4.12 Funções trigonométricas inversas

$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad x \in \mathbb{R}$. Qual x pertence a um valor da função $f(x) = y$? Não podemos responder esta pergunta unicamente, portanto, a função $f(x) = \operatorname{sen} x$ não tem inversa. Porém, restringindo o domínio para $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, (ramo principal), i.e, considerando a função

$$F(x) = \operatorname{sen} x \quad , \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

podemos responder a pergunta, pois para x neste intervalo, para um y dado em $[-1, 1]$, podemos achar um único valor x em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cujo valor de F é y. Definimos então a função inversa do seno com esta restrição:

$$y = \operatorname{arcsen} x \Longleftrightarrow x = \operatorname{sen} y \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

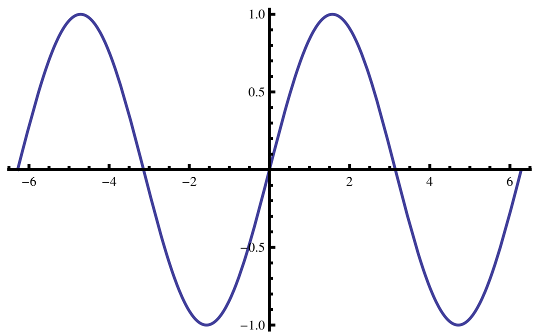

Figura 4.4: Gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$, no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$

Portanto $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x \quad x \in [-1, 1]$ e $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} y) = y \quad y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Como o seno é monótono em outros intervalos $\left[\frac{2n-1}{2}\pi, \frac{2n+1}{2}\pi\right] \quad n \in \mathbb{Z}$, poderiamos ter escolhido qualquer outro intervalo destes para definir a sua função inversa.

Cabe mencionar que, para nossos objetivos, a escolha $n = 0$, i.e $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, é a que mais convém. Porém, em outras aplicações, isto não é necessariamente o caso. Antes de usar o arco-seno, é sempre necessário pensar sobre o intervalo de domínio onde se deseja definí-lo no problema atual.

Correspondentemente, definimos a função inversa do co-seno, função arco-co-seno, como

$$y = \arccos x \Longleftrightarrow x = \cos y \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \pi$$

Obs: $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} x$

A função inversa da tangente é o arco-tangente,

$$y = \arctan x \Longleftrightarrow x = \tan y \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

A função inversa da cotangente é o arco-cotangente

$$y = \operatorname{arccot} x \Longleftrightarrow x = \cot y \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \pi$$

Obs: $\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$

A função inversa da secante é o arco-secante

$$y = \operatorname{arcsec} x = \arccos\left(\frac{1}{x}\right) = \arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right) \quad |x| \geq 1$$

A função inversa da cossecante é o arco-cossecante

$$y = \operatorname{arccossec} x = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{arccot}\left(\sqrt{x^2-1}\right) \quad |x| \geq 1$$

4.12.1 Derivadas das funções trigonométricas inversas

Calculamos as derivadas das funções trigonométricas inversas usando a derivada da função inversa:

Arco-seno:

$$y = \operatorname{arcsen} x \Longleftrightarrow x = \operatorname{sen} y \quad \text{com} \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \cos y \cdot y' \\ y' &= \frac{1}{\cos y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y &= 1 \\ \Longrightarrow \cos y &= \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y} \end{aligned}$$

Ramo principal $\Longrightarrow$ sinal positivo

Ou $\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}$ é a derivada de função inversa. Portanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Arco-cosseno: Correspondentemente $y = \arccos x \Longleftrightarrow x = \cos y$. Derivada

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= -\operatorname{sen} y \\ &= -\sqrt{1-\cos^2 y} \\ &= -\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

Função inversa:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Resumindo:

$$\begin{aligned} (\operatorname{arcsen} x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Note: $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} x$.
Portanto, $(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} x\right)' = -(\operatorname{arcsen} x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Arco-tangente: Temos também $y = \arctan x \iff x = \tan x$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{\cos^2 y} \\ &= \tan^2 y + 1 \\ &= x^2 + 1 \\ \implies (\arctan x)' = \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Arco-tangente: $y = \operatorname{arccot} x \iff x = \cot y$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 y} \\ &= -\cot^2 y + 1 \\ &= -(x^2 + 1) \\ \implies (\operatorname{arccot} x)' = \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Arco-secante: $y = \operatorname{arcsec} x = \arccos \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{|x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \end{aligned}$$

Arco-cossecante: $y = \operatorname{arccossec} x = \operatorname{arcsen} \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \cdot \frac{1}{x^2} \\ &= -\frac{1}{|x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \end{aligned}$$

OBS: Os sinais dessas derivadas se referem aos ramos principais das funções trigonométricas inversas. Ramos deslocados por múltiplos pares de π têm os mesmos sinais, enquanto ramos deslocados por múltiplos ímpares de π têm os sinais opostos.

