



RA: _____ Nome: _____ Turma: _____

Questão:	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Total:
Valor:	2	3	1,5	2	1,5	10
Nota:						

Q1. (2 pontos) Resolva a desigualdade

$$\frac{|2x - 3|}{|2x + 7|} \leq 1.$$

Encontre o conjunto solução e ilustre ele sobre a reta real.

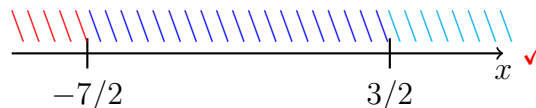
Solução:

Notamos que para a equação pode ser satisfeita temos que ter $x \neq -7/2$.

Para os outros valores de x , temos $|2x + 7| > 0$, ou seja, a equação é equivalente a

$$|2x - 3| \leq |2x + 7|$$

Os argumentos dos valores absolutos dessa desigualdade se anulam em $x = 3/2$ e em $x = -7/2$. Sendo assim, dividimos a reta real nesses pontos em subintervalos.



Investigamos os três subintervalos separadamente:

Caso 1: $x < -7/2$ (red lines):

Neste subintervalo, temos $2x + 7 < 0$ e, portanto, $|2x + 7| = -(2x + 7)$, e $2x - 3 < 0$ e, portanto, $|2x - 3| = -(2x - 3)$.

Assim, a desigualdade assume a forma

$$\begin{aligned} -(2x - 3) &\leq -(2x + 7) \\ 3 &\leq -7 \quad \text{que é falso } \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto $S_1 = \emptyset$.

Caso 2: $-7/2 < x < 3/2$ (blue lines):

Neste subintervalo, temos $2x + 7 > 0$ e, portanto, $|2x + 7| = 2x + 7$, e $2x - 3 < 0$ e, portanto, $|2x - 3| = -(2x - 3)$.

Assim, a desigualdade assume a forma

$$\begin{aligned} -(2x - 3) &\leq 2x + 7 \\ -2x + 3 &\leq 2x + 7 \\ -4 &\leq 4x \\ -1 &\leq x \end{aligned}$$

Portanto $S_2 = (-7/2, 3/2) \cap [-1, \infty) = [-1, 3/2) \checkmark$.

Caso 3: $x \geq 3/2 \checkmark (\backslash\backslash\backslash\backslash)$:

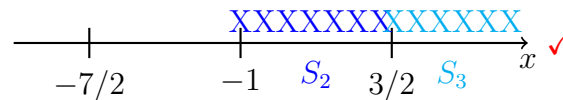
Neste subintervalo, temos $2x+7 > 0$ e, portanto, $|2x+7| = 2x+7$, e $2x-3 \geq 0$ e, portanto, $|2x-3| = 2x-3 \checkmark$.

Assim, a desigualdade assume a forma

$$\begin{aligned} 2x - 3 &\leq 2x + 7 \checkmark \\ -3 &\leq 7 \quad \text{que é verdadeiro } \forall x \in \mathbb{R} \checkmark. \end{aligned}$$

Portanto $S_3 = \mathbb{R} \cap [3/2, \infty) = [3/2, \infty) \checkmark$.

A solução da desigualdade então é $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \checkmark = [-1, \infty) \checkmark$.



Alternativa 1: Usando a definição da função valor absoluto, podemos reescrever a desigualdade como:

$$-1 \leq \frac{2x-3}{2x+7} \leq 1.$$

Considerando a desigualdade à direita, temos

$$\begin{aligned} \frac{2x-3}{2x+7} - 1 &\leq 0 \\ \frac{2x-3}{2x+7} - \frac{2x+7}{2x+7} &\leq 0 \\ \frac{2x-3-2x-7}{2x+7} &\leq 0 \\ \frac{-10}{2x+7} &\leq 0 \end{aligned}$$

o que pode somente ser verdade se $2x+7 > 0$, i.e., $x > -7/2$.

A desigualdade à esquerda fornece

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{2x-3}{2x+7} + 1 \\ 0 &\leq \frac{2x-3}{2x+7} + \frac{2x+7}{2x+7} \\ 0 &\leq \frac{4x+4}{2x+7} \end{aligned}$$

Aqui teríamos que analisar casos para os dois sinais do denominador, mas tendo em vista que sabemos pela primeira parte que a desigualdade somente pode ter solução se $2x+7 > 0$, obtemos diretamente

$$0 \leq 4x+4 \Rightarrow x \geq -1$$

Assim, a solução da desigualdade é $S = \{x|x > -7/2\} \cap \{x|x \geq -1\} = [-1, \infty)$

Alternativa 2: Para $x \neq -7/2$, escrevemos a desigualdade como

$$|2x-3| \leq |2x+7|$$

Como ambos os lados são positivos, podemos elevá-los ao quadrado sem perder a reversibilidade das manipulações algébricas:

$$\begin{aligned} |2x - 3|^2 &\leq |2x + 7|^2 \\ (2x - 3)^2 &\leq (2x + 7)^2 \\ 4x^2 - 12x + 9 &\leq 4x^2 + 28x + 49 \\ -40 &\leq 40x \\ -1 &\leq x \end{aligned}$$

