AULA 2 – AULA4

Introdução à Teoria das Probabilidades

Prof. Victor Hugo Lachos Davila

Experimento Aleatório ou Fenômeno Aleatório

Situações ou acontecimentos cujos resultados não podem ser previstos com certeza.

Exemplos:

- Condições climáticas do próximo domingo;
- Taxa de inflação do próximo mês;
- Resultado ao lançar um dado ou moeda;
- Tempo de duração de uma lâmpada.

Espaço Amostral (Ω)

Conjunto de todos os possíveis resultado de um experimento aleatório ou fenômeno aleatório.

Exemplos:

1. Lançamento de um dado. $\Rightarrow \Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$
2. Tipo sanguíneo de um individuo. $\Rightarrow \Omega=\{A, B, AB, 0\}$
3. Opinião de um eleitor sobre um projeto. $\Rightarrow \Omega=\{\text{Favorável}, \text{Contrário}\}$
4. Tempo de duração de uma lâmpada $\Rightarrow \Omega=\{t;\ t>0)$

Evento subconjunto do espaço amostral Ω

Notação: A, B, C,...

Exemplos: No exemplo 1, alguns eventos:

A: sair face par: $\Rightarrow A=\{2,4,6\} \subset \Omega$

B: Sair face maior que 3 $\Rightarrow B=\{4,5,6\} \subset \Omega$

C: sair face 1 $\Rightarrow C=\{1\} \subset \Omega$

D: sair face 7 $\Rightarrow D=\{\ \}$ (evento impossível)= $\varnothing$ (conjunto vazio) $\subset \Omega$

Operação com eventos

Sejam os eventos A e B definidos no mesmo espaço amostral

• $A \cup B$: União dos eventos A e B.

Representa a ocorrência de pelo menos um dos eventos A ou B

• $A \cap B$: Intersecção dos eventos A e B.

Representa a ocorrência simultânea dos eventos A e B.

• A e B são disjuntos ou mutuamente exclusivos quando não têm elementos em comum, isto é, $A \cap B = \emptyset$

• A e B são complementares se sua intersecção é vazia e sua união o espaço amostral, isto é. $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = \Omega$.

• O complementar de um evento A é representado por A^C ou $\overline{A}$

Exemplo: Lançamento de um dado

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Eventos: $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ e $C = \{1\}$

- $A \cap B$: $= \{2, 4, 6\} \cap \{4, 5, 6\} = \{4, 6\}$
  sair uma face par e maior que 3
- $A \cap C = \{2, 4, 6\} \cap \{1\} = \varnothing$ (A e C disjuntos)
  sair uma face par e face 1
- $A \cup B = \{2, 4, 6\} \cup \{4, 5, 6\} = \{2, 4, 5, 6\}$
  sair uma face par ou maior que 3
- $A \cup C = \{2, 4, 6\} \cup \{1\} = \{1, 2, 4, 6\}$
  sair uma face par ou face 1
- $A^C = \{1, 3, 5\}$ não sair face par

Probabilidade

Pergunta: ***Como atribuir probabilidade aos elementos do espaço amostral?***

Definição Clássica ou a priori

Se um experimento aleatório tiver n(Ω) resultados mutuamente exclusivos e igualmente prováveis e se um evento A tiver n(A) desses resultados. A probabilidade do evento A representado por P(A), é dado por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Exemplo: Considere o lançamento de 2 dados balanceados. Calcular a probabilidade de:

a) Obter soma 7;

b) Obter soma maior que 10;

c) Que resultado do primeiro dado seja superior ao resultado do segundo.

$$\Omega = \begin{Bmatrix} 1,1 & 1,2 & 1,3 & 1,4 & 1,5 & 1,6 \\ 2,1 & 2,2 & 2,3 & 2,4 & 2,5 & 2,6 \\ 3,1 & 3,2 & 3,3 & 3,4 & 3,5 & 3,6 \\ 4,1 & 4,2 & 4,3 & 4,4 & 4,5 & 4,6 \\ 5,1 & 5,2 & 5,3 & 5,4 & 5,5 & 5,6 \\ 6,1 & 6,2 & 6,3 & 6,4 & 6,5 & 6,6 \end{Bmatrix}$$

a) A={(6,1),(5,2),(4,3),(3,4),(2,5),(6,1)} $\Rightarrow$ P(A)=n(A)/n(Ω)=6/36=1/6

b) B={(5,6),(6,5),(6,6)} => P(B) = 3/36.

c) P(C)= 15/36.

