Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

Cleber Fernando Colle

UMA FORMA ALFABÉTICA FRACA DA CONJECTURA DE NIVAT

CAMPINAS
2017

Cleber Fernando Colle

UMA FORMA ALFABÉTICA FRACA DA CONJECTURA DE NIVAT

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em matemática.

Orientador: Eduardo Garibaldi

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno Cleber Fernando Colle, e orientada pelo Prof. Dr Eduardo Garibaldi.

Campinas

2017

Agência(s) de fomento e nº(s) de processos(s): CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

Colle, Cleber Fernando, 1985-
C685f Uma forma alfabética fraca da conjectura de Nivat / Cleber Fernando Colle. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Eduardo Garibaldi.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Análise combinatória. 2. Linguagens formais. 3. Dinâmica simbólica. I. Garibaldi, Eduardo, 1977-. II. Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: An alphabetical weak form of the Nivat's conjecture
Palavras-chave em inglês:
Combinatorial analysis
Formal languages
Symbolic dynamics
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Eduardo Garibaldi [Orientador]
Pedro José Catuogno
Fabien Durand
Tiago Pereira da Silva
Rodrigo Bissacot Proença
Data de defesa: 23-02-2017
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 23 de fevereiro de 2017 e aprovada Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). EDUARDO GARIBALDI

Prof(a). Dr(a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO

Prof(a). Dr(a). FABIEN DURAND

Prof(a). Dr(a). TIAGO PEREIRA DA SILVA

Prof(a). Dr(a). RODRIGO BISSACOT PROENÇA

Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno

Aos meus avós,
Hilário Colle, Aulina Lima Colle,
Casemiro Stefanski (in memorian) e Dalva Kurtz Stefanski (in memorian)
dedico.

— Mas tu é um caco!
— Caco tu...

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter, com suas mãos, me guardado e sustentado até aqui.

Ao Prof. Dr. Eduardo Garibaldi por todos os ensinamentos e pela orientação.

Aos professores do Departamento de Matemática do IMECC-UNICAMP pela minha formação durante o mestrado e o doutorado.

Aos professores do Departamento de Matemática da UNIOESTE-FOZ pela minha formação durante a graduação.

À minha família pelo apoio e amor incondicional. Em especial, à minha esposa Grasiele por ter me dado o suporte necessário em todos os sentidos durante o doutorado e por compartilhar dos meus sonhos, e aos meus pais Arlindo Colle e Maria Iolanda Stefanski por terem me ensinado a ser um homem íntegro e por terem me incentivado a continuar estudando e nunca desistir dos meus objetivos.

Aos meus queridos irmãos Viviani, Aline e Nícolas pelo carinho e amizade.

Aos amigos do IMECC pela companhia. Em especial, aos meus amigos de república Félix e Jerry pela parceria.

Ao João Tiago e ao Lino pela ótima companhia.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho não seria possível.

Resumo

Neste trabalho, ao considerar a versão alfabética do Teorema de Morse-Hedlund [14], provamos algumas formas fracas da Conjectura de Nivat e evidenciamos alguns problemas em aberto correlacionados. Em particular, seguindo passos de Bryna Kra e Van Cyr em [7], apresentamos um melhoramento alfabético do melhor resultado relacionado à conjectura até o momento. Além disso, utilizando a cardinalidade de alfabetos apropriadamente construídos, foi definida para direções não-expansivas uma noção pouco restritiva que, assim como baixa complexidade, força a existência de conjuntos balanceados e, portanto, periodicidade.

Palavras-chave: Análise Combinatória, Linguagens Formais, Dinâmica Simbólica.

Abstract

In this work, we consider the alphabetical version of the Morse-Hedlund's Theorem [14] and, from it, we prove some weak forms of the Nivat's Conjecture and we evidence some correlated open problems. In particular, following steps of Bryna Kra and Van Cyr in [7], we present an alphabetical improvement of the best result related to the conjecture until this moment. Furthermore, using the cardinality of appropriately constructed alphabets, it was defined for non-expansive directions a notion little restrictive that, as well as low complexity, forces the existence of balanced sets and, therefore, periodicity.

Keywords: Combinatorial Analysis, Formal Languages, Symbolic Dynamics.

Lista de Símbolos

$\mathcal{A}$	Alfabeto finito.
$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$	Espaço de todas as sequência indexadas em $\mathbb{Z}^d$ com imagem em $\mathcal{A}$.
T^g	Aplicação *shift*.
$\eta\|_{\mathcal{U}}$	Configuração $(\eta_g)_{g\in\mathcal{U}} \in \mathcal{A}^{\mathcal{U}}$.
$L(\mathcal{S},\eta)$	$\Big\{(T^g\eta)\|_{\mathcal{S}} \in \mathcal{A}^{\mathcal{S}} : g \in \mathbb{Z}^d\Big\}$.
$P_\eta(\mathcal{S})$	Cardinalidade de $L(\mathcal{S},\eta)$.
$Orb(\eta)$	$\{T^g\eta : g \in \mathbb{Z}^d\}$.
$R_{n_1,\ldots,n_d}$	$\Big\{(t_1,\ldots,t_d) \in \mathbb{Z}^d : 0 \leq t_i < n_i \text{ para todo } 1 \leq i \leq d\Big\}$.
$\\|\cdot\\|$	Norma Euclidiana.
$\operatorname{dist}(g,F)$	$\inf\{\\|g-h\\| : h \in F\}$.
F^t	$\{g \in \mathbb{Z}^d : \operatorname{dist}(g,F) \leq t\}$.
$\mathbb{G}_1$	Família de todas as retas de $\mathbb{R}^2$ passando pela origem.
X_η	$\overline{Orb(\eta)}$, onde a barra indica o fecho.
$\operatorname{Conv}(\mathcal{S})$	Envelope convexo de $\mathcal{S}$.
$V(\mathcal{S})$	Conjunto dos vértices de $\mathcal{S}$.
$E(\mathcal{S})$	Conjunto das arestas de $\mathcal{S}$.
$\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$	Família dos subconjuntos finitos, convexos e não vazios de $\mathbb{Z}^2$.
$\mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$	Subfamília de $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ formada pelos conjuntos tais que o envelope convexo tem área não nula.
$\vec{v}_\ell$	Vetor não nulo paralelo a $\vec{\ell}$ com norma mínima.
$\mathcal{H}(\vec{\ell})$	Semiplano (positivamente orientado) tal que $\vec{\ell} \in E(\mathcal{H}(\vec{\ell}))$.
$\mathcal{H}(\vec{\ell}^{(-1)})$	Semiplano definido como a interseção de todos os semiplanos que contêm $\mathcal{H}(\vec{\ell})$ estritamente e cuja aresta é paralela a $\vec{\ell}$.
$\mathcal{H}(\vec{\ell}^{(+1)})$	Semiplano definido como a união de todos os semiplanos que estão contidos em $\mathcal{H}(\vec{\ell})$ estritamente e cuja aresta é paralela a $\vec{\ell}$.

$\vec{\ell}_{\mathcal{U}}$	Reta orientada paralela a $\vec{\ell}$ que satisfaz $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}(\vec{\ell}_{\mathcal{U}})$ e $\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$.
$L_{\vec{\ell}}(\mathcal{U}, x)$	$\Big\{(T^{t\vec{v}_\ell}x)\vert_{\mathcal{U}} : t \in \mathbb{Z}\Big\}$.
$N_{\vec{\ell},\mathcal{U}}(\gamma)$	$\vert\{\gamma' \in L(\mathcal{U}, \eta) : \gamma'\vert_{\mathcal{U}\setminus\vec{\ell}_{\mathcal{U}}} = \gamma\}\vert$.
$\mathcal{N}(\vec{\ell},\mathcal{U})$	Conjunto das configurações $x \in X_\eta$ que satisfazem (1.6.2).
$i_{\mathcal{U}}(\vec{\ell'})$	Ponto inicial de $\ell' \cap \mathcal{U}$ com relação a orientação de $\vec{\ell'}$.
$f_{\mathcal{U}}(\vec{\ell'})$	Ponto final de $\ell' \cap \mathcal{U}$ com relação à orientação de $\vec{\ell'}$.
$\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U})$	$\Big\{i_{\mathcal{U}}(\vec{\ell'}) \in \mathbb{Z}^2 : \vec{\ell'}$ é paralela a $\vec{\ell},\ \vec{\ell'} \neq \vec{\ell}_{\mathcal{U}},\ \vert\ell' \cap \mathcal{U}\vert \geq p\Big\}$.
$\mathcal{F}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U})$	$\Big\{f_{\mathcal{U}}(\vec{\ell'}) \in \mathbb{Z}^2 : \vec{\ell'}$ é paralela a $\vec{\ell},\ \vec{\ell'} \neq \vec{\ell}_{\mathcal{U}},\ \vert\ell' \cap \mathcal{U}\vert \geq p\Big\}$.
$\vec{F}(a)$	$(\vec{\ell},\mathcal{U},p)$-semifaixa $\bigcup_{t\geq a}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}) + t\vec{v}_\ell)$.
$\overleftarrow{F}(a)$	$(\vec{\ell},\mathcal{U},p)$-semifaixa $\bigcup_{t\geq a}(\mathcal{F}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}) - t\vec{v}_\ell)$.
$(\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cup \vec{F})(a)$	$\bigcup_{t\geq a}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}) \cup \{i_{\mathcal{U}}(\vec{\ell}_{\mathcal{U}})\} + t\vec{v}_\ell)$.
$(\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cup \overleftarrow{F})(a)$	$\bigcup_{t\geq a}(\mathcal{F}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}) \cup \{f_{\mathcal{U}}(\vec{\ell}_{\mathcal{U}})\} - t\vec{v}_\ell)$.
$\vec{L}_{\vec{\ell},a}(\mathcal{U}, x)$	$\Big\{(T^{t\vec{v}_\ell}x)\vert_{\mathcal{U}} : t \geq a\Big\}$.
$\overleftarrow{L}_{\vec{\ell},a}(\mathcal{U}, x)$	$\Big\{(T^{t\overleftarrow{v}_\ell}x)\vert_{\mathcal{U}} : t \geq a\Big\}$, onde $\overleftarrow{v}_\ell = -\vec{v}_\ell$.
$\mathcal{N}_{\vec{\ell},a}(\vec{\ell},\mathcal{U})$	Conjunto das configurações $x \in X_\eta$ que satisfazem (2.1.1).
$\mathcal{N}_{\overleftarrow{\ell},a}(\vec{\ell},\mathcal{U})$	Conjunto das configurações $x \in X_\eta$ que satisfazem (2.1.2).
$\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa,\tau}$	$A(R_{\kappa,\tau})$, onde $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ fixado é tal que $A(-e_2) = \vec{v}_\ell$.

Sumário

Introdução

Periodicidade e quase-periodicidade são fenômenos com grande importância em várias áreas da matemática e, inclusive, em outras ciências, como, por exemplo, ciências da computação, física e química. Para detalhes, sugere-se ver [1] e [12], mais especificamente os exemplos 6, 7 e 8 de [12].

Fixado um alfabeto finito $\mathcal{A}$, para cada inteiro $n \in \mathbb{N}$, a n-complexidade de uma sequência infinita $\xi = (\xi_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ é definida como sendo o número de palavras distintas da forma $\xi_j\xi_{j+1}\cdots\xi_{j+n-1}$ ocorrendo em ξ. Em 1938, Morse e Hedlund [14] provaram um dos resultados mais célebres em dinâmica simbólica, que estabelece uma conexão entre sequências periódicas (sequências em que existe $m \geq 1$ tal que $\xi_{i+m} = \xi_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$) e complexidade. Denotando por $P_\xi(n)$ a n-complexidade de ξ, Morse e Hedlund provaram que $\xi \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ é periódica se, e somente se, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $P_\xi(n) \leq n$.

A relação entre periodicidade e complexidade no caso unidimensional já é bem entendida e, várias ferramentas poderosas, tal como o grafo de palavras de Rauzy [2, 3], foram desenvolvidas para estudar a função complexidade e suas propriedades. Além disso, em 1940 teve início o estudo das famosas sequências sturmianas [15], isto é, as sequências $\xi \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ aperiódicas tais que $P_\xi(n) = n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Atualmente, pesquisa-se também a relação de periodicidade com outras funções complexidade. Por exemplo, considera-se em [5] nova função complexidade e estuda-se sua relação com recorrência em módulo. Ademais, em outro desdobramento teórico, fixada uma sequência $\xi = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, definindo uma função que a cada palavra $\xi_1\xi_2\cdots\xi_n$ associa um inteiro $\Sigma(\xi_1\xi_2\cdots\xi_n) \in \mathbb{N}$, Kamae e Dong Han [11] provaram que ξ é eventualmente periódica se, e somente se, o limite $\lim_{n\to\infty} \frac{\Sigma(\xi_1\xi_2\cdots\xi_n)}{n^3}$ existe e é maior que zero.

Uma extensão natural da função complexidade para altas dimensões é obtida ao considerar, no lugar de palavras, hiper-retângulos de símbolos, isto é, a $(n_1 \times \cdots \times n_d)$-complexidade de uma configuração $\eta = (\eta_g)_{g\in\mathbb{Z}^d} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ é o número de motivos distintos de tamanho $n_1 \times \cdots \times n_d$ ocorrendo em η. Com relação à periodicidade, a extensão mais apropriada para altas dimensões é dizer que η é periódica quando existir $h \in (\mathbb{Z}^d)^*$ tal que $\eta_{g+h} = \eta_g$ para todo $g \in \mathbb{Z}^d$.

Denotando por $P_\eta(R_{n_1,\ldots,n_d})$ a $(n_1 \times \cdots \times n_d)$-complexidade de $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$, a conjectura de Nivat [16] é apenas a generalização natural do Teorema de Morse-Hedlund para o caso bidimensional.

Conjectura de Nivat. *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, se existem $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $P_\eta(R_{n,k}) \leq nk$, então η é periódica.*

O passo inicial em direção à prova da conjectura foi dado por Sander e Tijdeman [20] ao mostrarem que se $P_\eta(R_{n,2}) \leq 2n$ (ou $P_\eta(R_{2,n}) \leq 2n$) para algum $n \in \mathbb{N}$, então $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ é periódica. Além disso, Sander e Tijdeman [19] deram contra-exemplos do análogo da Conjectura de Nivat em altas dimensões, ou seja, eles provaram que, para todo $d \geq 3$ e $n \geq d$, há configuração $\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ aperiódica tal que $P_\eta(R_{n,\ldots,n}) = 2n^{d-1} + 1$ (ver Exemplo 1.8). Outras formas fracas da Conjectura de Nivat foram sucessivamente obtidas em [9, 18, 6, 13] e são recapituladas na Seção 1.3.

Considerando subconjuntos de $\mathbb{Z}^d$ definíveis pela fórmula de primeira ordem na aritmética de Presburger $\langle \mathbb{Z}; <, + \rangle$ e utilizando critério devido a Muchnik, em [8] Fabien Durand e Michel Rigo exibiram, para qualquer dimensão $d \geq 2$, uma extensão completa do Teorema de Morse-Hedlund.

O melhor resultado sobre a conjectura de Nivat até o momento foi estabelecido por Bryna Kra e Van Cyr [7]. Utilizando a noção de subespaços expansivos de $\mathbb{R}^2$ introduzida por Boyle e Lind [4] que, como o nome indica, é uma generalização da noção clássica de expansividade em dinâmica unidimensional, Bryna Kra e Van Cyr provaram que se existem inteiros $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $P_\eta(R_{n,k}) \leq \frac{1}{2}nk$, então $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ é periódica.

Nossas contribuições

Como as técnicas utilizadas para abordar a conjectura de Nivat, em geral, recorrem ao Teorema de Morse-Hedlund, melhoramentos do teorema no caso unidimensional têm implicações significativas para a teoria no caso bidimensional, como, por exemplo, a flexibilização de hipóteses.

Nesse sentido, ao considerar a versão alfabética do Teorema de Morse-Hedlund [14], foram seguidos passos de Bryna Kra e Van Cyr de maneira a obter uma versão alfabética similar ao melhor resultado relacionado à Conjectura de Nivat até o momento. Na verdade, essa versão pode ser vista como um melhoramento alfabético. Mais especificamente, denotando por $|\mathcal{A}|$ a cardinalidade do alfabeto $\mathcal{A}$, um caso particular do Teorema 3.1 afirma que, para $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ fazendo uso de todos os elementos do alfabeto $\mathcal{A}$, se existem inteiros $n, k \in \mathbb{N}$ tais que

$$P_\eta(R_{n,k}) \leq \frac{1}{2}nk + |\mathcal{A}| - 1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{|\mathcal{A}|-1}{nk}\right) nk,$$

então η é periódica. Note que há configuração $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ para a qual existem $\kappa, \tau \in \mathbb{N}$ tais que $P_\eta(R_{\kappa,\tau}) \leq \frac{1}{2}\kappa\tau + |\mathcal{A}| - 1$, mas

$$P_\eta(R_{n,k}) > \frac{1}{2}nk \quad \forall\, n, k \in \mathbb{N}.$$

De fato, considerando o alfabeto $\mathcal{A}$ formado pelas cores “branco” e “preto”, defina a configuração $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ pondo $\eta_g :=$ "preto" se $g = (a,a) + b(\sum_{i=6}^{c} i, 0)$, onde $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \{-1,0,1\}$ e $c \geq 6$, e $\eta_g :=$ "branco" caso contrário (ver Figura 1.1.1). Observe primeiro que

$$P_\eta(R_{n,k}) = n + k$$

se $n+k \leq 7$. Além disso, usando a simetria dessa configuração com relação à reta identidade, mostra-se que

$$P_\eta(R_{n,k}) = n + k + (1 + 2 + \cdots + n + k - 7) = n + k + \frac{1}{2}(n+k-7)(n+k-6)$$

quando $n + k > 7$. Portanto, não é difícil verificar que

$$P_\eta(R_{n,k}) > \frac{1}{2} nk \quad \forall\, n, k \in \mathbb{N}.$$

Entretanto, para $3, 4 \in \mathbb{N}$ ocorre $P_\eta(R_{3,4}) = 7 = \frac{1}{2} \cdot 12 + |\mathcal{A}| - 1$.

Do Teorema 3.1 também é possível derivar periodicidade a partir de hipótese de caráter assintótico. Mais precisamente, se existem inteiros $n, k \in \mathbb{N}$ tais que

$$P_\eta(R_{n,k}) \leq nk + |\mathcal{A}| - 2,$$

e se há $A \in SL_2(\mathbb{Z})$, com $A(1,0) \notin R_{n,k} - R_{n,k}$ ou $A(0,1) \notin R_{n,k} - R_{n,k}$, e $C > 1$ tais que

$$P_{\eta \circ A}(R_{\kappa,\tau}) \leq C\kappa\tau + |\mathcal{A}| - 1$$

para todo $\kappa, \tau \in \mathbb{N}$ suficientemente grandes, então η é periódica, onde $(\eta \circ A)_g = \eta_{A(g)}$ para todo $g \in \mathbb{Z}^2$ (ver Teorema 3.13).

Embora a hipótese de η ser repetitiva (configuração tal que o fecho de sua órbita é um *subshift* minimal) imponha restrições, uma conexão com periodicidade é estabelecida em um caso particular. De fato, mostramos que, assegurada a existência de conjuntos balanceados, grosso modo, certos conjuntos cuja complexidade é limitada pela complexidade de parte específica do próprio conjunto mais a cardinalidade de alfabetos apropriadamente construídos, repetitividade é uma condição suficiente para estabelecer a Conjectura de Nivat (ver Corolário 2.29). Além disso, também estabelecemos a conjectura utilizando uma noção de repetitividade para retas não-expansivas (ver Proposição 2.33).

Por fim, a noção de conjunto balanceado estabelecida é flexível de tal maneira que, em determinadas situações, mesmo sem a hipótese de baixa complexidade, sua existência ainda está garantida. Além disso, um limitante adequado (pouco restritivo) da complexidade em direções não-expansivas assegura a existência de conjunto balanceado e, portanto, periodicidade (ver Proposições 2.15 e 2.19).

Organização dos capítulos

No capítulo 1, demonstramos as duas versões do Teorema de Morse-Hedlund, apresentamos as noções de subespaço expansivo e não-expansivo introduzidos por Boyle e Lind e a noção de conjunto η-gerador. Em seguida, estabelecemos notações e provamos resultados iniciais necessários para o andamento da teoria.

No capítulo 2, definimos conjuntos balanceados, direções controláveis e provamos algumas versões da Conjectura de Nivat com hipóteses adicionais. Além disso, são enunciados e provados em sua forma alfabética mais geral praticamente todos os resultados necessários para o próximo capítulo.

No capítulo 3, seguindo passos de Bryna Kra e Van Cyr, provamos um dos resultados principais deste trabalho, a saber, o Teorema 3.1.

Capítulo 1

Conceitos iniciais

Neste capítulo, introduzimos conceitos necessários para o desenvolvimento da teoria, provamos uma versão alfabética do Teorema de Morse-Hedlund e enunciamos resultados existentes.

1.1 Configurações, periodicidade e $\mathcal{S}$-complexidade

Para um alfabeto finito $\mathcal{A}$ equipado com a topologia discreta, o qual assumimos ter pelo menos dois elementos, seja $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ o espaço produto munido da topologia produto. Uma configuração $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ tem a forma $(\eta_g)_{g\in\mathbb{Z}^d}$, onde $\eta_g \in \mathcal{A}$ para todo $g \in \mathbb{Z}^d$.

Dado $g = (g_1, \ldots, g_d) \in \mathbb{Z}^d$, seja $\|g\|_\infty := \max\{|g_j|\colon j = 1, \ldots, d\}$ a norma do máximo. Para $a, b \in \mathcal{A}$, seja $\delta(a, b) = 1$ se $a \neq b$, e $\delta(a, b) = 0$ caso contrário. Defina a métrica ρ em $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ por

$$\rho(\eta, \eta') := \sum_{g\in\mathbb{Z}^d} 2^{-\|g\|_\infty} \delta(\eta_g, \eta'_g).$$

A topologia induzida pela métrica ρ coincide com a topologia produto em $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$. Em particular, $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}, \rho)$ é um espaço métrico compacto.

Uma $\mathbb{Z}^d$-*ação* em $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ é um homomorfismo do grupo aditivo $\mathbb{Z}^d$ no grupo dos homeomorfismos de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$. Para cada $g \in \mathbb{Z}^d$, denote por T^g o homeomorfismo correspondente, o qual satisfaz $T^g \circ T^h = T^{g+h}$ e $T^0 = \mathrm{id}_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}}$, onde $0 \in \mathbb{Z}^d$ denota a d-upla $(0, \ldots, 0)$. Um exemplo especial de $\mathbb{Z}^d$-ação que usaremos de agora em diante é chamado *translação*, onde o homeomorfismo correspondente T^g é a aplicação *shift*, ou melhor,

$$T^g\eta = \eta' \;\text{ com } \eta'_u := \eta_{u+g} \quad \forall\ u \in \mathbb{Z}^d.$$

Além disso, recorde que por um *subshift* entendemos um subconjunto de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ fechado e invariante por translações.

Definição 1.1. *Uma configuração $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ é dita ser periódica se há um período $h \in (\mathbb{Z}^d)^*$ tal que $\eta_g = \eta_{g+h}$ para todo $g \in \mathbb{Z}^d$. Se η tiver d períodos linearmente independentes, ela é dita ser d-periódica. As configurações que não são periódicas são chamadas aperiódicas.*

Note que se $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ for uma configuração d-periódica, então para todo vetor $u \in (\mathbb{Z}^d)^*$, existe inteiro $\tau \in \mathbb{Z}$ para o qual η é periódica de período τu.

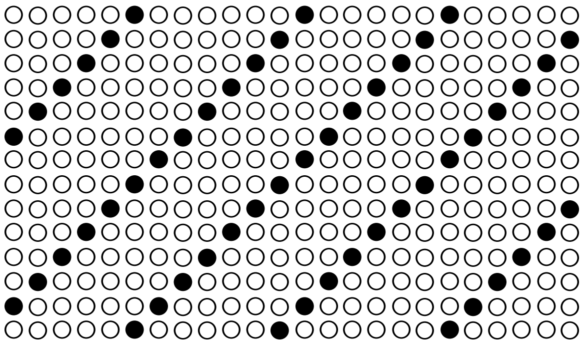


Figura 1.1.1: Configuração periódica.

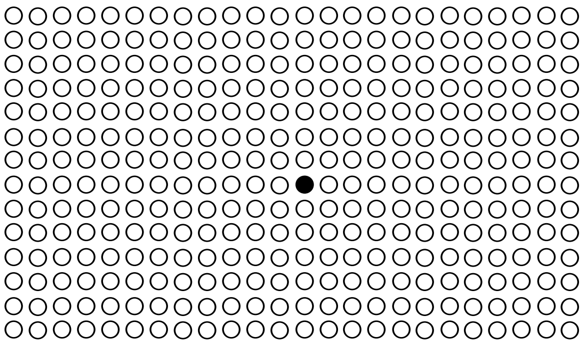


Figura 1.1.2: Configuração aperiódica.

Notação 1.2. *Para $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ e $\mathcal{U} \subset \mathbb{Z}^d$ não vazio, a configuração $\eta|_{\mathcal{U}} := (\eta_g)_{g\in\mathcal{U}} \in \mathcal{A}^{\mathcal{U}}$ denota a restrição de η ao conjunto $\mathcal{U}$.*

Em particular, as configurações da forma $(T^g\eta)|_{\mathcal{U}} \in \mathcal{A}^{\mathcal{U}}$, onde $g \in \mathbb{Z}^d$, são chamadas de *$\mathcal{U}$-configurações de η*. Além disso, não fazemos diferença entre $\eta|_{\mathcal{U}+g}$ e $(T^g\eta)|_{\mathcal{U}}$, ou seja, consideramos $(T^g\eta)|_{\mathcal{U}} = \eta|_{\mathcal{U}+g}$.

Definição 1.3. *Para $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ e $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^d$ não vazio, o conjunto das $\mathcal{S}$-configurações de η é definido por*

$$L(\mathcal{S}, \eta) := \{(T^g\eta)|_{\mathcal{S}} \in \mathcal{A}^{\mathcal{S}} : g \in \mathbb{Z}^d\}.$$

O número $|L(\mathcal{S}, \eta)|$ de $\mathcal{S}$-configurações distintas de $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$, denotado por $P_\eta(\mathcal{S})$, é chamado de $\mathcal{S}$-complexidade de η.

Note que $\mathcal{S}$ na definição acima é um conjunto arbitrário, não necessariamente um hiperparalelepípedo. Assim, no caso bidimensional, esta generalização da função complexidade clássica introduzida por Sander e Tijdeman [19] permite explorar propriedades da minimalidade (com respeito à inclusão) de subconjuntos de $\mathbb{Z}^2$ cuja complexidade não excede sua cardinalidade.

É imediato que se $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$, então $P_\eta(\mathcal{T}) \leq P_\eta(\mathcal{S})$. Mais ainda, ao denotar a $\mathbb{Z}^d$-órbita de $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ por $Orb(\eta) := \{T^g\eta : g \in \mathbb{Z}^d\}$, observe que $P_x(\mathcal{S}) \leq P_\eta(\mathcal{S})$ para qualquer configuração $x \in \overline{Orb(\eta)}$ e qualquer conjunto $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^d$ não vazio, onde a barra denota o fecho.

Observação 1.4. *Ao considerar configurações $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ assumiremos que estas fazem uso de todos os elementos do alfabeto $\mathcal{A}$, ou melhor, que $P_\eta(\{g\}) = |\mathcal{A}|$ para cada $g \in \mathbb{Z}^d$.*

Para inteiros positivos $n_1, \ldots, n_d \in \mathbb{N}$ e $d > 1$, defina o polítopo

$$R_{n_1,\ldots,n_d} := \left\{(t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{Z}^d : 0 \leq t_i < n_i \text{ para todo } 1 \leq i \leq d\right\}.$$

Note que, para qualquer polítopo, sempre é possível construir configuração aperiódica com complexidade igual a cardinalidade do polítopo acrescida de uma unidade. Um exemplo é fornecido pela Figura 1.1.2. Mais especificamente, fixado $u \in \mathbb{Z}^d$, para $\mathcal{A} = \{a, b\}$, seja $\eta_g = a$ se $g \neq u$ e $\eta_g = b$ caso contrário. É imediato que, para quaisquer $n_1, \ldots, n_d \in \mathbb{N}$, vale a igualdade $P_\eta(R_{n_1,\ldots,n_d}) = n_1 \cdots n_d + 1$.

