IMECC/UNICAMP
MA111 - Cálculo I
Prova 2
15 de maio de 2026 - 08:00 às 10:00 (Turmas A & B)

RA: _____ **Nome:** _____ **Turma:** _____

Questão:	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	Total:
Valor:	3	2	1,5	3,5	10
Nota:					

Q1. **(3 pontos)** Encontre os seguintes limites, se existirem, justificando os detalhes.

(a) (0,5 pontos) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$

Solução:

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$✓(limite fundamental)✓✓✓✓.

Alternativa:

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = \dfrac{\text{“}0\text{”}}{0}$ ✓. Podemos usar a Regra de L'Hospital✓.

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1/x✓}{1✓} = 1✓.$

(b) (0,5 pontos) $\lim\limits_{t\to\infty} \left(\dfrac{2t+1}{2t}\right)^{2t}$

Solução:

Usando: $\lim\limits_{t\to\infty} \left(1+\dfrac{a}{t}\right)^{bt} = e^{ab}$✓ (limite fundamental)✓:

$\lim\limits_{t\to\infty} \left(\dfrac{2t+1}{2t}\right)^{2t} = \lim\limits_{t\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{2t}\right)^{2t}$ ✓ $= e^{\frac{1}{2}\cdot 2}$✓ $= e$✓.

Alternativa:

O limite é uma expressão indeterminada do tipo “1^{∞}”. Podemos escrever:

$\left(\dfrac{2t+1}{2t}\right)^{2t} = e^{2t\ln\left(\frac{2t+1}{2t}\right)}$

e calcular primeiro o limite do expoente:

$\lim\limits_{t\to\infty} t\ln\left(\dfrac{2t+1}{2t}\right) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{2t+1}{2t}\right)}{1/t}$✓ $\overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\frac{2t}{2t+1}\cdot\frac{2\cdot 2t-(2t+1)2}{(2t)^2}}{-1/t^2}$✓ $= \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{2t}{2t+1}\cdot\dfrac{4t-4t-2}{4t^2(-1/t^2)} =$

$\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{1+1/2t}\cdot\dfrac{-2}{-4} = 1\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.✓

Assim, $\lim\limits_{t\to\infty} \left(\dfrac{2t+1}{2t}\right)^{2t} = e^{2\cdot\frac{1}{2}}$✓ $= e$✓.

(c) (0,7 pontos) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos(x-1)-\cos(3x-3)}{x-1-\ln x}$

Solução:

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos(x-1)-\cos(3x-3)}{x-1-\ln x} = \dfrac{\text{“}0\text{”}}{0}$ ✓.

Podemos usar a Regra de L'Hospital✓:
$\lim_{x\to1}\frac{\cos(x-1)-\cos(3x-3)}{x-1-\ln x}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to1}\frac{-\operatorname{sen}(x-1)+3\operatorname{sen}(3x-3)}{1-\frac{1}{x}}$✓$=\frac{\text{“}0\text{”}}{0}$.
Podemos novamente usar a Regra de L'Hospital:
$\lim_{x\to1}\frac{-\operatorname{sen}(x-1)+3\operatorname{sen}(3x-3)}{1-\frac{1}{x}}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to1}\frac{-\cos(x-1)+9\cos(3x-3)}{\frac{1}{x^2}}$✓$=\frac{-1+9}{1}$✓$=8$✓

(d) (0,7 pontos) $\lim_{x\to2^+}(x-2)\tan\left(\frac{\pi}{x}\right)$

Solução:

$\lim_{x\to2^+}(x-2)\tan(\frac{\pi}{x})=$“$0\cdot\infty$”
Manipulação algébrica:
$\lim_{x\to2^+}(x-2)\tan(\frac{\pi}{x})=\lim_{x\to2^+}\frac{x-2}{\cot(\frac{\pi}{x})}$✓$=\frac{\text{“}0\text{”}}{0}$ ✓