Definição frequentista ou a posteriori

Suponhamos que realizamos um experimento n vezes (n grande) e destas o evento A ocorre exatamente r<n vezes, então a frequência relativa de vezes que ocorreu o evento A, "r/n", é a estimação da probabilidade que ocorra o evento A, ou seja,

$$P(A) = \frac{r}{n}$$

Essa estimação da probabilidade por frequência relativa de um evento A, é próxima da verdadeira probabilidade do evento A, quando n tende ao infinito.

Exemplo: Considere o lançamento de uma moeda. Calcular a probabilidade de A={ resultado obtido é cara}.

	fr_1	fr_2	fr_3	fr_4		fr_A
Cara	2/5	6/10	22/50	47/100		0,5
Coroa	3/5	4/10	28/50	53/100		0,5
n	5	10	50	100		∞

Definição axiomática

A probabilidade de um evento A define-se com o número P(A), tal que satisfaz os seguintes axiomas:

$$(i)\ 0 \le P(A) \le 1,\ \ \forall A \subset \Omega$$

$$(ii)\ P(\Omega) = 1$$

$$(iii)\ Se\ A_1, \ldots, A_n \text{ são eventos mutuamente exclusivos, então}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Propriedades

Regra da adição de probabilidades

$$1.\ P(\Phi) = 0$$

$$2.\ Se\ A \subset \Omega\ então,\ P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$3.\ Se\ A \subset B \subset \Omega\ então,\ P(A) \le P(B)$$

$$4.\ Se\ A, B \subset \Omega\ então,\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$5.\ Se\ A, B, C \subset \Omega\ então,$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Exemplo 1. Na tabela 1, apresenta-se a composição por raça e sexo de uma população de um país.

Tabela 1: *Distribuição da população por raça e sexo.*

Raça	Sexo		Total
	Masculino	Feminino	
Branca	1726384	2110253	3836637
Outra	628309	753125	1381434
Total	2354693	2863378	5218071

Suponha que selecionamos um habitante desse país e consideremos os eventos:

H: "o habitante selecionado é do sexo masculino"
H^c:"o habitante selecionado é do sexo feminino"
B: "o habitante selecionado é da raça branca"
B^c: "o habitante selecionado é de outra raça"
$H \cap B$: "o habitante selecionado é de sexo masculino e da raça branca"
$H \cup B$: "o habitante selecionado é de sexo masculino ou da raça branca"
$H^c \cap B$: "o habitante selecionado é de sexo feminino e da raça branca"
$H^c \cup B$: "o habitante selecionado é de sexo feminino ou da raça branca"
$H^c \cap B^c$:"o habitante selecionado é de sexo feminino e de outra raça "
$H^c \cup B^c$ "o habitante selecionado é de sexo feminino ou de outra raça"

As probabilidades de cada um destes eventos são:

$$P(H)=\frac{2354693}{5218071}=0{,}451;$$

$$P(H^c)=1-P(H)=1-0{,}451=0{,}549;$$

$$P(B)=\frac{3836637}{5218071}=0{,}735$$

$$P(B^c)=1-P(B)=1-0{,}735=0{,}265;$$

$$P(H\cap B)=\frac{1726384}{5218071}=0{,}331$$

$$P(H\cup B)=P(H)+P(B)-P(H\cap B)=$$
$$=0{,}451+0{,}735-0{,}331=0{,}855;$$

$$P(H^c\cap B)=\frac{2110253}{5218071}=0{,}404;$$

$$P(H^c\cup B)=P(H^c)+P(B)-P(H^c\cap B)=$$
$$=0{,}549+0{,}739-0{,}404=0{,}880.$$

Definição:**[Probabilidade condicional]** Sejam *A* e *B* dois eventos em um mesmo espaço amostral, Ω, a probabilidade condicional de *A* dado que ocorreu o evento *B*, é representado por *P(A/B)* é dado por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0. \qquad \mathbf{(1)}$$

Exemplo 2. Selecionamos uma semente, ao acaso, uma a uma e sem reposição de uma sacola que contem 10 sementes de flores vermelhas e 5 de flores brancas. Qual é a probabilidade de que :

(a) a primeira semente seja vermelha. ?

