

Estatística Espacial (MI418) / Geoestatística (ME907)

Guilherme Ludwig

2019-01-17

Kriging ordinário

Quantificando incerteza

Estudo de caso

Kriging universal

Validação

Preditores lineares

Considere $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n$, *sampling sites*, onde observamos o processo

$$Y(\mathbf{s}) = X(\mathbf{s}) + \varepsilon(\mathbf{s}),$$

obtendo uma amostra y_1, \dots, y_n . Aqui X é um processo de interesse e ε é ruído branco. Nosso interesse é encontrar $p(\mathbf{y}, \mathbf{s}_0)$, uma função que preveja o processo $X(\mathbf{s})$ com base na informação + ruído que temos em y_1, \dots, y_n .

Na última aula, definimos o melhor preditor linear (nem sempre *unbiased*) como sendo a combinação linear ℓ_1, \dots, ℓ_n tal que

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{s}_0) = \sum_{i=1}^n \ell_i y_i + m,$$

tal que $\mathbb{E} [(X_0 - p(\mathbf{y}, \mathbf{s}_0))^2]$ seja mínimo.

Preditores lineares

O preditor linear ótimo, que minimiza $\mathbb{E} [(X_0 - p(\mathbf{y}, \mathbf{s}_0))^2]$, se conhecemos completamente a distribuição de X , ε e Y , é dado por

$$p^*(\mathbf{y}, \mathbf{s}_0) = \mu(\mathbf{s}_0) + \boldsymbol{\Sigma}_{X_0, \mathbf{y}} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{y}}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}),$$

em que $\boldsymbol{\mu} = [\mu(\mathbf{s}_1), \dots, \mu(\mathbf{s}_n)]^t$, $\boldsymbol{\Sigma}_{X_0, \mathbf{y}} = \text{Cov}(X_0, \mathbf{Y})$ e $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{y}} = \text{Var}(\mathbf{Y})$.

Para um modelo isotrópico, $\mu(\mathbf{s}) = \mu$, e

$$\boldsymbol{\Sigma}_{X_0, \mathbf{y}} = \begin{pmatrix} C(\|\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_1\|) \\ \vdots \\ C(\|\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_n\|) \end{pmatrix} \text{ e } \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} C(\|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_1\|) & \cdots & C(\|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_n\|) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C(\|\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_1\|) & \cdots & C(\|\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_n\|) \end{pmatrix}$$

Kriging ordinário

Considere $Y(\mathbf{s})$ intrínsecamente estacionário. Queremos construir um preditor mas não queremos estimar μ diretamente. Neste caso, o preditor terá forma

$$\rho(\mathbf{y}, \mathbf{s}_0) = \sum_{i=1}^n \ell_i Y(\mathbf{s}_i), \text{ com } \sum_{i=1}^n \ell_i = 1.$$

A condição $\sum_{i=1}^n \ell_i = 1$ garante que $\mathbb{E}(\rho(\mathbf{y}, \mathbf{s}_0)) = \mathbb{E}(Y(\mathbf{s}_0))$ para qualquer μ .

A estratégia é resolver o problema de otimização com restrições, usando multiplicadores de Lagrange. O Lagrangiano do problema é

$$\min_{\ell_1, \dots, \ell_n, \lambda} \mathbb{E} \left[\left(X_0 - \sum_{i=1}^n \ell_i y_i \right)^2 \right] - 2\lambda \left(\sum_{i=1}^n \ell_i - 1 \right)$$

Kriging ordinário

Podemos reescrever o problema anterior em função do variograma, isto é, dado que $\sum_{i=1}^n l_i = 1$, temos

$$\left(X_0 - \sum_{i=1}^n l_i y_i \right)^2 = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n l_i l_j (y_i - y_j)^2 / 2 + 2 \sum_{i=1}^n l_i (X_0 - y_i)^2 / 2,$$

portanto o problema torna-se

$$\min_{l_1, \dots, l_n, \lambda} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n l_i l_j \gamma(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) + 2 \sum_{i=1}^n l_i \gamma(\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_i) - 2\lambda \left(\sum_{i=1}^n l_i - 1 \right)$$

Kriging ordinário

Derivando a equação com relação a $\ell_1, \dots, \ell_n, \lambda$, obtemos que o ℓ ótimo é

$$\ell^t = \left(\gamma + \mathbf{1} \frac{1 - \mathbf{1}^t \Gamma^{-1} \gamma}{\mathbf{1}^t \Gamma^{-1} \mathbf{1}} \right)^t \Gamma^{-1}$$

e

$$\lambda = - \frac{1 - \mathbf{1}^t \Gamma^{-1} \gamma}{\mathbf{1}^t \Gamma^{-1} \mathbf{1}}.$$

Essas fórmulas são meio feias mas podemos rearranjar os termos para algo conhecido...

