois as X_n 's o são), temos, pelo Lema de Borel-Cantelli, que $P(|X_n| > 1/2 \text{ infinitas vezes}) = 1$. Isso mostra que X_n não converge para 0 quase certamente.

23*. Sejam X_2, X_3, \dots variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição exponencial de parâmetro 1. Para $n \geq 2$, considere

$$Y_n = \frac{X_n}{\log n}.$$

(a) Mostre que $Y_n \xrightarrow{P} 0$.

(b) Prove que $P(|Y_n| > 1/2 \text{ infinitas vezes}) = 1$.

(c) Conclua do item (b) que Y_n não converge para 0 quase certamente.

24*. Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias tais que

$$P(X_n = n^3) = \frac{1}{n^2}, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Prove que $X_n \xrightarrow{\text{a.c.}} 0$, porém $\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) \neq 0$.

25*. Sejam X_1, X_2, \dots, X variáveis aleatórias em um mesmo espaço de probabilidade. Demonstre que $X_n \xrightarrow{\text{a.c.}} X$ se

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(|X_n - X|^r) < \infty \text{ para algum } r > 0.$$

26*. Suponha que $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$, $n \geq 1$, e que $\mu_n \rightarrow \mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma_n \rightarrow \sigma > 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Prove que $X_n \xrightarrow{D} N(\mu, \sigma^2)$.

27*. Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição $N(0, \sigma^2)$. Fixado um número real α , definimos a sequência $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ pela fórmula

$$Y_1 = X_1, \quad Y_n = \alpha Y_{n-1} + X_n, \quad n \geq 2.$$

- (a) Mostre que $Y_n = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i X_{n-i}$, $n \geq 1$.
 (b) Obtenha a função geradora de momentos de Y_n e a sua distribuição.
 (c) Calcule $\text{Cov}(Y_m, Y_n)$, $1 \leq m \leq n$.
 (d) Prove que se $|\alpha| < 1$, então

$$Y_n \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{\sigma^2}{1 - \alpha^2}\right).$$

28*. Suponha que $X_n \sim \text{Geométrica}(1/n)$, $n \geq 2$, e seja $Y_n = X_n/n - 1$. Prove que $Y_n \xrightarrow{D} Y$ onde $Y \sim \text{Exp}(1)$.

29*. Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição de Poisson de parâmetro λ . Considere $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Usando o Teorema da continuidade, demonstre que

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{D} \lambda.$$

Sugestão: Prove e use que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

30. Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias tal que X_n tem função de distribuição

$$F_n(x) = x - \frac{\text{sen}(2n\pi x)}{2n\pi}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

- (a) Mostre que X_n tem densidade e então conclua que de fato F_n é uma função de distribuição.
 (b) Prove que $X_n \xrightarrow{D} X$ onde $X \sim U[0, 1]$, mas a densidade de X_n não converge para a densidade de X no intervalo $(0, 1)$.

31. (a) Prove os itens (i) e (ii) do tópico **2.8** (p. 141).

(b) Forneça um exemplo no qual $X_n \xrightarrow{D} X$, $Y_n \xrightarrow{D} Y$, porém a soma $X_n + Y_n$ não converge em distribuição para $X + Y$.

32. Suponha que $Z_n \sim N(0, 1)$ e $V_n \sim \chi_n^2$ são variáveis aleatórias independentes. Mostre que

$$T_n = \frac{Z_n}{\sqrt{V_n/n}} \xrightarrow{D} N(0, 1).$$

Sugestão: Recorde-se de que a distribuição χ_n^2 é idêntica à Gama($n/2, 1/2$) e obtenha $E(V_n)$ e $\text{Var}(V_n)$.

Teoremas Limites

33. Uma moeda honesta é lançada infinitas vezes independentemente. Sejam X_1, X_2, \dots as variáveis aleatórias definidas por

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se o } i\text{-ésimo e o } (i+1)\text{-ésimo lançamentos resultam em cara,} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Obtenha $E(X_i)$ e $\text{Var}(X_i)$.

(b) Mostre que

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \begin{cases} 1/16 & \text{se } j = i + 1, \\ 0 & \text{se } j > i + 1. \end{cases}$$

(c) Seja $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n \geq 1$. Determine $E(S_n)$ e $\text{Var}(S_n)$.

(d) Prove que $S_n/n \xrightarrow{P} 1/4$.

34. Seja $m \geq 0$ um número inteiro. Dizemos que as variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots são *m-dependentes* se X_i e X_j são independentes sempre que $|i - j| > m$. Assim, variáveis aleatórias independentes são 0-dependentes. Suponha que X_1, X_2, \dots são variáveis aleatórias *m-dependentes*, tais que $E(X_i) = \mu$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$ para todo $i \geq 1$. Considere $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n \geq 1$. Mostre que

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu.$$

Sugestão: Use a Desigualdade de Cauchy-Schwarz para obter um limitante superior para $\text{Cov}(X_i, X_j)$, $|i - j| \leq m$.

