Estatística Espacial (MI418) / Geoestatística (ME907)

Guilherme Ludwig

2019-02-05

Processos de Cox

Intensidade de Papangelou

Processos de nascimento e morte

Processo de Cox

Seja $Z(\xi) = \{Z(\xi) : \xi \in \mathcal{D}\}$ um campo aleatório não negativo tal que $\mathbb{E}(|Z(\xi)|) < \infty$ para todo ξ (não precisa ser todo ξ, mas vou assumir todo ξ pra simplificar; veja Møller and Waagepetersen, 2003).

Se a distribuição condicional de X dado Z é um processo de Poisson com intensidade Z, então X é um processo de Cox (mais especificamente, X é um processo de Cox *driven by* Z).

Log-Gaussian Cox process

O log-Gaussian Cox process é possivelmente o caso mais simples de processo de Cox: como precisamos que a intensidade condicional seja positiva, simulamos um campo log-Gaussiano. Isto é,

$$log(Z(\xi)) \sim GP(\mu, C),$$

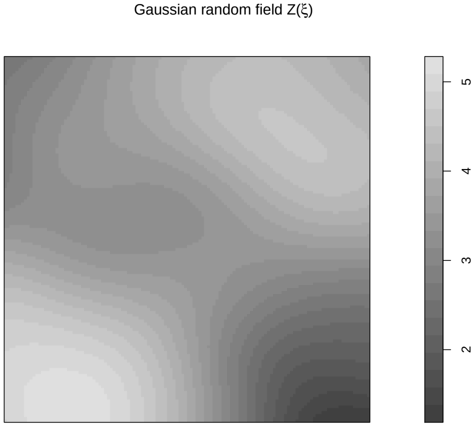
para alguma função média $\mu(\xi)$ e alguma função de covariância $C(\xi_1, \xi_2)$.

Simulação do processo de Cox

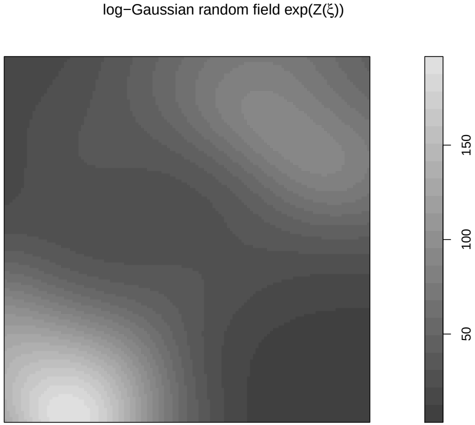
Fixado $z(\xi)$, simulamos um processo de Poisson em W com intensidade $z_0 = \max_{\xi \in W} z(\xi)$, e fazemos um *independent probabilistic thinning* com probabilidade $z(x_i)/z_0$.

(Há simulações mais eficientes, considerando o fato que $Z(\xi)$ não precisa ser observada num grid fino; mas conceitualmente a simulação descrita acima funciona)

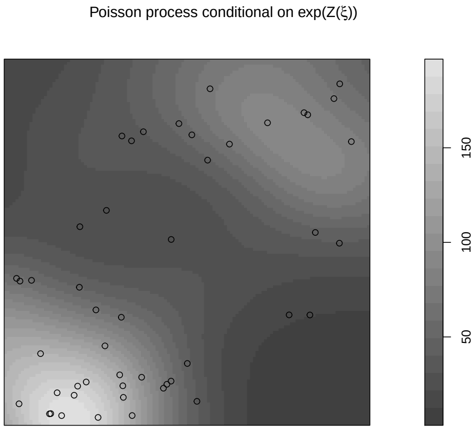
Processo Gaussiano, $\mu = 4$, cov Matérn com $\phi = 0.5$, $\sigma^2 = 1$, $\nu = 2.5$



Processo Gaussiano, $\mu = 4$, cov Matérn com $\phi = 0.5$, $\sigma^2 = 1$, $\nu = 2.5$

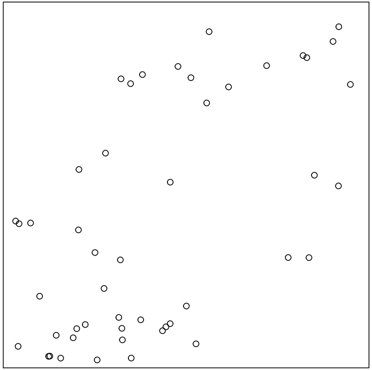


Processo condicionado em Z



Processo de Cox

Realization of a log−Gaussian Cox process



Conexão entre processos de Cox e processos de Neyman-Scott

Seja Y_c um processo de Poisson homogêneo com intensidade $\kappa > 0$. Condicionado à uma realização de Y_c, seja X_c um processo de Poisson com intensidade

$$\rho_c(\xi) = \mu k(\xi - y_c),$$

em que $\mu > 0$ e k é uma densidade de probabilidade para qualquer y_c fixado.