Kriging ordinário

Aplique a matriz de Kriging ordinário em dados y_1, \dots, y_n , e temos que

$$\rho(\mathbf{y}, \mathbf{s}_0) = \ell^t \mathbf{y} = \left(\gamma + \mathbf{1} \frac{\mathbf{1} - \mathbf{1}^t \Gamma^{-1} \gamma}{\mathbf{1}^t \Gamma^{-1} \mathbf{1}} \right)^t \Gamma^{-1} \mathbf{y}$$

é igual a

$$\rho(\mathbf{y}, \mathbf{s}_0) = \bar{\mathbf{y}}^* + \gamma^t \Gamma^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{1} \bar{\mathbf{y}}^*),$$

em que

$$\bar{\mathbf{y}}^* = \frac{\mathbf{1}^t \Gamma^{-1} \mathbf{y}}{\mathbf{1}^t \Gamma^{-1} \mathbf{1}}.$$

De fato, $\bar{\mathbf{y}}^*$ é um estimador de quadrados mínimos generalizados de μ .

Kriging ordinário

Também podemos derivar o preditor em função de C . Neste caso

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{s}_0) = \ell^t \mathbf{y} = \left(\gamma + \mathbf{1}^t \frac{\mathbf{1} - \mathbf{1}^t \boldsymbol{\Sigma}_Y^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{X_0, Y}}{\mathbf{1}^t \boldsymbol{\Sigma}_Y^{-1} \mathbf{1}} \right)^t \boldsymbol{\Sigma}_Y^{-1} \mathbf{y}$$

é igual a

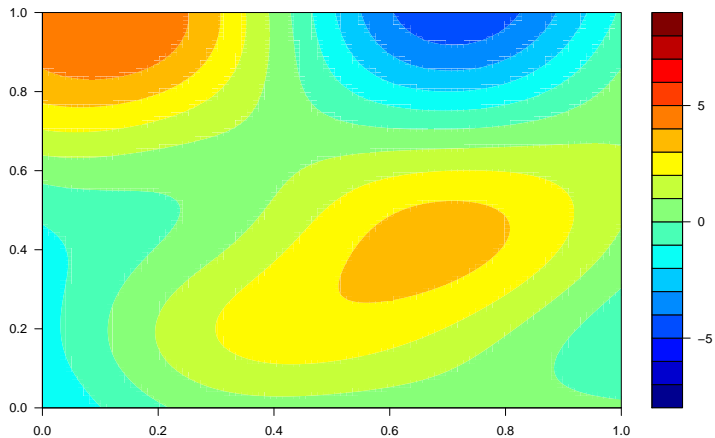
$$p(\mathbf{y}, \mathbf{s}_0) = \bar{\mathbf{y}}^* + \boldsymbol{\Sigma}_{X_0, Y}^t \boldsymbol{\Sigma}_Y^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{1} \bar{\mathbf{y}}^*),$$

em que

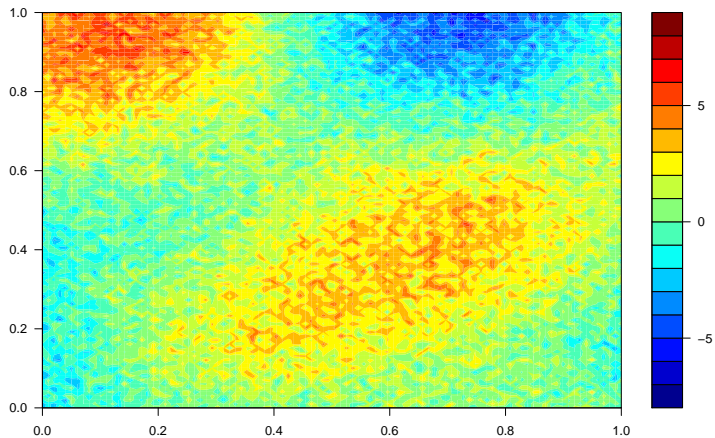
$$\bar{\mathbf{y}}^* = \frac{\mathbf{1}^t \boldsymbol{\Sigma}_Y^{-1} \mathbf{y}}{\mathbf{1}^t \boldsymbol{\Sigma}_Y^{-1} \mathbf{1}}.$$

De fato, $\bar{\mathbf{y}}^*$ é um estimador de quadrados mínimos generalizados de μ .

Exemplo simulado (Processo Gaussiano, $\sigma_X^2 = 5$, $\phi = 0.4$)



Exemplo simulado + erro ($\sigma_\varepsilon^2 = 1$)

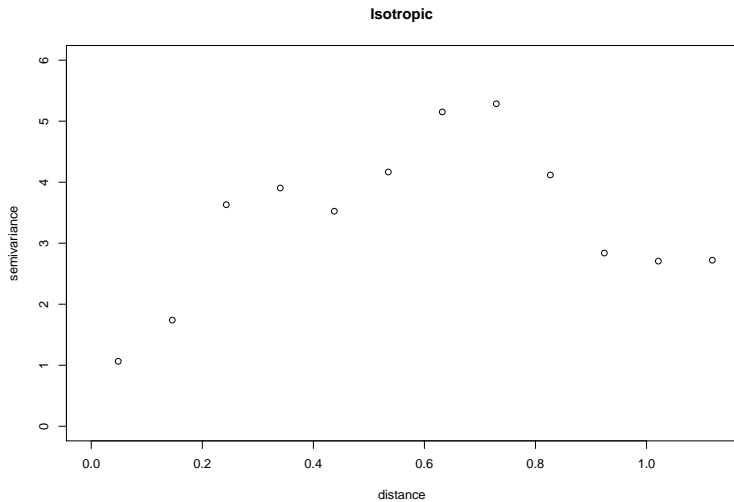


Variograma empírico

```
library(geoR)
# Isotropic
empVariog <- variog(coords = cbind(sX, sY),
                    data = sZ)

## variog: computing omnidirectional variogram
```