4.13 As funções hiperbólicas

4.13.1 Definições

1) A função $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $(\mathbb{D} = \mathbb{R},\ \mathbb{V} = \mathbb{R})$ é o seno hiperbólico.

2) A função $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ ($\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{V} = \{y|y \geq 1\}$) é o cosseno hiperbólico.

3) A função $\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ ($\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{V} = (-1, 1)$) é a tangente hiperbólica.

4) A função $\coth x = \dfrac{1}{\tanh x} = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \dfrac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$ ($\mathbb{D} = \mathbb{R} - \{0\}$, $\mathbb{V} = \{y \,\big|\, |y| > 1\}$) é a cotangente hiperbólica.

5) A função $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$ ($\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{V} = \{y|0 < y \leq 1\}$) é a secante hiperbólica.

6) A função $\operatorname{cossech} x = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$ ($\mathbb{D} = \mathbb{R} - \{0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R} - \{0\}$) é a cossecante hiperbólica.

4.13.2 Relações

Hiperbólicas	Trigonométricas
$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$	$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$
$1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\coth^2 x - 1 = \dfrac{1}{\operatorname{senh}^2 x}$	$\cot^2 x + 1 = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

Prova da primeira relação:

$$
\begin{aligned}
\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2e^{x-x} + e^{-2x}) - \frac{1}{4}(e^{2x} - 2e^{x-x} + e^{-2x}) \\
&= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = \frac{4}{4} = 1
\end{aligned}
$$

As outras duas relações seguem direto desta identidade e das definições de $\tan x$ e $\coth x$.

Além disso

$$
\begin{aligned}
\cosh x + \operatorname{senh} x &= e^x \\
\cosh x - \operatorname{senh} x &= e^{-x} \\
\operatorname{senh}(x + y) &= \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y \\
\cosh(x + y) &= \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y \\
\operatorname{senh} 2x &= 2 \operatorname{senh} x \cosh x \\
\cosh 2x &= \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x
\end{aligned}
$$

4.13.3 Derivadas das funções hiperbólicas

$$
\begin{array}{rclcll}
\hline
f(x) & = & \operatorname{senh} x & = & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} & \\
f'(x) & = & \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}(-1)) & = & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} & = \cosh x \\
\hline
f(x) & = & \cosh x & = & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} & \\
f'(x) & = & \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}(-1)) & = & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} & = \operatorname{senh} x \\
\hline
f(x) & = & \tanh x & = & \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} & \\
f'(x) & = & \dfrac{\cosh x \cosh x - \operatorname{senh} x \operatorname{senh} x}{\cosh^2 x} & = & \dfrac{1}{\cosh^2 x} & = \operatorname{sech}^2 x \\
\hline
f(x) & = & \coth x & = & \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} & \\
f'(x) & = & \dfrac{\operatorname{senh} x \operatorname{senh} x - \cosh x \cosh x}{\operatorname{senh}^2 x} & = & -\dfrac{1}{\operatorname{senh}^2 x} & = -\operatorname{cossech}^2 x \\
\hline
f(x) & = & \operatorname{sech} x & = & \dfrac{1}{\cosh x} & \\
f'(x) & = & -\dfrac{1}{\cosh^2 x} \operatorname{senh} x & = & -\operatorname{sech} x \tanh x & \\
\hline
f(x) & = & \operatorname{cossec} x & = & \dfrac{1}{\operatorname{senh} x} & \\
f'(x) & = & -\dfrac{1}{\operatorname{senh}^2 x} \cosh x & = & -\operatorname{cossech} x \coth x & \\
\hline
\end{array}
$$

4.13.4 Gráfico da função $\operatorname{senh} x$

$$
\begin{array}{rclclcl}
f(x) & = & \operatorname{senh} x & = & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} & & \\
f(0) & = & \dfrac{e^0 - e^{-0}}{2} & = & \dfrac{1-1}{2} & = & 0 \\
f'(x) & = & \cosh x & = & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} & & \\
\text{para que } f'(x) & = & 0 & & \text{teria que ser} & & e^{-x} = -e^x \quad \text{nunca!} \\
f'(0) & = & \dfrac{1+1}{2} & = & \dfrac{2}{2} = 1 & &
\end{array}
$$