Agora podemos aplicar a Regra de L'Hospital:
$\lim_{x\to2^+}\frac{x-2}{\cot(\frac{\pi}{x})}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to2^+}\frac{1}{-\csc^2(\frac{\pi}{x})\cdot(-\frac{\pi}{x^2})}$✓$=\lim_{x\to2^+}\frac{\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{x})\cdot x^2}{\pi}$✓$=\frac{1^2\cdot2^2}{\pi}$✓$=\frac{4}{\pi}$✓
Alternativa 1:
$\lim_{x\to2^+}(x-2)\tan(\frac{\pi}{x})=\lim_{x\to2^+}\frac{\tan(\frac{\pi}{x})}{1/(x-2)}$✓$\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to2^+}\frac{\sec^2(\frac{\pi}{x})\cdot(-\frac{\pi}{x^2})}{-1/(x-2)^2}=\lim_{x\to2^+}\frac{\pi}{x^2}\cdot\frac{(x-2)^2}{\cos^2(\frac{\pi}{x})}$✓.
O primeiro fator tende a $\frac{\pi}{4}$✓. O segundo fator é indeterminado do tipo $\frac{\text{“}0\text{”}}{0}$. Aplicando a Regra de L'Hospital:
$\lim_{x\to2^+}\frac{(x-2)^2}{\cos^2(\frac{\pi}{x})}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to2^+}\frac{2(x-2)}{2\cos(\frac{\pi}{x})[-\operatorname{sen}(\frac{\pi}{x})]\cdot(-\frac{\pi}{x^2})}=\lim_{x\to2^+}\frac{x^2}{\pi\operatorname{sen}(\frac{\pi}{x})}\cdot\frac{x-2}{\cos(\frac{\pi}{x})}$✓.
O primeiro fator tende a $\frac{4}{\pi}$.✓O segundo fator é indeterminado do tipo $\frac{\text{“}0\text{”}}{0}$. Aplicando a Regra de L'Hospital:
$\lim_{x\to2^+}\frac{x-2}{\cos(\frac{\pi}{x})}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to2^+}\frac{1}{-\operatorname{sen}(\frac{\pi}{x})\cdot(-\frac{\pi}{x^2})}=\lim_{x\to2^+}\frac{x^2}{\pi\operatorname{sen}(\frac{\pi}{x})}=\frac{4}{\pi}$✓.
Colecionando resultados, temos $\lim_{x\to2^+}(x-2)\tan(\frac{\pi}{x})=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{4}{\pi}\cdot\frac{4}{\pi}=\frac{4}{\pi}$✓.
Alternativa 2:
Note que
$\lim_{x\to2^+}(x-2)\tan(\frac{\pi}{x})=\lim_{x\to2^+}\frac{(x-2)\operatorname{sen}(\frac{\pi}{x})}{\cos(\frac{\pi}{x})}$✓
O fator $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{x})$ tende a 1. No outro outro fator, temos uma indeterminação do tipo $\frac{\text{“}0\text{”}}{0}$, portanto podemos aplicar L'Hospital ✓para obter:
$\lim_{x\to2^+}\frac{(x-2)}{\cos(\frac{\pi}{x})}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to2^+}\frac{1}{-\operatorname{sen}(\frac{\pi}{x})(\frac{-\pi}{x^2})}$✓$=\lim_{x\to2^+}\frac{x^2}{\pi}$✓$=\frac{4}{\pi}$✓.
Colecionando resultados, temos $\lim_{x\to2^+}(x-2)\tan(\frac{\pi}{x})=1\cdot\frac{4}{\pi}=\frac{4}{\pi}$✓.

(e) (0,6 pontos) $\lim_{x\to0^+}(2x)^{(2x)}$

Solução:

$\lim_{x\to0^+}(2x)^{(2x)}$ é uma expressão indeterminada do tipo “0^0”✓. Reescrevemos a expresão usando a definição das expressões exponenciais:
$\lim_{x\to0^+}(2x)^{(2x)}=\lim_{x\to0^+}e^{2x\ln(2x)}$✓.
Analisando o limite da expressão no expoente, vemos que é uma expressão indetermi-

nada do tipo "$0 \cdot \infty$".
Manipulação algébrica:
$\lim_{x\to 0^+} (2x)\ln(2x) = 2\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(2x)}{1/x}$✓ $= \frac{\text{“}0\text{”}}{0}$. Agora podemos aplicar a Regra de L'Hospital:
$2\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(2x)}{1/x} \overset{\text{L'H}}{=} 2\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2x}\cdot 2}{-1/x^2}$✓ $= -2\lim_{x\to 0^+} x = 0$✓.
Assim, $\lim_{x\to 0^+} (2x)^{(2x)} = e^0 = 1$✓.

Q2. (2 pontos) Encontre todas as assíntotas da função $f(x) = \dfrac{2x^2-5x+6}{x-1}$.

Solução:

- Assíntotas verticais: O único ponto de descontinuidade da função dada é $x = 1$✓. Neste ponto temos:
$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2-5x+6}{x-1} = \text{“}\frac{\overset{>0}{3}\ \text{✓}}{0^+\text{✓}}\text{”} = +\infty$✓
$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2-5x+6}{x-1} = \text{“}\frac{\overset{>0}{3}}{0^-\text{✓}}\text{”} = -\infty$✓. Sendo assim, a reta $x = 1$ é assíntota vertical da função✓.
- Assíntotas horizontais:
$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-5x+6}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-5+6/x}{1-1/x}$✓ $= \infty$✓
$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-5x+6}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-5+6/x}{1-1/x} = -\infty$✓
Sendo assim, a função não possui assíntotas horizontais✓.
- Assíntotas oblíquas:
$f'(x) = \frac{(4x-5)(x-1)-(2x^2-5x+6)\cdot 1}{x^2}$✓
$= \frac{4x^2-4x-5x+5-2x^2+5x-6}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-4x-1}{(x-1)^2}$✓
$m_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-4x-1}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-4/x-1/x^2}{1-2/x+1/x^2} = 2$✓
$m_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-4x-1}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-4/x-1/x^2}{1-2/x+1/x^2} = 2$✓
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - m_\pm x$✓ $= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2-5x+6}{x-1} - 2x\frac{x-1}{x-1}$✓
$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2-5x+6-2x^2+2x}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x+6}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3+6/x}{1-1/x}$✓ $= -3$✓.
Sendo assim, a reta $y = 2x-3$✓é assintota oblíqua da função quando x cresce ou decresce ilimitadamente.