Variograma empírico



Estimando um modelo

Preciso colocar o comando `fix.nugget = FALSE`, caso contrário o `geoR` só ajusta o modelo de X (note: às vezes o algoritmo não converge; permitir nugget tende a produzir resultados mais estáveis).

```
contrast <- variofit(empVariog,  
                    ini.cov.pars = c(sigma2 = 3, phi = 0.4),  
                    cov.model = "gaussian", fix.nugget = FALSE)
```

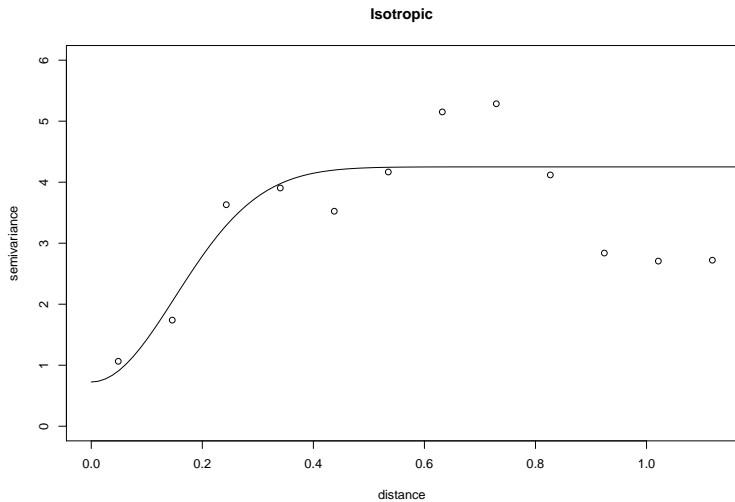
```
## variofit: covariance model used is gaussian  
## variofit: weights used: npairs  
## variofit: minimisation function used: optim
```

Estimando um modelo

```
contrast
```

```
## variofit: model parameters estimated by WLS (weighted least squares):  
## covariance model is: gaussian  
## parameter estimates:  
##   tausq sigmasq   phi  
##  0.7249  3.5259  0.2131  
## Practical Range with cor=0.05 for asymptotic range: 0.3687664  
##  
## variofit: minimised weighted sum of squares = 787.2333
```

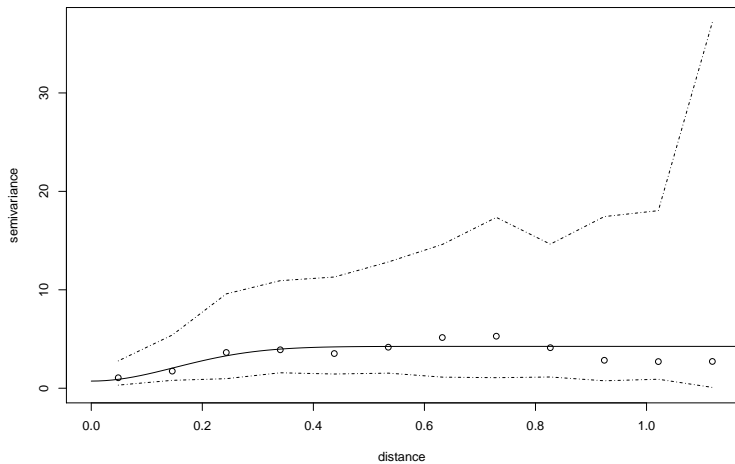

Estimando um modelo



Envelopes (bootstrap)

```
set.seed(1)
envelope <- variog.model.env(geodata = list(coords = cbind(sX, sY),
                                             data = sZ),
                            obj.variog = empVariog,
                            model.pars = contrast,
                            nsim = 1000)
plot(empVariog, envelope.obj = envelope)
lines(contrast)
```

Envelopes (bootstrap)



Predição

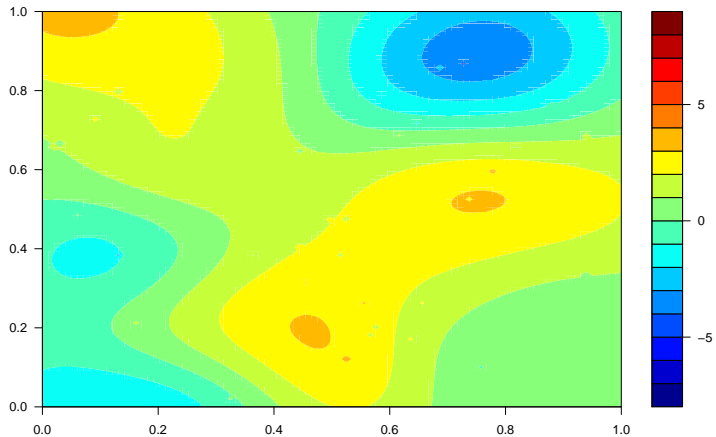
```
prep <- krige.control(type.krige = "ok",
                     cov.model = contrast$cov.model,
                     cov.pars = contrast$cov.pars,
                     nugget = contrast$nugget)

loci <- expand.grid(X = x.seq,
                  Y = y.seq)

kc <- krige.conv(coords = cbind(sX, sY), data = sZ,
                locations = loci,
                krige = prep)

## krige.conv: model with constant mean
## krige.conv: Kriging performed using global neighbourhood
```