35. Considere uma sequência infinita de lançamentos independentes de uma moeda, com probabilidade p de cara em cada lançamento ($0 < p < 1$). Uma *seguida* é uma sequência de lançamentos de mesmo resultado. Seja R_n o número de seguidas nos n primeiros lançamentos. Demonstre que

$$\frac{R_n}{n} \xrightarrow{P} 2p(1-p).$$

Sugestão: Vejam-se os exercícios 55 do Capítulo 4 e 21 do Capítulo 5.

36. Suponha que distribuimos r bolas distintas aleatoriamente em n urnas. Seja N_n o número de urnas vazias após a distribuição. Prove que se $r, n \rightarrow \infty$ de forma que $r/n \rightarrow c$, então

$$\frac{N_n}{n} \xrightarrow{P} e^{-c}.$$

Sugestão: Vejam-se os exercícios 57 do Capítulo 4 e 21 do Capítulo 5.

37. Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média comum μ e variância finita. Prove que

$$\binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j \xrightarrow{P} \mu^2.$$

38. Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição uniforme em $(0, 1)$. Definimos a média geométrica de X_1, \dots, X_n por

$$Y_n = \left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{1/n}.$$

Mostre que a sequência $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ converge q.c. para uma constante e encontre o valor dessa constante.

Solução. Seja $Z_i = \log X_i$, $i \geq 1$. Então, Z_1, Z_2, \dots são variáveis aleatórias i.i.d. (já que as X_i 's o são), com

$$E(Z_1) = \int_0^1 \log x \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \log x \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (x \log x - x) \Big|_{\varepsilon}^1 = -1.$$

Pela Lei Forte dos Grandes Números de Kolmogorov,

$$\log Y_n = \frac{Z_1 + \dots + Z_n}{n} \xrightarrow{\text{q.c.}} -1.$$

Portanto, como a função $x \mapsto e^x$ é contínua,

$$Y_n \xrightarrow{\text{q.c.}} e^{-1}.$$

39. Integração numérica: Suponha que g é uma função contínua, não-negativa, definida em $[0, 1]$, tal que $\sup_x g(x) \leq 1$. O seguinte procedimento visa a aproximar a integral de g em $[0, 1]$. Escolhem-se n pontos uniformemente em $[0, 1] \times [0, 1]$, e se define U_n como o número de pontos que caem abaixo da curva $y = g(x)$. Prove que

$$\frac{U_n}{n} \xrightarrow{\text{q.c.}} \int_0^1 g(x) \, dx.$$

40. Uma vareta de comprimento 1 é quebrada de maneira aleatória, o que significa que a parte restante tem distribuição uniforme em $(0, 1)$. A parte restante é quebrada de modo similar, e assim por diante.

- Seja X_n o comprimento da parte que sobra após a vareta ter sido quebrada n vezes. Descreva X_n como um produto.
- Mostre que a sequência $\{\log(X_n)/n\}_{n \geq 1}$ converge quase certamente, respondendo qual é o limite.
- Obtenha uma aproximação para a probabilidade de que $X_{36} \leq e^{-24}$.

41. Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição uniforme em $[0, \pi]$. Encontre constantes A e B tais que

$$\text{sen} \left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \right] \xrightarrow{\text{q.c.}} A \quad \text{e} \quad \frac{\sum_{i=1}^n \text{sen } X_i}{n} \xrightarrow{\text{q.c.}} B.$$

42. Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição $N(0, 1)$. Definimos a sequência $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ por

$$Y_n = \frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{(X_1 - 1)^2 + \cdots + (X_n - 1)^2}.$$

Prove que $Y_n \xrightarrow{\text{q.c.}} 1/2$.

43. Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição de Poisson de parâmetro λ . Definimos a sequência $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ por

$$Y_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n(X_1^2 + \cdots + X_n^2)}}.$$

Demonstre que $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ converge q.c. para uma constante e encontre o valor dessa constante.

44. Sejam X_1, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média μ e variância σ^2 , $0 < \sigma^2 < \infty$. Definimos

$$\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \text{Média amostral} \quad \text{e}$$

$$S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}{n-1} = \text{Variância amostral}.$$

(a) Determine $E(\bar{X}_n)$ e $\text{Var}(\bar{X}_n)$.

(b) Mostre que

$$S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n(\bar{X}_n)^2}{n-1}.$$

(c) Obtenha $E(S_n^2)$.

(d) Prove que $S_n^2 \xrightarrow{\text{q.c.}} \sigma^2$ quando $n \rightarrow \infty$.