1.2 O caso unidimensional e uma versão alfabética

Inicialmente, para um alfabeto finito $\mathcal{A}$ com cardinalidade $|\mathcal{A}| > 1$, seja $\mathcal{A}^*$ o conjunto formado pelas palavras da forma $\xi_t\xi_{t+1}\cdots\xi_{t+s-1}$, onde $t \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$ e $\xi_{t+i} \in \mathcal{A}$ para todo $0 \leq i \leq s-1$. Observe que duas palavras $\xi_t\xi_{t+1}\cdots\xi_{t+s-1}, \xi'_\tau\xi'_{\tau+1}\cdots\xi'_{\tau+s-1} \in \mathcal{A}^*$ são iguais se $\xi_{t+i} = \xi'_{\tau+i}$ para todo $0 \leq i \leq s-1$. Além disso, para qualquer subconjunto U de $\mathbb{Z}$, $\xi \in \mathcal{A}^U$ denota a sequência $\xi = (\xi_t)_{t \in U}$, onde $\xi_t \in \mathcal{A}$ para todo $t \in U$.

Para uma sequência $\xi \in \mathcal{A}^U$, onde $U = I \cap \mathbb{Z}$ para algum intervalo $I \subset \mathbb{R}$, a n-complexidade de ξ, denotada por $P_\xi(n)$, é definida como sendo o número de palavras distintas da forma

$$\xi_t\xi_{t+1}\cdots\xi_{t+n-1} \in \mathcal{A}^*,$$

onde $\{t, t+1, \ldots, t+n-1\} \subset U$. Em particular, para $U = \{a, a+1, \ldots, a+s-1\}$, note que a n-complexidade de ξ está definida apenas para inteiros positivos $1 \leq n \leq s$.

Definição 1.5. *Seja $U = I \cap \mathbb{Z}$ para algum intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Uma sequência $\xi \in \mathcal{A}^U$ é dita ser periódica de período $m \geq 1$ se $\xi_t = \xi_{t+m}$ para todo $t \in U \cap (U - m)$.*

Para conveniência do leitor, abaixo reproduzimos o resultado de Morse e Hedlund que conecta complexidade e periodicidade no caso unidimensional.

Teorema 1.6 (Morse-Hedlund [15])**.** *Seja $U = I \cap \mathbb{Z}$ para algum intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Dada uma sequência $\xi \in \mathcal{A}^U$, suponha que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $P_\xi(n_0) \leq n_0$.*

(i) Se $U = \{a, a+1, \ldots, a+s-1\}$ e $s > 3n_0$, então a palavra $\xi_{a+n_0}\xi_{a+n_0+1}\cdots\xi_{a+s-n_0}$ é periódica de período no máximo n_0.

(ii) *Se $U = \{i \in \mathbb{Z} : i \geq a\}$, então a sequência infinita $(\xi_t)_{t \in U+n_0} \in \mathcal{A}^{U+n_0}$ é periódica de período no máximo n_0.*

(iii) *Se $U = \mathbb{Z}$, então a sequência infinita $\xi \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ é periódica de período no máximo n_0.*

Prova. Inicialmente, sejam $U = \{a, a+1, \ldots, a+s-1\}$ e $s > 3n_0$. Se $P_\xi(1) = 1$, a palavra $\xi_{a+n_0}\xi_{a+n_0+1}\cdots\xi_{a+s-n_0} \in \mathcal{A}^*$ é periódica de período 1. Caso contrário, como $P_\xi(1) > 1$, há $1 < k \leq n_0$ minimal tal que $P_\xi(k) \leq k$. Em particular, obtemos que $P_\xi(k) = P_\xi(k-1)$, ou seja, para $0 \leq t < t' \leq s - n_0 - (k-1)$, se

$$\xi_{a+t}\xi_{a+t+1}\cdots\xi_{a+t+k-2} = \xi_{a+t'}\xi_{a+t'+1}\cdots\xi_{a+t'+k-2},$$

então $\xi_{a+t+k-1} = \xi_{a+t'+k-1}$. Pelo Princípio da Casa dos Pombos, existem $m, m' \in \mathbb{Z}_+$, com $0 \leq m < m' \leq k$, tais que

$$\xi_{a+m}\xi_{a+m+1}\cdots\xi_{a+m+k-1} = \xi_{a+m'}\xi_{a+m'+1}\cdots\xi_{a+m'+k-1}.$$

Por indução, segue que $\xi_{a+m+i} = \xi_{a+m'+i}$ para todo $0 \leq i \leq s - n_0 - m'$, ou seja, para cada $0 \leq i \leq s - n_0 - m'$, se $\tau = a + m + i$, então $\xi_\tau = \xi_{a+m+i} = \xi_{a+m'+i} = \xi_{\tau+(m'-m)}$, ou seja, a palavra $\xi_{a+m}\xi_{a+m+1}\cdots\xi_{a+s-n_0} \in \mathcal{A}^*$ é periódica de período $m' - m \leq n_0$.

No caso em que $U = \{i \in \mathbb{Z} : i \geq a\}$ para algum $a \in \mathbb{Z}$, o resultado segue usando o mesmo argumento. Por fim, no caso em que $U = \mathbb{Z}$, para quaisquer $t, t' \in \mathbb{Z}$ com $t < t'$, se

$$\xi_t\xi_{t+1}\cdots\xi_{t+k-2} = \xi_{t'}\xi_{t'+1}\cdots\xi_{t'+k-2},$$

além de $\xi_{t+k-1} = \xi_{t'+k-1}$, temos também que $\xi_{t-1} = \xi_{t'-1}$, e o resultado segue aplicando o mesmo raciocínio de antes aos dois lados. $\square$

Utilizando as mesmas linhas da prova acima, o Teorema de Morse-Hedlund pode ser naturalmente estendido para uma versão em que se leva em conta a cardinalidade do alfabeto. Curiosamente, é pouco conhecida a versão alfabética do Teorema de Morse-Hedlund, tanto que deduzimos o teorema abaixo desconhecendo o Teorema 7.4 de [14].

Recordando que uma sequência sturmiana $\xi \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ satisfaz $P_\xi(n) = n + 1$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, note que o teorema abaixo não entra em conflito com a definição de tais sequências.

Teorema 1.7 (Morse-Hedlund Alfabético)**.** *Seja $U = I \cap \mathbb{Z}$ para algum intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Dada uma sequência $\xi \in \mathcal{A}^U$ com $P_\xi(1) = |\mathcal{A}|$, suponha que $P_\xi(n_0) \leq n_0' := n_0 + |\mathcal{A}| - 2$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$.*

(i) *Se $U = \{i \in \mathbb{Z} : i \geq a\}$, então a sequência infinita $(\xi_t)_{t \in U+n_0'} \in \mathcal{A}^{U+n_0'}$ é periódica de período no máximo n_0'.*

(ii) *Se $U = \mathbb{Z}$, então a sequência infinita $\xi \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ é periódica de período no máximo n_0'.*

Prova. Inicialmente, seja $U = \{i \in \mathbb{Z} : i \geq a\}$. Note que do fato de $P_\xi(1) = |\mathcal{A}| > 1 + |\mathcal{A}| - 2$, há $1 < k \leq n_0$ minimal tal que $P_\xi(k) \leq k + |\mathcal{A}| - 2$, o que implica que $P_\xi(k) = P_\xi(k-1)$, ou seja, para quaisquer $t, t' \in U$ com $t < t'$, se

$$\xi_t \xi_{t+1} \cdots \xi_{t+k-2} = \xi_{t'} \xi_{t'+1} \cdots \xi_{t'+k-2},$$

então $\xi_{t+k-1} = \xi_{t'+k-1}$. Pelo Princípio da Casa dos Pombos, existem inteiros $m, m' \in \mathbb{Z}_+$, com $0 \leq m < m' \leq k + |\mathcal{A}| - 2$, tais que

$$\xi_{a+m} \xi_{a+m+1} \cdots \xi_{a+m+k-1} = \xi_{a+m'} \xi_{a+m'+1} \cdots \xi_{a+m'+k-1}.$$

Assim, como $P_\xi(k) = P_\xi(k-1)$, segue por indução que $\xi_{a+m+i} = \xi_{a+m'+i}$ para todo $i \in \mathbb{Z}_+$. Em particular, para cada inteiro $\tau \geq a + m$, existe $i \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$\xi_\tau = \xi_{a+m+i} = \xi_{a+m'+i} = \xi_{\tau+(m'-m)}, \tag{1.2.1}$$

ou seja, a sequência infinita $(\xi_t)_{t \in U+m} \in \mathcal{A}^{U+m}$ é periódica de período $m' - m \leq n_0'$. No caso em que $U = \mathbb{Z}$, para quaisquer $t, t' \in \mathbb{Z}$ com $t < t'$, se

$$\xi_t \xi_{t+1} \cdots \xi_{t+k-2} = \xi_{t'} \xi_{t'+1} \cdots \xi_{t'+k-2},$$

então $\xi_{t-1} = \xi_{t'-1}$ e $\xi_{t+k-1} = \xi_{t'+k-1}$, e o resultado segue como antes. $\square$

1.3 Sobre a Conjectura de Nivat

A conjectura de Nivat [16] é a generalização natural do Teorema de Morse-Hedlund para o caso bidimensional.

Conjectura de Nivat. *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, se existem $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $P_\eta(R_{n,k}) \leq nk$, então η é periódica.*

Sander e Tijdeman [19] deram contra-exemplos do análogo da Conjectura de Nivat em altas dimensões como o destacado a seguir.

Exemplo 1.8. *Considere a configuração $\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^3}$ consistindo de duas retas ortogonais de 1's, distando $n \geq 3$ uma da outra, com as demais entradas nulas. Mais precisamente, defina $\eta_g := 1$ se $g = (i,0,0)$ ou $g = (0,i,n)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, e $\eta_g := 0$ caso contrário. É fácil ver que, para o cubo $R_{n,n,n} \subset \mathbb{Z}^3$, vale $P_\eta(R_{n,n,n}) = 2n^2 + 1 < n^3$, entretanto η não é uma configuração periódica.*

Um passo inicial em direção à prova da conjectura foi dado por Sander e Tijdeman [20] ao mostrarem que se $P_\eta(R_{n,2}) \leq 2n$ (ou $P_\eta(R_{2,n}) \leq 2n$) para algum $n \in \mathbb{N}$, então $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ é periódica. Pouco tempo depois, Epifanio, Koskas e Mignosi [9] provaram outra forma fraca da conjectura.

Teorema 1.9 (Epifanio, Koskas e Mignosi [9])**.** *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, se existem $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $P_\eta(R_{n,k}) \leq \frac{1}{144}nk$, então η é periódica.*

Com o auxílio de uma nova função complexidade, Quas e Zamboni [18] melhoraram a constante para $\frac{1}{16}$.

Teorema 1.10 (Quas e Zamboni [18])**.** *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, se existem $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $P_\eta(R_{n,k}) \leq \frac{1}{16}nk$, então η é periódica.*

Utilizando a noção de subespaços expansivos de $\mathbb{R}^2$ definida por Boyle e Lind [4], Bryna Kra e Van Cyr [7] lançaram uma nova luz à conjectura de Nivat ao relacionar subespaços expansivos de $\mathbb{R}^2$ com periodicidade. Com o auxílio de outra noção igualmente importante, o conceito de conjunto η-gerador (ver Subseção 1.5.2), que permite determinar configurações de regiões maiores a partir de configurações de regiões menores, os autores melhoram a constante para $\frac{1}{2}$.

Teorema 1.11 (Cyr e Kra [7])**.** *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, se existem $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $P_\eta(R_{n,k}) \leq \frac{1}{2}nk$, então η é periódica.*

Bryna Kra e Van Cyr [6] também mostraram que se $P_\eta(R_{n,3}) \leq 3n$ (ou $P_\eta(R_{3,n}) \leq 3n$) para algum $n \in \mathbb{N}$, então $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ é periódica.

Por fim, recentemente, com um ponto de vista de geometria algébrica e tendo como ingrediente principal o Teorema dos Zeros de Hilbert, Jarkko Kari e Michal Szabados [13] provaram outra forma fraca da conjectura.

Teorema 1.12 (Kari e Szabados [13])**.** *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, se existem infinitos pares de $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $P_\eta(R_{n,k}) \leq nk$, então η é periódica.*

Embora nosso trabalho contenha vários outros resultados importantes, por ser mais sucinto, aproveitamos para enunciar aqui um caso particular do Teorema 3.1, o qual será provado no capítulo 3.

Teorema 1.13. *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, se existem $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $P_\eta(R_{n,k}) \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{|\mathcal{A}|-1}{nk}\right)nk$, então η é periódica.*

1.4 Subespaços não-expansivos

Suponha que F seja um subespaço de $\mathbb{R}^d$. Para quaisquer $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$, defina

$$\rho^F(x, y) := \sup\{\rho(T^g x, T^g y) : g \in F \cap \mathbb{Z}^d\}.$$

Para cada $g \in \mathbb{Z}^d$, seja

$$\operatorname{dist}(g, F) := \inf\{\|g - h\|: h \in F\},$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana em $\mathbb{R}^d$. Dado $t > 0$, a t-vizinhança de F em $\mathbb{Z}^d$ é definida por

$$F^t := \{g \in \mathbb{Z}^d : \text{dist}(g, F) \leq t\} \subset \mathbb{Z}^d.$$

Seja $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ um *subshift*. Para Boyle e Lind [4], um subespaço F de $\mathbb{R}^d$ é dito ser *expansivo segundo* X se existem um raio $t > 0$ e uma constante $\delta > 0$ tais que, para quaisquer $x, y \in X$, $\rho^{F^t}(x, y) \leq \delta$ implica que $x = y$. Devido às particularidades de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$, da métrica ρ e da $\mathbb{Z}^d$-ação utilizada, a noção de subespaço expansivo definida por Boyle e Lind pode ser refraseada como abaixo.

Definição 1.14. *Seja $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ um subshift. Um subespaço F de $\mathbb{R}^d$ é dito ser expansivo segundo X se existe um raio $t > 0$ tal que*

$$\forall\ x, y \in X, \quad x|_{F^t} = y|_{F^t} \Longrightarrow x = y.$$

Se F não verifica essa condição, ele é dito ser um subespaço não-expansivo segundo X.

Em particular, para o espaço $\mathbb{R}^2$, ao invés de dizermos subespaço unidimensional, diremos apenas reta passando pela origem. Desse modo, quando nos referirmos a uma reta expansiva ou não-expansiva, estamos pressupondo que a mesma esteja passando pela origem.

Notação 1.15. *Por conveniência, a família formada por todas as retas de $\mathbb{R}^2$ passando pela origem é denotada por $\mathbb{G}_1$.*

O resultado abaixo é uma afirmação imediata que nos permite concluir que toda configuração $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ com mais de uma reta não-expansiva segundo o *subshift* $X_\eta := \overline{Orb(\eta)}$ não é periódica.

Proposição 1.16. *Se $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ for uma configuração periódica de período $h \in (\mathbb{Z}^2)^*$, então toda reta $\ell \in \mathbb{G}_1$ tal que $h \notin \ell$ é expansiva segundo $X_\eta = \overline{Orb(\eta)}$.*

Prova. Seja $t > 0$ um raio tal que $\{-h, h\} \subset \ell^t$. Para cada $g \in \mathbb{Z}^2$, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $g + mh \in \ell^t$. Como quaisquer configurações $x, y \in X_\eta$ são periódicas de período $h \in (\mathbb{Z}^2)^*$, se $x|_{\ell^t} = y|_{\ell^t}$, então $x_g = x_{g+mh} = y_{g+mh} = y_g$, o que prova a proposição. □

Boyle e Lind mostraram que, sob algumas hipóteses, subespaços não-expansivos sempre existem.

Teorema 1.17 (Boyle-Lind [4])**.** *Seja $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ um subshift infinito. Para cada $0 \leq k < d$, existe um subespaço k-dimensional de $\mathbb{R}^d$ que é não-expansivo segundo X.*

O corolário abaixo é uma consequência imediata do Teorema de Boyle-Lind evidenciada em [7].

Corolário 1.18. *Para $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, toda reta passando pela origem é expansiva segundo X_η se, e somente se, η é 2-periódica.*

Prova. Ao supor que toda reta passando pela origem é expansiva segundo X_η, o Teorema de Boyle-Lind implica que o *subshift* $X_\eta = \overline{Orb(\eta)}$ é finito, ou equivalentemente, que a configuração η é 2-periódica. Reciprocamente, se $h, h' \in (\mathbb{Z}^2)^*$ são dois períodos linearmente independentes de η, dada $\ell \in \mathbb{G}_1$, como ℓ não contém ambos h e h', a Proposição 1.16 garante que ℓ é expansiva segundo X_η. □

Bryna Kra e Van Cyr [7] notaram que quando existem $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $P_\eta(R_{n,k}) \leq nk$, a existência de retas não-expansivas segundo X_η está ainda mais relacionada com a periodicidade de $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$.

Teorema 1.19 (Cyr e Kra [7])**.** *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, suponha que $P_\eta(R_{n,k}) \leq nk$ para algum par $n, k \in \mathbb{N}$. Se há no máximo uma reta $\ell \in \mathbb{G}_1$ não-expansiva segundo X_η, então η é periódica.*

Eles provaram o Teorema 1.11 mostrando que a hipótese de existir $n, k \in \mathbb{N}$ cumprindo $P_\eta(R_{n,k}) \leq \frac{1}{2}nk$ é incompatível com a existência de mais de uma reta $\ell \in \mathbb{G}_1$ não-expansiva segundo X_η.

1.5 Convenções geométricas e conjuntos η-geradores

Nesta seção, estabelecemos notações, introduzimos noções necessárias para o andamento da teoria e apresentamos a noção de conjunto η-gerador, da qual derivam importantes resultados.

1.5.1 Convenções geométricas

Um conjunto $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2$ é dito ser *convexo* se $\mathrm{Conv}(\mathcal{S})$ for fechado e $\mathcal{S} = \mathrm{Conv}(\mathcal{S}) \cap \mathbb{Z}^2$, onde $\mathrm{Conv}(\mathcal{S}) \subset \mathbb{R}^2$ denota o envelope convexo de $\mathcal{S}$.

Definição 1.20. *Dado um conjunto convexo $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2$, um ponto $g \in \mathcal{S}$ é um vértice de $\mathcal{S}$ se $\mathcal{S}\backslash\{g\} \subset \mathbb{Z}^2$ for um conjunto convexo, e um segmento w contido no bordo de* $\mathrm{Conv}(\mathcal{S})$ *é uma aresta de $\mathcal{S}$ se for uma aresta do polígono convexo* $\mathrm{Conv}(\mathcal{S}) \subset \mathbb{R}^2$.

O conjunto dos vértices de $\mathcal{S}$ e o conjunto das arestas de $\mathcal{S}$ é denotado por $V(\mathcal{S})$ e $E(\mathcal{S})$, respectivamente.

Notação 1.21. *A família formada pelos subconjuntos finitos, convexos e não vazios de $\mathbb{Z}^2$ é denotada por $\mathcal{F}_\mathcal{C}$, e a subfamília de $\mathcal{F}_\mathcal{C}$ formada pelos conjuntos tais que o envelope convexo tem área não nula por $\mathcal{F}_\mathcal{C}^{Vol}$.*

Se $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2$ é um conjunto convexo (possivelmente infinito) tal que $\mathrm{Conv}(\mathcal{S})$ tem área não nula, é padrão convencionar que o bordo de $\mathrm{Conv}(\mathcal{S})$ é positivamente orientado. Com essa convenção, cada aresta $w \in E(\mathcal{S})$ herda naturalmente uma orientação do bordo de $\mathrm{Conv}(\mathcal{S})$, o que permite considerar as arestas de $\mathcal{S}$ ao mesmo tempo como subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ e segmentos orientados.

Na definição abaixo, por objeto orientado se entende reta orientada, segmento orientado ou vetor. Recorde que dois vetores são paralelos se eles têm o mesmo sentido e antiparalelos se eles têm sentidos opostos.

Definição 1.22. *Dois objetos orientados em $\mathbb{R}^2$ são ditos (anti)paralelos quando os vetores subjacentes as suas respectivas orientações são (anti)paralelos.*

Em particular, para um conjunto $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2$ convexo, a convenção feita sobre o bordo de $\mathrm{Conv}(\mathcal{S})$ permite nos referir a uma reta orientada em $\mathbb{R}^2$ como sendo paralela ou antiparalela a uma dada aresta $w \in E(\mathcal{S})$.

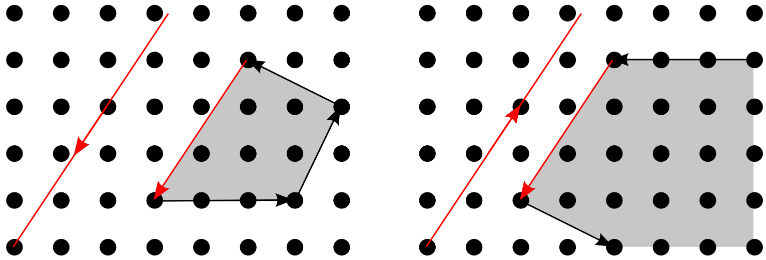


Figura 1.5.1: À esquerda, reta e aresta paralelas. À direita, reta e aresta antiparalelas.

Um conjunto convexo $\mathcal{H} \subset \mathbb{Z}^2$ é dito ser um *semiplano* se $\mathrm{Conv}(\mathcal{H})$ tem área não nula e $E(\mathcal{H})$ contém somente uma única aresta. Neste caso, evidentemente, $\ell \in E(\mathcal{H})$ é uma reta em $\mathbb{R}^2$.

Notação 1.23. *Dada uma reta $\ell \subset \mathbb{R}^2$, a reta orientada $\vec{\ell} \subset \mathbb{R}^2$ denota a reta ℓ munida de uma orientação e, a reta orientada $\overleftarrow{\ell} \subset \mathbb{R}^2$, denota a reta ℓ munida da orientação oposta.*

Para retas orientadas $\vec{\ell} \subset \mathbb{R}^2$ passando pela origem, cometemos abuso de notação escrevendo $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$.

Notação 1.24. *Dada uma reta orientada $\vec{\ell} \subset \mathbb{R}^2$, denotamos por $\mathcal{H}(\vec{\ell}) \subset \mathbb{Z}^2$ o semiplano tal que $\vec{\ell} \in E(\mathcal{H}(\vec{\ell}))$. Supondo que o coeficiente angular de ℓ seja racional,*

(i) *$\mathcal{H}(\vec{\ell}^{(-1)}) \subset \mathbb{Z}^2$ denota o semiplano definido como a interseção de todos os semiplanos que contêm $\mathcal{H}(\vec{\ell})$ estritamente e cuja aresta é paralela a $\vec{\ell}$,*

(ii) *$\mathcal{H}(\vec{\ell}^{(+1)}) \subset \mathbb{Z}^2$ denota o semiplano definido como a união de todos os semiplanos que estão contidos em $\mathcal{H}(\vec{\ell})$ estritamente e cuja aresta é paralela a $\vec{\ell}$.*

Naturalmente, as arestas $\vec{\ell}^{(-1)} \in E(\mathcal{H}(\vec{\ell}^{(-1)}))$ e $\vec{\ell}^{(+1)} \in E(\mathcal{H}(\vec{\ell}^{(+1)}))$, por construção, são paralelas à reta orientada $\vec{\ell} \subset \mathbb{R}^2$.

Observe que o grupo $SL_2(\mathbb{Z})$, formado pelas matrizes 2×2 com entradas inteiras e determinante igual a 1, age transitivamente nas retas orientadas passando pela origem com coeficientes angulares racionais. De fato, é suficiente mostrar que, para qualquer vetor $(s, t) \in (\mathbb{Z}^2)^*$ com $mdc(s, t) = 1$, existe $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ tal que $A(-e_2) = (s, t)$, ou equivalentemente, que há $a, c \in \mathbb{Z}$ tais que $-at + cs = 1$. Portanto, esta propriedade de $SL_2(\mathbb{Z})$ é na verdade uma consequência direta da Identidade de Bézout.

Outra propriedade útil de $SL_2(\mathbb{Z})$ é destacada no lema abaixo. Para conveniência do leitor uma breve prova é esboçada.

Lema 1.25. *O grupo $SL_2(\mathbb{Z})$ transforma semiplanos positivamente orientados em semiplanos positivamente orientados.*

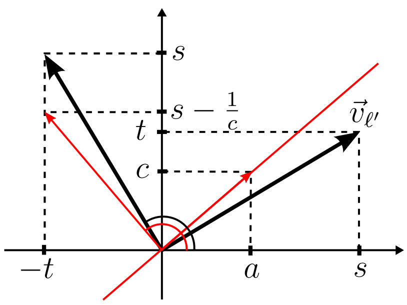
Prova. Seja $\vec{\ell} := \vec{\ell}_{e_2} \in \mathbb{G}_1$ tal que $\vec{v}_\ell = -e_2$, isto é, $\vec{\ell}_{e_2}$ está orientada para baixo. Para provar o lema, é suficiente mostrar que

$$A(\mathcal{H}(\vec{\ell})) = \mathcal{H}(\vec{\ell'}) \quad \forall\ A \in SL_2(\mathbb{Z}),$$

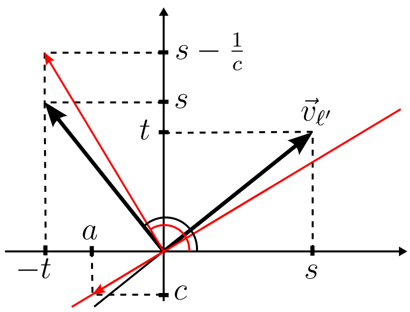
onde $\vec{\ell'} \in \mathbb{G}_1$ satisfaz $\vec{v}_{\ell'} = A(-e_2)$. Dado $(p, q) \in \mathcal{H}(\vec{\ell})$, observe que $p \geq 0$ e $q \in \mathbb{Z}$. Assim, como $A(p, q) = pA(e_1) - q\vec{v}_{\ell'}$, então $A(p, q) \in \mathcal{H}(\vec{\ell'})$ se, e somente se, $A(e_1) \in \mathcal{H}(\vec{\ell'})$. Supondo $A(e_1) = (a, c)$ e $\vec{v}_{\ell'} = (s, t)$, ambos vetores não nulos, a hipótese de $\det(A) = 1$ assegura $-at + cs = 1$. Isto implica que (a, c) é perpendicular a $(-t, s - \frac{1}{c})$ se $c \neq 0$ e $(-t - \frac{1}{a}, s)$ se $a \neq 0$. Por fim, levando em consideração o quadrante ao qual $\vec{v}_{\ell'}$ pertence, comparando o vetor $(-t, s - \frac{1}{c})$ se $c \neq 0$ ou $(-t - \frac{1}{a}, s)$ se $a \neq 0$ com o vetor $(-t, s)$, pode-se sempre concluir que $(a, c) \in \mathcal{H}(\vec{\ell'})$.

Por exemplo, na Figura 1.5.2 (a), como o ângulo entre o vetor $(-t, s)$ e o eixo x é menor que o ângulo entre o vetor $(-t, s - \frac{1}{c})$ e o eixo x, sendo $(-t, s - \frac{1}{c})$ perpendicular a (a, c) e $(-t, s)$ perpendicular a (s, t), resulta dai $(a, c) \in \mathcal{H}(\vec{\ell'})$. Similarmente, na Figura 1.5.2 (b), como o ângulo entre o vetor $(-t, s)$ e o eixo x é maior que o ângulo entre o vetor $(-t, s - \frac{1}{c})$ e o eixo x, temos que $(a, c) \in \mathcal{H}(\vec{\ell'})$. $\square$

O lema acima permite, em particular, concluir que $SL_2(\mathbb{Z})$ transforma conjuntos convexos (positivamente orientados) em conjuntos convexos (positivamente orientados).



(a) $a, c > 0$.



(b) $a, c < 0$.