Comportamento para grandes x:

$$
\begin{array}{rclclcl}
\lim\limits_{x\to\infty} f(x) & = & \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} & = & \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to\infty} (\underbrace{e^x}_{\infty} - \underbrace{e^{-x}}_{0}) & = & \infty \\
\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) & = & \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} & = & \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to-\infty} (\underbrace{e^x}_{0} - \underbrace{e^{-x}}_{\infty}) & = & -\infty
\end{array}
$$

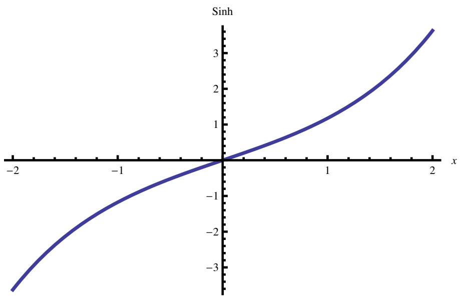

Figura 4.5: Gráfico de $\operatorname{senh} x$

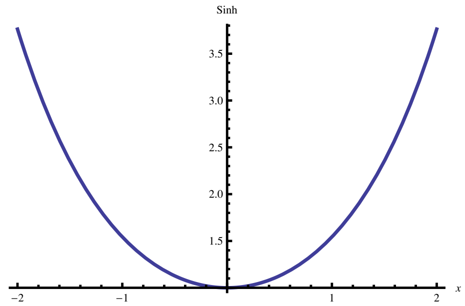

Figura 4.6: Gráfico de $\cosh x$

4.13.5 Gráfico da função $\cosh x$

$$
\begin{array}{rclcl}
f(x) & = & \cosh x & = & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad > \; 0 \quad \forall \quad x \\
f(0) & = & 1 & & \\
f'(x) & = & \operatorname{senh} x & = & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \\
\text{para que } f'(x) & = & 0 & & \text{precisamos que} \qquad e^{-x} = e^x \Longrightarrow x = 0
\end{array}
$$

Comportamento para grandes x:

$$
\begin{array}{rclclcl}
\lim\limits_{x\to\infty} f(x) & = & \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} & = & \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to\infty} (\underbrace{e^x}_{\infty} + \underbrace{e^{-x}}_{0}) & = & \infty \\
\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) & = & \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} & = & \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to-\infty} (\underbrace{e^x}_{0} + \underbrace{e^{-x}}_{\infty}) & = & \infty
\end{array}
$$

Obs: O cosh é a função que descreve a forma que uma corda assume quando fixa em dois pontos quaisquer.

4.14 As funções hiperbólicas inversas

4.14.1 Definições

O seno hiperbólico é monótono em todo $x \in \mathbb{R}$, portanto não tem nenhuma restrição sobre o domínio para a determinação de sua função inversa. Podemos definir

Def: $y = \operatorname{arsinh} x \Longleftrightarrow x = \operatorname{senh} y$

A imagem do seno hiperbólico é $\mathbb{R}$. Portanto, o domínio do área-seno hiperbólico, é $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Já a função cosseno hiperbólico é monótona em cada um dos intervalos $(-\infty, 0]$ e $[0, \infty)$. Temos que nos decidir por um ramo. O ramo principal usa $[0, \infty)$. Neste intervalo:

Def: $y = \operatorname{arcosh} x \Longleftrightarrow x = \cosh y \quad 0 \le y < \infty$

A imagem do cosseno-hiperbólico, i.e, o domínio do área-cosseno hiperbólico é $1 \le x < \infty$.

As funções $\tanh x$, $\coth x$ e $\operatorname{cossech} x$ são inversíveis em $\mathbb{R}$, i.e.„ não temos restrições para o domínio, para a determinação da função inversa. As definições das funções inversas são diretas para todo y.

Def:

$$\begin{array}{lllllllll} y & = & \operatorname{artanh} x & \Longleftrightarrow & x & = & \tanh y & \mathbb{D} : (-1 < x < 1) & \mathbb{V} = \mathbb{R} \\ y & = & \operatorname{arcoth} x & \Longleftrightarrow & x & = & \coth y & \mathbb{D} : |x| > 1 & \mathbb{V} = \mathbb{R} - \{0\} \\ y & = & \operatorname{arcossech} x & \Longleftrightarrow & x & = & \operatorname{cossech} y & \mathbb{D} : \mathbb{R} - \{0\} & \mathbb{V} = \mathbb{R} - \{0\} \end{array}$$

A função secante-hiperbólica, sendo definida como $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$, sofre as mesmas restrições de domínio do cosseno hiperbólico, i.e.,

Def:

$$y \;=\; \operatorname{arsech} x \;\Longleftrightarrow\; x \;=\; \operatorname{sech} y \qquad \mathbb{D} : (0 < x \leq 1) \quad \mathbb{V} : (0 \leq y < \infty)$$

Obs: As funções cosseno hiperbólico e secante hiperbólica necessitam de considerações de ramo, quando cabível!

