

Probabilidade - Introdução

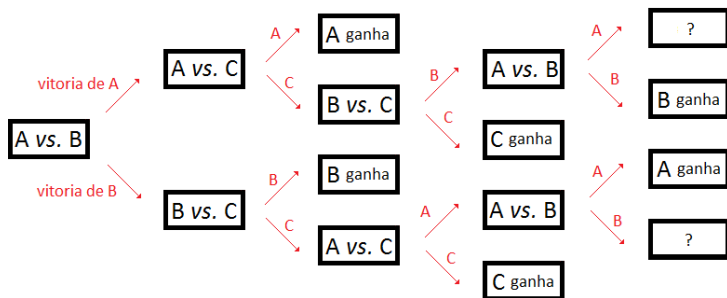
Exemplo

Três jogadores **A**, **B** e **C** disputam um torneio de tênis. Inicialmente, **A** joga com **B** e o vencedor joga com **C**, e assim por diante. O torneio termina quando um jogador ganha duas vezes seguidas ou quando são disputadas, ao todo, quatro partidas. Quais são os resultados possíveis do torneio?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 105.

Probabilidade - Introdução

Considere o organograma:



Probabilidade - Introdução

Com a ajuda do organograma, podemos dizer que são possíveis os eventos AA, BB, ACC, BCC, ACBA, ACBB, BCAA e BCAB.

Aí, temos que

$$\Omega = \{AA, BB, ACC, BCC, ACBA, ACBB, BCAA, BCAB\}$$

Probabilidade - Introdução

Exemplo

Uma moeda e um dado são lançados. Dê o espaço amostral do experimento e depois represente-o como produto cartesiano dos dois espaços amostrais, correspondente aos experimentos considerados individualmente.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 106.

Probabilidade - Introdução

O *espaço amostral* Ω consiste, no caso discreto, da enumeração de todos os resultados possíveis do experimento em questão.

O experimento *jogar uma moeda* tem dois resultados possíveis: cara (C) e coroa (\bar{C}). Logo, o espaço amostral é $\Omega_1 = \{C, \bar{C}\}$.

Probabilidade - Introdução

O experimento *jogar um dado* tem seis resultados possíveis: 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Logo, o espaço amostral é $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

O produto cartesiano $\Omega_1 \times \Omega_2$ é o espaço amostral do experimento *jogar uma moeda e um dado*, ou seja,

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4), (C, 5), (C, 6), (\bar{C}, 1), (\bar{C}, 2), (\bar{C}, 3), (\bar{C}, 4), (\bar{C}, 5), (\bar{C}, 6)\}$$

Probabilidade - Introdução

Exercício

Defina o espaço amostral dos seguintes experimentos aleatórios:

- (i) Numa linha de produção, conta-se o número de peças defeituosas num intervalo de uma hora.
- (ii) Investigam-se famílias com três crianças, anotando-se a configuração segundo o sexo.
- (iii) Numa entrevista telefônica com 250 assinantes, anota-se se o proprietário tem ou não máquina de secar roupa.
- (iv) Mede-se a duração de lâmpadas, deixando-as acesas até que se queimem.

Probabilidade - Introdução

Exercício

Defina o espaço amostral dos seguintes experimentos aleatórios (continuação):

- (v) De um grupo de cinco pessoas (A,B,C,D,E), sorteiam-se duas, uma após a outra, com reposição, e anota-se a configuração tomada.
- (vi) Mesmo que (v), mas sem reposição.
- (vii) Mesmo que (v), mas os dois selecionados simultaneamente.

Probabilidade - Algumas Propriedades

Considere novamente o jogo de tênis entre **A**, **B** e **C**. Temos que $\Omega = \{AA, BB, ACC, BCC, ACBA, ACBB, BCAA, BCAB\}$, e $P(AA) = 1/4$, por exemplo.