Predição



Erro de previsão

A variância da superfície de Kriging será dado por

$$\sigma^2(\mathbf{s}_0) = 2 \sum_{i=1}^n l_i \gamma(\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n l_i l_j \gamma(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j).$$

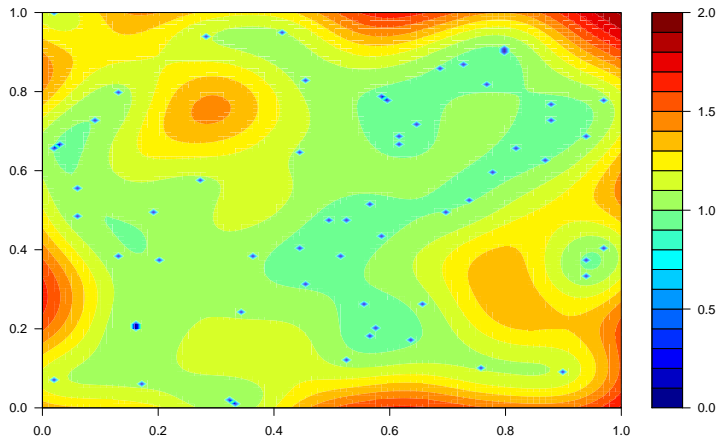
Alternativamente,

$$\sigma^2(\mathbf{s}_0) = \gamma^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \gamma - \frac{(1 - \mathbf{1}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \gamma)^2}{\mathbf{1}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{1}}.$$

Às vezes, usa-se a raiz (softwares tendem a fazer mapa do desvio padrão).

A variância deve ser mínima nos locais onde o processo foi amostrado!

Erro de previsão (caso simulado)



Wolfcamp-Aquifer data

Os dados a seguir estão no livro do Cressie (1993; originalmente em Cressie, 1989) e correspondem a medidas de *piezometric-head* do solo (perfura-se o solo com um cano fino, e marca-se a altura que o lençol subterrâneo atinge, em *ft. above sea level*). A idéia é que diferenças de nível de *piezometric-head* podem indicar a orientação da difusão de água em um lençol subterrâneo.

O objetivo do estudo era determinar onde era seguro enterrar lixo radioativo. Enterrar em uma região de alto nível de *piezometric-head* pode levar à contaminação do solo na direção de difusão.

```
str(wolfcamp <- read.csv("wolfcamp.csv", skip = 1))
```

```
## 'data.frame':      85 obs. of  3 variables:
## $ X      : num  42.78 -27.4 -1.16 -18.62 96.47 ...
## $ Y      : num  127.6 90.8 84.9 76.5 64.6 ...
## $ Data:  num  1.46 2.55 2.16 2.46 1.76 ...
```


Wolfcamp-Aquifer data

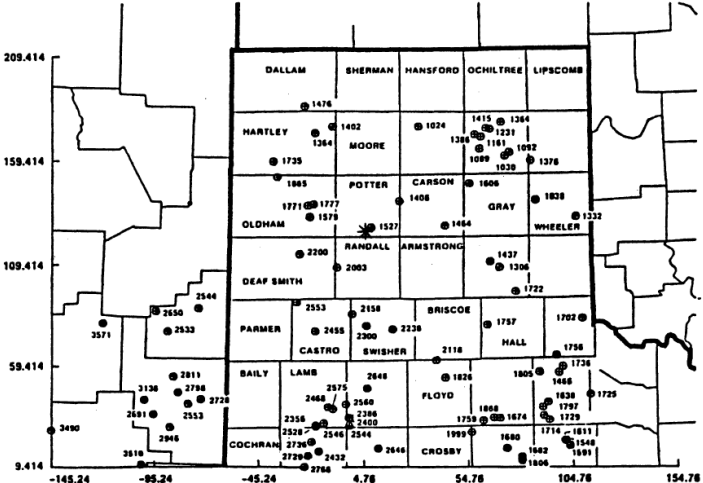
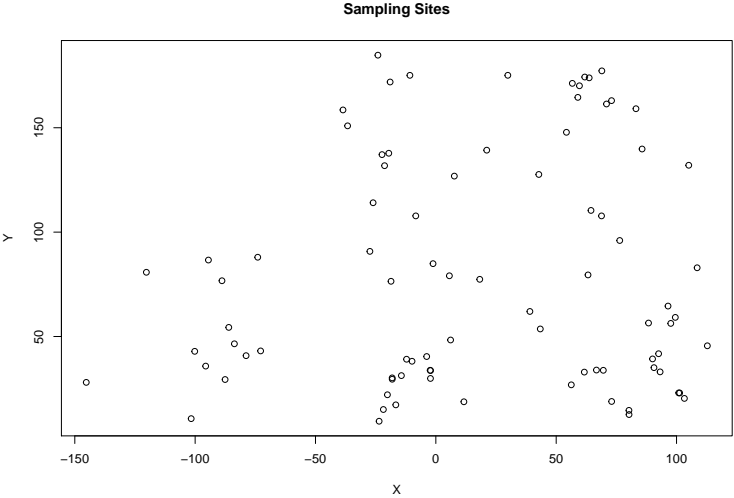