4.14.2 Relações

Uma vez que as funções hiperbólicas são definidas mediante a função exponencial, as suas inversas podem ser expressas em termos do logaritmo. Temos as seguintes expressões:

$$\begin{array}{rcll} \operatorname{arsinh} x & = & \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) & x \in \mathbb{R} \\ \operatorname{arcosh} x & = & \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) & x \geq 1 \\ \operatorname{artanh} x & = & \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) & |x| < 1 \\ \operatorname{arcoth} x & = & \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) & |x| > 1 \end{array}$$

Demonstração do $\operatorname{arcosh} x$ (os outros são mais faceis)

$$y = \operatorname{arcosh} x \Longleftrightarrow x = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

Multiplicando x por $2e^y$, obtemos

$$\begin{array}{rcl} 2xe^y & = & e^{2y} + 1 \\ e^{2y} + 1 - 2xe^y & = & 0 \\ (e^y)^2 - 2xe^y + 1 & = & 0 \end{array}$$

Portanto,

$$\begin{array}{rcl} e^y & = & \dfrac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} \\ & = & x \pm \sqrt{x^2 - 1} \\ y & = & \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right) \end{array}$$

Qual o sinal? Bem, sabemos que $x \geq 1$ e $y \geq 0$.
Em particular, para grandes x, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} x &= \lim_{x\to\infty} \cosh y = \infty \\ \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} y &= \infty \\ \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} x \pm \sqrt{x^2-1} &= \infty \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\lim_{x\to\infty} x{\color{red}+}\sqrt{x^2-1} = \infty$$

Mas

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} x {\color{red}-} \sqrt{x^2-1} \\ &= \lim_{x\to\infty} x - \sqrt{x^2-1}\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-(x^2-1)}{x+\sqrt{x^2-1}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} = 0 \end{aligned}$$

Alternativamente, podemos considerar um ponto selecionado. $x = 1$ não serve, pois

$$y = \ln(1 \pm \sqrt{1^2-1}) = \ln 1 = 0$$

para ambos os sinais. Mas no ponto $x = \frac{5}{4}$ temos

$$\begin{aligned} y &= \ln\left[\frac{5}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1}\right] \\ &= \ln\left[\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{16}{16}}\right] \\ &= \ln\left[\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}}\right] \\ &= \ln\left[\frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}\right] \\ &= \begin{cases} \ln\frac{8}{4} &= \ln 2 > 0 \\ \ln\frac{2}{4} &= \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto o sinal negativo não serve. Concluimos que $y = \operatorname{arcosh} x = \ln\left(x{\color{red}+}\sqrt{x^2-1}\right)$

Exemplo 1. *Determine o valor de* $\operatorname{artanh}\left(-\frac{4}{5}\right)$

Resposta:

$$\begin{aligned} y = \operatorname{artanh}\left(-\tfrac{4}{5}\right) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\left(-\frac{4}{5}\right)}{1-\left(-\frac{4}{5}\right)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{1}{5}}{\frac{9}{5}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{9}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \ln\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= -\ln 3 \end{aligned}$$

4.14.3 Derivadas das funções hiperbólicas inversas

$$y = \operatorname{arsinh} x \Longleftrightarrow x = \operatorname{senh} y$$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} &= \cosh y\\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cosh y}\end{aligned}$$

Lembrando que $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$ temos $\cosh x = \pm\sqrt{1+\operatorname{senh}^2 y}$. Como o cosseno hipberbólico é sempre positivo, concluimos que $\cosh x = \sqrt{1+\operatorname{senh}^2 y} = \sqrt{1+x^2}$. Portanto

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Este resultado segue também derivando a relação $y = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x\right)\\ y' &= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\\ y' &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\end{aligned}$$