45*. Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tal que

$$P(X_n = n^\alpha) = P(X_n = -n^\alpha) = \frac{1}{2}$$

para algum $\alpha \in (0, 1/2)$. Mostre que $n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\text{q.c.}} 0$.

46*. Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) $E|X_1| < \infty$;
- (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > n\varepsilon) < \infty$ para todo $\varepsilon > 0$;
- (iii) $P(|X_n| > n\varepsilon \text{ infinitas vezes}) = 0$ para todo $\varepsilon > 0$;
- (iv) $X_n/n \xrightarrow{\text{q.c.}} 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Sugestão: Use o critério para integrabilidade enunciado em **1.10** do Capítulo 4.

47*. **Recíproca para a Lei Forte de Kolmogorov:** Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, e considere $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

(a) Suponha que $S_n/n \xrightarrow{\text{q.c.}} c$, onde c é uma constante.

(a1) Mostre que $X_n/n \xrightarrow{\text{q.c.}} 0$.

(a2) Conclua que $E|X_1| < \infty$ e $c = E(X_1)$.

(b) Suponha que $E|X_1| = \infty$.

(b1) Prove que $P(|X_n| > nk \text{ infinitas vezes}) = 1$ para todo $k = 1, 2, \dots$

(b2) Mostre que

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|X_n|}{n} = \infty\right) = 1$$

e portanto

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n|}{n} = \infty\right) = 1.$$

Sugestão: Veja o exercício 46 e use respectivamente em (a) e em (b) que

$$\frac{X_n}{n} = \frac{S_n}{n} - \left(\frac{n-1}{n}\right) \frac{S_{n-1}}{n-1} \quad \text{e} \quad \frac{|X_n|}{n} \leq \frac{|S_n|}{n} + \frac{|S_{n-1}|}{n-1}.$$

48*. **Uma sequência de variáveis aleatórias que satisfaz a Lei Fraca dos Grandes Números, porém não a Lei Forte:** Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes tais que $P(X_1 = 0) = 1$ e, para cada $n \geq 2$,

$$P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2n \log n}, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n \log n}.$$

Seja $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

(a) Usando a Desigualdade de Chebyshev, prove que $S_n/n \xrightarrow{P} 0$.

(b) Mostre que $P(|X_n| > n/2 \text{ infinitas vezes}) = 1$.

(c) Conclua que X_n/n não converge para 0 quase certamente e portanto S_n/n não converge para 0 quase certamente.

49*. Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes tais que, para cada $n \geq 1$,

$$P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{p_n}{2}, \quad P(X_n = 0) = 1 - p_n.$$

Seja $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Demonstre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty \quad \iff \quad \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{q.c.}} 0.$$

50. Uma marca de chocolate faz uma promoção: alguns dos pacotes incluem vales que podem ser trocados por uma camiseta. O número de pacotes premiados que se vendem ao dia em uma loja é uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro 0,3. Estime a probabilidade de que em 120 dias se vendam nessa loja mais de 30 pacotes com prêmio.

Solução. Para $1 \leq i \leq 120$, seja X_i o número de pacotes premiados vendidos na loja no dia i . Sabemos que X_1, \dots, X_{120} têm distribuição de Poisson(0,3), logo

$$\mu = E(X_1) = 0,3 \text{ e } \sigma^2 = \text{Var}(X_1) = 0,3.$$

Supomos que X_1, \dots, X_{120} são independentes, e seja $S_{120} = \sum_{i=1}^{120} X_i$ o total de pacotes premiados vendidos na loja durante os 120 dias.

Pelo Teorema Central do Limite,

$$\begin{aligned} P(S_{120} > 30) &= P\left(\frac{S_{120} - 120 \cdot 0,3}{\sqrt{0,3} \cdot \sqrt{120}} > \frac{30 - 120 \cdot 0,3}{\sqrt{0,3} \cdot \sqrt{120}}\right) \\ &\approx P(Z > -1) \approx 0,8413, \end{aligned}$$

onde $Z \sim N(0, 1)$.

51. O número médio de canetas que se vendem diariamente em uma papelaria é 30, sendo a variância 10. Estes valores são 20 e 12 para o número de cadernos vendidos. Sabe-se, ademais, que a covariância entre as vendas diárias de ambos produtos é 9. Estime a probabilidade de que o número total de ambos produtos vendidos durante 90 dias esteja compreendido entre 4400 e 4600.

52. Uma máquina empacota lotes de parafusos. O dono da máquina deseja que pelo menos 90% dos lotes tenham mais de 1000 parafusos sem defeito. Sabendo que a probabilidade de que um parafuso seja defeituoso é 0,02, qual o menor número de parafusos que deve colocar por lote?