Figura 1.5.2: Caso em que $\vec{v}_{\ell'}$ pertence ao primeiro quadrante, com $at \neq 0$ e $cs \neq 0$.

Por fim, destacamos uma última convenção geométrica, a qual usaremos repetidamente no restante do trabalho.

Notação 1.26. *Seja $\vec{\ell} \subset \mathbb{R}^2$ uma reta orientada. Dado um conjunto convexo $\mathcal{U} \subset \mathbb{Z}^2$, a reta orientada $\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^2$ denota a aresta do semiplano obtido como a interseção de todos os semiplanos que contêm $\mathcal{U}$ e cuja aresta é paralela a $\vec{\ell}$, ou seja, $\vec{\ell}_{\mathcal{U}}$ é a reta orientada paralela a $\vec{\ell}$ que satisfaz $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}(\vec{\ell}_{\mathcal{U}})$ e $\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$.*

É fácil ver que ou $\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cap \mathcal{U}$ é um vértice de $\mathcal{U}$ ou $\mathrm{Conv}(\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cap \mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^2$ é a aresta de $\mathcal{U}$ paralela à reta orientada $\vec{\ell} \subset \mathbb{R}^2$.

1.5.2 Conjuntos η-geradores

A noção de conjunto η-gerador, inspirada no trabalho de Boyle e Lind [4] e introduzida por Bryna Kra e Van Cyr [7], permite deduzir a configuração de uma região maior a partir da configuração de uma região menor.

Definição 1.27. *Fixado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, um ponto $g \in \mathcal{S}$ é dito ser η-gerado por $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2$ se, para toda $\mathcal{S}\backslash\{g\}$-configuração $\gamma \in L(\mathcal{S}\backslash\{g\}, \eta)$, há uma única $\mathcal{S}$-configuração $\gamma' \in L(\mathcal{S}, \eta)$ tal que $\gamma'|_{\mathcal{S}\backslash\{g\}} = \gamma$. Um conjunto $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ tal que todo vértice é η-gerado por $\mathcal{S}$ é dito ser η-gerador.*

Para $g \in V(\mathcal{S})$, a igualdade

$$P_\eta(\mathcal{S}) = \sum_{\gamma \in L(\mathcal{S}\backslash\{g\}, \eta)} |\{\gamma' \in L(\mathcal{S}, \eta) : \gamma'|_{\mathcal{S}\backslash\{g\}} = \gamma\}|$$

permite concluir que $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ é um conjunto η-gerador se, e somente se, $P_\eta(\mathcal{S}\backslash\{g\}) = P_\eta(\mathcal{S})$ para todo $g \in V(\mathcal{S})$.

Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, para cada $A \in SL_2(\mathbb{Z})$, a configuração $\eta \circ A \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ definida por $(\eta \circ A)_g := \eta_{A(g)}$ para todo $g \in \mathbb{Z}^2$ preserva propriedades importantes de η. Por exemplo, qualquer conjunto $\mathcal{U} \subset \mathbb{Z}^2$ não vazio cumpre

$$P_{\eta \circ A}(A^{-1}(\mathcal{U})) = P_\eta(\mathcal{U}),$$

de modo que $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ é η-gerador se, e somente se, $A^{-1}(\mathcal{S}) \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ é $(\eta \circ A)$-gerador.

A definição abaixo coloca em evidência conjuntos que não são necessariamente η-geradores, mas para os quais, com respeito a uma reta pré-determinada, vértices específicos são η-gerados.

Definição 1.28. *Dada uma reta orientada $\vec{\ell} \subset \mathbb{R}^2$, um conjunto $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ é dito ser $(\eta, \vec{\ell})$-gerador se os pontos de $\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cap V(\mathcal{U})$ são η-gerados por $\mathcal{U}$.*

É claro que qualquer conjunto η-gerador $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ é, em particular, $(\eta, \vec{\ell})$-gerador para toda reta orientada $\vec{\ell} \subset \mathbb{R}^2$.

Um fato já esperado é que, para configurações $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ tais que $P_\eta(\mathcal{U}) \leq |\mathcal{U}| + |\mathcal{A}| - 2$ para algum $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}$, sempre há conjunto η-gerador. Mais precisamente, de forma similar ao que foi feito em [7], seja $\mathcal{S}$ um conjunto minimal (com respeito à inclusão) dentre os conjuntos convexos $\mathcal{T} \subset \mathcal{U}$ satisfazendo

$$P_\eta(\mathcal{T}) - |\mathcal{T}| - |\mathcal{A}| + 2 \leq P_\eta(\mathcal{U}) - |\mathcal{U}| - |\mathcal{A}| + 2.$$

Observe que $\mathcal{S}$ contém ao menos dois elementos, pois $|\mathcal{A}| > 1 + |\mathcal{A}| - 2$. Em particular, para $g \in V(\mathcal{S})$, temos que $\mathcal{S} \backslash \{g\} \in \mathcal{F}_\mathcal{C}$. Além disso, a definição de $\mathcal{S}$ implica que

$$P_\eta(\mathcal{S}\backslash\{g\}) - |\mathcal{S}\backslash\{g\}| - |\mathcal{A}| + 2 > P_\eta(\mathcal{U}) - |\mathcal{U}| - |\mathcal{A}| + 2 \geq P_\eta(\mathcal{S}) - |\mathcal{S}| - |\mathcal{A}| + 2,$$

donde segue que

$$P_\eta(\mathcal{S}) - P_\eta(\mathcal{S}\backslash\{g\}) = 0,$$

ou seja, $g \in V(\mathcal{S})$ é η-gerado por $\mathcal{S}$. Por construção, concluímos que $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_\mathcal{C}$ é um conjunto η-gerador com $P_\eta(\mathcal{S}) \leq |\mathcal{S}| + |\mathcal{A}| - 2$.

Observamos que no Teorema 1.19 a hipótese de $P_\eta(R_{n,k}) \leq nk$ foi necessária somente para garantir a existência de conjunto η-gerador. Portanto, a discussão acima permite a reescritura a seguir.

Teorema 1.29 (Cyr e Kra [7])**.** *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ com $P_\eta(\mathcal{U}) \leq |\mathcal{U}| + |\mathcal{A}| - 2$ para algum conjunto $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_\mathcal{C}$, se há no máximo uma reta $\ell \in \mathbb{G}_1$ não-expansiva segundo X_η, então η é periódica.*

A prova da proposição abaixo é similar à demonstração do Lema 2.13 de [7], fazendo-se as adaptações necessárias. Fixada uma reta $\ell \in \mathbb{G}_1$ com coeficiente angular irracional, a estratégia na sua demonstração consiste em supor, por contradição, que há configurações distintas que coincidem em alguma t-vizinhança de ℓ e, em seguida, utilizar as propriedades de conjunto η-gerador para estender esta região de coincidência para uma região maior de modo a obter um absurdo.

Proposição 1.30. *Suponha que, para $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, há $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $P_\eta(R_{n,k}) \leq nk + |\mathcal{A}| - 2$. Se $\ell \in \mathbb{G}_1$ tem coeficiente angular irracional, então ℓ é expansiva segundo X_η.*

A proposição acima nos permite trabalhar com retas não-expansivas sem a necessidade de mencionarmos que seus coeficientes angulares são racionais. Isto ficará subentendido no restante do trabalho.

O lema a seguir é uma consequência imediata do Teorema de Morse-Hedlund Alfabético, pois qualquer conjunto convexo finito cujo envelope convexo tem área nula ou é um ponto ou é um segmento de reta, o que nos permite, entre outras coisas, não ter de abordar situações triviais.

Lema 1.31. *Para $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ com $P_\eta(\mathcal{S}) \leq |\mathcal{S}| + |\mathcal{A}| - 2$ para algum $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_\mathcal{C}$, se* $\operatorname{Conv}(\mathcal{S})$ *tem área nula, então η é periódica.*

1.6 Direções não-expansivas

Dada uma reta $\ell \in \mathbb{G}_1$ não-expansiva segundo $X_\eta = \overline{Orb(\eta)}$, para cada raio $t > 0$, existem configurações distintas que coincidem em $\ell^t \subset \mathbb{Z}^2$. Porém, sendo distintas, elas diferem em qual semiplano? Há três possibilidades, as configurações diferem ou em $\mathcal{H}(\vec{\ell})$ ou em $\mathcal{H}(\overleftarrow{\ell})$ ou em ambos. Estas situações nos levam a considerar a noção de direção não-expansiva, já presente em [4]

Definição 1.32. *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, uma reta orientada $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ é dita ser uma direção expansiva segundo X_η quando*

$$\forall\ x, y \in X_\eta, \quad x|_{\mathcal{H}(\vec{\ell})} = y|_{\mathcal{H}(\vec{\ell})} \Longrightarrow x = y.$$

Se a reta orientada $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ não verifica essa condição, ela é dita ser uma direção não-expansiva segundo X_η.

É fácil ver que (de acordo com a Definição 1.14) $\ell \in \mathbb{G}_1$ é uma reta expansiva segundo X_η se, e somente se, $\vec{\ell}, \overleftarrow{\ell} \in \mathbb{G}_1$ são direções expansivas segundo X_η. Além disso, da Proposição 1.30 resulta que, se $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ ou $\overleftarrow{\ell} \in \mathbb{G}_1$ são direções não-expansivas segundo X_η, então a reta $\ell \in \mathbb{G}_1$ tem coeficiente angular racional.

Notação 1.33. *Para uma reta orientada $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ com coeficiente angular racional, denotamos por $\vec{v}_\ell \in (\mathbb{Z}^2)^*$ o vetor paralelo à reta orientada $\vec{\ell}$ com norma mínima.*

O resultado abaixo permitirá, sem perda de generalidade, considerar coeficiente angular pré-fixado para retas não-expansivas, de modo a simplificar demonstrações.

Proposição 1.34. *Dadas duas retas orientadas $\vec{\ell}, \vec{\ell'} \in \mathbb{G}_1$ com coeficientes angulares racionais, se $A(\vec{v}_{\ell'}) = \vec{v}_\ell$ para algum $A \in SL_2(\mathbb{Z})$, então, dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, $\vec{\ell}$ é uma direção expansiva segundo X_η se, e somente se, $\vec{\ell'}$ é uma direção expansiva segundo $X_{\eta\circ A} := \overline{Orb(\eta \circ A)}$.*

Prova. Dados $x, y \in X_\eta$, usando que $(T^g\eta) \circ A = T^{A^{-1}g}(\eta \circ A)$ para qualquer $g \in \mathbb{Z}^2$, é fácil argumentar que $x \circ A, y \circ A \in X_{\eta\circ A}$. Como a igualdade $A(\mathcal{H}(\vec{\ell'})) = \mathcal{H}(\vec{\ell})$ é garantida pelo Lema 1.25, temos que

$$(x \circ A)|_{\mathcal{H}(\vec{\ell'})} = (y \circ A)|_{\mathcal{H}(\vec{\ell'})}$$

sempre que

$$x|_{\mathcal{H}(\vec{\ell})} = y|_{\mathcal{H}(\vec{\ell})}.$$

Portanto, se $\vec{\ell'}$ for uma direção expansiva segundo $X_{\eta\circ A}$, então $\vec{\ell}$ é uma direção expansiva segundo X_η. □

Os lemas a seguir são similares, respectivamente, aos Lemas 3.2 e 3.3 de [7]. Para conveniência do leitor, fornecemos breves demonstrações.

Lema 1.35. *Suponha $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$. Para uma reta orientada $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$, se existir $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ tal que $\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S} := \{g_0\} \subset V(\mathcal{S})$ é η-gerado por $\mathcal{S}$, então $\vec{\ell}$ é uma direção expansiva segundo X_η.*

Prova. Suponha, por contradição, que há configurações $x, y \in X_\eta$ distintas que coincidem no semiplano $\mathcal{H}(\vec{\ell})$. Sejam $w_1, w_2 \in E(\mathcal{S})$ as arestas distintas de $\mathcal{S}$ tais que $\{g_0\} \subset w_1 \cap w_2$, e $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2 \subset \mathbb{R}^2$ restas orientadas paralelas, respectivamente, as arestas w_1 e w_2 tais que $x_g \neq y_g$ para algum $g \in (\mathbb{Z}^2 \backslash \mathcal{H}(\vec{\ell})) \cap \mathcal{H}(\vec{\ell}_1) \cap \mathcal{H}(\vec{\ell}_2) =: \mathcal{U}$. Para $g_1 \in \mathcal{U}$ cumprindo

$$\operatorname{dist}(g_1, \ell) = \min\{\operatorname{dist}(g, \ell) : g \in \mathcal{U}\},$$

seja $u_1 \in \mathbb{Z}^2$ tal que $g_0 + u_1 = g_1$. A igualdade $(T^{u_1}x)|_{\mathcal{S}\backslash\{g_0\}} = (T^{u_1}y)|_{\mathcal{S}\backslash\{g_0\}}$ e a hipótese de g_0 ser η-gerado por $\mathcal{S}$ implicam que $x_{g_1} = y_{g_1}$, donde segue que

$$x|_{\mathcal{H}(\vec{\ell})\cup\{g_1\}} = y|_{\mathcal{H}(\vec{\ell})\cup\{g_1\}}.$$

Para $g_2 \in \mathcal{U}\backslash\{g_1\}$ verificando

$$\operatorname{dist}(g_2, \ell) = \min\{\operatorname{dist}(g, \ell) : g \in \mathcal{U}\backslash\{g_1\}\},$$

seja $u_2 \in \mathbb{Z}^2$ tal que $g_0 + u_2 = g_2$. Do fato de $(T^{u_2}x)|_{\mathcal{S}\backslash\{g_0\}} = (T^{u_2}y)|_{\mathcal{S}\backslash\{g_0\}}$ obtemos $x_{g_2} = y_{g_2}$. Como $\mathcal{U}$ é um conjunto finito, procedendo dessa forma, concluímos que $x|_{\mathcal{H}(\vec{\ell})\cup\mathcal{U}} = y|_{\mathcal{H}(\vec{\ell})\cup\mathcal{U}}$, o que é uma contradição. □

Observação 1.36. *Se a reta orientada $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ for uma direção não-expansiva segundo X_η, o Lema 1.35 garante que todo conjunto η-gerador $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ possui uma aresta paralela à reta $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$, a saber, a aresta*

$$\operatorname{Conv}(\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}) \in E(\mathcal{S}).$$

Em particular, se existirem $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $P_\eta(R_{n,k}) \leq nk + |\mathcal{A}| - 2$, então há no máximo uma quantidade finita de direções não-expansivas segundo X_η.

Lema 1.37. *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, se $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ for uma direção expansiva segundo X_η com coeficiente angular racional, então, para todo $g_0 \in \mathbb{Z}^2$, existe $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ tal que $\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S} = \{g_0\} \subset V(\mathcal{S})$ é η-gerado por $\mathcal{S}$.*

Prova. É suficiente provar o lema para $g_0 \in \vec{\ell}^{(-1)} \cap \mathbb{Z}^2$. Seja $\{\mathcal{S}_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ uma família crescente de conjuntos encaixados tais que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $\vec{\ell}_{\mathcal{S}_i} \cap \mathcal{S}_i = \{g_0\} \subset V(\mathcal{S}_i)$ e, além disso, que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{S}_i = \mathcal{H}(\vec{\ell}) \cup \{g_0\}$. Ao supor, por redução ao absurdo, que, para todo $i \in \mathbb{N}$, $g_0 \in \mathcal{S}_i$ não é η-gerado por $\mathcal{S}_i$, da compacidade do *subshift* X_η resulta que $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ é uma direção não-expansiva segundo X_η. □

Assim como no caso unidimensional, é conveniente ter em mãos uma definição precisa de periodicidade para restrições de configurações a subconjuntos de $\mathbb{Z}^2$.

Definição 1.38. *A restrição de $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ a um conjunto $\mathcal{U} \subset \mathbb{Z}^2$ é dita ser periódica se há um período $h \in (\mathbb{Z}^2)^*$ tal que $\eta_{g+h} = \eta_g$ para todo $g \in \mathcal{U} \cap (\mathcal{U} - h)$.*

É claro que, como na Definição 1.1, para configurações $\eta|_{\mathcal{U}} \in \mathcal{A}^{\mathcal{U}}$ pode-se falar em 2-periodicidade e aperiodicidade.

Com relação à Conjectura de Nivat, como veremos no próximo capítulo, é de particular interesse que retas não-expansivas sejam, para ambas orientações, também direções não-expansivas. Naturalmente, como demonstrado abaixo, configurações periódicas cumprem esta propriedade.

Teorema 1.39. *Se $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ for periódica, então, para qualquer direção $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ não-expansiva segundo X_η, a direção $\overleftarrow{\ell} \in \mathbb{G}_1$, antiparalela a $\vec{\ell}$, é não-expansiva segundo X_η.*

Prova. Inicialmente, como η é periódica, a Proposição 1.16 implica que há no máximo uma reta não-expansiva segundo $X_\eta = \overline{Orb(\eta)}$, a saber, a própria reta $\ell \in \mathbb{G}_1$. Suponha, por contradição, que $\overleftarrow{\ell} \in \mathbb{G}_1$ seja uma direção expansiva segundo X_η.

Dado $g_0 \in \overleftarrow{\ell}^{(-1)} \cap \mathbb{Z}^2$, segundo o Lema 1.37, há $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ tal que $\overleftarrow{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S} = \{g_0\} \subset V(\mathcal{S})$ é η-gerado por $\mathcal{S}$. Para $t > 0$, seja

$$\mathcal{U}^{\ell}(t) := \Big\{ g \in \mathbb{Z}^2 : \operatorname{dist}(g, \ell) \le t,\ \operatorname{dist}(g, \ell^{\perp}) \le t \Big\} \subset \ell^t,$$

onde $\ell^{\perp} \in \mathbb{G}_1$ denota a reta perpendicular a $\ell \in \mathbb{G}_1$. Como os períodos de η pertencem a ℓ, fixado $t > 0$ suficientemente grande, para todo $j, j' \in \mathbb{Z}$, $(T^{jv}\eta)|_{\mathcal{U}^{\ell}(t)} = (T^{j'v}\eta)|_{\mathcal{U}^{\ell}(t)}$ implica que $(T^{jv}\eta)|_{\ell^t} = (T^{j'v}\eta)|_{\ell^t}$, onde $v \in \ell^{\perp} \cap \mathcal{H}(\vec{\ell})$ denota o vetor não nulo com norma mínima. Além disso, considerando t ainda maior se necessário, podemos supor que $\mathcal{U}^{\ell}(t)$ contém o conjunto $\mathcal{S}$. Como $\mathcal{U}^{\ell}(t)$ é finito, pelo Princípio da Casa dos Pombos, para cada $\tau \in \mathbb{Z}$, há inteiros $\tau \le j < j' \le \tau + P_\eta(\mathcal{U}^{\ell}(t))$ tais que

$$(T^{jv}\eta)|_{\mathcal{U}^{\ell}(t)} = (T^{j'v}\eta)|_{\mathcal{U}^{\ell}(t)} = (T^{jv}\eta)|_{\mathcal{U}^{\ell}(t)+(j'-j)v},$$

o que pela discussão acima implica que

$$(T^{jv}\eta)|_{\ell^t} = (T^{j'v}\eta)|_{\ell^t} = (T^{jv}\eta)|_{\ell^t+(j'-j)v}.$$

Seja $\overleftarrow{\ell}_0 \in E(\ell^t)$ a aresta de $\ell^t \subset \mathbb{Z}^2$ que é paralela à reta $\overleftarrow{\ell} \in \mathbb{G}_1$. Seja $\overleftarrow{\ell}_1 := \overleftarrow{\ell}_0^{(-1)}$ a aresta de $\mathcal{H}(\overleftarrow{\ell}_0^{(-1)})$ e, para cada inteiro $m \ge 1$, seja $\overleftarrow{\ell}_{m+1} := \overleftarrow{\ell}_m^{(-1)}$ a aresta de $\mathcal{H}(\overleftarrow{\ell}_m^{(-1)})$. Dado um ponto $g \in \overleftarrow{\ell}_1 \cap \mathbb{Z}^2$, considere $g' \in \mathbb{Z}^2$ tal que $g_0 + g' = g$ e $\mathcal{S}' := \mathcal{S} + g'$. A igualdade

$$(T^{jv}\eta)|_{\mathcal{S}' \setminus \{g\}} = (T^{j'v}\eta)|_{\mathcal{S}' \setminus \{g\}}$$

e o fato de $g \in \mathcal{S}'$ ser η-gerado por $\mathcal{S}'$ implicam que $(T^{jv}\eta)_g = (T^{j'v}\eta)_g$. Como $g \in \overleftarrow{\ell}_1 \cap \mathbb{Z}^2$ é qualquer, obtemos que

$$(T^{jv}\eta)|_{\ell^t \cup \overleftarrow{\ell}_1} = (T^{j'v}\eta)|_{\ell^t \cup \overleftarrow{\ell}_1} = (T^{jv}\eta)|_{(\ell^t \cup \overleftarrow{\ell}_1)+(j'-j)v}.$$

Por indução, segue que, para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$(T^{jv}\eta)|_{\ell^t \cup \overleftarrow{\ell}_1 \cup \cdots \cup \overleftarrow{\ell}_m} = (T^{j'v}\eta)|_{\ell^t \cup \overleftarrow{\ell}_1 \cup \cdots \cup \overleftarrow{\ell}_m} = (T^{jv}\eta)|_{(\ell^t \cup \overleftarrow{\ell}_1 \cup \cdots \cup \overleftarrow{\ell}_m)+(j'-j)v},$$

ou seja, a restrição de $T^{jv}\eta$ ao conjunto $\ell^t \cup \mathcal{H}(\vec{\ell})$ é periódica de período $(j'-j)v$.

Portanto, como $\tau \in \mathbb{Z}$ é um inteiro qualquer, concluímos que a configuração $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ é periódica de período $t'v$, com $t' \leq P_\eta(\mathcal{U}^\ell(t))!$. Entretanto, do fato de $v \notin \ell$, segue pela Proposição 1.16 que $\ell \in \mathbb{G}_1$ é uma reta expansiva segundo X_η, o que é uma contradição. □

Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ com $P_\eta(R_{n,k}) \leq nk + |\mathcal{A}| - 2$ para algum par $n, k \in \mathbb{N}$, com hipóteses adicionais, é possível provar uma recíproca para o Teorema 1.39. Consulte o Corolário 2.29 para mais detalhes.

Corolário 1.40. *Dada reta $\ell \in \mathbb{G}_1$, suponha que $x, x' \in X_\eta$ sejam configurações distintas cujas restrições ao semiplano $\mathcal{H}(\overleftarrow{\ell}) \subset \mathbb{Z}^2$ são periódicas de períodos $h, h' \in \ell \cap (\mathbb{Z}^2)^*$, respectivamente. Se $x|_{\mathcal{H}} = x'|_{\mathcal{H}}$ para algum semiplano $\mathcal{H} \subset \mathbb{Z}^2$, então a reta orientada $\overleftarrow{\ell} \in \mathbb{G}_1$, antiparalela à reta orientada $\vec{\ell}$, é uma direção não-expansiva segundo X_η.*

Prova. Ao supor, por contradição, que $\overleftarrow{\ell} \in \mathbb{G}_1$ é uma direção expansiva segundo X_η, como

$$x|_{\mathcal{H}(\overleftarrow{\ell})} = (T^h x)|_{\mathcal{H}(\overleftarrow{\ell})}$$

e

$$x'|_{\mathcal{H}(\overleftarrow{\ell})} = (T^{h'} x')|_{\mathcal{H}(\overleftarrow{\ell})},$$

segue que $x, x' \in X_\eta$ são configurações periódicas de períodos $h, h' \in \ell \cap (\mathbb{Z}^2)^*$, respectivamente. Deste modo, a contrapositiva do Teorema 1.39 garante que $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ é uma direção expansiva segundo $\overline{Orb(x)}$ e segundo $\overline{Orb(x')}$. Por fim, a Proposição 1.16 e o Corolário 1.18 implicam que as configurações $x, x' \in X_\eta$ são 2-periódicas e, portanto, como $x|_{\mathcal{H}} = x'|_{\mathcal{H}}$, concluímos que são iguais, o que é uma contradição. □

No restante desta seção, introduzimos notações e definições que serão largamente utilizadas ao longo de todos os demais capítulos.

Para $x \in X_\eta = \overline{Orb(\eta)}$, $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ e uma reta orientada $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$, seja $L_{\vec{\ell}}(\mathcal{U}, x)$ a subfamília de $L(\mathcal{U}, \eta)$ definida por

$$L_{\vec{\ell}}(\mathcal{U}, x) := \left\{ (T^{t\vec{v}_\ell} x)|_{\mathcal{U}} : t \in \mathbb{Z} \right\}.$$

O conceito a ser introduzido a seguir faz uso da Notação 1.26.

Notação 1.41. *Dado $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$, para uma reta orientada $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ e $\gamma \in L(\mathcal{U} \backslash \vec{\ell}_{\mathcal{U}}, \eta)$, o número de $\mathcal{U}$-configurações de $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ cuja restrição à $\mathcal{U} \backslash \vec{\ell}_{\mathcal{U}}$ coincide com γ é denotado por*

$$N_{\vec{\ell},\mathcal{U}}(\gamma) = |\{\gamma' \in L(\mathcal{U}, \eta) : \gamma'|_{\mathcal{U} \backslash \vec{\ell}_{\mathcal{U}}} = \gamma\}|.$$

Observe que $N_{\vec{\ell},\mathcal{U}}(\gamma) = 1$ significa que, para quaisquer $\mathcal{U}$-configurações $\gamma', \gamma'' \in L(\mathcal{U}, \eta)$, $\gamma'|_{\mathcal{U} \backslash \vec{\ell}_{\mathcal{U}}} = \gamma = \gamma''|_{\mathcal{U} \backslash \vec{\ell}_{\mathcal{U}}}$ implica que $\gamma' = \gamma''$.

