IMECC/UNICAMP
MA111 - Cálculo I
Prova 3
3 de julho de 2026 - 08:00 às 10:00 (Turmas A & B)

RA: _____ **Nome:** _____ **Turma:** _____

Questão:	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	Total:
Valor:	2,5	2	4	1,5	10
Nota:					

Q1. **(2,5 pontos)** Um engenheiro químico está projetando as condições de segurança para uma nova reação controlada que dura exatamente 5 horas ($0 \leq t \leq 5$, onde t é medido em horas). O sistema de resfriamento foi programado de modo que a taxa de variação da temperatura $T(t)$ (em °C) seja dada pela função:

$$T'(t) = -6t^2 + 30t - 24.$$

Para garantir a estabilidade dos compostos ao final do processo, o projeto exige que a temperatura da reação termine em exatamente **0°C no instante final** ($t = 5$).

Com base nos parâmetros de projeto fornecidos, determine:

(a) (1,2 ponto) Qual é a função cúbica $T(t)$ que expressa a temperatura da reação em função do tempo t. Qual deve ser a temperatura inicial (em $t = 0$) configurada para o início da reação?

Solução:

Para encontrar a função da temperatura $T(t)$, devemos integrar a função da taxa de variação $T'(t) = -6t^2 + 30t - 24$ em relação ao tempo t:

$$T(t) = \int (-6t^2 + 30t - 24)\, dt\checkmark.$$

Aplicando as regras básicas de integração de polinômios, encontramos:

$$\begin{aligned} T(t) &= -6\left(\frac{t^3}{3}\checkmark\right) + 30\left(\frac{t^2}{2}\checkmark\right) - 24t\checkmark + C\checkmark \\ &= -2t^3 + 15t^2 - 24t + C\checkmark. \end{aligned}$$

O enunciado afirma que no instante final ($t = 5$) a temperatura deve ser exatamente 0°C ($T(5) = 0$). Substituimos esses valores para encontrar a constante C:

$$\underbrace{-2(5)^3 + 15(5)^2}_{=-10\cdot 25+15\cdot 25} - 24(5) + C\checkmark = 0\checkmark$$

$$\begin{aligned} 5 \cdot 25 - 5 \cdot 24 + C &= 0 \\ 5(25 - 24) + C &= 0 \\ 5 + C = 0 &\implies C = -5\checkmark. \end{aligned}$$

Portanto, a função cúbica que expressa a temperatura em função do tempo é:
$T(t) = -2t^3 + 15t^2 - 24t - 5\checkmark$.

A temperatura inicial corresponde ao valor constante encontrada, $C = -5$, ou o valor da função no instante $t = 0$, ou seja,

$$T(0) = -2(0)^3 + 15(0)^2 - 24(0) - 5 = -5.\checkmark$$

Portanto, a temperatura inicial configurada deve ser de $-5°\text{C}$.✓

(b) (1,3 pontos) Qual é a **temperatura mínima** que o recipiente deve suportar com segurança ao longo do ciclo de 5 horas? E qual momento essa temperatura é atingida?

Solução:

Para determinar a temperatura mínima ao longo de todo o intervalo $[0, 5]$, devemos avaliar a função $T(t)$ nas **pontas do intervalo** ($f'(t) \nexists$), $t = 0$ e $t = 5$✓, bem como nos seus **pontos críticos internos** ($f'(t) \nexists$ ou $f'(t) = 0$) para $t \in (0, 5)$.

(i) **Encontrando os pontos críticos internos:** Notamos que a derivada existe em todo intervalo $(0, 5)$✓. Portanto, os pontos críticos são somente aqueles onde a derivada é nula, i.e.,

$$T'(t) = -6t^2 + 30t - 24 = 0\checkmark.$$

Dividindo toda a equação por -6:

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \implies t_1 = 1\checkmark \text{ e } t_2 = 4\checkmark.$$

Ambos os pontos pertencem ao intervalo aberto $(0, 5)$✓.