53. Três emissoras de televisão têm uma árdua competição para obter altos níveis de audiência. O número médio diário de prêmios milionários distribuídos por cada uma dessas emissoras é de 5, 3 e 4, sendo 0,5, 0,4 e 0,3 os desvios padrões, respectivamente. Estime a probabilidade de que o número total de prêmios milionários distribuídos em dois meses seja superior a 730.

54. O salário em reais dos funcionários de uma empresa tem distribuição de Pareto, com densidade

$$f(x) = \frac{5 \cdot 700^{5/2}}{2 x^{7/2}}, \quad x \geq 700.$$

Qual a probabilidade de que o salário médio de um grupo de 1000 funcionários seja maior que 1200 reais?

55. Cada um de 108 números é arredondado para o inteiro mais próximo, e somam-se os valores arredondados. Suponha que os erros de arredondamento são variáveis aleatórias independentes, uniformemente distribuídas em $[-1/2, 1/2]$. Obtenha uma aproximação para a probabilidade de que a soma obtida esteja distante da soma dos números originais

- (a) por mais de 3.
- (b) por mais de 6.

56. Um estudante tem no máximo uma hora para fazer uma prova com 116 questões. Ele decide gastar não mais que um minuto por questão. Suponha que os tempos gastos em diferentes questões são variáveis aleatórias independentes, com densidade

$$f(x) = 6x(1-x), 0 \leq x \leq 1.$$

Qual a probabilidade de que o estudante consiga fazer a prova inteira?

57. A proporção de impurezas em amostras de água coletadas em um trecho de um rio tem distribuição Beta(3, 2). Coletam-se 36 amostras, de forma independente. Encontre uma aproximação para as seguintes probabilidades:

- (a) de que a proporção média de impurezas das amostras seja maior que 0,58.
- (b) de que o número de amostras em que a proporção de impurezas excede 0,58 seja no máximo 24.

58. Suponha que, ao jogar roleta em um cassino, o apostador ganha ou perde um euro com probabilidades respectivas $9/19$ e $10/19$. Assim, as apostas sucessivas são variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots independentes, com $P(X_i = 1) = 9/19 = 1 - P(X_i = -1), i \geq 1$, e $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ é o capital acumulado pelo apostador após n jogadas.

- (a) Estime a probabilidade de que em 80 jogadas o apostador tenha perdido dinheiro.
- (b) Aproxime a probabilidade de que em 400000 apostas o cassino aufera um lucro entre 20000 e 22000 euros.

59. Considere a média $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$ de n variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição uniforme em $[0, 1]$. Encontre n tal que $P(\bar{X}_n < 0,51)$ seja aproximadamente 90%.

60. Um dado honesto é lançado infinitas vezes independentemente. Seja X_i o resultado do i -ésimo lançamento, e considere $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Obtenha:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n > 3n)$.
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n > 3,5n)$.
- (c) um valor aproximado para $P(S_{100} > 320)$.

61. Uma moeda honesta é lançada independentemente, até se obterem 450 caras. Estime a probabilidade de que no máximo 960 lançamentos sejam feitos.

Sugestão: Seja N o número de lançamentos necessários para obter 450 caras. Há duas abordagens:

- (i) Escrever N como a soma de 450 variáveis aleatórias independentes com distribuição geométrica de parâmetro $1/2$.
- (ii) Supor que a sequência de lançamentos da moeda é infinita e usar que $\{N \leq 960\} = \{\sum_{i=1}^{960} X_i \geq 450\}$, onde X_i é a função indicadora de que ocorre cara no i -ésimo lançamento.

62. Uma pessoa distribui jornais aos transeuntes na esquina de uma metrópole. Suponha que cada pessoa que passa pelo entregador pega um exemplar do jornal com probabilidade $1/3$, independentemente das demais. Seja N o número de pessoas que passam pelo entregador até o tempo em que ele entrega suas primeiras 600 cópias. Estime a probabilidade de que N seja maior que 1740.

63. Considere um experimento que consiste em lançamentos independentes e sucessivos de um dado honesto. Se o resultado é 1, 2 ou 3, anotamos em uma folha de papel o número 1, se a face do dado é igual a 4, anotamos o número 2, e se é igual a 5 ou 6, anotamos o número 3. Seja N o número de lançamentos necessários para que o produto dos números anotados ultrapasse 100000. Estime a probabilidade de que $N \geq 25$.

64. A duração em meses de uma pilha usada por João no seu aparelho de mp3 tem distribuição uniforme em $(1, 2)$. Suponha que João troca a pilha por uma nova imediatamente após ela ficar gasta. Estime a probabilidade de que ele use mais do que 27 pilhas em um período de 42 meses.