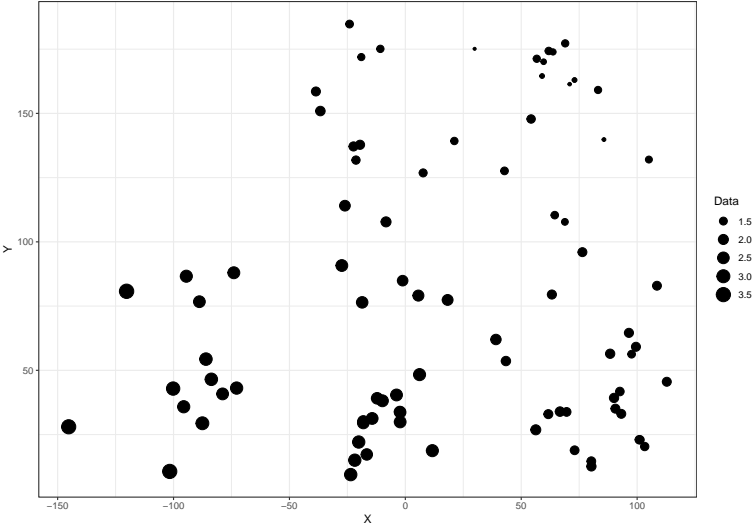
Figure 1. Location and Levels of Piezometric-Head Data in the Wolfcamp Aquifer: *, Location of Amarillo, Texas (Potter County).

Figure 1:

Wolfcamp-Aquifer data



Wolfcamp-Aquifer data

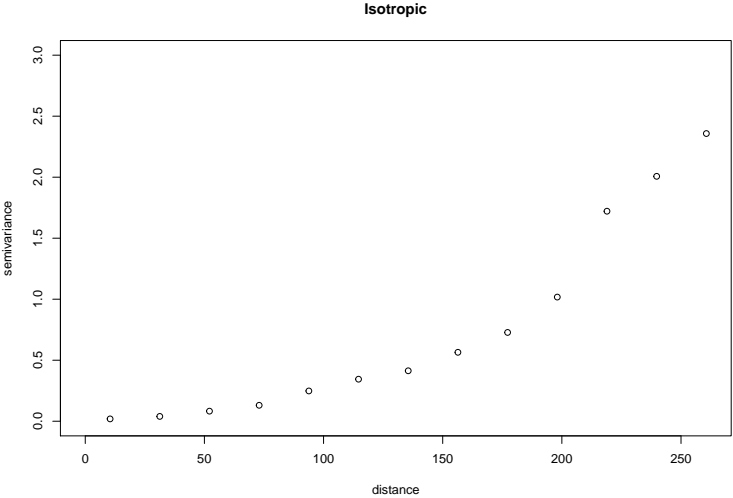


Wolfcamp-Aquifer data

```
library(geoR)
# Isotropic
model <- variog(coords = wolfcamp[,c("X", "Y")],
                data = wolfcamp[, "Data"])

## variog: computing omnidirectional variogram
```

Wolfcamp-Aquifer data



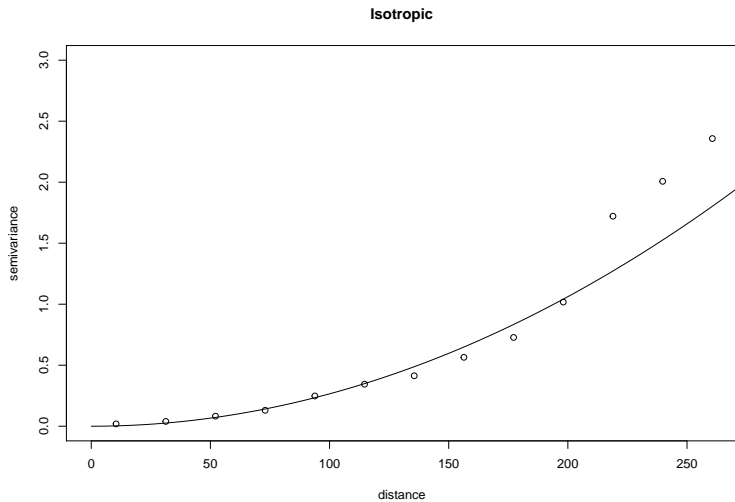
Estimando um modelo

```
contrast <- variofit(model,  
                    ini.cov.pars = c(sigma2 = 3, phi = 30),  
                    cov.model = "gaussian", fix.nugget = FALSE)
```

```
## variofit: covariance model used is gaussian  
## variofit: weights used: npairs  
## variofit: minimisation function used: optim
```

```
plot(model, ylim = c(0, 3), main = "Isotropic")  
lines(contrast)
```

