Lista de Exercícios I

ME907 Geoestatística / MI418 Estatística Espacial

Guilherme Ludwig (gvludwig@ime.unicamp.br)

1. Mostre que para um processo $\{X(\mathbf{s}), s \in \mathcal{D}\}$, a estacionariedade forte implica em estacionariedade fraca.
2. (Gaetan & Guyon, 1.4) Mostre que $\mathbf{\Sigma}$ é uma matriz positiva definida se para todo i, $C_{ii} \geq \sum_{j \neq i} |C_{ij}|$. Encontre um exemplo que mostre o reverso é falso.
3. (Stein, 2.4) Escreva uma função de covariância que é descontínua em -1, 0, e 1, e contínua em todo o resto de $\mathbb{R}$.
4. Prove que para $c_1, \ldots, c_n$, com $c_j \in \mathbb{C}^n$; e $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n$, e $\mathbf{s}_j \in \mathbb{R}^d$ para todo $j = 1, \ldots, n$, temos que
$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_j \bar{c}_k e^{i\boldsymbol{\omega}^t(\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_k)} = \left| \sum_{j=1}^{n} c_j e^{i\boldsymbol{\omega}^t \mathbf{s}_j} \right|^2,$$
onde $i = \sqrt{-1}$ e $\bar{c}_j = a - ib$ se $c_j = a + ib$.
5. Seja $C(h)$ uma função positiva definida de um processo no $\mathbb{R}$, estacionário. Prove que $-C''$ é positiva definida, onde C'' é a função C derivada duas vezes com relação a h. Esse resultado se estende para processos isotrópicos no $\mathbb{R}^d$?
6. Um processo $\{Z(t), t \in \mathcal{D}\}$ indexado em $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ é L^2 diferenciável em t se
$$\lim_{\mathbf{h}_n \to \mathbf{0}} \frac{Z(t + h_n) - Z(t)}{h_n}$$
converge em L^2 para toda sequencia $\{h_n\}$ tal que $h_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Defina o processo
$$Z_h(t) = \frac{Z(t+h) - Z(t)}{h};$$
encontre a função de covariância C_h de $Z_h(t)$ e prove que $\lim_{h \to 0} C_h = -C''$. Note: definimos $Z'(t) = \lim_{h \to 0} Z_h(t)$ se o limite existir para todo t.
7. (Stein 2.16) Suponha que Z é um processo fracamente estacionário no $\mathbb{R}$ com função de autocovariância K analítica (isto é, em todo $t \in \mathbb{R}$, a função K é infinitamente diferenciável). Mostre que
$$\sum_{j=0}^{n} \frac{t^j Z^{(j)}(0)}{j!} \to Z(t)$$
em L^2 quando $n \to \infty$ para qualquer $t > 0$.
8. (Gaetan & Guyon, 1.6.1) Se (X, Y) é um par de variáveis aleatórias Gaussianas, mostre que
$$\text{Cov}(X^2, Y^2) = 2[\text{Cov}(X, Y)]^2.$$
Dica: se (W, X, Y, Z) é um vetor Gaussiano no $\mathbb{R}^4$, então
$$\mathbb{E}(WXYZ) = \mathbb{E}(WX)\mathbb{E}(YZ) + \mathbb{E}(WY)\mathbb{E}(XZ) + \mathbb{E}(WZ)\mathbb{E}(XY).$$
9. (Gaetan & Guyon, 1.6.2) Suponha que $X_1(\mathbf{s}), \ldots, X_n(\mathbf{s})$ são n processos Gaussianos no $\mathbb{R}^d$, independentes entre si, com função média 0 e covariância C. Mostre que o campo aleatório Y definido por
$$Y = \left\{ Y(\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2(\mathbf{s}), \mathbf{s} \in \mathbb{R}^d \right\}$$
é estacionário, com função de covariância $C_y(h) = 2nC^2(h)$.