Definição 1.42. *Dada uma reta $\ell \in \mathbb{G}_1$, um conjunto $F \subset \mathbb{Z}^2$ é dito ser uma ℓ-faixa se for da forma $F = (\ell_1 \cup \ell_2 \cup \cdots \cup \ell_m) \cap \mathbb{Z}^2$, onde $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m \subset \mathbb{R}^2$ são retas paralelas à reta ℓ.*

Lema 1.43. *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, para uma reta orientada $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ com coeficiente angular racional, suponha que $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ seja um conjunto $(\eta, \vec{\ell})$-gerador. Dado $x \in X_\eta$, se existir uma $\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}$-configuração $\gamma \in L_{\vec{\ell}}(\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}, x)$ tal que $N_{\vec{\ell},\mathcal{U}}(\gamma) = 1$, então, para toda ℓ-faixa $F \supset \mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}$ e qualquer $y \in X_\eta$,*

$$x|_F = y|_F$$

implica que

$$x|_{\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cup F} = y|_{\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cup F}.$$

Prova. Inicialmente, note que o caso em que $\mathcal{U} \subset F$ é trivial. Para o caso em que $\mathcal{U} \not\subset F$, o fato de $\gamma \in L_{\vec{\ell}}(\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}, x)$ significa que há um inteiro $\tau \in \mathbb{Z}$ com $\gamma = (T^{\tau\vec{v}_\ell}x)|_{\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}}$. Daí, a igualdade $x|_F = y|_F$ implica que $\gamma = (T^{\tau\vec{v}_\ell}y)|_{\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}}$. Logo, como $N_{\vec{\ell},\mathcal{U}}(\gamma) = 1$, obtemos então

$$x|_{F\cup(\mathcal{U}+\tau\vec{v}_\ell)} = y|_{F\cup(\mathcal{U}+\tau\vec{v}_\ell)}. \tag{1.6.1}$$

Sejam, respectivamente, $u_i, u_f \in \vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cap \mathcal{U}$ os pontos inicial e final de $\mathrm{Conv}(\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cap \mathcal{U})$ com relação a orientação herdada do bordo de $\mathrm{Conv}(\mathcal{U})$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, considere os pontos $u_f^m = u_f + (\tau + m)\vec{v}_\ell$ e $u_i^m = u_i + (\tau - m)\vec{v}_\ell$, os quais são η-gerados por $\mathcal{U} + (\tau + m)\vec{v}_\ell$ e $\mathcal{U} + (\tau - m)\vec{v}_\ell$, respectivamente. Assim, para $m = 1$, de (1.6.1) e da definição de η-gerado segue que

$$x|_{F\cup(\mathcal{U}+\tau\vec{v}_\ell)\cup\{u_i^1,u_f^1\}} = y|_{F\cup(\mathcal{U}+\tau\vec{v}_\ell)\cup\{u_i^1,u_f^1\}}.$$

Por indução, concluímos que, para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$x|_{F\cup(\mathcal{U}+\tau\vec{v}_\ell)\cup\{u_i^1,u_f^1,\ldots,u_i^m,u_f^m\}} = y|_{F\cup(\mathcal{U}+\tau\vec{v}_\ell)\cup\{u_i^1,u_f^1,\ldots,u_i^m,u_f^m\}},$$

ou seja, que vale a igualdade $x|_{\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cup F} = y|_{\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cup F}$. □

Em particular, se para cada $x \in X_\eta$ existir $\gamma \in L_{\vec{\ell}}(\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}, x)$ tal que $N_{\vec{\ell},\mathcal{U}}(\gamma) = 1$, então a reta orientada $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ é uma direção expansiva segundo X_η. De fato, dadas duas configurações que coincidem no semiplano $\mathcal{H}(\vec{\ell})$, como $\mathcal{U}$ mantém sua posição fixa com relação a origem, é possível transladar as configurações de modo que ao aplicar o lema acima a região de coincidência seja ainda maior. Procedendo indutivamente, conclui-se que tais configurações são iguais, ou seja, $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ é uma direção expansiva segundo X_η. Portanto, para uma direção $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ não-expansiva segundo X_η e um conjunto $(\eta, \vec{\ell})$-gerador $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$, há configuração $x \in X_\eta$ satisfazendo

$$N_{\vec{\ell},\mathcal{U}}(\gamma) > 1 \quad \forall\, \mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}\text{-configuração } \gamma \in L_{\vec{\ell}}(\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}, x). \tag{1.6.2}$$

Notação 1.44. *Para uma reta orientada $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ e um conjunto $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$, o conjunto formado por configurações $x \in X_\eta = \overline{Orb(\eta)}$ que satisfazem (1.6.2) é denotado por $\mathcal{N}(\vec{\ell},\mathcal{U})$.*

Note que $\mathcal{N}(\vec{\ell},\mathcal{U})$ é um subconjunto fechado de X_η. Dada uma reta orientada $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$, para conjuntos $(\eta, \vec{\ell})$-geradores $\mathcal{U}, \mathcal{U}' \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ tais que $\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cap \mathcal{U} = \vec{\ell}_{\mathcal{U}'} \cap \mathcal{U}'$, observamos que se

$\mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$, então $\mathcal{N}(\vec{\ell},\mathcal{U}') \subset \mathcal{N}(\vec{\ell},\mathcal{U})$. Se $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ for uma direção não-expansiva segundo X_η, é fácil ver que, para uma família crescente de conjuntos encaixados $(\eta, \vec{\ell})$-geradores $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ tais que $\vec{\ell}_{\mathcal{U}_i} \cap \mathcal{U}_i = \vec{\ell}_{\mathcal{U}_{i'}} \cap \mathcal{U}_{i'}$ para cada $i, i' \in \mathbb{N}$, existe configuração $x \in X_\eta$ tal que $x \in \mathcal{N}(\vec{\ell},\mathcal{U}_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Para qualquer $x \in \mathcal{N}(\vec{\ell},\mathcal{U})$, da equação

$$P_\eta(\mathcal{U}) - P_\eta(\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}) = \sum_{\gamma\in L(\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}},\eta)} \Big(|\{\gamma' \in L(\mathcal{U},\eta) : \gamma'|_{\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}} = \gamma\}| - 1\Big)$$

e do fato de $N_{\vec{\ell},\mathcal{U}}(\gamma) > 1$ para toda $\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}$-configuração $\gamma \in L_{\vec{\ell}}(\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}, x)$, obtemos que

$$P_\eta(\mathcal{U}) - P_\eta(\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}) \geq \sum_{\gamma\in L_{\vec{\ell}}(\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}},x)} \Big(N_{\vec{\ell},\mathcal{U}}(\gamma) - 1\Big) \geq |L_{\vec{\ell}}(\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}, x)|. \tag{1.6.3}$$

Utilizando o Teorema de Morse-Hedlund, Bryna Kra e Van Cyr [7] mostraram que, sob certas condições, um limitante superior adequado para $P_\eta(\mathcal{U}) - P_\eta(\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}})$ e, portanto, para $|L_{\vec{\ell}}(\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}, x)|$, força periodicidade em certas regiões das configurações $x \in \mathcal{N}(\vec{\ell},\mathcal{U})$. Utilizando o Teorema de Morse-Hedlund Alfabético, no próximo capítulo apresentamos resultados similares.

Capítulo 2

Conexões entre direções não-expansivas e periodicidade

Neste capítulo, nós nos dedicamos à investigação das conexões entre direções não-expansivas e periodicidade, tirando proveito, por meio do Teorema de Morse-Hedlund Alfabético, da cardinalidade de alfabetos apropriadamente construídos.

2.1 Construções de conjuntos balanceados

Conjuntos balanceados $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$, grosso modo, são conjuntos tais que, com relação à uma reta orientada $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$, a interseção $\ell' \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ de toda reta $\vec{\ell'} \subset \mathbb{R}^2$ paralela a $\vec{\ell}$ possui uma cardinalidade mínima estabelecida e, ainda, a $\mathcal{U}$-complexidade é limitada pela complexidade de parte específica do próprio conjunto mais a cardinalidade de alfabetos apropriados. Os conjuntos balanceados, como veremos adiante, têm as propriedades necessárias para se obter periodicidade.

Definição 2.1. *Seja $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ uma reta orientada. Dados $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ e $p \in \mathbb{N}$, uma ℓ-faixa F descrita por $(\ell_1 \cup \cdots \cup \ell_m) \cap \mathbb{Z}^2$ é dita ser uma $(\vec{\ell}, \mathcal{U}, p)$-faixa se satisfaz*

$$\ell_i \cap \mathbb{Z}^2 \neq \vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cap \mathbb{Z}^2 \ e \ |\ell_i \cap \mathcal{U}| \geq p \quad \forall\ i = 1, \ldots, m$$

e, para qualquer reta $\vec{\ell'} \subset \mathbb{R}^2$ paralela a $\vec{\ell}$ com $\ell' \cap \mathbb{Z}^2 \neq \vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cap \mathbb{Z}^2$ e $|\ell' \cap \mathcal{U}| \geq p$, existe $1 \leq i \leq m$ tal que $\ell' = \ell_i$.

Seja $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ uma reta orientada. Dado um conjunto $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$, para cada reta orientada $\vec{\ell'} \subset \mathbb{R}^2$ paralela a $\vec{\ell}$ que satisfaz $\ell' \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, sejam $i_{\mathcal{U}}(\vec{\ell'}), f_{\mathcal{U}}(\vec{\ell'}) \in \mathbb{Z}^2$ os pontos inicial e final de $\ell' \cap \mathcal{U}$ com relação a orientação de $\vec{\ell'}$, respectivamente. É claro que se $\ell' \cap \mathcal{U} = \{g\}$, então $i_{\mathcal{U}}(\vec{\ell'})$ e $f_{\mathcal{U}}(\vec{\ell'})$ são definidos como sendo o próprio ponto $g \in \mathbb{Z}^2$. Dados $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ e $p \in \mathbb{N}$, os conjuntos

$$\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}) := \left\{ i_{\mathcal{U}}(\vec{\ell'}) \in \mathbb{Z}^2 : \vec{\ell'} \text{ é paralela a } \vec{\ell},\ \vec{\ell'} \neq \vec{\ell}_{\mathcal{U}},\ |\ell' \cap \mathcal{U}| \geq p \right\}$$

e

$$\mathcal{F}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}) := \left\{ f_{\mathcal{U}}(\vec{\ell'}) \in \mathbb{Z}^2 : \vec{\ell'} \text{ é paralela a } \vec{\ell},\ \vec{\ell'} \neq \vec{\ell}_{\mathcal{U}},\ |\ell' \cap \mathcal{U}| \geq p \right\}$$

estarão presentes em praticamente todas as construções do trabalho. Observe que a priori, em geral, $L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}), x) \neq L_{\vec{\ell}}(\mathcal{F}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}), x)$ para $x \in X_\eta$. Se para qualquer reta $\vec{\ell'} \subset \mathbb{R}^2$ paralela a $\vec{\ell}$, com $\vec{\ell'} \neq \vec{\ell}_{\mathcal{U}}$ e $\ell' \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, tivermos $|\ell' \cap \mathcal{U}| \geq p$, então $L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}), x) = L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},q}(\mathcal{U}), x)$ e $L_{\vec{\ell}}(\mathcal{F}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}), x) = L_{\vec{\ell}}(\mathcal{F}^{\vec{\ell},q}(\mathcal{U}), x)$ para todo $x \in X_\eta$ e qualquer inteiro positivo $q \leq p$. Por fim, note que toda $(\vec{\ell}, \mathcal{U}, p)$-faixa $F \subset \mathbb{Z}^2$ pode ser apresentada como

$$F = \bigcup_{t \in \mathbb{Z}} (\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}) + t\vec{v}_\ell) \quad \text{e} \quad F = \bigcup_{t \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}) + t\vec{v}_\ell).$$

Este ponto de vista permite considerar, para $a \in \mathbb{Z}$, os conjuntos

$$\vec{F}(a) := \bigcup_{t \geq a} (\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}) + t\vec{v}_\ell) \quad \text{e} \quad \overleftarrow{F}(a) := \bigcup_{t \geq a} (\mathcal{F}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}) - t\vec{v}_\ell),$$

os quais serão chamados $(\vec{\ell}, \mathcal{U}, p)$-semifaixas.

Similarmente ao Lema 2.24 de [7], o resultado abaixo mostra como não-expansividade força periodicidade em certas regiões de algumas configurações.

Lema 2.2. *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, suponha que $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ seja uma direção não-expansiva segundo X_η e que $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ seja um conjunto $(\eta, \vec{\ell})$-gerador. Fixado $x \in \mathcal{N}(\vec{\ell}, \mathcal{U})$, se*

$$P_\eta(\mathcal{U}) \leq P_\eta(\mathcal{U} \backslash \vec{\ell}_{\mathcal{U}}) + p + |L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}), x)| - 2$$

para algum $p \in \mathbb{N}$, então a restrição de x à $(\vec{\ell}, \mathcal{U}, p)$-faixa F é periódica de período $t\vec{v}_\ell$ com $t \leq p + |L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}), x)| - 2$.

Prova. Inicialmente, observe que, para qualquer $\gamma \in L_{\vec{\ell}}(\mathcal{U} \backslash \vec{\ell}_{\mathcal{U}}, x)$, temos que $N_{\vec{\ell}, \mathcal{U}}(\gamma) - 1 > 0$, donde, de forma análoga ao que foi feito em (1.6.3), segue que $P_\eta(\mathcal{U}) - P_\eta(\mathcal{U} \backslash \vec{\ell}_{\mathcal{U}}) > 0$. Logo, a desigualdade $P_\eta(\mathcal{U}) - P_\eta(\mathcal{U} \backslash \vec{\ell}_{\mathcal{U}}) \leq p + |L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}), x)| - 2$ implica, em particular, que

$$p + |L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}), x)| - 2 > 0.$$

Além disso, de (1.6.3) segue que

$$|L_{\vec{\ell}}(\mathcal{U} \backslash \vec{\ell}_{\mathcal{U}}, x)| \leq P_\eta(\mathcal{U}) - P_\eta(\mathcal{U} \backslash \vec{\ell}_{\mathcal{U}}) \leq p + |L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}), x)| - 2.$$

Defina o conjunto

$$\mathcal{R} := \bigcup_{t=0}^{p-1} (\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}) + t\vec{v}_\ell) \subset \mathcal{U}.$$

Para o alfabeto finito $\mathcal{A}_x := L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}), x)$, considere a sequência infinita $\xi \in \mathcal{A}_x^{\mathbb{Z}}$ definida por $\xi_t := (T^{t\vec{v}_\ell} x)|_{\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U})}$ para todo $t \in \mathbb{Z}$. A definição do conjunto $\mathcal{R}$ garante que, para qualquer $\tau \in \mathbb{Z}$, a palavra $\xi_\tau \xi_{\tau+1} \cdots \xi_{\tau+p-1} \in (\mathcal{A}_x)^*$ se identifica naturalmente com a $\mathcal{R}$-configuração $(T^{\tau\vec{v}_\ell} x)|_{\mathcal{R}} \in L_{\vec{\ell}}(\mathcal{R}, x)$. Se $|\mathcal{A}_x| = 1$, não há o que provar. Caso contrário, como

$$P_\xi(p) = |L_{\vec{\ell}}(\mathcal{R}, x)| \leq |L_{\vec{\ell}}(\mathcal{U} \backslash \vec{\ell}_{\mathcal{U}}, x)| \leq p + |\mathcal{A}_x| - 2,$$

o Teorema de Morse-Hedlund Alfabético garante que a sequência ξ é periódica de período no máximo $p+|L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}),x)|-2$ e, portanto, a restrição de $x \in \mathcal{N}(\vec{\ell},\mathcal{U})$ a F é periódica de período $t\vec{v}_\ell$ para algum inteiro positivo $t \leq p+|L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}),x)|-2$, donde segue o resultado. $\square$

Dado $a \in \mathbb{Z}$, para cada $x \in X_\eta$, sejam $\vec{L}_{\vec{\ell},a}(\mathcal{U},x)$ e $\overleftarrow{L}_{\vec{\ell},a}(\mathcal{U},x)$ as subfamílias de $L_{\vec{\ell}}(\mathcal{U},x)$ definidas por

$$\vec{L}_{\vec{\ell},a}(\mathcal{U},x) := \left\{(T^{t\vec{v}_\ell}x)|_{\mathcal{U}} : t \geq a\right\} \quad \text{e} \quad \overleftarrow{L}_{\vec{\ell},a}(\mathcal{U},x) := \left\{(T^{t\overleftarrow{v}_\ell}x)|_{\mathcal{U}} : t \geq a\right\},$$

onde $\overleftarrow{v}_\ell = -\vec{v}_\ell$ (ver Notação 1.33).

Em algumas demonstrações futuras, será conveniente termos uma versão do lema acima também para $(\vec{\ell},\mathcal{U},p)$-semifaixas. Naturalmente, isso nos condiciona a considerar configurações $x \in X_\eta$ tais que

$$N_{\vec{\ell},\mathcal{U}}(\gamma) > 1 \quad \forall\, \mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}\text{-configuração } \gamma \in \vec{L}_{\vec{\ell},a}(\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}},x). \tag{2.1.1}$$

ou

$$N_{\vec{\ell},\mathcal{U}}(\gamma) > 1 \quad \forall\, \mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}\text{-configuração } \gamma \in \overleftarrow{L}_{\vec{\ell},a}(\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}},x). \tag{2.1.2}$$

Notação 2.3. *Para uma reta orientada $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ e um conjunto $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$, o conjunto formado pelas configurações $x \in X_\eta$ que satisfazem (2.1.1) e o formado pelas que satisfazem (2.1.2) são denotados, respectivamente, por $\vec{\mathcal{N}}_{\vec{\ell},a}(\vec{\ell},\mathcal{U})$ e $\overleftarrow{\mathcal{N}}_{\vec{\ell},a}(\vec{\ell},\mathcal{U})$, onde $a \in \mathbb{Z}$.*

Dado $x \in \vec{\mathcal{N}}_{\vec{\ell},a}(\vec{\ell},\mathcal{U})$, é fácil ver que do fato de $N_{\vec{\ell},\mathcal{U}}(\gamma) > 1$ para todo $\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}$-configuração $\gamma \in \vec{L}_{\vec{\ell},a}(\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}},x)$, resulta que

$$P_\eta(\mathcal{U}) - P_\eta(\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}) \geq \left|\vec{L}_{\vec{\ell},a}(\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}},x)\right|. \tag{2.1.3}$$

É importante notar que, ao considerar uma $(\vec{\ell},\mathcal{U},p)$-semifaixa $F(a)$, apenas um dos conjuntos $\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U})$ e $\mathcal{F}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U})$ é apropriado para construir o alfabeto induzido por $x|_{F(a)} \in \mathcal{A}^{F(a)}$. O resultado a seguir é enunciado para $(\vec{\ell},\mathcal{U},p)$-semifaixas da forma $\vec{F}(a)$, entretanto, obviamente, ele também pode ser enunciado para $(\vec{\ell},\mathcal{U},p)$-semifaixas da forma $\overleftarrow{F}(a)$ simplesmente substituindo $\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U})$ por $\mathcal{F}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U})$.

Lema 2.4. *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, suponha que $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ seja uma direção não-expansiva segundo X_η e que $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ seja um conjunto $(\eta,\vec{\ell})$-gerador. Fixado $x \in \vec{\mathcal{N}}_{\vec{\ell},a}(\vec{\ell},\mathcal{U})$, com $a \in \mathbb{Z}$, se*

$$P_\eta(\mathcal{U}) \leq P_\eta(\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}) + p + \left|\vec{L}_{\vec{\ell},a}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}),x)\right| - 2$$

para algum $p \in \mathbb{N}$, então a restrição de x à $(\vec{\ell},\mathcal{U},p)$-semifaixa $\vec{F}(a+m_x)$ é periódica de período $t\vec{v}_\ell$ com $t \leq m_x := p+|\vec{L}_{\vec{\ell},a}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}),x)|-2$.

Prova. A argumentação é análoga a da demonstração do lema anterior, considerando (2.1.3) e o item (i) do Teorema de Morse-Hedlund Alfabético. $\square$

Nos lemas acima, se o conjunto $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ não tiver certas propriedades, a $(\vec{\ell},\mathcal{U},p)$-faixa F e, assim, as $(\vec{\ell},\mathcal{U},p)$-semifaixas $F(a)$, $a \in \mathbb{Z}$, podem ser conjuntos vazios. Mesmo se não o forem, o fato de alguma reta orientada $\vec{\ell'} \subset \mathbb{R}^2$ paralela a $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$, com $\vec{\ell'} \neq \vec{\ell}_{\mathcal{U}}$ e $\ell' \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, não satisfazer $|\ell' \cap \mathcal{U}| \geq p$ inviabiliza possíveis extensões da periodicidade para certas regiões, pois desigualdades cruciais dependem de p fixado. Tendo isso como motivação, fazemos a definição abaixo.

Definição 2.5. *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, seja $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ uma direção não-expansiva segundo X_η. Dizemos que um conjunto $(\eta,\vec{\ell})$-gerador $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ é $(\vec{\ell},p)$-balanceado (em X_η), com $p \in \mathbb{N}$, se*

(i) para qualquer reta $\vec{\ell'} \subset \mathbb{R}^2$ paralela a $\vec{\ell}$, se $\vec{\ell'} \neq \vec{\ell}_{\mathcal{U}}$ e $\ell' \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, então $|\ell' \cap \mathcal{U}| \geq p$,

(ii) para cada $x \in \mathcal{N}(\vec{\ell},\mathcal{U})$ com $|L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}),x)| > 1$, há inteiro positivo $p_x \leq p$ tal que

$$P_\eta(\mathcal{U}) \leq P_\eta(\mathcal{U} \backslash \vec{\ell}_{\mathcal{U}}) + p_x + |L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p_x}(\mathcal{U}),x)| - 2.$$

Usando que $x \in \mathcal{N}(\vec{\ell},\mathcal{U}+g)$ se, e somente se, $T^g x \in \mathcal{N}(\vec{\ell},\mathcal{U})$, é fácil argumentar que a condição de conjunto $(\vec{\ell},p)$-balanceado é invariante por translação.

Dado $a \in \mathbb{Z}$, é claro que $\mathcal{N}(\vec{\ell},\mathcal{U})$ está contido tanto em $\mathcal{N}_{\vec{\ell},a}(\vec{\ell},\mathcal{U})$ quanto em $\mathcal{N}_{\overleftarrow{\ell},a}(\vec{\ell},\mathcal{U})$. Além disso, é fácil ver que $T^{\vec{v}_\ell}(\mathcal{N}_{\vec{\ell},a}(\vec{\ell},\mathcal{U})) \subset \mathcal{N}_{\vec{\ell},a}(\vec{\ell},\mathcal{U})$ e que $T^{\vec{v}_\ell}(\mathcal{N}_{\overleftarrow{\ell},a}(\vec{\ell},\mathcal{U})) \subset \mathcal{N}_{\overleftarrow{\ell},a}(\vec{\ell},\mathcal{U})$. Logo, para $x \in \mathcal{N}_{\vec{\ell},a}(\vec{\ell},\mathcal{U})$ e $y \in \mathcal{N}_{\overleftarrow{\ell},a}(\vec{\ell},\mathcal{U})$ quaisquer, as sequências $\{T^{t\vec{v}_\ell}x\}_{t \geq a}, \{T^{t\vec{v}_\ell}y\}_{t \geq a} \subset X_\eta$ possuem todos os pontos de acumulação em $\mathcal{N}(\vec{\ell},\mathcal{U})$.

Se $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ for um conjunto $(\vec{\ell},p)$-balanceado, então, para qualquer $x \in \mathcal{N}_{\vec{\ell},a}(\vec{\ell},\mathcal{U})$ com $|\vec{L}_{\vec{\ell},b}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}),x)| > 1$ para todo $b \geq a$, há inteiro positivo $p_x \leq p$ tal que

$$P_\eta(\mathcal{U}) \leq P_\eta(\mathcal{U} \backslash \vec{\ell}_{\mathcal{U}}) + p_x + \left|\vec{L}_{\vec{\ell},a}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p_x}(\mathcal{U}),x)\right| - 2. \tag{2.1.4}$$

De fato, como $|\vec{L}_{\vec{\ell},b}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}),x)| > 1$ para todo $b \geq a$, a sequência $\{T^{t\vec{v}_\ell}x\}_{t \geq a} \subset X_\eta$ admite ponto de acumulação $z \in \mathcal{N}(\vec{\ell},\mathcal{U})$ com $|L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}),z)| > 1$. Uma vez que $\mathcal{U}$ é $(\vec{\ell},p)$-balanceado, há inteiro positivo $p_z \leq p$ cumprindo o item (ii) da Definição 2.5. Portanto, como vale $|L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p_z}(\mathcal{U}),z)| \leq |\vec{L}_{\vec{\ell},a}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p_z}(\mathcal{U}),x)|$, considerando $p_x = p_z$, asseguramos (2.1.4).

Observe que a argumentação acima se aplica também em $\mathcal{N}_{\overleftarrow{\ell},a}(\mathcal{U})$, substituindo $\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U})$ por $\mathcal{F}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U})$. Mais precisamente, se $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ for conjunto $(\vec{\ell},p)$-balanceado, então, para cada $x \in \mathcal{N}_{\overleftarrow{\ell},a}(\vec{\ell},\mathcal{U})$ com $|\overleftarrow{L}_{\vec{\ell},b}(\mathcal{F}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}),x)| > 1$ para todo $b \geq a$, há inteiro positivo $p_x \leq p$ tal que

$$P_\eta(\mathcal{U}) \leq P_\eta(\mathcal{U} \backslash \vec{\ell}_{\mathcal{U}}) + p_x + \left|\overleftarrow{L}_{\vec{\ell},a}(\mathcal{F}^{\vec{\ell},p_x}(\mathcal{U}),x)\right| - 2. \tag{2.1.5}$$

A definição de conjunto $(\vec{\ell},p)$-balanceado foi inspirada na definição de conjunto $\vec{\ell}$-balanceado presente em [7], a qual, para conveniência do leitor, é reproduzida abaixo.

Definição 2.6. *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, seja $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ uma direção não-expansiva segundo X_η. Um conjunto $(\eta,\vec{\ell})$-gerador $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ é dito ser $\vec{\ell}$-balanceado quando*

(i) para qualquer reta $\vec{\ell'} \subset \mathbb{R}^2$ paralela a $\vec{\ell}$, se $\ell' \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, então $|\ell' \cap \mathcal{U}| \geq |\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cap \mathcal{U}| - 1$,

(ii) $P_\eta(\mathcal{U}) \leq P_\eta(\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}) + |\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cap \mathcal{U}| - 1.$

É fácil ver que qualquer conjunto $\vec{\ell}$-balanceado $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ é, em particular, um conjunto $(\vec{\ell}, p)$-balanceado com $p = |\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cap \mathcal{U}| - 1$.

Dadas a $(\vec{\ell}, \mathcal{U}, p)$-faixa $F \subset \mathbb{Z}^2$ e as $(\vec{\ell}, \mathcal{U}, p)$-semifaixas $\vec{F}(a), \overleftarrow{F}(a) \subset \mathbb{Z}^2$, onde $a \in \mathbb{Z}$, se $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ for um conjunto $(\vec{\ell}, p)$-balanceado, observe que

$$F = \bigcup_{t\in\mathbb{Z}} ((\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}) + t\vec{v}_\ell),$$

$$\vec{F}(a) = \bigcup_{t\geq a} \Big((\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}) + t\vec{v}_\ell\Big) \ \text{ e } \ \overleftarrow{F}(a) = \bigcup_{t\geq a} \Big((\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}) - t\vec{v}_\ell\Big).$$

Na próxima seção veremos resultados que garantem a existência de conjuntos balanceados. Em particular, conjuntos $(\vec{\ell}, p)$-balanceados $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ têm $(\vec{\ell}, \mathcal{U}, p)$-faixas e, portanto, $(\vec{\ell}, \mathcal{U}, p)$-semifaixas não vazias. Além disso, como consequência imediata dos Lemas 2.2 e 2.4 temos o resultado abaixo.

Corolário 2.7. *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, suponha que $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ seja uma direção não-expansiva segundo X_η e que $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ seja um conjunto $(\vec{\ell}, p)$-balanceado. Então,*

(i) para todo $x \in \mathcal{N}(\vec{\ell}, \mathcal{U})$, ou $|L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}), x)| = 1$, ou a restrição de x à $(\vec{\ell}, \mathcal{U}, p)$-faixa F é periódica de período $t\vec{v}_\ell$ com

$$t \leq p_x + |L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}), x)| - 2,$$

onde $p_x \leq p$ é como na Definição 2.5;

(ii) para todo $x \in \mathcal{N}_{\vec{\ell},a}(\vec{\ell}, \mathcal{U})$, com $a \in \mathbb{Z}$, ou $|\vec{L}_{\vec{\ell},a_x}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}), x)| = 1$ para algum $a_x \geq a$, ou a restrição de x à $(\vec{\ell}, \mathcal{U}, p)$-semifaixa $\vec{F}(a + m_x)$ é periódica de período $t\vec{v}_\ell$ com

$$t \leq m_x := p_x + \left|\vec{L}_{\vec{\ell},a}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}), x)\right| - 2,$$

onde $p_x \leq p$ é como em (2.1.4);

(iii) para todo $x \in \mathcal{N}_{\overleftarrow{\ell},a}(\vec{\ell}, \mathcal{U})$, com $a \in \mathbb{Z}$, ou $|\overleftarrow{L}_{\vec{\ell},a_x}(\mathcal{F}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}), x)| = 1$ para algum $a_x \geq a$, ou a restrição de x à $(\vec{\ell}, \mathcal{U}, p)$-semifaixa $\overleftarrow{F}(a + m_x)$ é periódica de período $t\vec{v}_\ell$ com

$$t \leq m_x := p_x + \left|\overleftarrow{L}_{\vec{\ell},a}(\mathcal{F}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}), x)\right| - 2,$$

onde $p_x \leq p$ é como em (2.1.5).

Note que $|L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}), x)| = 1$ significa que a restrição de x à $(\vec{\ell}, \mathcal{U}, p)$-faixa F é periódica de período $\vec{v}_\ell$. Naturalmente, o mesmo acontece para $(\vec{\ell}, \mathcal{U}, p)$-semifaixas.