(b) a segunda seja branca se a primeira foi vermelha.?

Sejam os eventos:

$$V_1 : \text{"A 1}^{a} \text{ semente é vermelha";}$$

$$V_1^c : \text{"A 1}^{a} \text{ semente é branca"}$$

$$V_2 : \text{"A 2}^{a} \text{ semente é vermelha";}$$

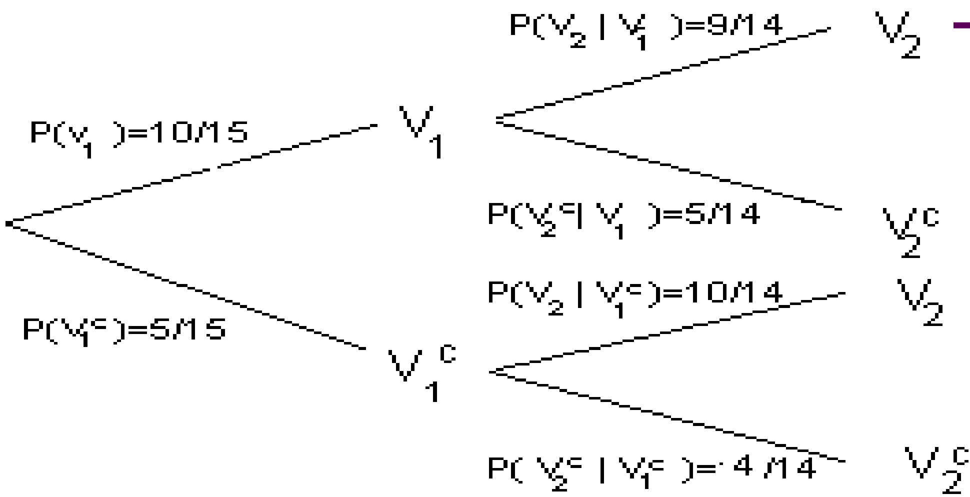
$$V_2^c : \text{"}A \text{ 2}^{a} \text{ semente é branca"}$$

(a) $$P(V_1) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

(b) $$P(V_2^c \mid V_1) = \frac{5}{14}$$

Essas probabilidades podem ser representados em um diagrama da árvore de probabilidades, a qual é mostrado na figura 1

Figura 1: Diagrama de árvore de probabilidade



Resultados	Probabilidade
V_1V_2	$\frac{10}{15}\times\frac{9}{14}=\frac{3}{7}$
$V_1V_2^c$	$\frac{10}{15}\times\frac{5}{14}=\frac{5}{21}$
$V_1^cV_2$	$\frac{5}{15}\times\frac{10}{14}=\frac{5}{21}$
$V_1^cV_2^c$	$\frac{5}{15}\times\frac{4}{14}=\frac{2}{21}$
Total	1

Da expressão (1), pode-se deduzir uma relação bastante útil,

$$P(A\cap B)=P(B)P(A|B),$$

Que é conhecida como regra do produto de probabilidades ou probabilidade da interseção

Exemplo 3: **No exemplo 2, suponha que temos interesse em determinar a probabilidade que as duas sementes selecionadas sejam brancas.**

$$\text{O evento é } V_1^c \cap V_2^c : \quad \text{"a 1}^{\text{a}} \text{ e 2}^{\text{a}} \text{ semente são brancas"}$$

$$\mathrm{P}(V_1^c \cap V_2^c) = P(V_1^c)P(V_2^c \mid V_1^c) = \frac{5}{15} \times \frac{4}{14} = \frac{2}{21}$$

Teorema 1: Se B é um evento em Ω, tal que P(B)>0, então:

$1.\, P(\phi \mid B) = 0$

$2.\, \text{Se A}, \text{B} \subset \Omega, \text{então}: \mathrm{P}(\mathrm{A}^{\mathrm{c}} \mid B) = 1 - P(A \mid B) \; ou \; P(A \mid B) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}^{\mathrm{c}} \mid B)$

$3.\, Se\ A, B, C \subset \Omega, então:$

$P(A \cup C \mid B) = P(A \mid B) + P(C \mid B) - P(A \cap C \mid B).$

Exemplo 3: Na Cidade de São Paulo, a probabilidade de chuva no primeiro dia de setembro é 0,50 e a probabilidade que chuva nos dois primeiros dias de setembro é 0,40. Se no primeiro de setembro choveu, qual é a probabilidade que não chova no dia seguinte ?