(ii) **Cálculo dos valores nos pontos de interesse:** Os pontos críticos são $t = 0$ e $t = 5$ (pontas do intervalo) e $t = 1$ e $t = 4$ (derivada nula):

- Momento inicial $t = 0$: $T(0) = -5°\text{C}\checkmark$
- $t = 1$: $T(1) = -2(1)^3 + 15(1)^2 - 24(1) - 5 = -16°\text{C}\checkmark$
- $t = 4$) $T(4) = -2(4)^3 + 15(4)^2 - 24(4) - 5 = 11°\text{C}\checkmark$
- Momento final $t = 5$: $T(5) = 0°\text{C}\checkmark$

(iii) **Comparando todos os valores obtidos:** $T(1) < T(0) < T(5) < T(4)\checkmark$.

Portanto, o menor valor absoluto de temperatura, atingido após 1 hora✓, é $-16°\text{C}\checkmark$.

Q2. (2 pontos) Seja R a região limitada pelas curvas $y = -x^2 + 2x + 3$ e $y = x + 3$.

(a) (1 ponto) Faça um esboço da região R e calcule a sua área.

Solução:

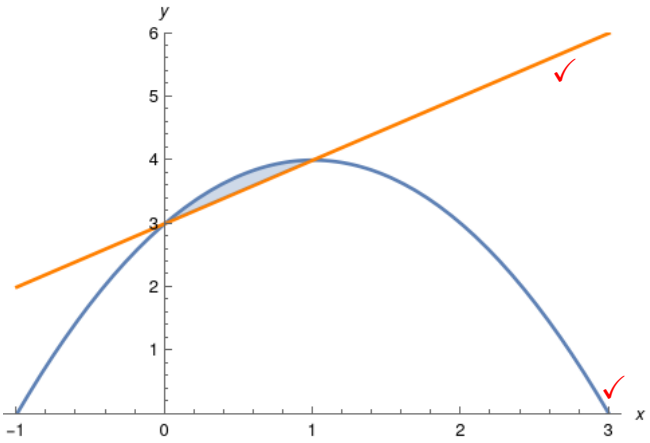
Inicialmente, determinamos os pontos de interseção das curvas resolvendo

$$-x^2 + 2x + 3 = x + 3 \Leftrightarrow -x^2 + x = 0\checkmark \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0\checkmark \text{ ou } x = 1\checkmark.$$

Portanto, os pontos de interseção são $(0, 3)$ e $(1, 4)$. Além disso,

$$(-x^2 + 2x + 3) - (x + 3) = -x^2 + x = x(1-x) \geq 0 \qquad \text{para } 0 \leq x \leq 1\checkmark$$

Alternativa: $x = \frac{1}{2} \in (0,1)$: $-\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} + 3 = \frac{15}{4} > \frac{1}{2} + 3 = \frac{14}{4}\checkmark$.
Portanto, a parábola está acima da reta no intervalo $(0, 1)\checkmark$.
O esboço da região é o seguinte



A área da região R é

$$\int_0^1 \left[(-x^2 + 2x + 3) - (x + 3)\right] dx\checkmark = \int_0^1 (-x^2 + x)\, dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1\checkmark = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\checkmark.$$

Logo, a área da região R é $\frac{1}{6}$.

(b) (1 ponto) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região R em torno do eixo x.

Solução:

Vamos calcular o volume V do sólido S através da integral

$$V = \int_0^1 A(x)dx\checkmark$$

em que $A(x)$ é a área da seção transversal de S no plano P_x, que passa por x e é perpendicular ao eixo x. Observe que a seção transversal não é a área calculada em (a), mas um anel de raio externo $R(x) = -x^2 + 2x + 3\checkmark$ e raio interno $r(x) = x + 3\checkmark$.

Assim,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \checkmark\pi\checkmark \underbrace{\left((-x^2+2x+3)^2-(x+3)^2\right)}_{\text{ordem}\checkmark,\ \text{quadrados}\checkmark} dx \\ &= \pi\int_0^1 \left(x^4-2x^2(2x+3)+(2x+3)^2-(x^2+6x+9)\right) dx. \\ &= \pi\int_0^1 \left(x^4-4x^3-3x^2+6x\right) dx\checkmark \\ &= \pi\left(\frac{x^5}{5}-x^4-x^3+3x^2\right)\Big|_0^1\checkmark \\ &= \pi\left(\frac{1}{5}-1-1+3\right) = \frac{6\pi}{5}\checkmark. \end{aligned}$$

Logo, o volume do sólido é $\frac{6\pi}{5}$.