(a) *Mostre que a soma das probabilidades dos pontos do espaço amostral é 1.*

$$\begin{aligned} &P(AA) + P(BB) + P(ACC) + P(BCC) + P(ACBA) + \\ &P(ACBB) + P(BCAA) + P(BCAB) = \\ &= 1/4 + 1/4 + 1/8 + 1/8 + 1/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16 = 1 \end{aligned}$$

Probabilidade - Algumas Propriedades

- (b) Qual a probabilidade que A vença? Qual a probabilidade que B vença?

$$P(\text{A vencer}) = P(AA) + P(BCAA) = 1/4 + 1/16 = 5/16 = 0,3125. \text{ De modo análogo, } P(\text{B vencer}) = P(BB) + P(ACBB) = 1/4 + 1/16 = 5/16 = 0,3125.$$

- (c) Qual a probabilidade que não haja decisão?

$$P(\text{não haver decisão}) = P(ACBA) + P(BCAB) = 2/16 = 0,125.$$

Probabilidade - Algumas Propriedades

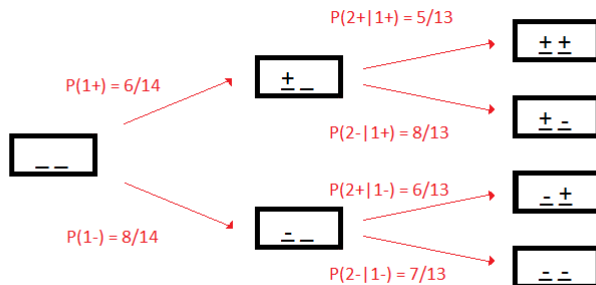
Exemplo

Dentre seis números positivos e oito negativos, dois números são escolhidos ao acaso (sem reposição) e multiplicados. Qual a probabilidade que o produto seja positivo?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 110.

Probabilidade - Algumas Propriedades

Como não temos reposição, podemos usar um organograma:



Probabilidade - Algumas Propriedades

Com a ajuda do diagrama, observamos que:

$$P(++) = \frac{6}{14} \frac{5}{13} = \frac{15}{91}, \quad P(+ -) = \frac{6}{14} \frac{8}{13} = \frac{24}{91}$$

$$P(- +) = \frac{8}{14} \frac{6}{13} = \frac{24}{91}, \quad P(- -) = \frac{8}{14} \frac{7}{13} = \frac{4}{13}$$

Como queremos que o produto dos dois números seja positivo, queremos ++ ou --, e então temos uma probabilidade igual a $43/91$, ou aproximadamente 47,25%.

Probabilidade - Distribuições Bivariadas

Exemplo

Considere um estudo com 19476 homens de 50 anos ou mais, escolhidos de maneira aleatória e independente uns dos outros, que foram submetidos a dois testes de rastreamento de câncer de próstata.

- *PSA*: Antígeno prostático específico.
- *DRE*: Toque retal (Digital Rectal Examination).
- *Confirmação*: biópsia.

Probabilidade - Distribuições Bivariadas

As tabelas são para homens onde posteriormente foi verificado o câncer (através de biópsia) e sem câncer:

	Pacientes com câncer				Pacientes sem câncer		
	DRE+	DRE-			DRE+	DRE-	
PSA+	189	292	481	PSA+	141	755	896
PSA-	145	1255	1400	PSA-	1002	15697	16699
	344	1547	1881		1143	16452	17595

Probabilidade - Distribuições Bivariadas

A tabela a seguir é para todos os indivíduos (com e sem câncer):

	Total		
	DRE+	DRE-	
PSA+	330	1047	1377
PSA-	1147	16952	18099
	1477	17999	19476

Probabilidade - Distribuições Bivariadas

Exemplo

Definimos eventos associados ao experimento:

$$\begin{aligned} A &= \text{DRE+} & B &= \text{PSA+} & C &= \text{Paciente tem câncer} \\ A^c &= \text{DRE-} & B^c &= \text{PSA-} & C^c &= \text{Paciente não tem câncer} \end{aligned}$$

Na literatura, $P(A|C)$ é chamado de *sensibilidade* do DRE, e $P(A^c|C^c)$ é chamado de *especificidade* do DRE. Análogamente $P(B|C)$ e $P(B^c|C^c)$ são a sensibilidade e especificidade do PSA.

$P(C) = 1881/19476 = 0,0966$ é a *prevalência* do câncer de próstata em homens com 50 anos ou mais de idade.

Probabilidade - Distribuições Bivariadas

Exercício

Se sortearmos um indivíduo da amostra, calcule as probabilidades dos seguintes eventos:

$$\begin{array}{lll} P(A|C) & P(A \cap B|C) & P(A \cup B|C) \\ P(A|C^c) & P(A \cap B|C^c) & P(A \cup B|C^c) \\ P(A) & P(A \cap B) & P(A \cup B) \end{array}$$