Solução: Sejam os eventos: *A*:" chove no primeiro de setembro", B:"chove no segundo dia de setembro".

Do enunciado do problema temos : $P(A)=0,50$ e $P(A \cap B)=0,40$. *A* probabilidade pedida é:

$$P(B^c \mid A) \overset{*}{=} 1 - P(B \mid A) = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - \frac{0,40}{0,50} = 0,20$$

*** Pelo teorema 1.2.**

Definição[**Independência de eventos**] Dois eventos A e B são independentes se a informação da ocorrência ou não de B não altera a probabilidade da ocorrência de A. Isto é,

$$P(A|B)=P(A), \quad P(B)>0$$

Conseqüentemente, temos que dois eventos A e B são independentes se somente se,

$$P(A \cap B)=P(A)P(B).$$

Exemplo 4: Em uma escola o 20% dos alunos tem problemas visuais, o 8% problemas auditivos e 4% tem problemas visuais e auditivos. Selecionamos um aluno desta escola ao acaso:

(a)são os eventos de ter problemas visuais e auditivos eventos independentes?

(b) se aluno selecionado tem problemas visuais, qual é a probabilidade de que tenha problemas auditivos?

(c)qual é a probabilidade de não ter problemas visuais ou ter problema auditivos ?

Solução: sejam os eventos:

V:" o aluno tem problemas visuais"

A:" o aluno tem problemas auditivos".

Do enunciado temos: P(V)=0,20, P(A)=0,08 e P(A$\cap$V)=0,04.

$$(a)\ P(V)P(A) = 0{,}2 \times 0{,}08 = 0{,}016$$

$$P(V \cap A) = 0{,}04.$$

$$\text{Como}\ P(V \cap A) \neq P(V)P(A),\ A\, e\ V\ \ n\tilde{a}o\ s\tilde{a}o\ independentes.$$

$$(b)\ P(A|V) = \frac{P(V \cap A)}{P(V)} = \frac{0{,}04}{0{,}20} = 0{,}20.$$

$$P(V^c \cup A) = P(V^c) + P(A) - P(V^c \cap A) =$$

$$= 1 - P(V) + P(A) - P(A)P(V^c \mid A) = 1 - P(V) + P(A) - P(A)\left[1 - P(V \mid A)\right]$$

$$= 1 - P(V) + P(A) - P(A)\left[1 - \frac{P(V \cap A)}{P(A)}\right] =$$

$$= 1 - 0{,}2 + 0{,}08 - 0{,}08\left[1 - \frac{0{,}04}{0{,}08}\right] = 0{,}84$$

Teorema 2: Se A , B eventos em Ω são eventos independentes, então:

$(i)\ A\ e\ B^c$ são independentes.

$(ii)\ A^c\ e\ B$ são independentes

$(iii)\ A^c\ e\ B^c$ são independentes

Exemplo 5: Um atirador acerta o 80% de seus disparos e outro (na mesmas condições de tiro), o 70%. Qual é a probabilidade de acertar se ambos atiradores disparam simultaneamente o alvo.? Considere que o alvo foi acertado quando pelo menos, uma das duas balas tenha feito impacto no alvo.