Q3. **(4 pontos)** Resolva as seguintes integrais:

(a) (1 ponto) $\int \cos^4(x)\,\mathrm{sen}^3(x)dx$

Solução:

Fazemos a substituição

$$u = \cos(x)\checkmark \Rightarrow du = -\,\mathrm{sen}(x)dx\checkmark$$

e usamos que

$$\mathrm{sen}^3(x) = (1-\cos^2(x))\checkmark\,\mathrm{sen}(x)\checkmark$$

Assim,

$$\int \cos^4(x)\,\mathrm{sen}^3(x)dx = -\int u^4(1-u^2)du\checkmark = \int (u^6-u^4)du\checkmark = \frac{u^7}{7}\checkmark - \frac{u^5}{5}\checkmark + C\checkmark$$

Voltando para a variável x, obtemos

$$\int \cos^4(x)\,\mathrm{sen}^3(x)dx = \frac{\cos^7(x)}{7} - \frac{\cos^5(x)}{5} + C\checkmark.$$

(b) (1,5 pontos) $\int \ln(1+\sqrt{x})\,dx$

Solução:

Reconhecemos que temos uma função composta no integrando. Sendo assim, definimos uma nova variável de integração para englobar todo o argumento do logaritmo:

$$u = 1+\sqrt{x}\checkmark \implies \sqrt{x} = u-1\checkmark$$

Para achar a relação entre du e dx, isolamos x e derivamos em relação a u para obter:

$$x = (u-1)^2\checkmark \implies dx = 2(u-1)\,du = (2u-2)\,du\checkmark$$

Alternativamente: $du = 0 + \frac{1}{2\sqrt{x}}dx\checkmark \implies dx = 2\sqrt{x}du \implies dx = (2u-2)\,du\checkmark$
Substituindo na integral original:

$$I = \int \ln(u)\cdot(2u-2)\,du\checkmark.$$

A nova integral apresenta um produto de duas funções no integrando, em que um dos fatores $(\ln u)$ possui derivada simples (racional). Sendo assim, aplicamos o método de integração por partes $(\int f\cdot g'\,du = f\cdot g - \int f'\cdot g\,du)\checkmark$ na integral resultante. Identificamos

- $f = \ln(u)\checkmark \implies f' = \dfrac{1}{u}\checkmark$
- $g' = (2u-2)\checkmark \implies g = u^2-2u\checkmark$

Montando a estrutura:

$$I = (u^2-2u)\ln(u) - \int (u^2-2u)\cdot\frac{1}{u}\,du = (u^2-2u)\ln(u) - \int (u-2)\,du\checkmark$$

Resolvendo a integral polinomial restante:

$$I = (u^2-2u)\ln(u) - \left(\frac{u^2}{2}-2u\right)\checkmark + C\checkmark$$

Substituindo $u = 1 + \sqrt{x}$:

$$I = \left((1+\sqrt{x})^2 - 2(1+\sqrt{x})\right)\ln(1+\sqrt{x}) - \left(\frac{(1+\sqrt{x})^2}{2} - 2(1+\sqrt{x})\right) + C\checkmark.$$

Usando que $(1+\sqrt{x})^2 = 1+2\sqrt{x}+x$, essa expressão simplifica-se algebricamente para

$$I = (x-1)\ln(1+\sqrt{x}) - \frac{x}{2} + \sqrt{x} + C_1\checkmark.$$

Alternativa:
Integração por partes ($\int f\cdot g'\,du = f\cdot g - \int f'\cdot g\,du$)✓ com
$f = \ln(1+\sqrt{x})\checkmark \implies f' = \frac{1}{1+\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\checkmark$
$g = 1\checkmark \implies g = x\checkmark$:
Montando a estrutura:

$$I = x\ln(1+\sqrt{x}) - \underbrace{\int x\cdot\frac{1}{1+\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx}_{I_1}\checkmark$$