2.1.1 Condições sobre a existência de conjuntos balanceados

Nesta subseção, inicialmente, mostraremos que se há $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ cumprindo certas propriedades e tal que $P_\eta(\mathcal{U}) \leq \frac{1}{2}|\mathcal{U}|+|\mathcal{A}|-1$, então existe conjunto balanceado. Em seguida, supondo que existe $C' > 1$ tal que $P_\eta(R_{\kappa,\tau}) \leq C'\kappa\tau + |\mathcal{A}|-1$ para $\kappa, \tau \in \mathbb{N}$ suficientemente grandes, mostraremos que, sob certas circunstâncias, também é possível obter conjunto balanceado. Note que as hipóteses sobre a complexidade de $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ consideradas acima são contrastantes.

O lema a seguir será fundamental para a construção de conjuntos balanceados.

Lema 2.8. *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, suponha $P_\eta(\mathcal{T}) \leq |\mathcal{T}|+|\mathcal{A}|-2$ para algum $\mathcal{T} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$. Então, para toda reta orientada $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$, há conjunto $(\eta, \vec{\ell})$-gerador $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ tal que $P_\eta(\mathcal{S}) \leq |\mathcal{S}|+|\mathcal{A}|-2$. Além disso, se $\mathcal{S} \setminus \vec{\ell}_{\mathcal{S}}$ é não vazio, então as seguintes condições se verificam.*

(i) existe semiplano $\mathcal{H} \subset \mathbb{Z}^2$ (cuja aresta é paralela a $\vec{\ell}$) tal que $\mathcal{S}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{S}} = \mathcal{T} \cap \mathcal{H}$,

(ii) $P_\eta(\mathcal{S}) - P_\eta(\mathcal{S}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{S}}) \leq |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|-1$.

Prova. Seja $\mathcal{H}'$ o semiplano minimal (com respeito à inclusão) dentre todos os semiplanos $\hat{\mathcal{H}} \subset \mathbb{Z}^2$ com aresta paralela a $\vec{\ell}$ e $\mathcal{T} \cap \hat{\mathcal{H}} \neq \emptyset$ verificando

$$P_\eta(\mathcal{T} \cap \hat{\mathcal{H}}) - |\mathcal{T} \cap \hat{\mathcal{H}}|-|\mathcal{A}|+2 \leq P_\eta(\mathcal{T}) - |\mathcal{T}|-|\mathcal{A}|+2.$$

Se $\mathrm{Conv}(\mathcal{T} \cap \mathcal{H}')$ tiver área nula, como $P_\eta(\mathcal{T} \cap \mathcal{H}') \leq |\mathcal{T} \cap \mathcal{H}'|+|\mathcal{A}|-2$, então qualquer conjunto η-gerador $\mathcal{S} \subset \mathcal{T} \cap \mathcal{H}'$ tal que $P_\eta(\mathcal{S}) \leq |\mathcal{S}|+|\mathcal{A}|-2$ satisfaz a conclusão da primeira parte do lema.

Caso contrário, $\mathcal{S}' := \mathcal{T} \cap \mathcal{H}' \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ e, portanto, $\mathcal{S}'\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{S}'}$ é não vazio. Seja $\mathcal{S}$ um conjunto minimal (com respeito à inclusão) dentre todos os conjuntos $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ com $\mathcal{S}'\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{S}'} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{S}'$ que verificam

$$P_\eta(\mathcal{U}) - |\mathcal{U}|-|\mathcal{A}|+2 \leq P_\eta(\mathcal{T}) - |\mathcal{T}|-|\mathcal{A}|+2.$$

A minimalidade de $\mathcal{H}$ assegura que $\vec{\ell}_{\mathcal{S}'} = \vec{\ell}_{\mathcal{S}}$ e então que $\mathcal{S} \setminus \vec{\ell}_{\mathcal{S}} = \mathcal{S}' \setminus \vec{\ell}_{\mathcal{S}'}$ é não vazio. Assim, se $g \in \vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}$ é o ponto inicial ou final de $\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}$, a minimalidade de $\mathcal{S}$ implica que

$$P_\eta(\mathcal{S}\backslash\{g\}) - |\mathcal{S}\backslash\{g\}|-|\mathcal{A}|+2 > P_\eta(\mathcal{T}) - |\mathcal{T}|-|\mathcal{A}|+2 \geq P_\eta(\mathcal{S}) - |\mathcal{S}|-|\mathcal{A}|+2,$$

donde segue que $P_\eta(\mathcal{S}) - P_\eta(\mathcal{S}\backslash\{g\}) = 0$, isto é, $g \in \mathcal{S}$ é η-gerado por $\mathcal{S}$. A definição de $\mathcal{S}$ e o fato de $\mathcal{S}'\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{S}'} = \mathcal{S}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \subset \mathcal{S}'$ implicam que

$$P_\eta(\mathcal{S}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{S}}) - |\mathcal{S}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{S}}|-|\mathcal{A}|+2 > P_\eta(\mathcal{T}) - |\mathcal{T}|-|\mathcal{A}|+2 \geq P_\eta(\mathcal{S}) - |\mathcal{S}|-|\mathcal{A}|+2$$

e, portanto, que

$$P_\eta(\mathcal{S}) - P_\eta(\mathcal{S}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{S}}) \leq |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|-1.$$

Por fim, para concluir a demonstração, observamos que o semiplano $\mathcal{H} := \mathcal{H}(\vec{\ell}_{\mathcal{S}}^{(+1)})$ satisfaz a condição requerida. $\square$

Nas condições do resultado anterior, supondo ainda $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ aperiódica, o Lema 1.31 assegura que o conjunto $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ obtido cumpre $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$. Além disso, supondo ainda $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ direção não-expansiva segundo X_η, a Observação 1.36 permite concluir então que $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ satisfaz $|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \geq 2$.

Dado $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$, suponha que $\varpi, \varpi' \in E(\mathcal{U})$ sejam arestas antiparalelas. Para qualquer reta $\hat{\ell} \subset \mathbb{R}^2$ paralela a ϖ tal que $\hat{\ell} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, se $|\varpi \cap \mathcal{U}| \leq |\varpi' \cap \mathcal{U}|$, observe que

$$|\hat{\ell} \cap \mathcal{U}| \geq |\varpi \cap \mathcal{U}| - 1. \tag{2.1.6}$$

De fato, se $|\varpi \cap \mathcal{U}| \leq |\varpi' \cap \mathcal{U}|$, temos que o comprimento de ϖ é menor ou igual ao comprimento do segmento $\hat{\ell} \cap \mathrm{Conv}(\mathcal{U})$, donde segue (2.1.6).

Definição 2.9. *Um conjunto $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ é dito ser quase-regular quando, para qualquer aresta $\varpi \in E(\mathcal{U})$, existe aresta $\varpi' \in E(\mathcal{U})$ antiparalela a ϖ com $|\varpi' \cap \mathcal{U}| = |\varpi \cap \mathcal{U}|$.*

Note que se $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ for um conjunto quase-regular, então, para qualquer reta $\ell \in \mathbb{G}_1$, existe reta $\ell' \subset \mathbb{R}^2$ paralela a ℓ que intersepta arestas $\varpi, \varpi' \in E(\mathcal{U})$ antiparalelas. De fato, suponha $E(\mathcal{U}) = \{\varpi_1, \ldots, \varpi_n\}$ enumerado de acordo com a orientação herdada do bordo de $\mathrm{Conv}(\mathcal{U})$. Considerando $\varpi_i = \varpi_j$ para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$ tais que $i \equiv j (\mathrm{mod}\ n)$, a convexidade de $\mathcal{U}$ implica que se ϖ_i é antiparalela a ϖ_j, então ϖ_{i+1} é antiparalela a ϖ_{j+1}. Supondo ϖ_i antiparalela a ϖ_j, sejam $R, S \subset \mathbb{R}^2$ os segmentos de reta ligando, respectivamente, os pontos iniciais e os pontos finais de ϖ_i e ϖ_j. Note que qualquer reta $\hat{\ell} \subset \mathbb{R}^2$ passando pelo ponto $g := R \cap S \in \mathbb{R}^2$ que intersepta ϖ_i também intersepta ϖ_j. Portanto, como arestas antiparalelas têm o mesmo comprimento, toda rotação de $\hat{\ell}$ passando por $g \in \mathbb{R}^2$ que intersepta ϖ_{i+1} também intersepta ϖ_{j+1}, mas ϖ_{i+1} e ϖ_{j+1} são antiparalelas. Este raciocínio nos permite concluir que toda reta passando por $g \in \mathbb{R}^2$ intersepta arestas antiparalelas de $\mathcal{U}$.

Os segmentos de reta ligando, respectivamente, os pontos iniciais e os pontos finais de arestas antiparalelas de um conjunto quase-regular são chamados de eixos de simetria. Naturalmente, se $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ for quase-regular, cada eixo de simetria $S \subset \mathbb{R}^2$ de $\mathcal{U}$ separa $\mathcal{U}$ em dois subconjuntos $A_S, B_S \subset \mathcal{U}$ com $A_S \cup B_S = \mathcal{U}$ e $A_S \cap B_S = S \cap \mathbb{Z}^2$. A palavra simetria é justificada pelo fato de

$$|A_S| = |B_S|. \tag{2.1.7}$$

Com efeito, dado $u \in \mathbb{R}^2$, como $-u \in \mathbb{R}^2$ representa a rotação de u por um ângulo de 180°, note que, se $\varpi, \varpi' \in E(\mathcal{U})$ são antiparalelas, $-\varpi$ é paralela a ϖ' e, a menos de translação, $-\varpi = \varpi'$. Isto permite concluir que $-A_S$ é uma translação de B_S, ou seja, $|A_S| = |B_S|$.

Similarmente ao Lema 4.7 de [7], o resultado abaixo mostra como baixa complexidade força, para toda direção $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ não-expansiva segundo X_η, a existência de conjunto $(\vec{\ell}, p)$-balanceado.

Proposição 2.10. *Dada $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ aperiódica, suponha que $P_\eta(\mathcal{U}) \leq \frac{1}{2}|\mathcal{U}| + |\mathcal{A}| - 1$ para algum $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ quase-regular. Então, para qualquer direção $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ não-expansiva segundo X_η, há conjunto $(\eta, \vec{\ell})$-gerador $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ com $P_\eta(\mathcal{S}) \leq |\mathcal{S}| + |\mathcal{A}| - 2$ tal que* *(i)* $|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \leq |\overleftarrow{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|$,

(ii) $P_\eta(\mathcal{S}) - P_\eta(\mathcal{S} \backslash \vec{\ell}_{\mathcal{S}}) \leq |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| - 1$.

Em particular, segue que $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ é um conjunto $\vec{\ell}$-balanceado e, portanto, $(\vec{\ell}, p)$-balanceado com $p = |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| - 1$.

Prova. Inicialmente, seja $g \in \mathbb{R}^2$ o ponto na interseção de quaisquer dois eixos de simetria distintos de $\mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ é um conjunto quase-regular, a reta antiparalela a $\vec{\ell}$ passando por $g \in \mathbb{R}^2$ intersepta arestas antiparalelas de $\mathcal{U}$, a saber, $\varpi, \varpi' \in E(\mathcal{U})$. Seja $\mathcal{H}(\overleftarrow{\ell}') \subset \mathbb{Z}^2$ o semi-plano minimal (com respeito à inclusão) tal que $g \in \mathrm{Conv}(\mathcal{H}(\overleftarrow{\ell}'))$ e cuja aresta $\overleftarrow{\ell}'$, antiparalela a $\vec{\ell}$, passa por algum ponto inicial ou final de ϖ ou ϖ'. Seja $u \in V(\mathcal{U})$ um ponto inicial ou final de ϖ ou ϖ' pertencente a ℓ'. Supondo que $S \subset \mathbb{R}^2$ seja o eixo de simetria tal que $u \in S$, então, por construção, temos que $\mathcal{H}(\overleftarrow{\ell}')$ contém um dos subconjuntos $A_S, B_S \subset \mathcal{U}$ tais que $A_S \cup B_S = \mathcal{U}$ e $A_S \cap B_S = S \cap \mathbb{Z}^2$ (ver Figura 2.1.1). Portanto, como $|A_S| = |B_S|$, concluímos que

$$|\mathcal{U} \cap \mathcal{H}(\overleftarrow{\ell}')| \geq |B_S| > |B_S| - \frac{1}{2}|A_S \cap B_S| = \frac{1}{2}|\mathcal{U}|.$$

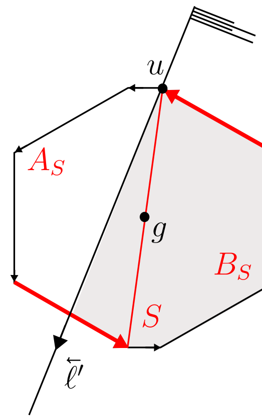


Figura 2.1.1: Representação da reta $\overleftarrow{\ell}' \subset \mathbb{R}^2$ e dos subconjuntos $A_S, B_S \subset \mathcal{U}$.

Considerando $\mathcal{T} = \mathcal{U} \cap \mathcal{H}(\overleftarrow{\ell}')$, temos que

$$P_\eta(\mathcal{T}) - |\mathcal{T}| \leq P_\eta(\mathcal{U}) - |\mathcal{T}| \leq \frac{1}{2}|\mathcal{U}| + |\mathcal{A}| - 1 - |\mathcal{T}| < \frac{1}{2}|\mathcal{U}| + |\mathcal{A}| - 1 - \frac{1}{2}|\mathcal{U}| = |\mathcal{A}| - 1,$$

donde segue que $P_\eta(\mathcal{T}) - |\mathcal{T}| \leq |\mathcal{A}| - 2$.

Sabendo que a reta antiparalela a $\vec{\ell}$ que passa por $g \in \mathbb{R}^2$ está contida em $\mathrm{Conv}(\mathcal{H}(\overleftarrow{\ell}'))$, a minimalidade de $\mathcal{H}(\overleftarrow{\ell}')$ garante que ℓ' intersepta ambas as arestas $\varpi, \varpi' \in E(\mathcal{U})$. Em particular, da hipótese de $\mathcal{U}$ ser convexo segue que o comprimento de $\ell'' \cap \mathrm{Conv}(\mathcal{U})$ é menor ou igual ao comprimento de $\ell' \cap \mathrm{Conv}(\mathcal{U})$ para toda reta $\vec{\ell}'' \subset \mathbb{R}^2$ paralela a $\vec{\ell}$ e, portanto,

$$|\ell' \cap \mathcal{U}| = \max\left\{|\ell'' \cap \mathcal{U}| : \vec{\ell}'' \text{ paralela a } \vec{\ell}\right\}. \tag{2.1.8}$$

Segundo o Lema 2.8, há um semiplano $\mathcal{H} \subset \mathbb{Z}^2$ (cuja aresta é paralela a $\vec{\ell}$) e um conjunto $(\eta, \vec{\ell})$-gerador $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ com $P_\eta(\mathcal{S}) \leq |\mathcal{S}|+|\mathcal{A}|-2$ tais que

$$\mathcal{S}\setminus\vec{\ell}_{\mathcal{S}} = \Big(\mathcal{U} \cap \mathcal{H}(\overleftarrow{\ell}')\Big) \cap \mathcal{H} \tag{2.1.9}$$

e

$$P_\eta(\mathcal{S}) - P_\eta(\mathcal{S}\setminus\vec{\ell}_{\mathcal{S}}) \leq |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|-1. \tag{2.1.10}$$

Note que $\overleftarrow{\ell}_{\mathcal{S}} = \overleftarrow{\ell}_{\mathcal{S}\setminus\vec{\ell}_{\mathcal{S}}} = \overleftarrow{\ell}_{(\mathcal{U}\cap\mathcal{H}(\overleftarrow{\ell}'))\cap\mathcal{H}} = \overleftarrow{\ell}_{\mathcal{U}\cap\mathcal{H}(\overleftarrow{\ell}')} = \overleftarrow{\ell}'$, onde a primeira igualdade é válida para qualquer $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ e a terceira segue do fato da aresta de $\mathcal{H}$ ser antiparalela a $\overleftarrow{\ell}'$. Mais ainda, de (2.1.9) obtemos que $\overleftarrow{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S} = \overleftarrow{\ell}_{\mathcal{S}} \cap (\mathcal{S}\setminus\vec{\ell}_{\mathcal{S}}) = \overleftarrow{\ell}' \cap \mathcal{U}$. Logo, de (2.1.8) segue que

$$|\overleftarrow{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| = |\ell' \cap \mathcal{U}| \geq |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{U}| \geq |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|.$$

Enfim, (2.1.6) e (2.1.10) permitem concluir que $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ é um conjunto $\vec{\ell}$-balanceado e, portanto, $(\vec{\ell}, p)$-balanceado com $p = |\overleftarrow{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|-1$. □

Se $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ for um conjunto $(\eta, \vec{\ell})$-gerador satisfazendo o item (ii) do Lema 2.8, mesmo que $|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| > |\overleftarrow{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|$, ainda é possível que $\mathcal{S}$ seja um conjunto $(\vec{\ell}, p)$-balanceado. Mais especificamente, supondo $|\overleftarrow{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| > 1$ e $p = |\overleftarrow{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|-1$, se os conjuntos $L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{S}), x)$ tiverem cardinalidade suficientemente alta, de forma que

$$|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \leq |\overleftarrow{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|+|L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{S}), x)|-2, \tag{2.1.11}$$

então ainda temos

$$P_\eta(\mathcal{S}) - P_\eta(\mathcal{S}\setminus\vec{\ell}_{\mathcal{S}}) \leq |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|-1 \leq p + |L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{S}), x)|-2,$$

donde resulta que $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ é um conjunto $(\vec{\ell}, p)$-balanceado.

Uma das dificuldades na tentativa de melhorar a constante para $C > \frac{1}{2}$ em versões da Conjectura de Nivat está justamente no fato de não ser possível garantir $|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \leq |\overleftarrow{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|$. Mais precisamente, dada $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ aperiódica, suponha que há $n, k \in \mathbb{N}$ e $\frac{1}{2} < C < 1$ tais que

$$P_\eta(R_{n,k}) \leq Cnk + |\mathcal{A}|-2.$$

Fixada uma direção $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ não-expansiva segundo X_η, dentre os conjuntos da forma $\mathcal{T}' = R_{n,k} \cap \mathcal{H}(\overleftarrow{\ell}')$, com $\overleftarrow{\ell}' \subset \mathbb{R}^2$ antiparalela a $\vec{\ell}$, tais que $|\mathcal{T}'| \geq Cnk$, seja $\mathcal{T} = R_{n,k} \cap \mathcal{H}(\overleftarrow{\ell}')$ um cuja cardinalidade de $\ell' \cap R_{n,k}$ é a maior possível. Isto é necessário se desejamos aplicar o mesmo raciocínio da Proposição 2.10. Entretanto, como $C > \frac{1}{2}$ e $|\mathcal{T}| \geq Cnk$, se $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ denotar o conjunto $(\eta, \vec{\ell})$-gerador obtido no Lema 2.8 com relação a $\mathcal{T} = R_{n,k} \cap \mathcal{H}(\overleftarrow{\ell}')$, eventualmente é possível que $|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| > |\overleftarrow{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|$. Em suma, esta discussão indica que uma abordagem alfabética pode se tornar uma ferramenta útil na demonstração da Conjectura de Nivat se, de alguma forma, controlarmos a cardinalidade dos conjuntos $|L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{S}), x)|$, onde $p = |\overleftarrow{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|-1$.

O lema a seguir afirma que, sob certas hipóteses, é possível "engordar" retângulos sem, no entanto, aumentar suas complexidades. Isto permitirá conectar a condição de complexidade assintótica alta, isto é, quando existe $C' > 1$ tal que

$$P_\eta(R_{\kappa,\tau}) \le C'\kappa\tau + |\mathcal{A}| - 1$$

para $\kappa, \tau \in \mathbb{N}$ suficientemente grandes, com a condição de baixa complexidade, isto é, quando existe $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_\mathcal{C}$ tal que

$$P_\eta(\mathcal{U}) \le \frac{1}{2}|\mathcal{U}| + |\mathcal{A}| - 1.$$

Lema 2.11. *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$,*

(i) se a reta $\ell_{e_1} \in \mathbb{G}_1$, gerada por $e_1 = (1,0)$, for expansiva segundo X_η, então existem $a, \tau \in \mathbb{N}$ tais que, para qualquer $\kappa' \in \mathbb{N}$, existe conjunto quase-regular $\mathcal{U} \supset R_{2a\kappa',\tau}$, com $|\mathcal{U}| = 2a\kappa'\tau + 2a\kappa'(\kappa' - 1)$, tal que $P_\eta(\mathcal{U}) = P_\eta(R_{2a\kappa',\tau})$,

(ii) se a reta $\ell_{e_2} \in \mathbb{G}_1$, gerada por $e_2 = (0,1)$, for expansiva segundo X_η, então existem $b, \kappa \in \mathbb{N}$ tais que, para qualquer $\tau' \in \mathbb{N}$, existe conjunto quase-regular $\mathcal{U} \supset R_{\kappa,2b\tau'}$, com $|\mathcal{U}| = 2b\tau'\kappa + 2b\tau'(\tau' - 1)$, tal que $P_\eta(\mathcal{U}) = P_\eta(R_{\kappa,2b\tau'})$.

Prova. Inicialmente, recorde que $\ell_{e_i} \in \mathbb{G}_1$ é expansiva segundo X_η se, e somente se, as retas orientadas $\vec{\ell}_{e_i}, \overleftarrow{\ell}_{e_i} \in \mathbb{G}_1$ são direções expansivas segundo X_η, onde $i = 1, 2$.

Com relação ao item (i), supondo $\vec{\ell} = \vec{\ell}_{e_1} \in \mathbb{G}_1$, segundo o Lema 1.37, para $g_1, g_2 \in \mathbb{Z}^2$ existem conjuntos $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \in \mathcal{F}_\mathcal{C}^{Vol}$ tais que

$$\vec{\ell}_{\mathcal{S}_1} \cap \mathcal{S}_1 = \{g_1\} \subset V(\mathcal{S}_1) \text{ e } \overleftarrow{\ell}_{\mathcal{S}_2} \cap \mathcal{S}_2 = \{g_2\} \subset V(\mathcal{S}_2)$$

são, respectivamente, η-gerados por $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$. Denote por $a \in \mathbb{N}$ a maior cardinalidade dentre $|\ell' \cap \mathcal{S}_i|$, onde ℓ' é paralela a ℓ_{e_1} e $i = 1, 2$. Escolha $\tau \in \mathbb{N}$ tal que $R_{2a,\tau}$ contenha tanto uma translação de $\mathcal{S}_1$ quanto de $\mathcal{S}_2$. Dado $\kappa' \in \mathbb{N}$, para cada inteiro $1 \le j \le \kappa' - 1$, definimos o conjunto $L_j := A_j \cup B_j \subset \mathbb{Z}^2$, onde

$$A_j := \{(s, -j) : ja \le s \le 2a\kappa' - ja\}$$

e

$$B_j := \{(s, \tau - 1 + j) : ja \le s \le 2a\kappa' - ja\}.$$

O conjunto quase-regular $\mathcal{U} \supset R_{2a\kappa',\tau}$ é definido por $\mathcal{U} := R_{2a\kappa',\tau} \cup L_1 \cup \cdots \cup L_{\kappa'-1}$. Supondo que a aresta $\mathrm{Conv}(A_1) \in E(R_{2a\kappa',\tau} \cup A_1)$ seja paralela a $\vec{\ell}_{e_1}$, por construção, para todo $g' \in A_1$, há uma translação $\mathcal{S}_1'$ de $\mathcal{S}_1$, com $\mathcal{S}_1' \backslash \{g'\} \subset R_{2a\kappa',\tau}$, tal que $\vec{\ell}_{\mathcal{S}_1'} \cap \mathcal{S}_1' = \{g'\} \subset V(\mathcal{S}_1')$. Do fato de $g' \in \mathcal{S}_1'$ ser η-gerado por $\mathcal{S}_1'$, segue que $P_\eta(R_{2a\kappa',\tau} \cup \{g'\}) = P_\eta(R_{2a\kappa',\tau})$. Este raciocínio permite concluir que

$$P_\eta(R_{2a\kappa',\tau} \cup A_1) = P_\eta(R_{2a\kappa',\tau}).$$

Ainda, como a aresta $\mathrm{Conv}(B_1) \in E(R_{2a\kappa',\tau} \cup L_1)$ é antiparalela a $\vec{\ell}_{e_1}$, para todo $g' \in B_1$, há uma translação $\mathcal{S}_2'$ de $\mathcal{S}_2$, com $\mathcal{S}_2' \backslash \{g'\} \subset R_{2a\kappa',\tau} \cup L_1$, tal que $\overleftarrow{\ell}_{\mathcal{S}_2'} \cap \mathcal{S}_2' = \{g'\} \subset V(\mathcal{S}_2')$, o que implica

$$P_\eta(R_{2a\kappa',\tau} \cup L_1) = P_\eta((R_{2a\kappa',\tau} \cup A_1) \cup B_1) = P_\eta(R_{2a\kappa',\tau} \cup A_1) = P_\eta(R_{2a\kappa',\tau}).$$

Prosseguindo dessa forma, concluímos que

$$P_\eta(\mathcal{U}) = P_\eta(R_{2a\kappa',\tau} \cup L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_{\kappa'-1}) = \cdots = P_\eta(R_{2a\kappa',\tau} \cup L_1) = P_\eta(R_{2a\kappa',\tau}).$$

Por fim, é fácil ver que

$$\begin{aligned} |\mathcal{U}| &= 2a\kappa'\tau + 2(2a\kappa' - 2a) + \cdots + 2(2a\kappa' - 2a(\kappa'-1)) \\ &= 2a\kappa'\tau + 4a\kappa'(\kappa'-1) - 4a\frac{(\kappa'-1)\kappa'}{2} = 2a\kappa'\tau + 2a\kappa'(\kappa'-1). \end{aligned}$$

Com relação ao item (ii), a prova se faz de forma análoga. □

Note que, para configurações aperiódicas, um caso particular do resultado abaixo fornece as hipóteses da Proposição 2.10, assegurando assim a existência de conjunto balanceado.

Proposição 2.12. *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, suponha que há $C' > 1$ tal que $P_\eta(R_{\kappa,\tau}) \leq C'\kappa\tau + |\mathcal{A}| - 1$ para $\kappa, \tau \in \mathbb{N}$ suficientemente grandes. Se pelo menos uma das retas $\ell_{e_1}, \ell_{e_2} \in \mathbb{G}_1$ for expansiva segundo X_η, então, para todo $C > 1$ existe conjunto quase-regular $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_C^{Vol}$ tal que*

$$P_\eta(\mathcal{U}) \leq \frac{1}{C}|\mathcal{U}| + |\mathcal{A}| - 1.$$

Prova. Supondo, sem perda de generalidade, que a reta $\ell_{e_1} \in \mathbb{G}_1$ seja expansiva segundo X_η, segundo o Lema 2.11, existem $a, \tau \in \mathbb{N}$ tais que, para todo $\kappa' \in \mathbb{N}$, há conjunto quase-regular $\mathcal{U} \supset R_{2a\kappa',\tau}$ tal que $P_\eta(\mathcal{U}) = P_\eta(R_{2a\kappa',\tau})$. Dado $C > 1$, escolhendo $\kappa' \geq \tau(CC'-1)+1$, segue que $CC'\tau \leq \tau + (\kappa'-1)$. Multiplicando ambos os lados por $\frac{1}{C}2a\kappa'$, obtemos a desigualdade

$$C'2a\kappa'\tau \leq \frac{1}{C}(2a\kappa'\tau + 2a\kappa'(\kappa'-1)) = \frac{1}{C}|\mathcal{U}|,$$

donde segue que $P_\eta(\mathcal{U}) = P_\eta(R_{2a\kappa',\tau}) \leq C'2a\kappa'\tau + |\mathcal{A}| - 1 \leq \frac{1}{C}|\mathcal{U}| + |\mathcal{A}| - 1$, o que prova a proposição. □

Veremos no Capítulo 3 que a proposição acima também está fortemente conectada com periodicidade.

2.1.2 Direções controláveis

Nesta subseção, introduzimos uma condição que, mesmo não sendo de complexidade assintótica alta ou de complexidade baixa, assegura a existência de conjunto $(\vec{\ell}, p)$-balanceado. Essencialmente, a noção de direção controlável significa que, para uma direção não-expansiva segundo X_η, a complexidade de certos conjuntos é majorada pela cardinalidade do próprio conjunto acrescida de cardinalidades de alfabetos apropriadamente construídos.