Então $X = \cup_{y_c \in Y_c} X_c$ é um processo de Neyman-Scott.

Note que nem todo processo de Neyman-Scott tem *parents* homogêneos, então não estamos considerando todos os processos de Neyman-Scott.

Conexão entre processos de Cox e processos de Neyman-Scott

Como $X|Z = \cup_{y_c \in Y_c} X_c|Z$ é um processo de Poisson, então tomando o campo aleatório degenerado (determinístico)

$$Z(\xi) = \sum_{y_c \in Y_c} \mu k(\xi - y_c)$$

concluimos que X também é um processo de Cox. A intensidade de X é $\rho = \mu\kappa$, e a função de correlação é dada por

$$g(\xi) = 1 + \frac{1}{\kappa} h(\xi),$$

onde

$$h(\xi) = \int k(\eta) k(\xi + \eta) \mathrm{d}\eta.$$

Se o processo é isotrópico, $r = \|\xi - \eta\|$, então

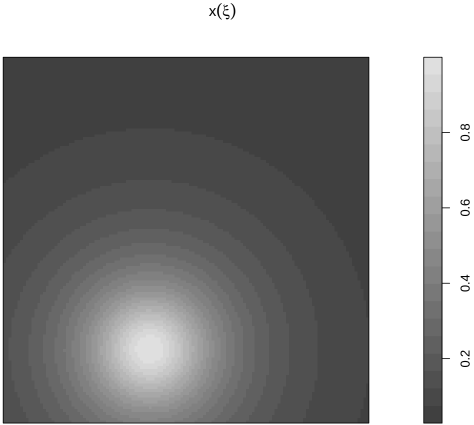
$$K(r) = 2\pi r \int_0^r g(u) \mathrm{d}u.$$

Regressão com processos de Cox

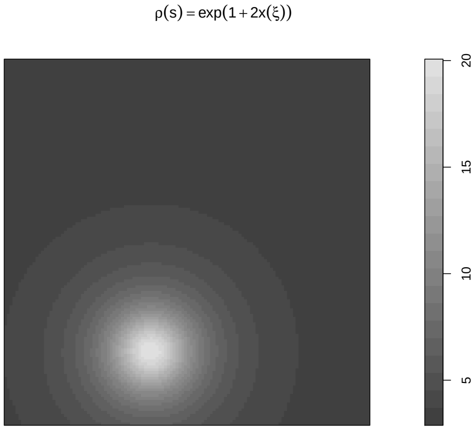
```r
library(spatstat)
window <- owin(c(0,10), c(0,10))
f.circ <- function(x, y, cen = c(2,4)){
  center <- (x-cen[1])^2/3 + (y-cen[2])^2/3
  return(1/(1+center))
}
x <- outer(z <- seq(0, 10, length.out=128),
           seq(0, 10, length.out=128),
           f.circ, c(2, 4))
log.lambda <- 1 + 2*x
```

Covariável (conhecida)

```
plot(as.im(x, W = window), col = grey(8:28/32), main = expression(x(xi)))
```

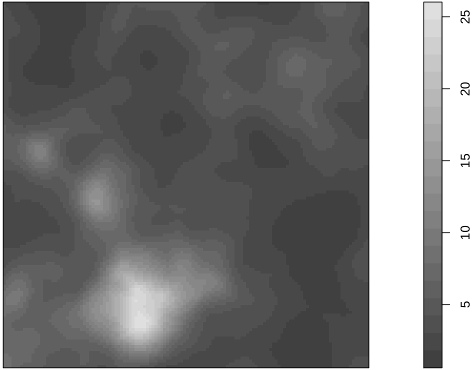


Regressão com processos de Cox



Regressão com processos de Cox

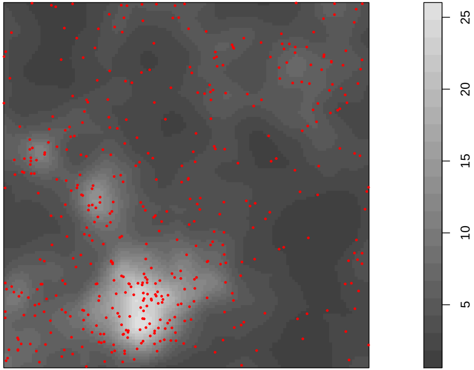
$$\Lambda(s) = \exp(1 + 2x(\xi) + Z(\xi))$$