Substituição: $u = 1+\sqrt{x}\checkmark \implies \sqrt{x} = u-1\checkmark \implies x = (u-1)^2\checkmark$.
Para achar a relação entre du e dx, derivamos em relação a u para obter:
$du = 0 + \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \implies \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = du\checkmark$
Substituindo na integral fornece:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int (u-1)^2\frac{1}{u}du\checkmark = \int (u-2+\frac{1}{u})du = \frac{u^2}{2} - 2u + \ln(u)\checkmark + C\checkmark\\
&= \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{x}\right)^2 - 2\left(1+\sqrt{x}\right) + \ln(1+\sqrt{x}) + C\checkmark\\
&= \frac{1}{2} + \sqrt{x} + \frac{x}{2} - 2 - 2\sqrt{x} + \ln(1+\sqrt{x}) + C\\
&= \frac{x}{2} - \sqrt{x} + \ln(1+\sqrt{x}) + C'
\end{aligned}$$

Portanto,

$$I = x\ln(1+\sqrt{x}) - I_1 = (x-1)\ln(1+\sqrt{x}) - \frac{x}{2} + \sqrt{x} + C_1\checkmark.$$

Substituição alternativa: $u = \sqrt{x}\checkmark \implies du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx\checkmark$ e $x = u^2\checkmark$:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int u^2\frac{1}{1+u}du\checkmark = \int \frac{(1+u-1)^2}{1+u}du = \int \frac{(1+u)^2 - 2(1+u) + 1}{1+u}du\\
&= \int \left(1+u-2+\frac{1}{1+u}\right)du = \int \left(u-1+\frac{1}{1+u}\right)\checkmark\,du\\
&= \frac{u^2}{2} - u + \ln(1+u)\checkmark + C\checkmark = \frac{x}{2} - \sqrt{x} + \ln(1+\sqrt{x}) + C\checkmark
\end{aligned}$$

Portanto,

$$I = x\ln(1+\sqrt{x}) - I_1 = (x-1)\ln(1+\sqrt{x}) - \frac{x}{2} + \sqrt{x} + C_1\checkmark.$$

(c) (1,5 pontos) $\displaystyle\int \frac{14e^{2x}}{e^{4x}-e^{2x}-12}\,dx$

Solução:

Identificamos que o integrando é uma expressão racional em termos de e^{2x}, ou seja uma função composta do tipo $f(e^{2x})$. Fazemos a substituição

$$u = e^{2x}\checkmark \implies du = 2e^{2x}\,dx\checkmark \implies e^{2x}\,dx = \frac{du}{2}\checkmark$$

Reconhecemos ainda que $e^{4x} = u^2\checkmark$. Assim, a integral toma a forma

$$I = \int \frac{14}{u^2-u-12}\cdot\left(\frac{du}{2}\right) = \int \frac{7}{u^2-u-12}\,du\checkmark.$$

Completando o quadrado do denominador, encontramos

$$u^2-u-12 = u^2-2\cdot\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-12 = (u+\frac{1}{2})^2-\frac{49}{4}\checkmark$$

Como o termo constante é negativo, podemos fatorar essa expressão utilizando o terceiro produto notável:

$$(u+\frac{1}{2})^2-\frac{49}{4} = (u+\frac{1}{2}+\frac{7}{2})(u+\frac{1}{2}-\frac{7}{2}) = (u+3)(u-4)\checkmark$$

Assim, o método das frações parciais consiste em escrever o integrando como

$$\frac{7}{(u+3)(u-4)} = \frac{A}{u+3}+\frac{B}{u-4}\checkmark.$$

Multiplicando ambos os lados pelo denominador comum:

$$7 = A(u-4)+B(u+3)\checkmark$$

Substituindo as raízes para determinar as constantes A e B:

- Para $u=-3 \implies 7 = A(-3-4) \implies 7 = -7A \implies A = -1\checkmark$.
- Para $u=4 \implies 7 = B(4+3) \implies 7 = 7B \implies B = 1\checkmark$.