As propriedades de $SL_2(\mathbb{Z})$ previamente discutidas no Capítulo 1 nos levam a introduzir a seguinte notação.

Notação 2.13. *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, seja $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ uma reta orientada com coeficiente angular racional. Fixado $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ com $A(-e_2) = \vec{v}_\ell$, para cada $\kappa, \tau \in \mathbb{N}$, denote*

$$\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa,\tau} := A(R_{\kappa,\tau}) \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}.$$

É claro que, para qualquer reta $\vec{\ell'} \subset \mathbb{R}^2$ paralela a $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ tal que $\ell' \cap \mathcal{R}^{\ell}_{\kappa,\tau} \neq \emptyset$, temos que $|\ell' \cap \mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa,\tau}|= \tau$.

Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, seja $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ uma direção não-expansiva segundo X_η. Para um conjunto $(\eta, \vec{\ell})$-gerador $\mathcal{U}' \in \mathcal{F}^{Vol}_{\mathcal{C}}$ e $p \in \mathbb{N}$ tais que

$$\forall\ \vec{\ell'} \text{ paralela a } \vec{\ell},\ \vec{\ell'} \neq \vec{\ell}_{\mathcal{U}} \text{ e } \ell' \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \implies |\ell' \cap \mathcal{U}| \geq p,$$

definimos

$$\varphi_{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}') := \min\left\{|L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}'), x)|-2\ :\ x \in \mathcal{N}(\vec{\ell},\mathcal{U}') \text{ e } |L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}'), x)| > 1\right\}$$

se existir $x \in \mathcal{N}(\vec{\ell},\mathcal{U}')$ tal que $|L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}'), x)| > 1$, e $\varphi_{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}') := 0$ caso contrário.

Supondo $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ aperiódica e que há $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $P_\eta(R_{n,k}) \leq nk + |\mathcal{A}|-2$, mostraremos que limitantes adequadas para a $\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa,\tau}$-complexidade de η estão, de forma natural, associados à existência de conjuntos $(\vec{\ell}, p)$-balanceados.

Inicialmente, se existem $\kappa, \tau \in \mathbb{N}$ tais que

$$P_\eta(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa,\tau}) \leq \kappa\tau + |\mathcal{A}|-2,$$

considerando $\mathcal{T} = \mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa,\tau}$, é fácil ver que o conjunto $\mathcal{S} \in \mathcal{F}^{Vol}_{\mathcal{C}}$ obtido no Lema 2.8 é $(\vec{\ell}, p)$-balanceado. Caso contrário, temos que

$$P_\eta(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa,\tau}) \geq \kappa\tau + |\mathcal{A}|-1 \quad \forall\ \kappa, \tau \in \mathbb{N}. \tag{2.1.12}$$

Desta forma, fixado um conjunto $(\eta, \vec{\ell})$-gerador $\mathcal{U} \in \mathcal{F}^{Vol}_{\mathcal{C}}$ satisfazendo $\vec{\ell}_{\mathcal{U}} = \vec{\ell}^{(-1)} \in \mathcal{H}(\vec{\ell}^{(-1)})$, se existem $\kappa, \tau \in \mathbb{N}$ com $\mathcal{U} \backslash \vec{\ell}_{\mathcal{U}} \subset \mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa,\tau}$ tais que

$$P_\eta(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa+1,\tau}) \leq (\kappa+1)\tau + |\mathcal{A}|-1 + \varphi_{\vec{\ell},\tau}(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa,\tau} \cup \mathcal{U}), \tag{2.1.13}$$

como $P_\eta(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa,\tau} \cup \mathcal{U}) \leq P_\eta(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa+1,\tau})$, de (2.1.12) e (2.1.13) segue que

$$\begin{aligned} P_\eta(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa,\tau} \cup \mathcal{U}) - P_\eta(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa,\tau}) &\leq P_\eta(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa+1,\tau}) - \kappa\tau - |\mathcal{A}|+1 \\ &\leq (\kappa+1)\tau + |\mathcal{A}|-1 + \varphi_{\vec{\ell},\tau}(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa,\tau} \cup \mathcal{U}) - \kappa\tau - |\mathcal{A}|+1 \\ &= \tau + \varphi_{\vec{\ell},\tau}(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa,\tau} \cup \mathcal{U}), \end{aligned}$$

donde

$$P_\eta(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa,\tau} \cup \mathcal{U}) \leq P_\eta(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa,\tau}) + \tau + \varphi_{\vec{\ell},\tau}(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa,\tau} \cup \mathcal{U}).$$

Logo, $\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa,\tau} \cup \mathcal{U} \in \mathcal{F}^{Vol}_{\mathcal{C}}$ é um conjunto $(\vec{\ell},\tau)$-balanceado. Se (2.1.13) não for satisfeito, temos que

$$P_\eta(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa+1,\tau}) \geq (\kappa+1)\tau + |\mathcal{A}| + \varphi_{\vec{\ell},\tau}(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa,\tau} \cup \mathcal{U})$$

para todo $\kappa, \tau \in \mathbb{N}$ com $\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \subset \mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa,\tau}$. Novamente, se existem $\kappa,\tau \in \mathbb{N}$ com $\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \subset \mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa,\tau}$ tais que

$$P_\eta(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa+2,\tau}) \leq (\kappa+2)\tau + |\mathcal{A}| + \varphi_{\vec{\ell},\tau}(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa,\tau} \cup \mathcal{U}) + \varphi_{\vec{\ell},\tau}(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa+1,\tau} \cup \mathcal{U}),$$

então, argumentando de forma similar, vemos que

$$P_\eta(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa+1,\tau} \cup \mathcal{U}) \leq P_\eta(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa+1,\tau}) + \tau + \varphi_{\vec{\ell},\tau}(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa+1,\tau} \cup \mathcal{U}),$$

o que assegura que $\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa+1,\tau} \cup \mathcal{U} \in \mathcal{F}^{Vol}_{\mathcal{C}}$ é um conjunto $(\vec{\ell},\tau)$-balanceado. Mais geralmente, motivado por essa discussão, propomos a definição abaixo.

Definição 2.14. *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, seja $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ uma direção não-expansiva segundo X_η. Dado um conjunto $(\eta,\vec{\ell})$-gerador $\mathcal{U} \in \mathcal{F}^{Vol}_{\mathcal{C}}$ cumprindo $\vec{\ell}_{\mathcal{U}} = \vec{\ell}^{(-1)} \in \mathcal{H}(\vec{\ell}^{(-1)})$, dizemos que $\vec{\ell}$ é uma direção controlável se existem $\kappa,\tau \in \mathbb{N}$, com $\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \subset \mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa,\tau}$, e $m \in \mathbb{Z}_+$ tais que*

$$P_\eta(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa+m+1,\tau}) \leq (\kappa+m+1)\tau + |\mathcal{A}| - 2 + \left(\sum_{i=\kappa}^{\kappa+m} \varphi_{\vec{\ell},\tau}(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{i,\tau} \cup \mathcal{U})\right) + m + 1. \tag{2.1.14}$$

Estamos interessados em direções controláveis, porque, como veremos adiante, elas forçam periodicidade em certas regiões de algumas configurações específicas e, também, porque essa propriedade não é excessivamente restritiva, já que $P_\eta(\mathcal{R}^{\ell}_{\kappa+m+1,\tau})$ pode inclusive ser estritamente maior que a cardinalidade de $\mathcal{R}^{\ell}_{\kappa+m+1,\tau}$.

Proposição 2.15. *Se $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ for aperiódica, então, para toda direção controlável $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$, há conjunto $(\vec{\ell},p)$-balanceado.*

Prova. Com efeito, sejam $\mathcal{U} \in \mathcal{F}^{Vol}_{\mathcal{C}}$, $\kappa,\tau \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{Z}_+$ como na Definição 2.14. Inicialmente, se $P_\eta(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa,\tau}) \leq \kappa\tau + |\mathcal{A}| - 2$, para $\mathcal{T} = \mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa,\tau}$, o Lema 2.8 afirma que há semiplano $\mathcal{H}$ (cuja aresta é paralela a $\vec{\ell}$) e conjunto $(\eta,\vec{\ell})$-gerador $\mathcal{S} \in \mathcal{F}^{Vol}_{\mathcal{C}}$ tais que

$$\mathcal{S}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{S}} = \mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa,\tau} \cap \mathcal{H} \tag{2.1.15}$$

e

$$P_\eta(\mathcal{S}) - P_\eta(\mathcal{S}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{S}}) \leq |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| - 1. \tag{2.1.16}$$

É fácil ver que (2.1.15) e (2.1.16) implicam que $\mathcal{S} \in \mathcal{F}^{Vol}_{\mathcal{C}}$ é um conjunto $\vec{\ell}$-balanceado e, assim, $(\vec{\ell},p)$-balanceado com $p = |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| - 1$. Caso contrário, ao escolher $m' \in \mathbb{Z}_+$ minimal dentre os inteiros $m \in \mathbb{Z}_+$ que verificam (2.1.14) para $\kappa,\tau \in \mathbb{N}$, temos dois casos a considerar, a saber, $m' = 0$ e $m' > 0$.

Se $m'=0$, da desigualdade $P_\eta(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa,\tau})\geq \kappa\tau+|\mathcal{A}|-1$ e de (2.1.14) com $m=m'$, obtemos

$$P_\eta(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa,\tau}\cup\mathcal{U})\leq P_\eta(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa,\tau})+\tau+\varphi_{\vec{\ell},\tau}(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa,\tau}\cup\mathcal{U}). \tag{2.1.17}$$

Se $m'>0$, a minimalidade de m' implica que

$$P_\eta(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa+m',\tau})\geq(\kappa+m')\tau+|\mathcal{A}|-2+\left(\sum_{i=\kappa}^{\kappa+m'-1}\varphi_{\vec{\ell},\tau}(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{i,\tau}\cup\mathcal{U})\right)+m'+1.$$

Logo, a desigualdade acima e (2.1.14) com $m=m'$ fornecem

$$P_\eta(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa+m',\tau}\cup\mathcal{U})\leq P_\eta(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa+m',\tau})+\tau+\varphi_{\vec{\ell},\tau}(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa+m',\tau}\cup\mathcal{U}). \tag{2.1.18}$$

De forma geral, para $m'\in\mathbb{Z}_+$, (2.1.17) e (2.1.18) permitem concluir que

$$P_\eta(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa+m',\tau}\cup\mathcal{U})\leq P_\eta(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa+m',\tau})+\tau+\left|L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},\tau}(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa+m',\tau}\cup\mathcal{U}),x)\right|-2$$

para qualquer $x\in\mathcal{N}(\vec{\ell},\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa+m',\tau}\cup\mathcal{U})$ com $|L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},\tau}(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa+m',\tau}\cup\mathcal{U}),x)|>1$. Além disso, é claro que $\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa+m',\tau}\cup\mathcal{U}\in\mathcal{F}^{Vol}_{\mathcal{C}}$ é um conjunto $(\eta,\vec{\ell})$-gerador e que, para toda reta $\vec{\ell'}\subset\mathbb{R}^2$ paralela a $\vec{\ell}$ tal que $\ell'\cap\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa+m',\tau}\neq\emptyset$, vale $|\ell'\cap\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa+m',\tau}|=\tau$, ou seja, $\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa+m',\tau}\cup\mathcal{U}\in\mathcal{F}^{Vol}_{\mathcal{C}}$ é um conjunto $(\vec{\ell},\tau)$-balanceado. $\square$

Note que somente controlabilidade não é suficiente para garantir periodicidade. De fato, para a configuração $\eta\in\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ descrita pela Figura 1.1.2, dada qualquer reta $\vec{\ell}\in\mathbb{G}_1$ com coeficiente angular racional,

$$P_\eta(\mathcal{R}^{\vec{\ell}}_{\kappa,\tau})=\kappa\tau+1\quad\forall\ \kappa,\tau\in\mathbb{N}.$$

A discussão desta subseção motiva o seguinte problema em aberto.

Problema. *Dada $\eta\in\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, suponha que existem $n,k\in\mathbb{N}$ tais que $P_\eta(R_{n,k})\leq nk+|\mathcal{A}|-2$. Se toda direção não-expansiva segundo X_η também for controlável, então η é periódica?*

2.2 Estendendo a periodicidade de faixas

O lema abaixo utilizará as propriedades de conjunto balanceado para estender, de modo controlado, a periodicidade de faixas para regiões maiores, o que possibilitará, por processo indutivo, estender a periodicidade de faixas para semiplanos.

Para conjunto $(\vec{\ell},p)$-balanceado $\mathcal{U}'\in\mathcal{F}^{Vol}_{\mathcal{C}}$, denote

$$\Phi_{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}'):=P_\eta(\mathcal{U}')-P_\eta(\mathcal{U}'\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}'})$$

se $|L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}'),y)|=1$ para todo $y\in\mathcal{N}(\vec{\ell},\mathcal{U}')$ e

$$\Phi_{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}'):=\max\left\{\check{p}_y+|L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},\check{p}_y}(\mathcal{U}'),y)|-2\ :y\in\mathcal{N}(\vec{\ell},\mathcal{U}')\text{ e }|L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},\check{p}_y}(\mathcal{U}'),y)|>1\right\}$$

caso contrário, onde $\check{p}_y\leq p$ denota o menor inteiro que cumpre o item (ii) da Definição 2.5.

Lema 2.16. *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, suponha que $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ seja uma direção não-expansiva segundo X_η e que $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ seja um conjunto $(\vec{\ell}, p)$-balanceado. Se a restrição de $x \in X_\eta$ à $(\vec{\ell}, \mathcal{U}, p)$-faixa F for periódica de período $t'\vec{v}_\ell$ para algum $t' \in \mathbb{N}$, então a restrição de x a $\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cup F$ é periódica de período $t\vec{v}_\ell$, onde*

$$t = t'$$

se $x \notin \mathcal{N}(\vec{\ell}, \mathcal{U})$ e

$$t \leq 2\Phi_{\vec{\ell},p}(\mathcal{U})$$

caso contrário.

Prova. Sendo $x|_F$ periódica de período $t'\vec{v}_\ell$ para algum $t' \in \mathbb{N}$, se $x \notin \mathcal{N}(\vec{\ell}, \mathcal{U})$, então existe $\kappa \in \mathbb{Z}$ tal que $x|_{F \cup (\mathcal{U} + \kappa \vec{v}_\ell)} = (T^{t'\vec{v}_\ell} x)|_{F \cup (\mathcal{U} + \kappa \vec{v}_\ell)}$. Como $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ é um conjunto $(\eta, \vec{\ell})$-gerador, raciocinando de forma recorrente, concluímos que

$$x|_{\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cup F} = (T^{t'\vec{v}_\ell} x)|_{\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cup F},$$

ou seja, a restrição de x a $\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cup F$ é periódica de período $t'\vec{v}_\ell$.

Supondo $x \in \mathcal{N}(\vec{\ell}, \mathcal{U})$ e $t' > 1$, é claro que $|L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}), x)| > 1$. Neste caso, o item (i) do Corolário 2.7 implica que a restrição de x a F é periódica de período $\tau \vec{v}_\ell$ para algum inteiro positivo $\tau \leq p_x + |L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p_x}(\mathcal{U}), x)| - 2$, onde $p_x \leq p$ satisfaz o item (ii) da Definição 2.5. Daí segue

$$\begin{aligned}
|L_{\vec{\ell}}(\mathcal{U}, x)| - \tau &\leq \left(\sum_{\gamma \in L_{\vec{\ell}}(\mathcal{U} \backslash \vec{\ell}_{\mathcal{U}}, x)} |\{\gamma' \in L(\mathcal{U}, \eta) : \gamma'|_{\mathcal{U} \backslash \vec{\ell}_{\mathcal{U}}} = \gamma\}| \right) - |L_{\vec{\ell}}(\mathcal{U} \backslash \vec{\ell}_{\mathcal{U}}, x)| \\
&= \sum_{\gamma \in L_{\vec{\ell}}(\mathcal{U} \backslash \vec{\ell}_{\mathcal{U}}, x)} \left(N_{\vec{\ell}, \mathcal{U}}(\gamma) - 1 \right) \\
&\leq \sum_{\gamma \in L(\mathcal{U} \backslash \vec{\ell}_{\mathcal{U}}, \eta)} \left(N_{\vec{\ell}, \mathcal{U}}(\gamma) - 1 \right) \\
&= P_\eta(\mathcal{U}) - P_\eta(\mathcal{U} \backslash \vec{\ell}_{\mathcal{U}}) \leq p_x + |L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p_x}(\mathcal{U}), x)| - 2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$|L_{\vec{\ell}}(\mathcal{U}, x)| \leq \tau + p_x + |L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p_x}(\mathcal{U}), x)| - 2 \leq 2(p_x + |L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p_x}(\mathcal{U}), x)| - 2).$$

Pelo Princípio da Casa dos Pombos, podemos supor, sem perda de generalidade, que existe inteiro positivo $t \leq 2(p_x + |L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p_x}(\mathcal{U}), x)| - 2)$ tal que $x|_{\mathcal{U}} = (T^{t\vec{v}_\ell} x)|_{\mathcal{U}}$. Afirmamos que a restrição de x a F é periódica de período $t\vec{v}_\ell$. De fato, supondo $\mathcal{A}_x = L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p_x}(\mathcal{U}), x)$, seja $\xi = (\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in (\mathcal{A}_x)^{\mathbb{Z}}$ a sequência definida por $\xi_i := (T^{i\vec{v}_\ell} x)|_{\mathcal{I}^{\vec{\ell},p_x}(\mathcal{U})}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Além disso, seja $1 < p_0 \leq p_x$ o inteiro minimal tal que $P_\xi(p_0) \leq p_0 + |\mathcal{A}_x| - 2$. Note que tal p_0 existe, pois $|\mathcal{A}_x| > 1$ e $P_\xi(p_x) \leq |L_{\vec{\ell}}(\mathcal{U} \backslash \vec{\ell}_{\mathcal{U}}, x)| \leq \tau \leq p_x + |\mathcal{A}_x| - 2$. Assim, a minimalidade de p_0 implica $P_\xi(p_0) = P_\xi(p_0 - 1)$. Da igualdade $x|_{\mathcal{U}} = (T^{t\vec{v}_\ell} x)|_{\mathcal{U}}$ resulta que

$$\xi_0 \xi_1 \cdots \xi_{p_0 - 1} = \xi_t \xi_{t+1} \cdots \xi_{t+p_0-1},$$

donde, por indução, segue que a sequência infinita $\xi \in (\mathcal{A}_x)^{\mathbb{Z}}$ é periódica de período t. Em outras palavras, $x|_F$ é periódica de período $t\vec{v}_\ell$. Portanto, obtemos que

$$x|_{\mathcal{U}\cup F}= (T^{t\vec{v}_\ell}x)|_{\mathcal{U}\cup F}. \tag{2.2.1}$$

Sejam $g_i, g_f \in \vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cap \mathcal{U}$ os pontos inicial e final da aresta $\mathrm{Conv}(\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cap \mathcal{U}) \in E(\mathcal{U})$, respectivamente. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sejam $u_i^m := g_i - m\vec{v}_\ell$ e $u_f^m := g_f + m\vec{v}_\ell$. Como os pontos u_i^1 e u_f^1 são η-gerados por $\mathcal{U} - \vec{v}_\ell$ e $\mathcal{U} + \vec{v}_\ell$, de (2.2.1) segue que

$$x|_{\mathcal{U}\cup\{u_i,u_f\}\cup F}= (T^{t\vec{v}_\ell}x)|_{\mathcal{U}\cup\{u_i,u_f\}\cup F}.$$

Por indução, concluímos que, para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$x|_{\mathcal{U}\cup\{u_i^1,u_f^1,\ldots,u_i^m,u_f^m\}\cup F} = (T^{t\vec{v}_\ell}x)|_{\mathcal{U}\cup\{u_i^1,u_f^1,\ldots,u_i^m,u_f^m\}\cup F},$$

ou seja, a restrição de x a $\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cup F$ é periódica de período $t\vec{v}_\ell$.

Uma vez que $p_x \leq p$ é qualquer inteiro que cumpre o item (ii) da Definição 2.5, ao considerar $p_x = \check{p}_x$ na discussão acima, resulta daí que a restrição de x a $\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cup F$ é periódica de período $t\vec{v}_\ell$ com

$$t \leq 2(\check{p}_x + |L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},\check{p}_x}(\mathcal{U}), x)|-2) \leq 2\Phi_{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}).$$

Supondo agora $t' = 1$, para a única $\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}$-configuração $\gamma \in L_{\vec{\ell}}(\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}, x)$, temos que

$$|L_{\vec{\ell}}(\mathcal{U}, x)|-1 \leq N_{\vec{\ell},\mathcal{U}}(\gamma) - 1 \leq P_\eta(\mathcal{U}) - P_\eta(\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}),$$

ou seja,

$$|L_{\vec{\ell}}(\mathcal{U}, x)| \leq P_\eta(\mathcal{U}) - P_\eta(\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}) + 1.$$

Assim, como antes, podemos supor, sem perda de generalidade, que existe inteiro positivo $t \leq P_\eta(\mathcal{U}) - P_\eta(\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}) + 1$ tal que $x|_{\mathcal{U}} = (T^{t\vec{v}_\ell}x)|_{\mathcal{U}}$. Felizmente, neste caso, $x|_F$ já é, em particular, periódica de período $t\vec{v}_\ell$ e, portanto, a mesma argumentação do caso anterior assegura que a restrição de x a $\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cup F$ é periódica de período $t\vec{v}_\ell$.

A hipótese de $\vec{\ell}$ ser direção não-expansiva segundo X_η assegura $P_\eta(\mathcal{U}) - P_\eta(\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}) \geq 1$ e, assim, a desigualdade

$$P_\eta(\mathcal{U}) - P_\eta(\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}) + 1 \leq 2(P_\eta(\mathcal{U}) - P_\eta(\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}})).$$

Portanto, como $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ é um conjunto $(\vec{\ell}, p)$-balanceado, independentemente de quem seja $\Phi_{\vec{\ell},p}(\mathcal{U})$, vale a desigualdade $P_\eta(\mathcal{U}) - P_\eta(\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}) \leq \Phi_{\vec{\ell},p}(\mathcal{U})$, o que encerra a demonstração do lema. □

Observação 2.17. *No lema acima, podemos trocar a hipótese de $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ ser $(\vec{\ell}, p)$-balanceado pela hipótese de ser apenas um conjunto $(\eta, \vec{\ell})$-gerador tal que*

$$\forall\ \vec{\ell'} \text{ paralela a } \vec{\ell},\ \vec{\ell'} \neq \vec{\ell}_{\mathcal{U}} \text{ e } \ell' \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \implies |\ell' \cap \mathcal{U}| \geq 2.$$

Assim, se a restrição de $x \in X_\eta$ à $(\vec{\ell},\mathcal{U},2)$-faixa F for periódica de período $t'\vec{v}_\ell$ para algum $t' \in \mathbb{N}$, como existe conjunto $(\eta,\vec{\ell})$-gerador $\mathcal{T} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ cuja $(\vec{\ell},\mathcal{T},2t')$-faixa coincide com F, argumentando de forma similar, é possível provar que a restrição de x a $\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cup F$ é periódica de período $t\vec{v}_\ell$, onde

$$t = t'$$

se $x \notin \mathcal{N}(\vec{\ell},\mathcal{T})$ e

$$t \leq t' + P_\eta(\mathcal{T}) - P_\eta(\mathcal{T}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{T}})$$

caso contrário. A desvantagem desse resultado é que, ao aplicá-lo sucessivas vezes, períodos cada vez maiores são produzidos.

Para fornecer versão do Lema 2.16 também para $(\vec{\ell},\mathcal{U},p)$-semifaixas, convenientemente introduzimos os conjuntos a seguir. Dadas $(\vec{\ell},\mathcal{U},p)$-semifaixas $\vec{F}(a), \overleftarrow{F}(a) \subset \mathbb{Z}^2$, sejam

$$(\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cup \vec{F})(a) := \bigcup_{t \geq a} \left(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}) \cup \{i_{\mathcal{U}}(\vec{\ell}_{\mathcal{U}})\} + t\vec{v}_\ell\right) \tag{2.2.2}$$

e

$$(\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cup \overleftarrow{F})(a) := \bigcup_{t \geq a} \left(\mathcal{F}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}) \cup \{f_{\mathcal{U}}(\vec{\ell}_{\mathcal{U}})\} - t\vec{v}_\ell\right) \tag{2.2.3}$$

O resultado a seguir é enunciado para $(\vec{\ell},\mathcal{U},p)$-semifaixas da forma $\vec{F}(a)$, entretanto, fazendo-se as devidas alterações, ele também pode ser enunciado para $(\vec{\ell},\mathcal{U},p)$-semifaixas da forma $\overleftarrow{F}(a)$.

Lema 2.18. *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, suponha que $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ seja uma direção não-expansiva segundo X_η e que $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ seja um conjunto $(\vec{\ell},p)$-balanceado. Se a restrição de $x \in X_\eta$ à $(\vec{\ell},\mathcal{U},p)$-semifaixa $\vec{F}(a)$, com $a \in \mathbb{Z}$, for periódica de período $t'\vec{v}_\ell$ para algum $t' \in \mathbb{N}$, então a restrição de x a $(\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cup \vec{F})(a+t)$ é periódica de período $t\vec{v}_\ell$, onde*

$$t = t'$$

se $x \notin \mathcal{N}_{\vec{\ell},a}(\vec{\ell},\mathcal{U})$ e

$$t \leq 2\Phi_{\vec{\ell},p}(\mathcal{U})$$

caso contrário.

Prova. Inicialmente, se $x \notin \mathcal{N}_{\vec{\ell},a}(\vec{\ell},\mathcal{U})$, isto significa que $N_{\vec{\ell},\mathcal{U}}(\gamma) = 1$ para alguma $\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}$-configuração $\gamma \in \vec{L}_{\vec{\ell},a}(\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}, x)$. Uma vez que a restrição de x a $\vec{F}(a)$ é periódica de período $t'\vec{v}_\ell$, é claro que $\gamma = (T^{m\vec{v}_\ell}x)|_{\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}}$ para algum inteiro $a \leq m \leq a+t'$. Em particular, temos que

$$(T^{m\vec{v}_\ell}x)|_{\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}} = (T^{m\vec{v}_\ell}x)|_{(\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}})+t'\vec{v}_\ell} = (T^{(m+t')\vec{v}_\ell}x)|_{\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}},$$

donde, por ocorrer $N_{\vec{\ell},\mathcal{U}}(\gamma) = 1$, segue que

$$(T^{m\vec{v}_\ell}x)|_{\mathcal{U}} = (T^{(m+t')\vec{v}_\ell}x)|_{\mathcal{U}}.$$

Portanto, como $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ é um conjunto $(\eta, \vec{\ell})$-gerador, segue por recorrência que a restrição de x a $(\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cup \vec{F})(m)$ é periódica de período $t'\vec{v}_\ell$.

Supondo $x \in \mathcal{N}_{\vec{\ell},a}(\vec{\ell},\mathcal{U})$ e $t' > 1$, então $|\vec{L}_{\vec{\ell},b}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}), x)| > 1$ para todo $b \geq a$. Com efeito, como na argumentação para obter (2.1.4), qualquer ponto de acumulação $z \in \mathcal{N}(\vec{\ell},\mathcal{U})$ da sequência $\{T^{t\vec{v}_\ell}x\}_{t \geq a} \subset X_\eta$ satisfaz $|L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}), z)| > 1$. Neste caso, contudo, a hipótese da restrição de x a $\vec{F}(a)$ ser periódica de período $t'\vec{v}_\ell$ garante que

$$|L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p_z}(\mathcal{U}), z)| = |\vec{L}_{\vec{\ell},a}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p_z}(\mathcal{U}), x)|,$$

onde $p_z \leq p$ cumpre o item (ii) da Definição 2.5. Portanto, considerar $p_x := \check{p}_z$ fornece

$$P_\eta(\mathcal{U}) \leq P_\eta(\mathcal{U} \backslash \vec{\ell}_{\mathcal{U}}) + p_x + \left|\vec{L}_{\vec{\ell},a}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p_x}(\mathcal{U}), x)\right| - 2$$

e

$$p_x + \left|\vec{L}_{\vec{\ell},a}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p_x}(\mathcal{U}), x)\right| - 2 \leq \Phi_{\vec{\ell},p}(\mathcal{U}).$$

Daqui em diante, a argumentação é análoga à da demonstração do Lema 2.16, considerando (2.1.3) no lugar de (1.6.3) e empregando no Corolário 2.7 o item (ii) em vez do item (i). $\square$

O resultado a seguir será fundamental para demonstrar a Proposição 2.21, um dos principais resultados desta seção.