Q3. (1,5 pontos) Classifique cada afirmação a seguir como Verdadeira ou Falsa. Se a afirmação for Verdeira, prove. Se a afirmação for Falsa, exiba um contraexemplo e discuta-o.

(a) (0,7 ponto) Uma função f é contínua em um ponto x_0 se e somente se f for derivável em x_0.

Solução:

Falso ✓. Por exemplo, a função $f(x) = |x|$✓✓é contínua em 0 mas não é derivável em 0. De fato, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0 = f(0)$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0 = f(0)$. Logo, $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, o que mostra que f é contínua em $x = 0$✓✓. Por outro lado, $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1$ e $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{-x}{x} = -1$. Como os limites laterais são diferentes, o $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ não existe e, portanto, f não é derivável em 0.✓✓

(b) (0,8 ponto) Se f é uma função par e derivável, então f' é uma função ímpar.

Solução:

Verdadeiro✓. Por hipótese, $f(-x) = f(x)$, para todo x✓. Temos que mostrar que $f'(-x) = -f'(x)$. Por definição de derivada, temos

$$f'(-x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{h}.$$✓

Substituição de variavel $k = -h$ ✓com $\lim_{h\to 0} k = 0$✓:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{h}$$✓ $$= -\lim_{k\to 0} \frac{f(x+k)-f(x)}{k} = -f'(x).$$✓

Alternativa: Por definição de derivada, temos

$$f'(-x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h)-f(-x-h)}{2h}$$✓ $$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h)$$✓ $$- f(x+h)$$✓$$}{2h}$$
$$= -\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$✓ $$= -f'(x).$$✓

Também pode-se usar a Regra da Cadeia:

Alternativa 2: Usando a notação fracionária da derivada, temos

$$f'(x) = \left.\frac{df(u)}{du}\right|_{u=x} \overset{\text{par}}{=} \left.\frac{df(-u)}{du}\right|_{u=x}$$✓ $$= \frac{df(-u)}{d(-u)}$$✓ $$\cdot \underbrace{\frac{d(-u)}{du}}_{=-1} \Bigg|_{u=x}$$✓

$$= -\left.\frac{df(t)}{d(t)}\right|_{t=-x}$$✓ $$= -f'(-x)$$✓

onde usamos no penúltimo passo a mudança de variável $t = -u$.

Alternativa 3: Escrevemos $f(-x)$ como função composta $h(x) = (f\circ g)(x) = f(g(x))$, onde $g(x) = -x$. Pela Regra da Cadeia:

$$[h(x)]' = f'(g(x))$$✓ $$\cdot g'(x)$$✓

onde $h(x) = f(-x) = f(x)$✓pela paridade de f e $g'(x) = -1$✓. Assim,

$$f'(x) = [f(x)]' = f'(-x)\cdot(-1) = -f'(-x)$$✓

Portanto $f'(-x) = -f'(x)$, ou seja, f' é ímpar.✓

Atenção: Tem que se prestar muita atenção para evitar o erro de meramente inverter a direção do eixo horizontal como na substituição $t = -x$; $\dfrac{df}{dt} = -\dfrac{df}{dx}$, o que é válido para toda função derivável. Esta última relação se refere a um único ponto x e só significa que crescente para a direita é decescente para a esquerda ou vice versa. Na avaliação da paridade, queremos comparar valores em dois pontos distintos, simetricamente posicionados.

Q4. **(3,5 pontos)** Considere a função

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 16x + 5 = (x-1)^3(x-5).$$

(a) Determine os intervalos de monotonia (crescimento/decrescimento) de f e os seus extremos (pontos de máximo/mínimo) locais.

(b) Determine os intervalos em que o gráfico de f é côncavo para cima/baixo e os seus pontos de inflexão, caso existam.

(c) Caso existam, encontre as assíntotas de f.

(e) Esboce o gráfico de f usando, pelo menos, as informações obtidas nos itens (a), (b) e (c).