Como todos os passos são reversíveis, essa desigualdade representa a solução da desigualdade original, i.e., $S = [-1, \infty)$

Q2. (3 pontos) Calcule os seguintes limites, justificando os detalhes:

(a) (0,5 ponto) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1}$ **Solução:**

Temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ✓. No entanto, notamos que, pela definição do valor absoluto,

$$\frac{|x-1|}{x-1} = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 1 \\ -1, & \text{se } x < 1. \end{cases} \quad \checkmark$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = 1$ ✓ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = -1$ ✓. Como os limites laterais são distintos, concluímos que o limite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1}$ não existe ✓.

(b) (0,5 ponto) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x^2 + 2x}$ **Solução:**

Temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ✓. Fatorando o denominador, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} \frac{1}{x+2} \quad \checkmark \checkmark$$

Usado o limite fundamental, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$ ✓, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x^2 + 2x} = \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

(c) (1 ponto) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(x)}{e^x}$

Solução:

Notamos que os teoremas de cálculo com limites não se aplicam, porque $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos(x)$ não existe ✓.

Mas temos que

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \quad \checkmark \checkmark$$

Multiplicação dessa desigualdade por $\frac{1}{e^x} > 0$ ✓ fornece

$$-\frac{1}{e^x} \leq \frac{1}{e^x} \cos(x) \leq \frac{1}{e^x} \quad \checkmark \checkmark$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{e^x} \right) = 0 \quad \checkmark \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0 \quad \checkmark$$

temos, pelo Teorema do Confronto ✓, que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(x)}{e^x} = 0 \quad \checkmark$$

(d) (1 ponto) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3 - \sqrt{x+4}}{x-5}$ **Solução:**

Temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$. Para poder tratá-la, multiplicamos a expressão pelo conjugado do numerador:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3 - \sqrt{x+4}}{x-5} \cdot \frac{3 + \sqrt{x+4}}{3 + \sqrt{x+4}} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{9 - (x+4)}{(x-5)(3 + \sqrt{x+4})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-x+5}{(x-5)(3 + \sqrt{x+4})} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x-5)}{(x-5)(3 + \sqrt{x+4})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-1}{3 + \sqrt{x+4}} = \frac{-1}{3 + \sqrt{5+4}} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Q3. (1,5 pontos) Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 3}} & \text{se } x > 2, \\ kx + 3 & \text{se } x \leq 2. \end{cases}$$

Verifique se é possível definir um valor de k tal que f seja contínua em \mathbb{R} e, caso afirmativo, determine o valor.

Solução:

Para que a função seja contínua em \mathbb{R} , verificamos primeiramente os subintervalos $(-\infty, 2)$ e $(2, \infty)$. Em $(2, \infty)$, a expressão de f é o quociente de uma função polinomial, portanto contínua, com a função $g(x) = \sqrt{x^2 - 3}$ ✓. Note que g é contínua em $(2, \infty)$ já que é a composição da função raiz com uma função polinomial que é positiva neste intervalo ✓. Além disso, como os zeros do denominador ocorrem em $x = \pm\sqrt{3} < 2$ então f é contínuo no intervalo $(2, \infty)$ ✓. Em $(-\infty, 2)$, f é contínua ✓ por ser polinomial ✓.

Portanto, f será contínua em \mathbb{R} contanto que seja contínua em $x = 2$ ✓. Para que f seja contínua nesse ponto, precisamos ter que

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \checkmark \checkmark$$

Aqui, temos $f(2) = 2k + 3$ ✓ e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} kx + 3 \checkmark = 2k + 3 \checkmark \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 3}} \checkmark = \frac{3 \cdot 2^2 + 1}{\sqrt{2^2 - 1}} = \frac{13}{1} = 13 \checkmark \end{aligned}$$

Portanto, para que f seja contínua em $x = 2$, ela deve satisfazer

$$2k + 3 = 13 \checkmark \Rightarrow k = 5 \checkmark$$

Q4. (2 pontos) Classifique cada afirmação a seguir em Verdadeira ou Falsa. Se a afirmação for Verdadeira, prove. Se a afirmação for Falsa, exiba um contra-exemplo e discuta-o.

(a) (0,6 ponto) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe e $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ existe então $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existe.

Verdadeiro ✓. De fato, podemos escrever $g(x) = (f(x) + g(x)) - f(x)$ ✓. Como os limites $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ existem por hipótese, podemos usar que o limite da diferença é a diferença dos limites ✓, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} ((f(x) + g(x)) - f(x)) \checkmark = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) - \lim_{x \rightarrow a} f(x) \checkmark$$

e concluir que o $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existe ✓.