Proposição 2.19. *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, suponha que $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ seja uma direção não-expansiva segundo X_η e que $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ seja um conjunto $(\vec{\ell}, p)$-balanceado. Se a restrição de $x \in X_\eta$ à $(\vec{\ell},\mathcal{U},p)$-faixa F for periódica de período $t'\vec{v}_\ell$ para algum $t' \in \mathbb{N}$, então, para qualquer translação $\mathcal{U}'$ de $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{U}' \subset \mathcal{H}(\overleftarrow{\ell}_{\mathcal{U}})$, a restrição de x à $(\vec{\ell},\mathcal{U}',p)$-faixa F' é periódica de período $t\vec{v}_\ell$, onde*

$$t \leq \max\left\{t', 2\Phi_{\vec{\ell},p}(\mathcal{U})\right\}.$$

Em particular, a restrição de x ao semiplano $\mathcal{H}(\overleftarrow{\ell}_{\mathcal{U}})$ é periódica com período em $\ell \cap (\mathbb{Z}^2)^*$.

Prova. Seja $u \in (\mathbb{Z}^2)^*$ tal que

$$\vec{\ell} + u = \vec{\ell}^{(-1)} \in \mathcal{H}(\vec{\ell}^{(-1)}).$$

Suponha, por contradição, que o conjunto $P_{\mathcal{U}}$ formado pelos inteiros $m \in \mathbb{Z}_+$ tais que a restrição de $T^{mu}x \in X_\eta$ à $(\vec{\ell},\mathcal{U},p)$-faixa F é periódica de período $t\vec{v}_\ell$ para algum inteiro positivo

$$t \leq \max\left\{t', 2\Phi_{\vec{\ell},p}(\mathcal{U})\right\}$$

seja diferente de $\mathbb{Z}_+$. Suponha que $m' \in P_{\mathcal{U}}$ seja o inteiro maximal tal que, para qualquer $0 \leq i \leq m'$, $i \in P_{\mathcal{U}}$. Como a restrição de $y := T^{um'}x$ à $(\vec{\ell},\mathcal{U},p)$-faixa F é periódica de período $\tau'\vec{v}_\ell$ com $\tau' \leq \max\{t', 2\Phi_{\vec{\ell},p}(\mathcal{U})\}$, do Lema 2.16 resulta que a restrição de y a $\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cup F$ é periódica de período $\tau\vec{v}_\ell$, onde

$$\tau = \tau'$$

se $y \notin \mathcal{N}(\vec{\ell},\mathcal{U})$ e

$$\tau \leq 2\Phi_{\vec{\ell},p}(\mathcal{U})$$

caso contrário. Isto significa que a restrição de $T^{u(m'+1)}x$ à $(\vec{\ell},\mathcal{U},p)$-faixa F é periódica de período $\tau\vec{v}_\ell$ com $\tau \leq \max\{t', 2\Phi_{\vec{\ell},p}(\mathcal{U})\}$, o que viola a maximalidade de $m' \in \mathbb{N}$. $\square$

O resultado abaixo foi primeiramente obtido no Teorema 1.39 para configurações periódicas. Agora, como consequência dos resultados desenvolvidos até aqui, essa hipótese pode ser substituída pela existência de conjunto balanceado.

Corolário 2.20. *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, se $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ for um conjunto $(\vec{\ell},p)$-balanceado, então, a direção $\overleftarrow{\ell} \in \mathbb{G}_1$, antiparalela a $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$, também é não-expansiva segundo X_η.*

Prova. Por hipótese, existem $x, y \in X_\eta$ tais que

$$x|_{\mathcal{H}(\vec{\ell})} = y|_{\mathcal{H}(\vec{\ell})},$$

mas

$$x|_{\mathcal{H}(\vec{\ell}^{(-1)})} \neq y|_{\mathcal{H}(\vec{\ell}^{(-1)})}.$$

Seja $\mathcal{U}' \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ uma translação de $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ tal que

$$\vec{\ell}_{\mathcal{U}'} = \vec{\ell}^{(-1)} \in \mathcal{H}(\vec{\ell}^{(-1)}).$$

Segue do Lema 1.43 que $x, y \in \mathcal{N}(\vec{\ell},\mathcal{U}')$ e, portanto, do Lema 2.2 que as suas restrições a $(\vec{\ell},\mathcal{U}',p)$-faixa F são periódicas de períodos $t\vec{v}_\ell$ e $t'\vec{v}_\ell$ para algum par $t, t' \in \mathbb{N}$. Como a Proposição 2.19 garante que as restrições de x e y ao semiplano $\mathcal{H}(\overleftarrow{\ell}_{\mathcal{U}'}) \supset \mathcal{H}(\overleftarrow{\ell})$ são periódicas com períodos em $\ell \cap (\mathbb{Z}^2)^*$, segue do Corolário 1.40 que a reta $\overleftarrow{\ell} \in \mathbb{G}_1$, antiparalela a $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$, é uma direção não-expansiva segundo X_η. $\square$

Similarmente ao que foi feito em [7], o resultado a seguir mostra como conjuntos balanceados forçam periodicidade.

Proposição 2.21. *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, suponha que $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ seja uma direção não-expansiva segundo X_η e que $\mathcal{U}, \mathcal{T} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ sejam, respectivamente, $(\vec{\ell},p)$-balanceado e $(\overleftarrow{\ell},q)$-balanceado. Se a restrição de $x \in X_\eta$ à $(\vec{\ell},\mathcal{U},p)$-faixa F for periódica de período $t'\vec{v}_\ell$ para algum $t' \in \mathbb{N}$, então x é periódica com período em $\ell \cap (\mathbb{Z}^2)^*$ e, para qualquer translação $\mathcal{U}'$ de $\mathcal{U}$, a restrição de x à $(\vec{\ell},\mathcal{U}',p)$-faixa F' é periódica de período $t\vec{v}_\ell$, onde*

$$t \leq \max\left\{t', 2\Phi_{\vec{\ell},p}(\mathcal{U})\right\}.$$

Prova. Inicialmente, o fato de x ser periódica com período em $\ell \cap (\mathbb{Z}^2)^*$ é uma consequência direta da Proposição 2.19 aplicada aos conjuntos $\mathcal{U}, \mathcal{T}' \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$, onde $\mathcal{T}'$ é uma translação de $\mathcal{T}$ tal que $\mathcal{T}' \subset \mathcal{H}(\overleftarrow{\ell}_{\mathcal{U}})$.

Quanto à segunda parte, seja $u \in (\mathbb{Z}^2)^*$ tal que

$$\vec{\ell} + u = \vec{\ell}^{(+1)} \in \mathcal{H}(\vec{\ell}^{(+1)}).$$

Suponha, por contradição, que o conjunto $Q_{\mathcal{U}}$ formado pelos inteiros $m \in \mathbb{Z}_+$ tais que a restrição de $T^{mu}x \in X_\eta$ à $(\vec{\ell},\mathcal{U},p)$-faixa F é periódica de período $t\vec{v}_\ell$ para algum inteiro positivo

$$t \leq \max\left\{t', 2\Phi_{\vec{\ell},p}(\mathcal{U})\right\}$$

seja diferente de $\mathbb{Z}_+$. Suponha que $m' \in Q_{\mathcal{U}}$ seja o inteiro maximal tal que, para qualquer $0 \leq i \leq m'$, $i \in Q_{\mathcal{U}}$. Resulta então do Corolário 2.7 e da Proposição 2.19 que $T^{mu}x \notin \mathcal{N}(\vec{\ell},\mathcal{U})$ para todo inteiro $m > m'$.

Note que, para qualquer $\tau > 0$, o Princípio da Casa dos Pombos assegura a existência de inteiros $i > I \geq m'$ tais que

$$(T^{Iu}x)|_{(\ell^\perp)^\tau \cap F} = (T^{iu}x)|_{(\ell^\perp)^\tau \cap F},$$

onde $\ell^\perp \in \mathbb{G}_1$ denota a reta perpendicular a $\ell \in \mathbb{G}_1$ e $(\ell^\perp)^\tau \subset \mathbb{Z}^2$ é a τ-vizinhança de $\ell^\perp$. Além disso, como x é periódica com período em $\ell \cap (\mathbb{Z}^2)^*$, se $\tau > 0$ for suficientemente grande, então $(T^{Iu}x)|_F = (T^{iu}x)|_F$. Suponha portanto que $I \geq m'$ seja o menor inteiro tal que $(T^{Iu}x)|_F = (T^{iu}x)|_F$ para algum inteiro $i > I$.

Como $T^{iu}x \notin \mathcal{N}(\vec{\ell},\mathcal{U})$, do Lema 1.43 resulta a igualdade

$$(T^{Iu}x)|_{\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cup F} = (T^{iu}x)|_{\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cup F},$$

donde $(T^{(I-1)u}x)|_F = (T^{(i-1)u}x)|_F$. Logo, a minimalidade de I implica que $m' = I$, o que é uma contradição, pois, neste caso, a restrição de $T^{iu}x$ à $(\vec{\ell},\mathcal{U},p)$-faixa F é periódica de período $t\vec{v}_\ell$ com $t \leq \max\{t', 2\Phi_{\vec{\ell},p}(\mathcal{U})\}$, de modo que a Proposição 2.19 permite violar a maximalidade de $m' \in Q_{\mathcal{U}}$. $\square$

Supondo que $\mathcal{U}, \mathcal{T} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ sejam, respectivamente, $(\vec{\ell},p)$-balanceado e $(\overleftarrow{\ell},q)$-balanceado, o Corolário 2.7 e a Proposição 2.21 implicam que as configurações em $\mathcal{N}(\vec{\ell},\mathcal{U})$ ou $\mathcal{N}(\overleftarrow{\ell},\mathcal{T})$ são periódicas com períodos em $\ell \cap (\mathbb{Z}^2)^*$.

Embora o resultado abaixo, similar ao Corolário 4.16 de [7], seja uma consequência imediata da Proposição 2.21, ele terá papel fundamental na prova do teorema principal. Devido a este corolário, será possível construir configuração aperiódica com 2-periodicidade em subregião convexa ilimitada.

Corolário 2.22. *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, suponha que $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ seja uma direção não-expansiva segundo X_η, e que $\mathcal{U}, \mathcal{T} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ sejam, respectivamente, $(\vec{\ell},p)$-balanceado e $(\overleftarrow{\ell},q)$-balanceado. Se a restrição de $x \in X_\eta$ a uma ℓ-faixa $F \supset \mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}}$ for periódica de período $t'\vec{v}_\ell$ para algum $t' \in \mathbb{N}$ e, além disso, existir conjunto finito $B \subset F$ tal que*

$$\forall\, y \in X_\eta,\ x|_B = y|_B \implies x|_F = y|_F,$$

então η é periódica com período em $\ell \cap (\mathbb{Z}^2)^*$.

Prova. Inicialmente, note que $x|_B = (T^g\eta)|_B$ para algum $g \in \mathbb{Z}^2$, donde, por hipótese, segue que $x|_F = (T^g\eta)|_F$. Logo, como $\mathcal{U}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{U}} \subset F$, a restrição de $T^g\eta$ à $(\vec{\ell},\mathcal{U},p)$-faixa é periódica de período $t'\vec{v}_\ell$ e, portanto, o resultado segue da Proposição 2.21. $\square$

Se na Proposição 2.21 trocássemos a hipótese de $\mathcal{T} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ ser $(\overleftarrow{\ell}, q)$-balanceado pela hipótese de ser apenas um conjunto $(\eta, \overleftarrow{\ell})$-gerador, como a restrição de $x \in X_\eta$ ao semiplano $\mathcal{H}(\overleftarrow{\ell}_{\mathcal{U}})$ é periódica com período em $\ell \in \mathbb{G}_1$, aplicando indutivamente a Observação 2.17 teríamos que, para toda reta $\overleftarrow{\ell}' \subset \mathbb{R}^2$ antiparalela a $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$, a restrição de x ao semiplano $\mathcal{H}(\overleftarrow{\ell}')$ seria periódica de período $t_{\ell'}\vec{v}_\ell$ para algum $t_{\ell'} \in \mathbb{N}$. A pergunta é se nessas condições existe período global para $x \in X_\eta$? Mais especificamente, temos o problema em aberto abaixo.

Problema. *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, supondo que $P_\eta(\mathcal{S}) \leq |\mathcal{S}|+|\mathcal{A}|-2$ para algum $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$, se existir uma reta orientada $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ tal que, para toda reta orientada $\overleftarrow{\ell}' \subset \mathbb{R}^2$ antiparalela a $\vec{\ell}$, a restrição de η ao semiplano $\mathcal{H}(\overleftarrow{\ell}')$ é periódica de período $t_{\ell'}\vec{v}_\ell$ para algum $t_{\ell'} \in \mathbb{N}$, então η é periódica com período em $\ell \cap (\mathbb{Z}^2)^*$?*

Em suma, a importância do problema acima é justificada pelo fato de uma resposta afirmativa substituir na Proposição 2.21 a hipótese de $\mathcal{T} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ ser $(\overleftarrow{\ell}, q)$-balanceado pela hipótese de ser apenas um conjunto $(\eta, \overleftarrow{\ell})$-gerador.

2.2.1 Implicações da baixa complexidade nos limitantes de alguns períodos

A seguir, apresentamos um conjunto η-gerador especial construído a partir da hipótese de baixa complexidade que permitirá melhorar o limitante de alguns períodos fornecidos nos resultados prévios de extensão.

Lema 2.23. *Supondo $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ aperiódica, se $P_\eta(\mathcal{U}) \leq \frac{1}{2}|\mathcal{U}|+|\mathcal{A}|-1$ para algum $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$, então existe um conjunto η-gerador $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ com $\mathcal{S} \subset \mathcal{U}$ tal que*

(i) $P_\eta(\mathcal{S}) \leq \frac{1}{2}|\mathcal{S}|+|\mathcal{A}|-1$,

(ii) Se $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ for convexo, não vazio e diferente de $\mathcal{S}$, então $P_\eta(\mathcal{T}) > \frac{1}{2}|\mathcal{T}|+|\mathcal{A}|-1$. Em particular, temos que $P_\eta(\mathcal{S}) - P_\eta(\mathcal{T}) \leq \lceil \frac{1}{2}|\mathcal{S}\backslash\mathcal{T}|\rceil - 1$.

Prova. Seja $\mathcal{S}'$ um conjunto minimal (com respeito à inclusão) dentre os conjuntos $\mathcal{K}' \subset \mathcal{U}$ convexos e não vazios que verificam

$$P_\eta(\mathcal{K}') - \frac{1}{2}|\mathcal{K}'|-|\mathcal{A}|+1 \leq P_\eta(\mathcal{U}) - \frac{1}{2}|\mathcal{U}|-|\mathcal{A}|+1.$$

Inicialmente, como $P_\eta(\{g\}) = |\mathcal{A}|$ para qualquer $g \in \mathbb{Z}^2$, da desigualdade $|\mathcal{A}| > \frac{1}{2} + |\mathcal{A}|-1$ segue então que $|\mathcal{S}'| \geq 2$, o que permite concluir que

$$\frac{1}{2}|\mathcal{S}'|+|\mathcal{A}|-1 \leq |\mathcal{S}'|+|\mathcal{A}|-2.$$

Logo, como η é aperiódica, o Lema 1.31 implica que $\mathcal{S}' \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$. O fato de $\mathcal{S}'$ ser um conjunto η-gerador é uma consequência imediata de sua minimalidade.

Seja $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ um conjunto minimal (com respeito à inclusão) dentre os conjuntos η-geradores $\mathcal{K} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ contidos em $\mathcal{S}'$ que verificam

$$P_\eta(\mathcal{K}) \leq \frac{1}{2}|\mathcal{K}|+|\mathcal{A}|-1.$$

Se $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ for convexo, não vazio e diferente de $\mathcal{S}$, então $P_\eta(\mathcal{T}) > \frac{1}{2}|\mathcal{T}|+|\mathcal{A}|-1$. De fato, ao supor, por contradição, que $P_\eta(\mathcal{T}) \leq \frac{1}{2}|\mathcal{T}|+|\mathcal{A}|-1$, como η é aperiódica, não é difícil ver que $\mathcal{T} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$. Logo, o argumento do parágrafo anterior assegura a existência de conjunto η-gerador $\mathcal{S}'' \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ com $\mathcal{S}'' \subset \mathcal{T} \subsetneq \mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ tal que

$$P_\eta(\mathcal{S}'') \leq \frac{1}{2}|\mathcal{S}''|+|\mathcal{A}|-1,$$

o que contradiz a minimalidade de $\mathcal{S}$. Em particular, obtemos que

$$P_\eta(\mathcal{S}) - P_\eta(\mathcal{T}) < \frac{1}{2}|\mathcal{S}|+|\mathcal{A}|-1 - \frac{1}{2}|\mathcal{T}|-|\mathcal{A}|+1 = \frac{1}{2}|\mathcal{S}\backslash\mathcal{T}|,$$

donde segue o resultado. □

O resultado acima nos leva a focar numa família específica de conjuntos η-geradores, a qual passará a ser utilizada largamente no texto.

Definição 2.24. *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, dizemos que $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ é um conjunto η-gerador mbc (minimal com baixa complexidade) se for η-gerador e verificar*

(i) $P_\eta(\mathcal{S}) \leq \frac{1}{2}|\mathcal{S}|+|\mathcal{A}|-1,$

(ii) Se $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ for convexo, não vazio e diferente de $\mathcal{S}$, então $P_\eta(\mathcal{T}) > \frac{1}{2}|\mathcal{T}|+|\mathcal{A}|-1$.

Obviamente, a propriedade de ser η-gerador mbc é invariante por translação. Além disso, dado $A \in SL_2(\mathbb{Z})$, usando que $P_{\eta\circ A}(A^{-1}(\mathcal{K})) = P_\eta(\mathcal{K})$ para qualquer $\mathcal{K} \subset \mathbb{Z}^2$ não vazio e que $SL_2(\mathbb{Z})$ transforma conjuntos convexos em conjuntos convexos, é fácil argumentar que $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ é η-gerador mbc se, e somente se, $A^{-1}(\mathcal{S}) \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ é $(\eta \circ A)$-gerador mbc.

Observação 2.25. *Dada $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ aperiódica, suponha $P_\eta(\mathcal{U}) \leq \frac{1}{2}|\mathcal{U}|+|\mathcal{A}|-1$ para algum conjunto $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ quase-regular. Se $\ell \in \mathbb{G}_1$ for uma reta não-expansiva segundo X_η, a Proposição 2.10 e Corolário 2.20 implicam que as retas antiparalelas $\vec{\ell}, \overleftarrow{\ell} \in \mathbb{G}_1$ são ambas direções não-expansivas segundo X_η. Em particular, dado qualquer conjunto η-gerador mbc $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ (cuja existência é garantida pelo Lema 2.23),* $\mathrm{Conv}(\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S})$ *e* $\mathrm{Conv}(\overleftarrow{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S})$ *são arestas antiparalelas de $\mathcal{S}$ (ver Observação 1.36), de modo que, ao assumir $|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \leq |\overleftarrow{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|$, de (2.1.6) e da desigualdade*

$$P_\eta(\mathcal{S}) - P_\eta(\mathcal{S}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{S}}) \leq \left\lceil \frac{1}{2}|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \right\rceil - 1$$

resulta que $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ é também um conjunto $\vec{\ell}$-balanceado e, portanto, $(\vec{\ell}, p)$-balanceado para $p := |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|-1$.

Com hipóteses mais gerais, a proposição abaixo fornece a mesma conclusão da Proposição 4.11 de [7]. Além disso, frisamos que construções importantes do Capítulo 3 estão vinculados a esta proposição.

Proposição 2.26. *Dada $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ aperiódica, se $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ for um conjunto η-gerador mbc, então, para toda direção $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ não-expansiva segundo X_η, $|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \geq 3$.*

Prova. Suponha, por contradição, que há direção não-expansiva segundo X_η, a saber, a reta orientada $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$, e $g, g' \in \mathbb{Z}^2$ tais que $\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S} = \{g, g'\}$.

É claro que, como $\mathcal{S}$ é um conjunto η-gerador, $P_\eta(\mathcal{S}) = P_\eta(\mathcal{S}\backslash\{g\})$. Além disso, observe que, se valesse $|\mathcal{S}| = 3$, então, como $\mathcal{S}$ é η-gerador mbc, teríamos $P_\eta(\mathcal{S}) < \frac{3}{2} + |\mathcal{A}| - 1$, donde

$$P_\eta(\mathcal{S}\backslash\{g\}) = P_\eta(\mathcal{S}) \leq |\mathcal{A}| = |\mathcal{S}\backslash\{g\}| + |\mathcal{A}| - 2.$$

Porém, como por hipótese η é aperiódica, a desigualdade acima e o Lema 1.31 implicam que não pode ocorrer $|\mathcal{S}| = 3$, pois, neste caso, $\mathrm{Conv}(\mathcal{S}\backslash\{g\})$ teria área nula. Portanto, $|\mathcal{S}| \geq 4$, donde claramente

$$\frac{1}{2}|\mathcal{S}| + |\mathcal{A}| - 1 \leq |\mathcal{S}\backslash\{g\}| + |\mathcal{A}| - 2.$$

Resulta então do Lema 1.31 que $\mathcal{S}' := \mathcal{S}\backslash\{g\} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$. Assim, como $\vec{\ell}_{\mathcal{S}'} \cap \mathcal{S}' = \{g'\} \subset V(\mathcal{S}')$, o Lema 1.35 implica que $g' \in \mathcal{S}'$ não é η-gerado por $\mathcal{S}'$ ou, equivalentemente, que

$$P_\eta(\mathcal{S}'\backslash\{g'\}) < P_\eta(\mathcal{S}').$$

Daí segue que

$$P_\eta(\mathcal{S}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{S}}) = P_\eta(\mathcal{S}'\backslash\{g'\}) < P_\eta(\mathcal{S}') = P_\eta(\mathcal{S}\backslash\{g\}) = P_\eta(\mathcal{S}),$$

donde $P_\eta(\mathcal{S}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{S}}) \leq P_\eta(\mathcal{S}) - 1$. Isto permite concluir

$$P_\eta(\mathcal{S}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{S}}) \leq P_\eta(\mathcal{S}) - 1 \leq \left(\frac{1}{2}|\mathcal{S}| + |\mathcal{A}| - 1\right) - 1 = \frac{1}{2}\left(|\mathcal{S}| - 2\right) + |\mathcal{A}| - 1 = \frac{1}{2}|\mathcal{S}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{S}}| + |\mathcal{A}| - 1,$$

o que contradiz a definição de $\mathcal{S}$ como conjunto η-gerador mbc. □

Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, seja $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ uma direção não-expansiva segundo X_η. Note que, para qualquer conjunto η-gerador $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$, do fato de $|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \geq 2$ (ver Observação 1.36) resulta que

$$\left\lceil \frac{1}{2}|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \right\rceil - 1 \leq |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| - 2, \tag{2.2.4}$$

donde segue que

$$\left\lceil \frac{1}{2}|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \right\rceil - 1 - m + 2 \leq |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| - 1 \quad \forall\, m \geq 1. \tag{2.2.5}$$

Em particular, se $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ for um conjunto η-gerador mbc, então, para cada $x \in \mathcal{N}(\vec{\ell}, \mathcal{S})$, (2.2.5) e as desigualdades

$$|L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{S}), x)| \leq |L_{\vec{\ell}}(\mathcal{S}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{S}}, x)| \leq P_\eta(\mathcal{S}) - P_\eta(\mathcal{S}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{S}}) \leq \left\lceil \frac{1}{2}|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \right\rceil - 1$$

implicam que $p_x := \lceil \frac{1}{2}|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|\rceil - 1 - |L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{S}), x)| + 2$ é um inteiro positivo tal que

$$p_x \leq p := |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| - 1$$

e

$$\left\lceil \frac{1}{2}|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \right\rceil - 1 = p_x + |L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p_x}(\mathcal{S}), x)| - 2. \tag{2.2.6}$$

É claro que o mesmo ocorre para $(\overleftarrow{\ell}, \mathcal{S}, p)$-semifaixas. Por exemplo, para qualquer configuração $x \in \mathcal{N}_{\overleftarrow{\ell},a}(\overleftarrow{\ell}, \mathcal{S})$, com $a \in \mathbb{Z}$, há inteiro positivo $p_x \leq p$ tal que

$$\left\lceil \frac{1}{2}|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \right\rceil - 1 = p_x + \left| \overleftarrow{L}_{\overleftarrow{\ell},a}(\mathcal{I}^{\overleftarrow{\ell},p_x}(\mathcal{S}), x) \right| - 2.$$

Supondo que $|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \leq |\overleftarrow{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|$, é fácil ver que, de (2.2.6) e do fato de $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ ser η-gerador mbc, segue

$$\Phi_{\vec{\ell},p}(\mathcal{S}) \leq \left\lceil \frac{1}{2}|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \right\rceil - 1. \tag{2.2.7}$$

A discussão acima permite reapresentar os resultados envolvendo conjuntos balanceados de forma menos "poluída". Para conveniência do leitor, na proposição abaixo são reescritos os Lemas 2.4 e 2.18. Talvez seja útil recordar que $\overleftarrow{v}_\ell = -\vec{v}_\ell$ (ver Notação 1.33).

Proposição 2.27. *Dada $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ aperiódica, suponha que $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ seja um conjunto η-gerador mbc e que $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ seja uma direção não-expansiva segundo X_η. Se $|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \leq |\overleftarrow{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|$, então, supondo $p = |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| - 1$, temos que $\mathcal{S}$ é um conjunto $(\vec{\ell}, p)$-balanceado tal que*

(i) *para toda configuração $x \in \mathcal{N}_{\vec{\ell},a}(\vec{\ell}, \mathcal{S})$, com $a \in \mathbb{Z}$, a restrição de x à $(\vec{\ell}, \mathcal{S}, p)$-semifaixa $\vec{F}(a+p)$ é periódica de período $t\vec{v}_\ell$ com*

$$t \leq \left\lceil \frac{1}{2}|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \right\rceil - 1 \leq |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| - 2;$$

(ii) *se a restrição de $x \in X_\eta$ à $(\vec{\ell}, \mathcal{S}, p)$-semifaixa $\vec{F}(a)$ for periódica de período $t'\vec{v}_\ell$ para algum $t' \in \mathbb{N}$, então a restrição de x a $(\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cup \vec{F})(a+t)$ é periódica de período $t\vec{v}_\ell$, onde*

$$t = t'$$

se $x \notin \mathcal{N}_{\vec{\ell},a}(\vec{\ell}, \mathcal{S})$ e

$$t \leq 2\left\lceil \frac{1}{2}|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \right\rceil - 2$$

caso contrário;

(iii) *para toda configuração $x \in \mathcal{N}_{\overleftarrow{\ell},a}(\vec{\ell}, \mathcal{S})$, com $a \in \mathbb{Z}$, a restrição de x à $(\vec{\ell}, \mathcal{S}, p)$-semifaixa $\overleftarrow{F}(a+p)$ é periódica de período $t\overleftarrow{v}_\ell$ com*

$$t \leq \left\lceil \frac{1}{2}|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \right\rceil - 1 \leq |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| - 2;$$

(iv) se a restrição de $x \in X_\eta$ à $(\vec{\ell}, \mathcal{S}, p)$-semifaixa $\overleftarrow{F}(a)$ for periódica de período $t'\overleftarrow{v}_\ell$ para algum $t' \in \mathbb{N}$, então a restrição de x a $(\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cup \overleftarrow{F})(a+t)$ é periódica de período $t\overleftarrow{v}_\ell$, onde

$$t = t'$$

se $x \notin \mathcal{N}_{\overleftarrow{\ell},a}(\vec{\ell}, \mathcal{S})$ e

$$t \leq 2\left\lceil \frac{1}{2}|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \right\rceil - 2$$

caso contrário.