Estimando um modelo



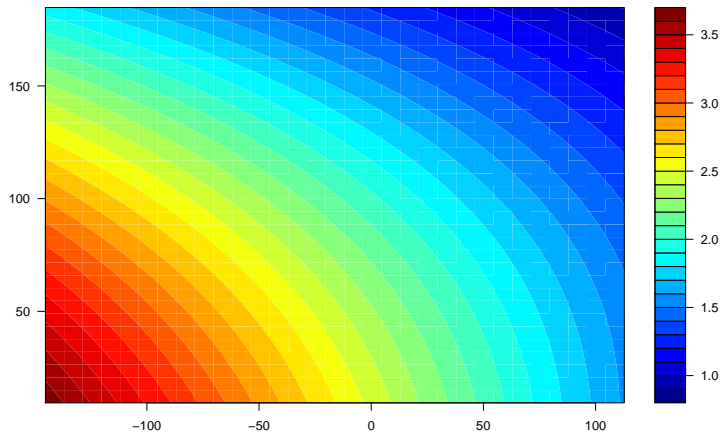
Predição

```
prep <- krige.control(type.krige = "ok",
                     cov.model = contrast$cov.model,
                     cov.pars = contrast$cov.pars,
                     nugget = contrast$nugget + 0.0001) # error
loci <- expand.grid(X = seq(min(wolfcamp$X), max(wolfcamp$X),
                          length.out = 32),
                  Y = seq(min(wolfcamp$Y), max(wolfcamp$Y),
                          length.out = 32))
kc <- krige.conv(coords = wolfcamp[,c("X", "Y")],
                data = wolfcamp[, "Data"],
                locations = loci,
                krige = prep)
```

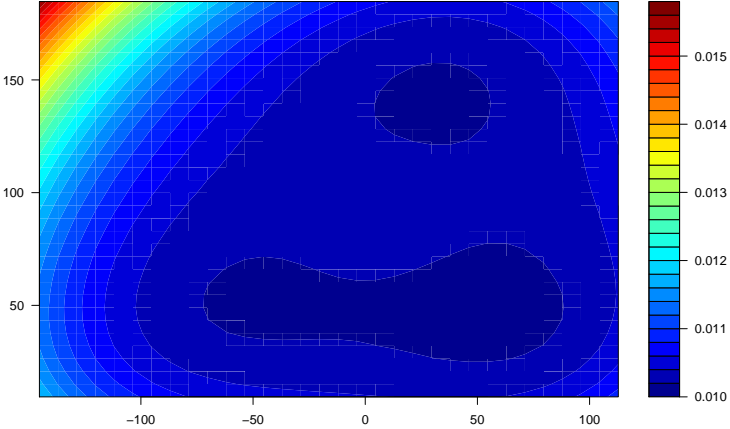
```
## krige.conv: model with constant mean
```

```
## krige.conv: Kriging performed using global neighbourhood
```


Predição



Predição



Kriging universal

O Kriging universal é uma extensão do Kriging ordinário, que permite algum grau de flexibilidade em $\mu(\mathbf{s})$. Nele, o modelo para os dados é

$$X(\mathbf{s}) = \beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j f_j(\mathbf{s}) + \eta(\mathbf{s}),$$

onde η é um processo intrínsecamente estacionário, e f_j são funções **conhecidas**. Os parâmetros $\beta_0, \dots, \beta_p \in \mathbb{R}^{p+1}$ são desconhecidos.

Kriging universal

Como não há interesse em estimar explicitamente β , podemos escrever nosso preditor como

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{s}_0) = \sum_{i=1}^n \ell_i Y(\mathbf{s}_i), \text{ com } \sum_{i=1}^n \ell_i = 1, \sum_{i=1}^n \ell_i f_j(\mathbf{s}_i) = f_j(\mathbf{s}_0), \quad j = 1, \dots, p.$$

As condições

$$\sum_{i=1}^n \ell_i f_j(\mathbf{s}_i) = f_j(\mathbf{s}_0), \quad j = 0, 1, \dots, p$$

garantem que $\mathbb{E}(p(\mathbf{y}, \mathbf{s}_0)) = \mathbb{E}(Y(\mathbf{s}_0))$ para qualquer

$$\mu(\mathbf{s}) = \beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j f_j(\mathbf{s}).$$

Kriging universal

A estratégia para resolver o problema de otimização com restrições, é usar multiplicadores de Lagrange. O Lagrangiano do problema é

$$\min_{\ell_1, \dots, \ell_n, \lambda} \mathbb{E} \left[\left(X_0 - \sum_{i=1}^n \ell_i y_i \right)^2 \right] - 2 \sum_{j=0}^p \lambda_j \left(\sum_{i=1}^n \ell_i f_j(\mathbf{s}_i) - f_j(\mathbf{s}_0) \right),$$

onde $f_0(\mathbf{s}_0) = 1$.

Podemos reescrever o problema anterior em função do variograma, isto é, dadas as restrições, temos

$$\left(X_0 - \sum_{i=1}^n \ell_i y_i \right)^2 = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \ell_i \ell_j (y_i - y_j)^2 / 2 + 2 \sum_{i=1}^n \ell_i (X_0 - y_i)^2 / 2,$$

portanto o problema torna-se

$$\min_{\ell_1, \dots, \ell_n, \lambda} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \ell_i \ell_j \gamma(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) + 2 \sum_{i=1}^n \ell_i \gamma(\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_i) - 2\lambda \left(\sum_{i=1}^n \ell_i - 1 \right)$$

Kriging universal

Em notação matricial, para uma coleção $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n$, temos

$$\mathbf{x} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\eta},$$

onde as colunas de $\mathbf{Z}_{n \times p+1}$ correspondem às funções $1, f_1, \dots, f_p$ avaliadas em $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n$.