O integrando reescrito torna-se:

$$I = \int\left(\frac{1}{u-4}-\frac{1}{u+3}\right)du\checkmark$$

Integrando os termos individualmente:

$$I = \ln|u-4| - \ln|u+3|\checkmark + C\checkmark = \ln\left|\frac{u-4}{u+3}\right| + C$$

Como $u = e^{2x}$, desfazemos a substituição para obter a resposta final na variável x:

$$I = \ln\left|\frac{e^{2x}-4}{e^{2x}+3}\right| + C\checkmark$$

Alternativa:
Notamos que o denominador pode ser fatorado:

$$e^{4x}-e^{2x}-12 = e^{4x}-2\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-12 = \left(e^{2x}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{49}{4}\checkmark = (e^{2x}-4)(e^{2x}+3)\checkmark.$$

Pelo Método das Frações Parciais, encontramos:

$$\frac{14e^{2x}}{(e^{2x}-4)(e^{2x}+3)} = \frac{A}{e^{2x}-4} + \frac{B}{e^{2x}+3}\checkmark = \frac{A(e^{2x}+3)+B(e^{2x}-4)}{(e^{2x}-4)(e^{2x}+3)}$$
$$14e^{2x} = (A+B)e^{2x} + 3A - 4B\checkmark$$

Obtemos o sistema

$$A+B=14\checkmark \qquad 3A-4B=0\checkmark \implies A=8\checkmark \text{ e } B=6\checkmark$$

Portanto,

$$I = \int \frac{8}{e^{2x}-4}dx + \int \frac{6}{e^{2x}+3}dx\checkmark$$
$$= \int \frac{8e^{-2x}}{1-4e^{-2x}}dx\checkmark - \int \frac{-6e^{-2x}}{1+3e^{-2x}}dx\checkmark$$

onde multiplicamos as frações no numerador e denominador por e^{-2x} para deixá-las na forma $f'(x)/f(x)\checkmark$. Dessa forma, obtemos

$$I = \ln|1-4e^{-2x}|\checkmark - \ln|1+3e^{-2x}|\checkmark + C\checkmark = \ln\left|\frac{1-4e^{-2x}}{1+3e^{-2x}}\right| + C = \ln\left|\frac{e^{2x}-4}{e^{2x}+3}\right| + C$$

Q4. (1,5 pontos) Analise a convergência da integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1-x^2)^{1/4}}\,dx$ e calcule o seu valor, se possível.

Solução:

Note que o integrando, $f(x) = \dfrac{x}{(1-x^2)^{1/4}}$, é uma função contínua em $[0,1)$ e descontínua em $x = 1$✓. Portanto, trata-se de uma integral imprópria ✓que pode ser calculada através do seguinte limite

$$\int_0^1 \frac{x}{(1-x^2)^{1/4}}\,dx = \lim_{b\to 1^-}{}_{\checkmark} \int_0^b \frac{x}{(1-x^2)^{1/4}}\,dx.\checkmark$$

Para calcular a integral, vamos fazer a substituição $u = 1 - x^2$✓. Dessa forma,

$$du = -2x\,dx\checkmark \qquad \text{e } f(x)dx = -\frac{1}{2u^{1/4}}du\checkmark.$$

Além disso, os limites de integração transformam-se em

$$x = 0 \Rightarrow u = 1\checkmark,$$

$$x = b \Rightarrow u = 1 - b^2.\checkmark$$

Logo,

$$\int_0^b \frac{x}{(1-x^2)^{1/4}}\,dx = -\frac{1}{2}\int_1^{1-b^2} u^{-1/4}\,du\checkmark = -\frac{1}{2}\frac{u^{3/4}}{3/4}\bigg|_1^{1-b^2}\checkmark = -\frac{2}{3}((1-b^2)^{3/4}-1)\checkmark.$$

Portanto,

$$\int_0^1 \frac{x}{(1-x^2)^{1/4}}\,dx = \lim_{b\to 1^-}\left(-\frac{2}{3}((1-b^2)^{3/4}-1)\right)\checkmark = \frac{2}{3}\checkmark,$$

ou seja, a integral converge ✓e seu valor é 2/3.