65. Usando o Teorema Central do Limite para variáveis aleatórias com distribuição de Poisson, mostre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^n}{n!} \right) = \frac{1}{2}.$$

66. Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição Bernoulli(p), $p \in (0, 1)$, e consideremos $\bar{X}_n = S_n/n = \sum_{i=1}^n X_i/n$. Prove que

$$\sqrt{n} \left[\bar{X}_n (1 - \bar{X}_n) - p(1 - p) \right] \xrightarrow{D} N(0, p(1 - p)(1 - 2p)^2).$$

Solução. Pelo Teorema Central do Limite de De Moivre e Laplace,

$$\frac{\sqrt{n} (\bar{X}_n - p)}{\sqrt{p(1 - p)}} = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1 - p)}} \xrightarrow{D} N(0, 1),$$

logo, pelo Teorema de Slutsky,

$$\sqrt{n} (\bar{X}_n - p) \xrightarrow{D} N(0, p(1 - p)).$$

Tomando $g(x) = x(1 - x)$, temos que $g'(x) = 1 - 2x$, portanto usando o Método Delta concluímos que

$$\sqrt{n} \left[\bar{X}_n (1 - \bar{X}_n) - p(1 - p) \right] \xrightarrow{D} N(0, p(1 - p)(1 - 2p)^2).$$

Se $p = 1/2$, interpretamos a distribuição $N(0, 0)$ como a massa pontual em 0.

67. Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição uniforme em $(-1, 1)$. Definimos a sequência $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ por

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i=1}^n X_i^3}.$$

- (a) Prove que $Y_n \xrightarrow{q.c.} 0$.
 (b) Demonstre que $\sqrt{n} Y_n \xrightarrow{D} N(0, 3)$.

68. Seja $X_n \sim \text{Gama}(n, 1)$, $n \geq 1$. Prove que

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{X_n}} \xrightarrow{D} N(0, 1).$$

69. Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição de Laplace (exponencial dupla), ou seja, X_1 tem densidade

$$f_{X_1}(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Mostre que

$$\sqrt{n} \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2} \right) \xrightarrow{D} N(0, 1/2).$$

70. Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição uniforme em $(-\theta, \theta)$, $\theta > 0$. Para $n \geq 1$, definimos $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ e $Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Demonstre que

$$\frac{S_n}{\sqrt{n} Y_n} \xrightarrow{D} N(0, 1/3).$$

71. Sejam $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Suponha que $E(g(X_1)) = \xi$ e $\text{Var}(g(X_1)) = \nu^2$, $0 < \nu^2 < \infty$. Além disso, suponha que T_n é uma função $T_n = T_n(X_1, \dots, X_n)$ (uma estatística) que satisfaz

$$T_n = \sum_{i=1}^n g(X_i) + R_n,$$

onde $R_n/\sqrt{n} \xrightarrow{P} 0$. Prove que

$$\frac{T_n - n\xi}{\sqrt{n}\nu} \xrightarrow{D} N(0, 1).$$

72. Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição uniforme em $[0, 2\theta]$, onde $\theta > 0$. Definimos $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$. Demonstre que

$$\sqrt{n} (\log \bar{X}_n - \log \theta) \xrightarrow{D} N(0, 1/3).$$

73. Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com densidade comum

$$f(x) = 3x^2, \quad 0 < x < 1.$$

Definimos a média harmônica de X_1, \dots, X_n por

$$H_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i^{-1}}.$$

- (a) Mostre que a sequência $\{H_n\}_{n \geq 1}$ converge q.c. para uma constante c e encontre o valor de c .
- (b) Prove que $\sqrt{n}(H_n - c)$ converge em distribuição, apresentando a distribuição limite.

74. Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição exponencial de parâmetro θ . Definimos

$$\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}, U_n = \frac{1}{\bar{X}_n}, Y_n = \frac{|\{i \leq n : X_i \geq 1\}|}{n} \text{ e } V_n = -\log Y_n.$$

- (a) Mostre que $U_n \xrightarrow{\text{q.c.}} \theta$ e $V_n \xrightarrow{\text{q.c.}} \theta$ quando $n \rightarrow \infty$.
- (b) Demonstre que $\sqrt{n}(U_n - \theta)$ e $\sqrt{n}(V_n - \theta)$ convergem em distribuição, determinando as distribuições limites.

75. Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com média 1 e variância σ^2 finita e positiva. Considere $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Prove que

$$\sqrt{S_n} - \sqrt{n} \xrightarrow{\text{D}} N(0, a^2),$$

determinando a constante a^2 .

76. Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com média μ e variância σ^2 finita e positiva. Definimos $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$.