Solução:

(a) Para determinar os intervalos de crescimento/descrecimento de f e os seus pontos de máximo/mínimo locais, temos que encontrar os números críticos de f e analisar o sinal de f'. Abaixo calculamos f' usando a regra do produto:

$$f'(x) = 3(x-1)^2(x-5) + (x-1)^3.$$

Simplificando a expressão, obtemos

$$f'(x) = (x-1)^2[3(x-5) + (x-1)] = (x-1)^2(4x-16) = 4(x-1)^2(x-4).$$

Logo,

$$f'(x) = 4(x-1)^2(x-4).\checkmark$$

Observe que f e f' estão definidas para todo número real. Logo, os únicos números críticos são aqueles que anulam a função f'.

Como

$$f'(x) = 4(x-1)^2(x-4) = 0\checkmark \iff x = 1\checkmark \quad \text{ou} \quad x = 4,\checkmark$$

concluímos que 1 e 4 são números críticos. ✓

Observe que, como $(x-1)^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o sinal de $f'(x)$ depende apenas do sinal de $(x-4)$. Logo,

$$f'(x) < 0 \quad \text{para } x < 4 \quad (x \neq 1),\checkmark$$

e

$$f'(x) > 0 \quad \text{para } x > 4.\checkmark$$

Portanto, f é decrescente em $(-\infty, 4)\checkmark$ e crescente em $(4, \infty).\checkmark$

No ponto $x = 4$, como a derivada muda de negativa para positiva✓, então $f(4) = -27$ é mínimo local✓. Por outro lado, como na vizinhança de $x = 1$, f' não muda de sinal ✓então esse número crítico não é nem máximo e nem mínimo local.✓

(b) Para determinar a concavidade do gráfico de f e os seus pontos de inflexão, vamos analisar o sinal da derivada segunda de f.

Temos que

$$f''(x) = 4\left[2(x-1)(x-4) + (x-1)^2\right] = 4(x-1)\left[2(x-4) + (x-1)\right] = 4(x-1)(3x-9).$$

Logo,

$$f''(x) = 12(x-1)(x-3), \checkmark$$

e temos que f'' é contínua em $\mathbb{R}$. Logo, os possíveis pontos de inflexão são

$$f''(x) = 12(x-1)(x-3) = 0 \checkmark \iff x = 1 \checkmark \quad \text{e} \quad x = 3. \checkmark$$

Analisando o sinal de $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 \quad & \text{para } x < 1, \checkmark \\ f''(x) < 0 \quad & \text{para } 1 < x < 3, \checkmark \\ f''(x) > 0 \quad & \text{para } x > 3. \checkmark \end{aligned}$$

Portanto, o gráfico de f é côncavo para cima em $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ ✓e côncavo para baixo em $(1, 3)$.✓

Como há mudança de sinal da segunda derivada, os dois pontos encontrados são pontos de inflexão. ✓

Temos que $f(1) = 0$ e $f(3) = -16$. Logo, $(1, 0)$✓e $(3, -16)$✓são pontos de inflexão.

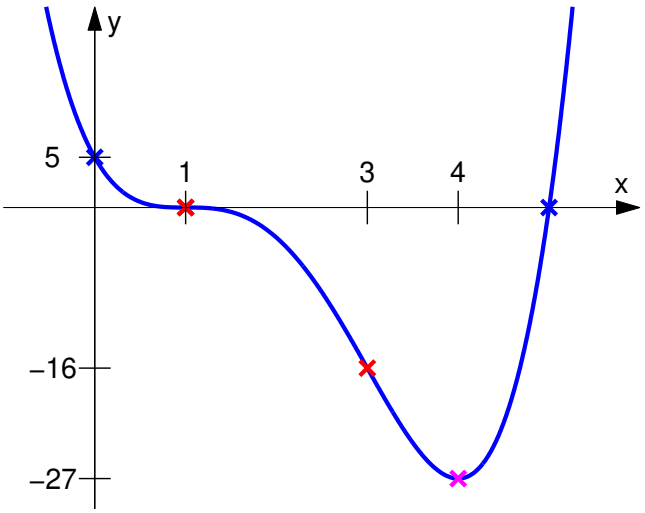
(c) Como f é contínua em $\mathbb{R}$, por ser uma função polinomial,✓não há assíntotas verticais.✓

Como

$$\lim_{x\to\pm\infty}(x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 16x + 5) = \lim_{x\to\pm\infty} x^4(1 - 8/x + 18/x^2 - 16/x^3 + 5/x^4) = +\infty \checkmark \checkmark$$

então a função se comporta como x^4 no infinito e, portanto, não possui assíntotas horizontais e nem oblíquas. ✓

(e) Esboço do gráfico: ponto de mínimo ✓; monotonicidade ✓; pontos de inflexão ✓; concavidade ✓; comportamento no infinito✓



Mínimo: ×; Pontos de inflexão: ×.