Defina

$$\boldsymbol{\gamma}_U = \left(\gamma(\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_1) \quad \cdots \quad \gamma(\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_n) \quad 1 \quad f_1(\mathbf{s}_0) \quad \cdots \quad f_p(\mathbf{s}_0) \right),$$

e

$$\boldsymbol{\Gamma}_U = \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_1) & \cdots & \gamma(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_n) & 1 & f_1(\mathbf{s}_1) & \cdots & f_p(\mathbf{s}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_1) & \cdots & \gamma(\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_n) & 1 & f_1(\mathbf{s}_n) & \cdots & f_p(\mathbf{s}_n) \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ f_1(\mathbf{s}_1) & \cdots & f_1(\mathbf{s}_n) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_p(\mathbf{s}_1) & \cdots & f_p(\mathbf{s}_n) & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Kriging universal

Derivando a equação com relação a $\ell_1, \dots, \ell_n, \lambda_0, \dots, \lambda_p$, obtemos que o ℓ ótimo é

$$(\ell, \lambda)^t = \Gamma_U^{-1} \gamma_U^t,$$

ou explicitamente

$$\ell^t = \left(\gamma + \mathbf{Z}(\mathbf{Z}^t \Gamma^{-1} \mathbf{Z})^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{Z}^t \Gamma^{-1} \gamma) \right)^t \Gamma^{-1},$$

onde $\mathbf{z} = (1, f_1(\mathbf{s}_0), \dots, f(\mathbf{s}_0))$ e

$$\lambda^t = -(\mathbf{z} - \mathbf{Z}^t \Gamma^{-1} \gamma)^t (\mathbf{Z}^t \Gamma^{-1} \mathbf{Z})^{-1}.$$

Kriging universal

Aplique a matriz de Kriging ordinário em dados y_1, \dots, y_n , e temos que

$$\rho(\mathbf{y}, \mathbf{s}_0) = \ell^t \mathbf{y} = \left(\gamma + \mathbf{Z}(\mathbf{Z}^t \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{Z})^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{Z}^t \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \gamma) \right)^t \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{y}$$

é igual a

$$\rho(\mathbf{y}, \mathbf{s}_0) = \mathbf{h} \mathbf{y} + \gamma^t \boldsymbol{\Gamma}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{H} \mathbf{y}),$$

em que

$$\mathbf{H} = \mathbf{Z}(\mathbf{Z}^t \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^t \boldsymbol{\Gamma}^{-1}, \quad \mathbf{h} = \mathbf{z}(\mathbf{Z}^t \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^t \boldsymbol{\Gamma}^{-1}.$$

De fato, $\mathbf{H} \mathbf{y}$ é um estimador de quadrados mínimos generalizados de $\mathbf{Z} \boldsymbol{\beta}$.

Kriging universal: erro de previsão, escolha de f

A fórmula para a variância do Kriging universal é dado por

$$\sigma^2(\mathbf{s}_0) = \boldsymbol{\gamma}^t \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \boldsymbol{\gamma} - (\mathbf{z} - \mathbf{Z}^t \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \boldsymbol{\gamma})^t (\mathbf{Z}^t \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{Z})^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{Z}^t \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \boldsymbol{\gamma}).$$

Como f_1, \dots, f_p , devem ser conhecidas para todo $\mathbf{s} \in \mathcal{D}$, é comum utilizar polinômios; por exemplo um polinômio de segunda ordem: $f_1(\mathbf{s}) = s_1$, $f_2(\mathbf{s}) = s_2$, $f_3(\mathbf{s}) = s_1^2$, $f_4(\mathbf{s}) = s_1 s_2$, e $f_5(\mathbf{s}) = s_2^2$. Na prática, é muito difícil obter covariáveis conhecidas em todo $\mathbf{s} \in \mathcal{D}$, mas polinômios são razoáveis para aproximar funções suaves (pense em expansões de Taylor...).

Kriging universal: um problema

Em geral, métodos de estimação de máxima verossimilhança englobam bem a presença de f_1, \dots, f_n (basta aumentar a verossimilhança com β). Porém, métodos baseados em contraste não funcionam bem com a presença de *trends* nos dados.

Uma solução é obter estimativas iniciais dos parâmetros θ do variograma como antes, estimar

$$\hat{\beta}_{\text{GLS}}^{(1)} = \left(\mathbf{Z}^t \Gamma_{(1)}^{-1} \mathbf{Z} \right)^{-1} \mathbf{Z}^t \Gamma_{(1)}^{-1} \mathbf{y},$$

e reestimar os parâmetros θ do variograma usando agora o resíduo

$$\mathbf{r}_{(1)} = \mathbf{Z} \hat{\beta}_{\text{GLS}}^{(1)},$$

iterando se necessário.

Na prática, o estimador acima ainda é viesado; o viés afeta pouco a interpolação/Kriging, mas pode subestimar a variância do Kriging universal (Cressie, 1993, p.168).