- (a) Mostre que

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n^2 - \mu^2) \xrightarrow{\text{D}} N(0, 4\mu^2\sigma^2).$$

- (b) Prove que, se $\mu > 0$, então

$$\sqrt{n}(\log \bar{X}_n - \log \mu) \xrightarrow{\text{D}} N(0, \sigma^2/\mu^2).$$

77*. Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tal que

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2n}, P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}, n \geq 1.$$

Considere $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ e demonstre que

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{q.c.}} 0 \quad \text{e} \quad \frac{S_n}{\sqrt{\log n}} \xrightarrow{\text{D}} N(0, 1).$$

Convergência de momentos*

78*. Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias tais que X_1 é integrável e $X_n \downarrow X$ quase certamente quando $n \rightarrow \infty$. Prove que

$$E(X_n) \downarrow E(X) \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

79*. (Teorema de Beppo Levi). Suponha que X_1, X_2, \dots são variáveis aleatórias integráveis tais que $\sup_n E(X_n) < \infty$. Mostre que se $X_n \uparrow X$ quase certamente quando $n \rightarrow \infty$, então X é integrável e

$$E(X_n) \uparrow E(X) \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

80*. Sejam A_1, A_2, \dots eventos em um espaço de probabilidade.

(a) Usando o Lema de Fatou, demonstre que

$$P\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

(b) Usando o Teorema da convergência limitada, prove que se existe $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, então $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$.

81*. Mostre que se Y_1, Y_2, \dots são variáveis aleatórias não-negativas, então

$$E\left(\sum_{n=1}^{\infty} Y_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E(Y_n).$$

82*. Suponha que Y_1, Y_2, \dots são variáveis aleatórias tais que $|\sum_{k=1}^n Y_k| \leq X$ para todo n , onde X é integrável. Prove que se $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ converge quase certamente, então $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ e as Y_n 's são integráveis, e

$$E\left(\sum_{n=1}^{\infty} Y_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E(Y_n).$$

83*. Suponha que Y_1, Y_2, \dots são variáveis aleatórias tais que $\sum_{n=1}^{\infty} E|Y_n| < \infty$. Demonstre que $\sum_{n=1}^{\infty} |Y_n|$ converge quase certamente e é integrável, e

$$E\left(\sum_{n=1}^{\infty} Y_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E(Y_n).$$

84*. Equação de Wald: Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias, todas com a mesma média μ . Seja N uma variável aleatória inteira e não-negativa tal que, para todo n , o evento $\{N = n\}$ é independente de X_{n+1}, X_{n+2}, \dots . Suponha que é válida uma das seguintes condições:

- (i) $X_n \geq 0$ para todo n ou
- (ii) $E(N) < \infty$ e $\sup_n E|X_n| < \infty$.

Mostre que

$$E\left(\sum_{n=1}^N X_n\right) = \mu E(N).$$

Sugestão: Defina $I_n = I_{\{N \geq n\}} = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} I_{\{N=i\}}$ e escreva $\sum_{n=1}^N X_n = \sum_{n=1}^{\infty} X_n I_n$.

Respostas

$$14. F_{Y_n}(y) = \begin{cases} (1 - e^{-y/n})^n & \text{se } y > -\log n, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$Y_n \xrightarrow{D} Y$ com $F_Y(y) = \exp\{-\exp\{-y\}\}$, $y \in \mathbb{R}$.

$$15. F(w) = \begin{cases} e^{-1/w} & \text{se } w > 0, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$16. F_{Y_k}(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0, \\ 1 + e^{-k} - e^{-y} & \text{se } 0 \leq y < k, \\ 1 & \text{se } y \geq k. \end{cases}$$

$Y_k \xrightarrow{D} Y$ com $Y \sim \text{Exp}(1)$.

20. (a) Verdadeira (Para qualquer $\varepsilon > 0$, $\{|X_n - X| > \varepsilon\} \subset \{Y_n = 0\}$).

(b) Falsa ($\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - X|) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^n/n = \infty$).

26. Use o Teorema da continuidade.

27. (a) Prove por indução em n . (b) $N\left(0, \sigma^2 \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{2i}\right)$ (c) $\sigma^2 \alpha^{n-m} \sum_{i=0}^{m-1} \alpha^{2i}$

(d) Use o Teorema da continuidade.

28. Use o Teorema da continuidade.

32. Use o Teorema de Slutsky.

33. (a) $1/4, 3/16$ (c) $n/4, (5n - 2)/16$ (d) Use a Desigualdade de Chebyshev.

40. (b) -1 (c) $0,9772$

41. $A = 1$ e $B = 2/\pi$

42. Use duas vezes a Lei Forte dos Grandes Números.

$$43. \sqrt{\frac{\lambda}{1 + \lambda}}$$

44. (a) $E(\bar{X}_n) = \mu$ e $\text{Var}(\bar{X}_n) = \sigma^2/n$ (c) $E(S_n^2) = \sigma^2$

(d) Use duas vezes a Lei Forte dos Grandes Números.