$$Z(\xi) \sim GRF(0, \sigma^2 = 0.2, \phi = 1, \nu = 2.5)$$

Regressão com processos de Cox

$\Lambda(s) = \exp(1 + 2x(\xi) + Z(\xi))$



$Z(\xi) \sim \text{GRF}(0, \sigma^2 = 0.2, \phi = 1, \nu = 2.5)$

Regressão com processos de Cox

Posso usar como regressoras funções, imagens e constantes.

```r
z <- function(x, y) f.circ(x, y, c(4, 2))
# I used as.im() to sample, but it flips coordinates
model <- kppm(Y ~ z, "LGCP", nu = 2.5, method = "c")
coef(model)
```

```
## (Intercept)           z
##    1.022785    2.014533
```

Regressão com processos de Cox

Não estimou muito bem os parâmetros do GRF, mas talvez eu tenha colocado alguma configuração errada (era para ser $\sigma^2 = 0.2$, e $\alpha = \phi = 1$).

```
model$par
```

```
##    sigma2     alpha
## 0.2639055 0.5013955
```

Agora, um pouco sobre processos repulsivos.

Intensidade de Papangelou

Considere um processo X com densidade f_θ com respeito ao processo de Poisson. Então X tem intensidade condicional de Papangelou

$$\lambda^*_\theta(u,x) = \begin{cases} f_\theta(x \cup u)/f_\theta(x), & \text{se } u \notin x, \text{ e} \\ f_\theta(x)/f_\theta(x \backslash x_i), & \text{para } x_i \in x. \end{cases}$$

Você pode enxergar a intensidade de Papangelou como a probabilidade de um ponto ξ ocorrer, condicionalmente ao resto da configuração de pontos. Processos onde $\lambda^*(x,\xi) \leq \lambda^*(y,\xi)$ são atrativos quando $x \subset y$; e repulsivos se $\lambda^*(x,\xi) \geq \lambda^*(y,\xi)$ quando $x \subset y$.

Note: a intensidade condicional de Papangelou de um processo de Poisson é $\lambda_\theta(u,x) = f_\theta(u)$.

Processos de nascimento e morte

Um processo de nascimento e morte espacial é um método dinâmico de geração de processos pontuais espaciais. Considere uma taxa de nascimento $b(x, \xi) > 0$ e uma taxa de morte $d(x, \xi) > 0$, com $\beta(x) = \int_W b(x, \xi)\mathrm{d}\xi$, $\delta(\emptyset) = 0$, $\delta(x) = \sum_{\xi \in x} d(x, \xi)$ se $x \neq \emptyset$. Seja $\alpha(x) = \beta(x) + \delta(x)$. Dada uma configuração inicial[1] X_0 em $t_0 = 0$, para $m = 1, 2, \ldots$

- $t_m = t_{m-1} + T$, onde $T \sim \mathrm{Exp}(\alpha(x_m))$.
- Jogar uma moeda com probabilidade $\beta(x_m)/\alpha(x_m)$.
  - Se tiver sucesso, nasce 1 ponto ξ_m com densidade $b(x_m, \xi_m)/\beta(x_m)$. $X_m = x_{m-1} \cup \xi_m$.
  - Se tiver fracasso, e a configuração não estiver vazia, morre 1 ponto $\xi \subset x$ com probabilidade $d(x_m, \xi)/\delta(x_m)$. Se a configuração estiver vazia, continua vazia.

As taxas b e d são chamadas de taxa de nascimento e taxa de morte, respectivamente.

[1] Esqueci de dizer na aula: com probabilidade não-nula.

Processos de nascimento e morte

A condição de balanço detalhado implica que o processo tem uma medida invariante. Suponha que h é a densidade não-normalizada de X com respeito ao processo de Poisson. Então se $\mathbb{E}(\beta(X)) < \infty$, então a equação de balanço detalhado é

$$b(x, \xi)h(x) = d(x, \xi)h(x \cup \xi).$$

Há mais de uma escolha de b, d com a mesma medida invariante. Mas em particular, se $d = 1$, então b é a intensidade de Papangelou.

Referências I

Møller, J. and Waagepetersen, R. P. (2003). *Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Processes*. Chapman & Hall, Baton Rouge.