Estimando modelo UK (usando verossimilhança)

```
m1 <- likfit(coords = wolfcamp[,c("X","Y")],  
             data = wolfcamp["Data"],  
             trend = "2nd", # options: "cte", "1st", "~ ..."  
             ini.cov.pars = c(sigma2 = 3, phi = 30),  
             cov.model = "gaussian", fix.nugget = FALSE,  
             messages = FALSE)
```

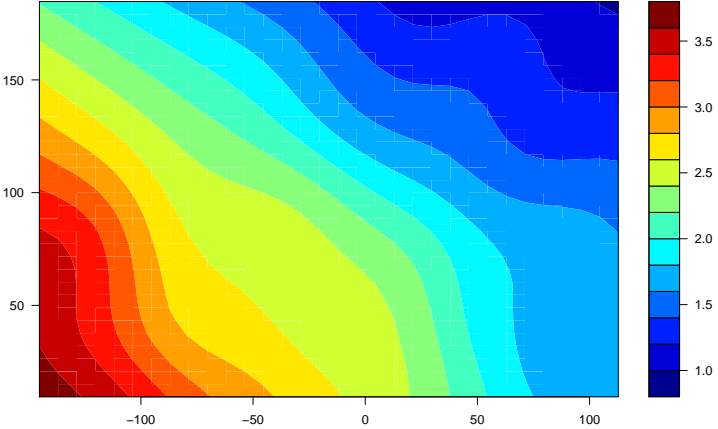
Predição

Note prep usa `type.krige = "ok"` mas especificar o `trend.d`, `trend.l` muda o tipo pra Universal Kriging.

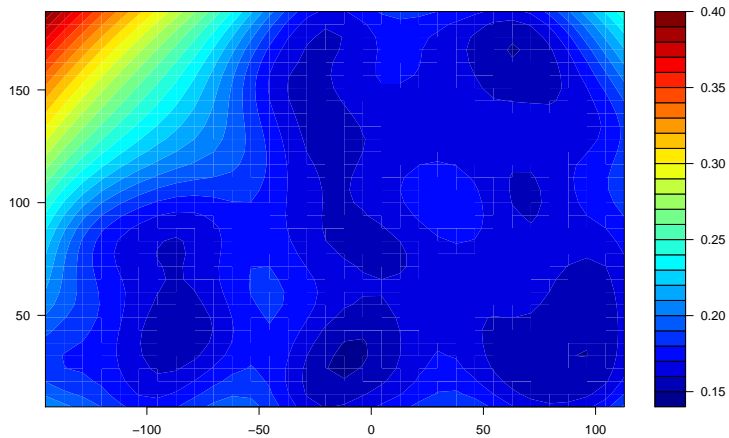
```
prepUK <- krige.control(type.krige = "ok",
                        trend.d = ml$trend,
                        trend.l = ml$trend,
                        cov.model = ml$cov.model,
                        cov.pars = ml$cov.pars,
                        nugget = ml$nugget)
kcUK <- krige.conv(coords = wolfcamp[,c("X", "Y")],
                  data = wolfcamp[, "Data"],
                  locations = loci,
                  krige = prepUK)
```

```
## krige.conv: model with mean given by a 2nd order polynomial on the coord
## krige.conv: Kriging performed using global neighbourhood
```

Predição



Predição



Validação cruzada

Para decidir entre diferentes métodos (OK, UK linear, UK com polinômios de ordem 2), podemos usar validação cruzada.

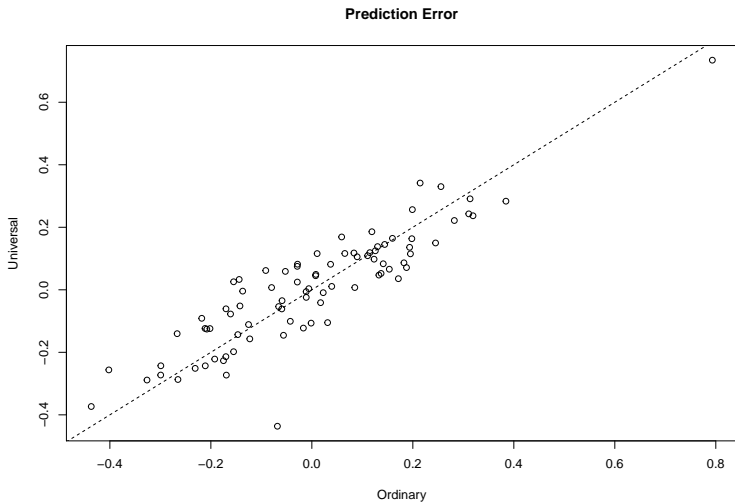
```
contrast$nugget <- 0.0001 # Hack
CVCT <- xvalid(coords = wolfcamp[,c("X", "Y")],
               data = wolfcamp[, "Data"],
               model = contrast, messages = FALSE)
var(CVCT$error)
```

```
## [1] 0.03881639
```

```
CVML <- xvalid(coords = wolfcamp[,c("X", "Y")],
               data = wolfcamp[, "Data"],
               model = ml, messages = FALSE)
var(CVML$error)
```

```
## [1] 0.03376669
```

Validação cruzada



Referências I

Cressie, N. (1989). Geostatistics. *The American Statistician*, 43(4):197–202.

Cressie, N. (1993). *Statistics for Spatial Data, 2nd edition*. Wiley, New York.