45. Use a Lei Forte dos Grandes Números enunciada em 4.1.

51. 0,904

52. 1027

53. 0,0339

54. 0,1562

55. (a) 0,3174 (b) 0,0456

56. 0,7967

57. (a) 0,7257 (b) 0,9015

58. (a) 0,6406 (b) 0,8857

59. 1366

60. (a) 1 (b) 1/2 (c) 0,9608

61. 0,97

62. 0,84

63. 0,494

64. 0,8413

67. (a) Use três vezes a Lei Forte dos Grandes Números.

(b) Use o Teorema Central do Limite, a Lei Forte e o Teorema de Slutsky.

71. Utilize o Teorema Central do Limite para a sequência $\{g(X_i)\}_{i \geq 1}$ e o Teorema de Slutsky.

72. Método Delta.

73. (a) 2/3 (b) $N(0, 4/27)$

74. (b) $N(0, \theta^2)$ e $N(0, e^\theta - 1)$, respectivamente.

75. $a^2 = \sigma^2/4$

76. Método Delta.

77. Use os tópicos 4.1, 4.2, o Teorema de Slutsky e o fato de que $\sum_{i=1}^n 1/i \sim \log n$ quando $n \rightarrow \infty$.

Apêndice

Conjuntos

Denotamos por $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ o conjunto dos números naturais, $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ o conjunto dos números inteiros, \mathbb{R} o conjunto dos números reais e \mathbb{C} o conjunto dos números complexos.

Um conjunto A é *finito* se existe uma correspondência biunívoca entre A e o conjunto $\{1, \dots, n\}$ para algum $n \geq 1$. (O conjunto vazio também é finito).

Um conjunto A é *infinito enumerável* se existe uma correspondência biunívoca entre A e \mathbb{N} .

Um conjunto A é *infinito não-enumerável* se não é finito nem enumerável.

A *cardinalidade* de um conjunto A , denotada por $|A|$, é o número de elementos de A .

Sequências

Para uma sequência $\{x_n\}_{n \geq 1}$ de números reais, escrevemos $x_n \rightarrow x$ quando $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$; $x_n \uparrow x$ significa que $x_1 \leq x_2 \leq \dots$ e $x_n \rightarrow x$; $x_n \downarrow x$ significa que $x_1 \geq x_2 \geq \dots$ e $x_n \rightarrow x$.

Seja $\{x_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de números reais. O *limite inferior* e o *limite superior* dessa sequência são definidos respectivamente por

$$\underline{\ell} = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} x_k \quad \text{e}$$
$$\bar{\ell} = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} x_k.$$

Pode-se mostrar que $\underline{\ell} \leq \bar{\ell}$ são respectivamente o ínfimo e o supremo do conjunto dos pontos limites da sequência. Observamos que $\bar{\ell} = \infty$ se e somente se dados $M \in \mathbb{R}$ e $n \geq 1$, existe $k \geq n$ tal que $x_k > M$. A sequência tem limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ quando $n \rightarrow \infty$ se e somente se $\ell = \underline{\ell} = \bar{\ell}$.

Cumpra ainda notar que, para uma sequência A_1, A_2, \dots de eventos,

$$I_{\liminf_n A_n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} I_{A_n} \quad \text{e} \quad I_{\limsup_n A_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} I_{A_n}.$$

Séries

Dada uma sequência $\{a_n\}_{n \geq 1}$ de números reais, dizemos que a *série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge* se a sequência das somas parciais $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $n \geq 1$, tem limite finito quando $n \rightarrow \infty$. Caso contrário, a série *diverge*.

Se os termos são não-negativos ($a_n \geq 0$ para todo n), é claro que as somas parciais formam uma sequência não-decrescente, e então a série converge se e somente se a sequência das somas parciais é limitada. Escrevemos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ ou $= \infty$ conforme a série convirja ou não.

Algumas séries importantes:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \begin{cases} (1-x)^{-1} & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ \infty & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} < \infty & \text{se } p > 1, \\ = \infty & \text{se } p \leq 1. \end{cases}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p} \begin{cases} < \infty & \text{se } p > 1, \\ = \infty & \text{se } p \leq 1. \end{cases}$$

Um critério bastante útil estabelece que as séries de termos positivos $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ são convergentes ou divergentes simultaneamente se o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n$ é um número diferente de zero.

Dada uma sequência $\{a_n\}_{n \geq 0}$ de números reais, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é chamada uma *série de potências*. Definimos

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

com $1/0 \equiv \infty$ e $1/\infty \equiv 0$. Então, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge se $|x| < R$ e diverge se $|x| > R$. Denomina-se R o *raio de convergência* da série de potências.

Teorema de Abel: Se $a_n \geq 0$ para todo n e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para $x \in (-1, 1)$, então

$$\lim_{x \uparrow 1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

seja essa soma finita ou não.