De maneira análoga:

y	$=$	$\operatorname{arcosh} x$	$=$	$\ln(x+\sqrt{x^2-1})$
y'	$=$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$		$x > 1$
y	$=$	$\operatorname{artanh} x$	$=$	$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
y'	$=$	$\frac{1}{1-x^2}$		$\lvert x\rvert < 1$
y	$=$	$\operatorname{arcoth} x$	$=$	$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
y'	$=$	$-\frac{1}{x^2-1}$		$\lvert x\rvert > 1$
y	$=$	$\operatorname{arsech} x$	$=$	$\operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{x}\right)$
y'	$=$	$-\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{1-x^2}}$		$0 < x < 1$
y	$=$	$\operatorname{arcossech} x$	$=$	$\operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{x}\right)$
y'	$=$	$-\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{1+x^2}}$		$x \neq 0$

Exemplo 2. *Derive a função* $f(x) = \operatorname{artanh}\cos 2x$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{1-\cos^2 2x}\cdot(-\operatorname{sen} 2x)\cdot 2\\ &= -\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen}^2 2x}\cdot 2 = -\frac{2}{\operatorname{sen} 2x} = -2\operatorname{cossec} 2x\end{aligned}$$

Exemplo 3. *Derive a função* $f(x) = x\,\text{arcosh}(x) - \sqrt{x^2-1}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1\cdot \text{arcosh}\, x + x\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x \\ &= \text{arcosh}\, x \end{aligned}$$

4.15 Exemplos de derivadas aplicando as regras de diferenciação

Exemplo 1. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + x}{\cos x - x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\operatorname{sen} x + x)'(\cos x - x) - (\operatorname{sen} x + x)(\cos x - x)'}{(\cos x - x)^2} \\ &= \frac{(\cos x + 1)(\cos x - x) - (\operatorname{sen} x + x)(-\operatorname{sen} x - x)}{(\cos x - x)^2} \\ &= \frac{\cos^2 x + \cos x - x\cos x - x - (-\operatorname{sen}^2 x - x\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x - x)}{(\cos x - x)^2} \\ &= \frac{\cos^2 x + \cos x(1-x) - x + \operatorname{sen}^2 x + (x+1)\operatorname{sen} x + x)}{(\cos x - x)^2} \\ &= \frac{1 + \cos x(1-x) + (x+1)\operatorname{sen} x + x)}{(\cos x - x)^2} \end{aligned}$$

Exemplo 2. $f(x) = x^2 \tan x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\tan x + x^2(\tan x)' \\ \tan x' &= \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' \\ &= \left(\frac{(\operatorname{sen} x)'\cos x - \operatorname{sen} x(\cos x)'}{\cos^2 x}\right) \\ &= \left(\frac{\cos x\cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}\right) \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ f'(x) &= 2x\tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Outra maneira

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{\cos x} \\
f'(x) &= \frac{(x^2 \operatorname{sen} x)' \cos x - (x^2 \operatorname{sen} x)(\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{(2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x) \cos x - x^2 \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{2x \operatorname{sen} x \cos x + x^2(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{2x \operatorname{sen} x \cos x + x^2}{\cos^2 x}
\end{aligned}
$$

Exemplo 3. $f(x) = (x^2 + 3x)e^x$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (2x + 3)e^x + (x^2 + 3x)e^x \\
&= (x^2 + 5x + 3)e^x
\end{aligned}
$$

Exemplo 4. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{e^x}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(2x + 3)e^x + (x^2 + 3x)}{e^{2x}} \\
&= \frac{-x^2 - x + 3}{e^x}
\end{aligned}
$$

Exemplo 5. $f(x) = 2x \cdot \operatorname{sen} x \cdot e^x$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (2x \cdot \operatorname{sen} x)'e^x + 2x \cdot \operatorname{sen} x(e^x)' \\
&= (2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x)e^x + 2x \cdot \operatorname{sen} x \cdot e^x \\
&= 2e^x((x + 1) \operatorname{sen} x + x \cos x)
\end{aligned}
$$

Geral:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \\
F'(x) &= f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)
\end{aligned}
$$

Exemplo 6. $f(x) = e^{3x^2} \operatorname{sen}(2x)$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (e^{3x^2})' \operatorname{sen}(2x) + e^{3x^2}(\operatorname{sen}(2x))' \\
&= e^{3x^2}(3x^2)' \operatorname{sen}(2x) + e^{3x^2} \cos(2x)(2x)' \\
&= e^{3x^2} 3 \cdot 2x \operatorname{sen}(2x) + e^{3x^2} \cos(2x)2 \\
&= e^{3x^2}(6x \operatorname{sen}(2x) + 2 \cos(2x)
\end{aligned}
$$