$\text{Sejam os eventos}: \mathrm{B}_i$:"o atirador i acerta o alvo", $\mathrm{i} = 1,2$. $\mathrm{P(B_1)} = 0{,}8$ e $P(B_2) = 0{,}7$. $Logo$,

$$P(B_1 \cup B_2) = \mathrm{P(B_1)} + \mathrm{P(B_2)} - P(B_1 \cap B_2) =$$

$$= \mathrm{P(B_1)} + \mathrm{P(B_2)} - \mathrm{P(B_1)}P(\mathrm{B_2}) =$$

$$= 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}8 \times 0{,}7 = 0{,}94$$

Alternativamente este exemplo, pode ser resolvido de uma segunda forma

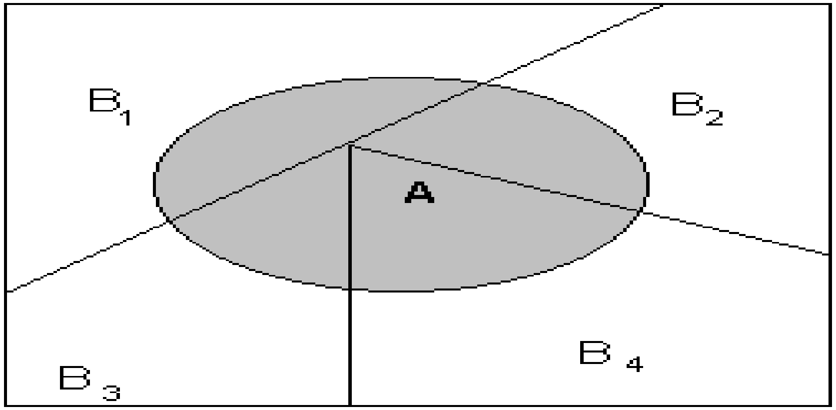
$$P(B_1 \cup B_2) = 1 - P(B_1^c \cap B_2^c) = 1 - P(B_1^c)P(B_2^c) =$$

$$= 1 - \left[1 - \mathrm{P(B_1)}\right]\left[1 - \mathrm{P(B_2)}\right] = 1 - [1 - 0{,}8][1 - 0{,}7] = 0{,}94.$$

Teorema de Bayes

Definição [Partição do espaço amostral]. Uma coleção de eventos $B_1, \cdots, B_k$ formam uma partição do espaço amostral se eles não têm intersecção entre si e sua união é igual ao espaço amostral.

$$B_i \cap B_j = \phi \text{ para } i \neq j \quad \text{e} \quad \bigcup_{i=1}^{k} B_i = \Omega$$



Condições da definição do teorema de Bayes para k=4

Teorema da probabilidade total. Se $B_1, \cdots, B_k$, formam uma partição do espaço amostral Ω, então qualquer evento A em Ω, satifaz:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + \cdots + P(B_k)P(A|B_k) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)$$

Teorema Bayes. Se $B_1, \cdots, B_k$, formam uma partição do espaço amostral Ω, e A é qualquer evento em Ω, então:

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A \mid B_i)}$$

Exemplo 6: Uma montadora trabalha com 2 fornecedores (A e B) de uma determinada peça. As chances de que uma peça proveniente dos fornecedores A e B esteja fora das especificações são 10% e 5% respectivamente. A montadora recebe 30% das peças do fornecedor A e 70% de B. Se uma peça do estoque inteiro é escolhido ao acaso:

(a) Calcule a probabilidade de que ela esteja fora das especificações.
(b) Se uma peça escolhida ao acaso está fora das especificações, qual é a probabilidade que venha do fornecedor fornecedor A ?

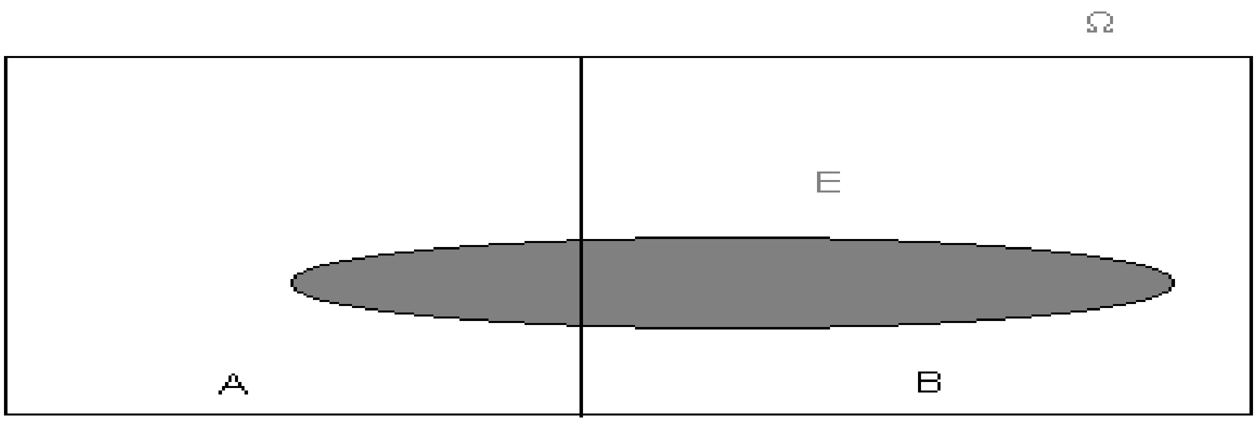
Solução:

Sejam os eventos:

A: " peça selecionada seja do fornecedor A"

B:" peça selecionada seja do fornecedor B"

E:" peça selecionada esteja fora das especificações"



Do enunciado do problemas temos: $P(A)=0,30$; $P(B)=0,70$; $P(E|A)=0,10$ e $P(E|B)=0,05$.

Pelo teorema da probabilidade total temos:

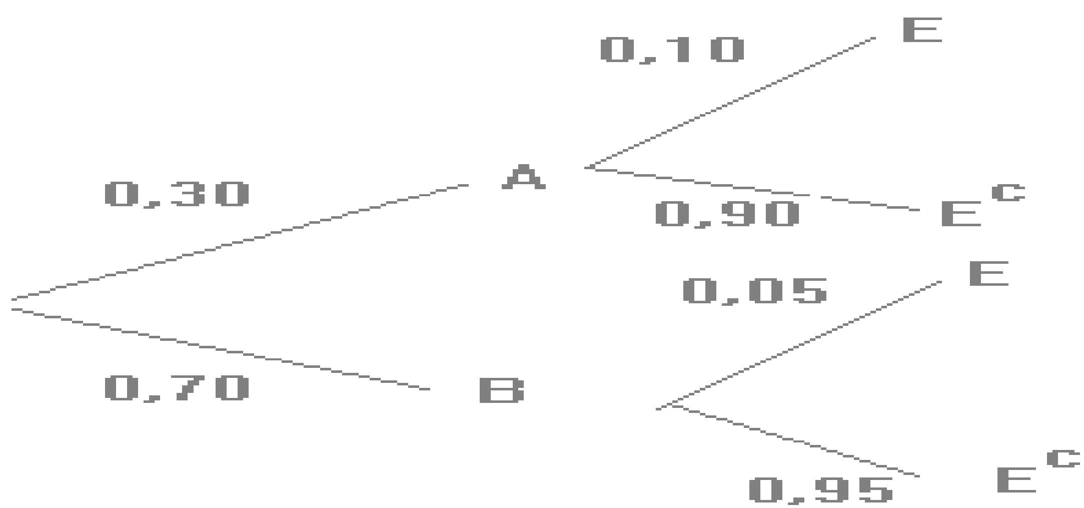
(a) P(E)=P(A)P(E|A)+P(B)P(E|B)=(0,30)(0,10)+(0,70)(0,05)=0,065

(b) P(A|E)=?

Pelo teorema de Bayes temos:

$$P(A|E)=\frac{P(A)P(E\,|\,A)}{P(A)P(E\,|\,A)+P(B)P(E\,|\,B)}=\frac{0{,}30\times 0{,}10}{0{,}30\times 0{,}10+0{,}70\times 0{,}05}=\frac{0{,}03}{0{,}065}=0{,}46$$

A solução do exemplo anterior é facilitada pelo diagrama de árvore de probabilidades.



Exemplo 7: Temos três profissionais: Um agrônomo, um biólogo e um engenheiro civil. Cada um deles plantou 10 mudas de álamos em vasos numa casa de vegetação. Sobreviveram 9 das plantadas pelo agrônomo; 5 pelo biólogo e 2 pelo engenheiro civil. Dos 30 vasos escolhe-se um vaso ao acaso, e verifica-se se a muda sobreviveu. Se ela sobreviveu, qual a probabilidade de ela ter sido plantada pelo engenheiro civil?