Teorema: Uma série de potências pode ser derivada ou integrada termo a termo qualquer número de vezes dentro do intervalo de convergência.

Funções

Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (onde $X \subset \mathbb{R}$) é chamada *crescente* se, quaisquer que sejam $x, y \in X$, $x < y$ implica $f(x) < f(y)$. Se $x < y$ (com $x, y \in X$) implica apenas $f(x) \leq f(y)$, f é *não-decrescente*. De modo análogo, define-se função *decrescente* e função *não-crescente*.

Uma função é denominada *estritamente monótona* se é crescente ou decrescente.

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é *convexo* se, sempre que contém os pontos x e y , também contém $\lambda x + (1 - \lambda)y$ para $0 \leq \lambda \leq 1$. Uma função $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ é *convexa* se para quaisquer $x, y \in A$ e $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \varphi(x) + (1 - \lambda) \varphi(y).$$

Em palavras, φ é convexa se cada ponto na corda entre $(x, \varphi(x))$ e $(y, \varphi(y))$ está acima do gráfico de φ . Para uma função $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável, $\varphi''(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$ é uma condição necessária e suficiente para convexidade.

Convergência uniforme no Teorema Central do Limite

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com média μ e variância σ^2 finita e positiva. Em aplicações do Teorema Central do Limite, usa-se frequentemente que, para n grande, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ tem aproximadamente distribuição normal com média $n\mu$ e variância $n\sigma^2$. Essa afirmação é justificada pelo seguinte resultado: Se $Z_n \xrightarrow{D} Z$ e F_Z é contínua em \mathbb{R} , então F_{Z_n} converge para F_Z uniformemente em \mathbb{R} .

Referências Bibliográficas

- [1] BACHX, A. C.; POPPE, L. M. B.; TAVARES, R. N. O. *Prelúdio à análise combinatória*. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1975.
- [2] BASSETT, E. E.; BREMNER, J. M.; JOLLIFFE, I. T.; JONES, B.; MORGAN, B. J. T.; NORTH, P. M. *Statistics: problems and solutions*. 2nd. ed. Singapore: World Scientific, 2000.
- [3] BILLINGSLEY, P. *Probability and measure*. 3rd. ed. New York: John Wiley & Sons, 1995.
- [4] BÓNA, M. *Introduction to enumerative combinatorics*. Boston: McGraw Hill, 2007.
- [5] DANTAS, C. A. B. *Probabilidade: um curso introdutório*. 3. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2008. (Coleção Acadêmica).
- [6] DASGUPTA, A. *Fundamentals of probability: a first course*. New York: Springer, 2010.
- [7] DURRETT, R. *Elementary probability for applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- [8] DURRETT, R. *Probability: theory and examples*. 4th. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [9] FELLER, W. *An introduction to probability theory and its applications, Volume I*. 3rd. ed. New York: John Wiley & Sons, 1968.
- [10] FERNÁNDEZ-ABASCAL, H.; GUIJARRO, M.; ROJO, J. L.; SANZ, J. A. *Ejercicios de cálculo de probabilidades. Resueltos y comentados*. Barcelona: Editorial Ariel, 1995.
- [11] GRIMMETT, G. R.; STIRZAKER, D. R. *Probability and random processes*. 3rd. ed. New York: Oxford University Press, 2001.
- [12] GUT, A. *An intermediate course in probability*. 2nd. ed. New York: Springer, 2009.
- [13] GUT, A. *Probability: a graduate course*. New York: Springer, 2005.

-
- [14] HOEL, P. G.; PORT, S. C.; STONE, C. J. *Introduction to probability theory*. Boston: Houghton Mifflin, 1971.
- [15] JAMES, B. R. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. 3. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2004. (Projeto Euclides).
- [16] LARSEN, R. J.; MARX, M. L. *An introduction to mathematical statistics and its applications*. 4th. ed. Upper Saddle River, N. J.: Prentice Hall, 2006.
- [17] LIMA, E. L. *Curso de análise, Volume 1*. 12. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2004. (Projeto Euclides).
- [18] MEESTER, R. *A natural introduction to probability theory*. 2nd. ed. Basel: Birkhäuser, 2008.
- [19] MORGADO, A. C. O.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. *Análise combinatória e probabilidade*. 9. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. (Coleção do Professor de Matemática).
- [20] PITMAN, J. *Probability*. New York: Springer, 1993.
- [21] RIORDAN, J. *An introduction to combinatorial analysis*. New York: Dover, 2002.
- [22] ROSS, S. M. *A first course in probability*. 8th. ed. Upper Saddle River, N. J.: Prentice Hall, 2008.
- [23] SANTOS, J. P. O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. *Introdução à análise combinatória*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2008.
- [24] STIRZAKER, D. *Probability and random variables: a beginner's guide*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