Alternativa 1: Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existir, então existe um valor M tal que, para todo $\varepsilon_1 > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - M| < \varepsilon_1$. Dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$, de modo que

$$\begin{aligned} -\varepsilon/2 &< f(x) - M < \varepsilon/2 \\ -\varepsilon/2 + M &< f(x) < \varepsilon/2 + M \\ \varepsilon/2 - M &> -f(x) > -\varepsilon/2 - M \end{aligned}$$

Correspondentemente, se $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ existir, então existe um valor L tal que, para todo $\varepsilon_2 > 0$ existe um $\delta_2 > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) + g(x) - L| < \varepsilon_2$. Escolhendo $\varepsilon_2 = \varepsilon/2$, podemos escrever

$$\begin{aligned} -\varepsilon/2 &< f(x) + g(x) - L < \varepsilon/2 \\ -\varepsilon/2 - f(x) + L &< g(x) < \varepsilon/2 - f(x) + L \end{aligned}$$

Usando $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ e as desigualdades acima para $-f(x)$, temos que $0 < |x - a| < \delta$ implica

$$\begin{aligned} -\varepsilon/2 - \varepsilon/2 - M + L &< -\varepsilon/2 - f(x) + L \\ \text{e} \quad \varepsilon/2 - f(x) + L &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 - M + L \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} -\varepsilon + (L - M) &< g(x) < \varepsilon + (L - M) \\ -\varepsilon &< g(x) - (L - M) < \varepsilon \end{aligned}$$

o que prova a existência de $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ com o valor de $L - M$.

Alternativa 2: Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existir, então existe um valor M tal que, para todo $\varepsilon_1 > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - M| < \varepsilon_1$ e se $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ existir, então existe um valor L tal que, para todo $\varepsilon_2 > 0$ existe um $\delta_2 > 0$ tal que, $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) + g(x) - L| < \varepsilon_2$. Dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/2$, de modo que $0 < |x - a| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ implica

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - L| + |f(x) - M| &< \varepsilon \\ |f(x) + g(x) - L| + |-(f(x) - M)| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Pela desigualdade triangular, sabemos que $|a + b| \leq |a| + |b|$, do qual temos

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - L - (f(x) - M)| &\leq |f(x) + g(x) - L| + |-(f(x) - M)| < \varepsilon \\ \text{ou seja,} \quad |g(x) - (L - M)| &< \varepsilon \end{aligned}$$

o que prova a existência de $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ com o valor de $L - M$.

- (b) (0,7 ponto) Se f e g são funções contínuas em $x = 0$ então a função composta $f \circ g$ também é contínua em $x = 0$.

Solução:

Falso ✓. De fato, considere, por exemplo, as funções $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ✓ e $g(x) = x+1$ ✓. Ambas funções são contínuas em $x = 0$ pois são funções racionais cujo denominador não se anula neste ponto ✓✓, no entanto a função composta $(f \circ g)(x) = \frac{1}{g(x)-1} = \frac{1}{x+1-1} = \frac{1}{x}$ ✓ não é contínua em $x = 0$ pois a função não está definida neste ponto ✓.

- (c) (0,7 ponto) Se $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)|$ existir, então existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Solução:

Falso ✓. Contraexemplo: $f(x) = \text{sgn}(x)$ em $a = 0$. ✓

$\lim_{x \rightarrow 0} |\text{sgn}(x)|$ existe ✓, pois

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} |\text{sgn}(x)| = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} |\pm 1| = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} 1 = 1 \checkmark.$$

Já $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sgn}(x)$ não existe ✓, pois os limites laterais são diferentes:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sgn}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \checkmark \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sgn}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1 \checkmark.$$

Q5. (1,5 pontos) Mostre que a equação

$$x + 1 = \frac{1}{x^2}$$

tem pelo menos uma raiz no intervalo $[-1,1]$.

Solução:

Consideramos a função $f(x) = x + 1 - \frac{1}{x^2}$. Procuramos confirmar a existência de pelo menos um ponto onde $f(x) = 0$.

Observamos que em $[-1, 1]$ f não é contínua por envolver uma divisão por zero em $x = 0$.

Precisamos considerar o intervalo $[-1, 0)$ ou o intervalo $(0, 1]$, dentro dos quais f é contínua por ser racional sem envolver divisões por zero.

Em $x = 1$, temos $f(1) = 1 + 1 - \frac{1}{1^2} = 1 > 0$.

(Em $x = -1$, temos $f(-1) = -1 + 1 - \frac{1}{1^2} = -1 < 0$.)

Perto de $x = 0$, temos o comportamento:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + 1 - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2} = -\infty$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + 1 - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2} = -\infty \right)$$

Alternativa: Encontrar um valor x_0 , por exemplo:

Em $x_0 = 0.5$, temos

$$f(0.5) = 0.5 + 1 - \frac{1}{0.5^2} = 1.5 - 4 = -2.5 < 0$$

Portanto, existe um ponto $0 < x_0 < 1$ tal que $f(x_0) < 0$.

Assim, pelo TVI, existe $c \in (x_0, 1)$ tal que $f(c) = 0$. Isso prova que a equação dada possui ao menos uma raiz dentro do intervalo $[-1, 1]$.