No próximo capítulo, utilizando as ferramentas desenvolvidas até aqui, de forma similar ao que os autores fizeram em [7], provaremos uma versão mais geral do Teorema 1.13.

2.3 Uma condição que dispensa conjuntos balanceados

Uma vez que repetitividade não contribui, até onde sabemos, de forma significativa para a existência de conjuntos balanceados, isto nos motiva a considerar verão modificada desta noção, a saber, uma espécie de repetitividade ao longo de retas. Recordamos inicialmente a condição original.

Definição 2.28. *Uma configuração $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ é dita ser* repetitiva *se, para qualquer conjunto finito $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2$, existe um conjunto finito $\mathcal{U} \subset \mathbb{Z}^2$ tal que, para toda translação $\mathcal{U}'$ de $\mathcal{U}$, existe $h \in \mathbb{Z}^2$ de forma que $\mathcal{S} + h \subset \mathcal{U}'$ e $\eta_{g+h} = \eta_g$ para todo $g \in \mathcal{S}$.*

O Teorema de Gottschalk estabelece que uma configuração $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ é repetitiva se, e somente se, $\overline{Orb(\eta)}$ é um *subshift* minimal. Mesmo repetitividade sendo uma noção restritiva, o problema abaixo permanece ainda em aberto.

Problema. *Dada $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ repetitiva, se existem $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $P_\eta(R_{n,k}) \leq nk + |\mathcal{A}| - 2$, então η é periódica?*

Com a existência de conjunto balanceado, o corolário a seguir mostra que periodicidade é facilmente obtida mediante repetitividade.

Corolário 2.29. *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, suponha que $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_C^{Vol}$ seja um conjunto $(\vec{\ell}, p)$-balanceado. Se η for uma configuração repetitiva, então η é periódica.*

Prova. Segundo o Corolário 2.7, a restrição de qualquer $x \in \mathcal{N}(\vec{\ell}, \mathcal{U})$ à $(\vec{\ell}, \mathcal{U}, p)$-faixa F é periódica de período $t\vec{v}_\ell$ para algum $t \in \mathbb{N}$. Logo, da Proposição 2.19 resulta que a restrição de x ao semiplano $\mathcal{H}(\overleftarrow{\ell}_{\mathcal{U}})$ é periódica de período $t'\vec{v}_\ell$ para algum $t' \in \mathbb{N}$. Por fim, como $\overline{Orb(x)}$ é um *subshift* compacto, existe configuração $x' \in \overline{Orb(x)}$ periódica de período $t'\vec{v}_\ell$. Portanto, a hipótese de repetitividade encerra a demonstração. $\square$

Em particular, supondo que existem $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $P_\eta(R_{n,k}) \leq nk + |\mathcal{A}| - 2$, note que, se as retas antiparalelas $\vec{\ell}, \overleftarrow{\ell} \in \mathbb{G}_1$ são ambas direções não-expansivas segundo X_η, então η é periódica. De fato, há conjunto η-gerador $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ com $P_\eta(\mathcal{S}) \leq |\mathcal{S}| + |\mathcal{A}| - 2$ e cumprindo

$$P_\eta(\mathcal{S}) - P_\eta(\mathcal{S} \backslash \vec{\ell}_{\mathcal{S}}) \leq |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| - 1$$

sempre que $\mathcal{S} \backslash \vec{\ell}_{\mathcal{S}} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}$. Se $\mathrm{Conv}(\mathcal{S})$ tiver área nula, o resultado é obtido do Lema 1.31. Caso contrário, $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ tem arestas paralelas as retas orientadas $\vec{\ell}, \overleftarrow{\ell} \in \mathbb{G}_1$. Claramente $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ é $\vec{\ell}$-balanceado para $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ satisfazendo $|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \leq |\overleftarrow{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|$, donde pelo corolário acima se- gue o resultado.

Introduzimos abaixo a noção de repetitividade ao longo de retas.

Definição 2.30. *Uma configuração $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ é dita ser ℓ-*repetitiva *se, para qualquer conjunto finito $\mathcal{S} \subset \ell' \cap \mathbb{Z}^2$, com $\ell' \subset \mathbb{R}^2$ paralela a $\ell \in \mathbb{G}_1$, existe um conjunto finito $\mathcal{U} \subset \ell \cap \mathbb{Z}^2$ tal que, para toda translação $\mathcal{U}'$ de $\mathcal{U}$, existe $u \in \mathbb{Z}^2$ de forma que $\mathcal{S} + u \subset \mathcal{U}'$ e $\eta_{g+u} = \eta_g$ para todo $g \in \mathcal{S}$.*

Não é imediato que existem configurações ℓ-repetitivas aperiódicas e, tampouco, que repetitividade e ℓ-repetitividade não são noções equivalentes. O exemplo a seguir sana eventuais dúvidas a este respeito.

Exemplo 2.31. *Para alfabeto $\mathcal{B}$ binário foi demonstrado em [17] que há sequência $\xi \in \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$ aperiódica e repetitiva. Assim, fixada uma reta $\ell \in \mathbb{G}_1$ com coeficiente angular racional, considere $\eta_{tv+g} := \xi_t$ se $g \neq 0$ e $\eta_{tv+g} := \xi_{t+1}$ caso contrário, onde $v \in \ell \cap (\mathbb{Z}^2)^*$ denota um vetor com norma mínima. Por construção, segue que $\eta \in \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^2}$ é uma configuração ℓ-repetitiva que, claramente, não é repetitiva. Além disso, para $g \in \mathcal{H}(\vec{\ell})$ não nulo perpendicular a v, observe que*

$$(T^g\eta)|_{\mathcal{H}(\vec{\ell})} = (T^{2g}\eta)|_{\mathcal{H}(\vec{\ell})},$$

mas

$$T^g\eta \neq T^{2g}\eta,$$

ou seja, $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ é uma direção não-expansiva segundo X_η. Portanto, como não existem períodos de η em $\ell \cap \mathbb{Z}^2$, a Proposição 1.16 permite concluir que η é aperiódica.

O lema abaixo assegurará a existência de ℓ-faixa sobre as quais a restrição de certas configurações resultará periódica.

Lema 2.32. *Dado $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$, se para alguma reta $\vec{\ell'} \subset \mathbb{R}^2$ existem $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $\mathcal{S} \backslash \vec{\ell'}_{\mathcal{S}} = R_{n,k} \cap \mathcal{H}(\vec{\ell'})$ e $|\vec{\ell'}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \geq 2$, então $|\ell' \cap \mathcal{S}| \geq |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| - 1$.*

Prova. Inicialmente, se ℓ' for paralela a alguma aresta do retângulo $R_{n,k}$, não há o que provar. Caso contrário, supondo que $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ seja paralela a $\vec{\ell'}$, dentre os vetores $e_2 = (0, 1)$ e

$-e_2$, denote por u aquele que pertencer ao semiplano $\mathcal{H}(\vec{\ell})$. Supondo que $g_i, g_f \in \vec{\ell}'_{\mathcal{S}}$ sejam os pontos inicial e final de $\vec{\ell}'_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}$, considere o conjunto $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ cujos vértices são os pontos

$$g_i, g_i + u, g_f, g_f + u \in \mathbb{Z}^2.$$

Como apenas um dos pontos $g_i + u, g_f + u \in \vec{\ell}_{\mathcal{U}} \cap \mathcal{U}$ tem a possibilidade de não pertencer a $\mathcal{S}$, se $\vec{\ell}' = \vec{\ell}_{\mathcal{U}}$, o resultado segue trivialmente. Caso contrário, temos que $\ell' \cap \mathcal{U} \subset \mathcal{S}$ e, portanto, aplicando (2.1.6) ao conjunto $\mathcal{U}$ obtemos o resultado. $\square$

O resultado abaixo mostra que a noção de repetitividade ao longo de retas fornece uma alternativa para a caracterização de periodicidade na ausência de conjunto balanceado.

Proposição 2.33. *Dado $\ell \in \mathbb{G}_1$, suponha que $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ seja uma configuração ℓ-repetitiva e que existem $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $P_\eta(R_{n,k}) \leq nk + |\mathcal{A}| - 2$. Se $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ for uma direção não-expansiva segundo X_η, então η é periódica.*

Prova. Com relação a $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$, seja $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ o conjunto $(\eta, \vec{\ell})$-gerador obtido no Lema 2.8 com $\mathcal{T} = R_{n,k}$. Se $\mathcal{S} \notin \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$, como $P_\eta(\mathcal{S}) \leq |\mathcal{S}| + |\mathcal{A}| - 2$, o resultado segue do Lema 1.31. Caso contrário, pelo Lema 2.8, ocorre

$$P_\eta(\mathcal{S}) - P_\eta(\mathcal{S} \backslash \vec{\ell}_{\mathcal{S}}) \leq |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| - 1$$

e há semiplano $\mathcal{H}(\vec{\ell}') \subset \mathbb{Z}^2$ (com $\vec{\ell}'$ paralela a $\vec{\ell}$) tal que

$$\mathcal{S} \backslash \vec{\ell}_{\mathcal{S}} = R_{n,k} \cap \mathcal{H}(\vec{\ell}').$$

Como $\vec{\ell}$ é direção não-expansiva segundo X_η e $\vec{\ell}_{\mathcal{S}} = \vec{\ell}_{\mathcal{S}}$, temos que $|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \geq 2$, pois $\mathcal{S}$ é $(\eta, \vec{\ell})$-gerador. Segue então do Lema 2.32 que $|\vec{\ell}' \cap \mathcal{S}| \geq |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| - 1$. Pondo $p := |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| - 1$, isto assegura que $\ell' \cap \mathbb{Z}^2$ está contido na $(\vec{\ell}, \mathcal{S}, p)$-faixa. Dado $x \in \mathcal{N}(\vec{\ell}, \mathcal{S})$, se $|L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{S}), x)| = 1$, então trivialmente $x|_{\ell' \cap \mathbb{Z}^2}$ é periódica de período $\vec{v}_\ell$. Caso contrário, como

$$P_\eta(\mathcal{S}) \leq P_\eta(\mathcal{S} \backslash \vec{\ell}_{\mathcal{S}}) + p + |L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{S}), x)| - 2,$$

o Lema 2.2 assegura que $x|_{\ell' \cap \mathbb{Z}^2}$ é periódica de período $t\vec{v}_\ell$ com $t \leq p + |L_{\vec{\ell}}(\mathcal{I}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{S}), x)| - 2$. Portanto, em ambos os casos, há inteiro $\tau \in \mathbb{N}$ tal que $x|_{\ell' \cap \mathbb{Z}^2}$ é periódica de período $\tau\vec{v}_\ell$.

Afirmamos que a periodicidade de $x|_{\ell' \cap \mathbb{Z}^2}$ é transferida para a configuração $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$. De fato, dado $g \in \mathbb{Z}^2$ arbitrário, considere o conjunto finito

$$\hat{\mathcal{S}} = \{g, g + \vec{v}_\ell, g + 2\vec{v}_\ell, \ldots, g + \tau\vec{v}_\ell\} \subset (\ell + g) \cap \mathbb{Z}^2,$$

e seja $\hat{\mathcal{U}} \subset \ell \cap \mathbb{Z}^2$ tal como prediz a Definição 2.30 para $\hat{\mathcal{S}}$. Uma vez que x e η coincidem em regiões arbitrariamente grandes, há translação $\mathcal{U}'$ de $\hat{\mathcal{U}}$ tal que $\eta|_{\mathcal{U}'}$ é periódica de período $\tau\vec{v}_\ell$. Para $u \in \mathbb{Z}^2$ satisfazendo $\hat{\mathcal{S}} + u \subset \mathcal{U}'$ e $\eta_{\hat{g}+u} = \eta_{\hat{g}}$ para todo $\hat{g} \in \hat{\mathcal{S}}$, como $g, g + \tau\vec{v}_\ell \in \hat{\mathcal{S}}$, temos $\eta_g = \eta_{g+u}$ e $\eta_{g+\tau\vec{v}_\ell} = \eta_{g+\tau\vec{v}_\ell+u}$. Portanto, como a periodicidade de $\eta|_{\mathcal{U}'}$ implica que $\eta_{g+u} = \eta_{g+u+\tau\vec{v}_\ell}$, destas igualdades resulta que

$$\eta_g = \eta_{g+u} = \eta_{g+u+\tau\vec{v}_\ell} = \eta_{g+\tau\vec{v}_\ell},$$

o que prova nossa afirmação e encerra a demonstração. $\square$

As Proposições 2.15 e 2.19 sugerem que a noção de direção controlável pode ser uma alternativa viável para abordar a Conjectura de Nivat com a hipótese adicional de $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ ser repetitiva. Isto nos leva a propor o problema abaixo.

Problema. *Dada $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ repetitiva, se existem $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $P_\eta(R_{n,k}) \leq nk + |\mathcal{A}| - 2$, então existe alguma direção não-expansiva segundo X_η que também é controlável?*

Capítulo 3

Uma abordagem alfabética para a Conjectura de Nivat

Neste capítulo, seguimos passos adotados por Bryna Kra e Van Cyr em [7], fazendo as adaptações necessárias. A demonstração do teorema principal será feita por contradição em várias etapas. Assumindo a existência de um contra-exemplo, será construído outro contra-exemplo com mais estrutura, mais precisamente, com sub-região convexa ilimitada 2-periódica. Fixado um conjunto gerador mbc, a contradição surgirá do fato de o número de configurações existentes no bordo desta sub-região 2-periódica ser maior que o possível.

O foco deste capítulo é então a demonstração do principal resultado deste trabalho, a saber, o teorema abaixo.

Teorema 3.1. *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, se $P_\eta(\widetilde{\mathcal{U}}) \leq \frac{1}{2}|\widetilde{\mathcal{U}}|+|\mathcal{A}|-1$ para algum $\widetilde{\mathcal{U}} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ quase-regular, então η é periódica.*

3.1 Argumentos iniciais da prova do Teorema 3.1

Suponha, por contradição, que $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ seja aperiódica. O Corolário 1.18 implica que há ao menos uma reta passando pela origem não-expansiva segundo X_η, a qual denotamos por $\ell \in \mathbb{G}_1$. Como registrado na Observação 2.25, as retas antiparalelas $\vec{\ell}, \overleftarrow{\ell} \in \mathbb{G}_1$ são ambas direções não-expansivas segundo X_η e qualquer conjunto η-gerador mcb $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ (cuja existência é garantida pelo Lema 2.23) é, em particular, conjunto $(\vec{\ell}, p)$-balanceado com $p := |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|-1$, onde assumimos, sem perda de generalidade, que $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ é a reta orientada tal que $|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \leq |\overleftarrow{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|$. Mais ainda, sendo $\overleftarrow{\ell} \in \mathbb{G}_1$ direção não-expansiva segundo X_η, note que a Proposição 2.10 fornece conjunto $(\overleftarrow{\ell}, q)$-balanceado.

Uma vez que, para qualquer $A \in SL_2(\mathbb{Z})$, $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ é η-gerador mbc se, e somente se, $A^{-1}(\mathcal{S}) \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ é $(\eta \circ A)$-gerador mbc, como o grupo $SL_2(\mathbb{Z})$ age transitivamente nas retas orientadas passando pela origem com coeficientes angulares racionais, a Proposição 1.34 nos permite assumir, sem perda de generalidade, que ℓ é gerada pelo vetor $e_2 = (0, 1)$ e que $\vec{\ell}$ está orientada para baixo, isto é, com $\vec{v}_\ell = -e_2$ (ver Notação 1.33).

Sendo $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ uma direção não-expansiva segundo X_η, existem configurações $x, y \in X_\eta$ tais que

$$x|_{\mathcal{H}(\vec{\ell})} = y|_{\mathcal{H}(\vec{\ell})}, \tag{3.1.1}$$

mas

$$x|_{\mathcal{H}(\vec{\ell}^{(-1)})} \neq y|_{\mathcal{H}(\vec{\ell}^{(-1)})}. \tag{3.1.2}$$

Transladando $\mathcal{S}$ se necessário, suponha, sem perda de generalidade, que $(-1,0) \in \vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}$, o que implica, em particular, que

$$\vec{\ell}_{\mathcal{S}} = \vec{\ell}^{(-1)} \in E(\mathcal{H}(\vec{\ell}^{(-1)})) \tag{3.1.3}$$

(ver Notação 1.26). Como o Lema 1.43 implica que $x, y \in \mathcal{N}(\vec{\ell}, \mathcal{S})$, o Corolário 2.7 e a Proposição 2.21 garantem que x e y são configurações periódicas com períodos em $\ell \cap (\mathbb{Z}^2)^*$. Entretanto, é fácil ver que (3.1.1) e (3.1.2) implicam que no máximo uma das configurações $x|_{\mathcal{H}(\vec{\ell}^{(-1)})}$ e $y|_{\mathcal{H}(\vec{\ell}^{(-1)})}$ pode ser também periódica horizontalmente, isto é, periódica de período $te_1 = (t, 0)$ para algum $t \in \mathbb{N}$. Portanto, podemos assumir, sem perda de generalidade, que a configuração $x|_{\mathcal{H}(\vec{\ell}^{(-1)})}$ não é periódica horizontalmente.

Usando um processo indutivo, definiremos uma configuração $\alpha \in X_\eta$ que é aperiódica e coincide com x em um subconjunto convexo ilimitado de $\mathbb{Z}^2$. O conceito introduzido abaixo é um ingrediente necessário para tal construção.

Definição 3.2. *Dado $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$, um conjunto convexo $\mathcal{T} \subset \mathbb{Z}^2$ é dito ser fracamente $E(\mathcal{U})$-envelopante se, para toda $\varpi \in E(\mathcal{T})$, existe $w \in E(\mathcal{U})$ paralela a ϖ com $|w \cap \mathcal{U}| \leq |\varpi \cap \mathcal{T}|$. Um conjunto $\mathcal{T} \subset \mathbb{Z}^2$ fracamente $E(\mathcal{U})$-envelopante que satisfaz $|E(\mathcal{T})| = |E(\mathcal{U})|$ é dito ser $E(\mathcal{U})$-envelopante.*

Recordando que $\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}$ e $\overleftarrow{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}$ estão contidos em arestas antiparalelas de $\mathcal{S}$, seja F_1 a ℓ-faixa definida por

$$F_1 := \left\{ g \in \ell' \cap \mathbb{Z}^2 : \overleftarrow{\ell}' \text{ é paralela a } \overleftarrow{\ell},\ \overleftarrow{\ell}' \neq \overleftarrow{\ell}_{\mathcal{S}} \text{ e } \ell' \cap \mathcal{S} \neq \emptyset \right\}.$$

Sejam $G_0 = (-1,0)$ e $B_1 := \mathcal{S}$. Segundo o Corolário 2.22, há $\alpha_1 \in X_\eta$ tal que $x|_{B_1} = \alpha_1|_{B_1}$, mas $x|_{F_1} \neq \alpha_1|_{F_1}$. Seja G_1 um conjunto maximal (com relação à inclusão) dentre os conjuntos $E(\mathcal{S})$-envelopantes $B_1 \subset \mathcal{T} \subset F_1$ tais que $x|_{\mathcal{T}} = \alpha_1|_{\mathcal{T}}$. Suponha construída uma sequência de conjuntos convexos, finitos e $E(\mathcal{S})$-envelopantes

$$G_0 \subset B_1 \subset G_1 \subset B_2 \subset G_2 \subset \cdots \subset B_m \subset G_m,$$

e configurações $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in X_\eta$ tais que, para todo inteiro $1 \leq i \leq m$,

(i) $\vec{\ell}_{B_i} = \vec{\ell}_{\mathcal{S}}$,

(ii) B_i contém tanto G_{i-1} quanto $([-1, i-1) \times [-i+1, i-1]) \cap \mathbb{Z}^2$,

(iii) $x|_{B_i} = \alpha_i|_{B_i}$, mas $x|_{F_i} \neq \alpha_i|_{F_i}$,

(iv) G_i é um conjunto maximal dentre os conjuntos $E(\mathcal{S})$-envelopantes $B_i \subset \mathcal{T} \subset F_i$ tais que $x|_{\mathcal{T}} = \alpha_i|_{\mathcal{T}}$,

onde F_i é a ℓ-faixa definida por

$$F_i := \left\{ g \in \ell' \cap \mathbb{Z}^2 : \overleftarrow{\ell'} \text{ é paralela a } \overleftarrow{\ell},\ \overleftarrow{\ell'} \neq \overleftarrow{\ell}_{B_i} \text{ e } \ell' \cap B_i \neq \emptyset \right\}.$$

Seja $B_{m+1} \subset \mathcal{H}(\vec{\ell}^{(-1)})$ um conjunto convexo, finito e $E(\mathcal{S})$-envelopante contendo tanto G_m quanto $([-1, m) \times [-m, m]) \cap \mathbb{Z}^2$ tal que $\vec{\ell}_{B_{m+1}} = \vec{\ell}_{\mathcal{S}}$. Como η é uma configuração aperiódica, pelo Corolário 2.22 há $\alpha_{m+1} \in X_\eta$ tal que $x|_{B_{m+1}} = \alpha_{m+1}|_{B_{m+1}}$, mas $x|_{F_{m+1}} \neq \alpha_{m+1}|_{F_{m+1}}$, onde F_{m+1} é a ℓ-faixa definida por

$$F_{m+1} := \left\{ g \in \ell' \cap \mathbb{Z}^2 : \overleftarrow{\ell'} \text{ é paralela a } \overleftarrow{\ell},\ \overleftarrow{\ell'} \neq \overleftarrow{\ell}_{B_{m+1}} \text{ e } \ell' \cap B_{m+1} \neq \emptyset \right\}.$$

Seja G_{m+1} um conjunto maximal (com relação à inclusão) dentre os conjuntos $E(\mathcal{S})$-envelopantes $B_{m+1} \subset \mathcal{T} \subset F_{m+1}$ tais que $x|_{\mathcal{T}} = \alpha_{m+1}|_{\mathcal{T}}$. Por indução, esses conjuntos e configurações são definidos para todo $i \in \mathbb{N}$ (ver Figura 3.1.1).

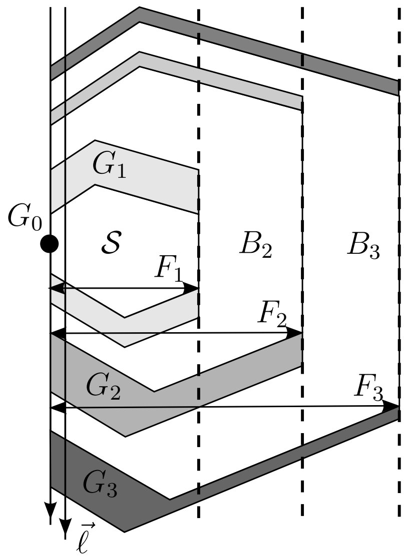


Figura 3.1.1: Conjuntos $G_0 \subset B_1 \subset G_1 \subset B_2 \subset G_2 \subset \cdots$.

Por construção, para cada $i \in \mathbb{N}$, temos que

$$(-1, 0) \in \vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S} \subset \vec{\ell}_{G_i} \cap G_i \subset \vec{\ell}^{(-1)}.$$

Seja $(-1, z_i) \in \vec{\ell}^{(-1)} \cap \mathbb{Z}^2$ o ponto final de $\vec{\ell}_{B_i} \cap B_i$ (com relação à orientação de $\vec{\ell}^{(-1)}$). Para cada $i \in \mathbb{N}$, considere o conjunto transladado

$$\tilde{G}_i = G_i - (0, z_i).$$

Note que $(T^{(0,z_i)}x)|_{\tilde{G}_i} = x|_{G_i} = \alpha_i|_{G_i} = (T^{(0,z_i)}\alpha_i)|_{\tilde{G}_i}$ e que $\tilde{G}_i$ é maximal dentre os conjuntos $E(\mathcal{S})$-envelopantes $B_i + (0, z_i) \subset \mathcal{T} \subset F_i + (0, z_i)$ tais que $(T^{(0,z_i)}x)|_{\mathcal{T}} = (T^{(0,z_i)}\alpha_i)|_{\mathcal{T}}$. Uma vez que x é periódica com período em $\ell \cap (\mathbb{Z}^2)^*$, a cardinalidade do conjunto

$$\left\{ T^{(0,z_i)}x \in X_\eta : i \in \mathbb{N} \right\}$$

é finita, ou seja, existe $z \in \mathbb{N}$ tal que $T^{(0,z)}x = T^{(0,z_i)}x$ para uma infinidade de $i \in \mathbb{N}$. Passando a uma subsequência, pode-se assumir que isso se verifica para todo $i \in \mathbb{N}$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, sejam $\varpi_i(0), \varpi_i'(0) \in E(\tilde{G}_i)$ as arestas antiparalelas com $\varpi_i(0)$ paralela a $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$. Denote por

$$\varpi_i(1), \ldots, \varpi_i(K) \in E(\tilde{G}_i)$$

as arestas seguintes a $\varpi_i(0)$ e anteriores a $\varpi_i'(0)$, enumeradas de acordo com a orientação herdada do bordo de $\mathrm{Conv}(\tilde{G}_i)$. Mais precisamente, denotando a aresta $\varpi_i'(0)$ por $\varpi_i(K+1)$, para cada $1 \leq j \leq K+1$, temos que $\varpi_i(j-1) \cap \varpi_i(j) \in V(\tilde{G}_i)$ é o ponto final de $\varpi_i(j-1)$ e o ponto inicial de $\varpi_i(j)$. Do fato de cada $\tilde{G}_i$ ser um conjunto $E(\mathcal{S})$-envelopante, resulta que $K \in \mathbb{N}$ é uniforme. Portanto, como $\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i = \mathcal{H}(\vec{\ell}^{(-1)})$, há inteiro $1 \leq k \leq K$ tal que

$$|\varpi_i(k) \cap \tilde{G}_i| < |\varpi_{i+1}(k) \cap \tilde{G}_{i+1}|$$

para uma infinidade de $i \in \mathbb{N}$. Suponha que $1 \leq k_{min} \leq K$ seja o menor inteiro verificando esta propriedade. Se $k_{min} \neq 1$, note que, para todo $i \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, as arestas $\varpi_i(1), \ldots, \varpi_i(k_{min}-1) \in E(\tilde{G}_i)$ têm comprimentos constantes. Passando a uma subsequência, podemos então assumir que, para todo $i \in \mathbb{N}$, a cardinalidade de $\varpi_i(k_{min}) \cap \tilde{G}_i$ é estritamente crescente, enquanto que (se existirem) as arestas $\varpi_i(1), \ldots, \varpi_i(k_{min}-1) \in E(\tilde{G}_i)$ têm comprimentos constantes. Deste modo, segue que

$$\tilde{G}_\omega := \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{G}_i$$

é um conjunto convexo fracamente $E(\mathcal{S})$-envelopante (ver Figura 3.1.2), com duas arestas semi-infinitas, das quais uma é paralela à reta $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ e a outra, paralela as arestas $\varpi_i(k_{min})$.

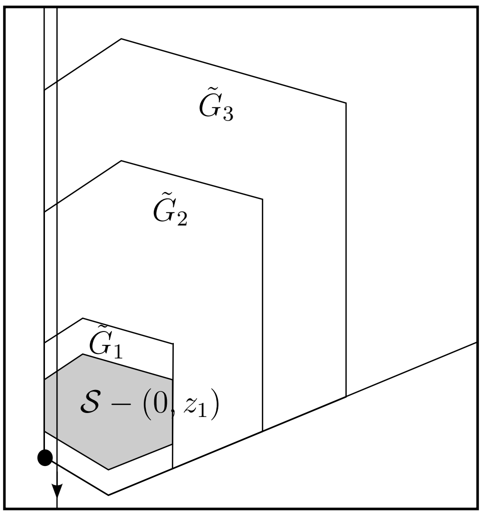


Figura 3.1.2: Conjuntos $\mathcal{S} - (0, z_1) \subset \tilde{G}_1 \subset \tilde{G}_2 \subset \cdots \subset \tilde{G}_\omega$.

Definimos $\tilde{\alpha}_i := T^{(0,z_i)}\alpha_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e $\tilde{x} := T^{(0,z)}x$. Pela compacidade de X_η, a sequência $\{\tilde{\alpha}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ admite ponto de acumulação $\alpha \in X_\eta$ tal que $\alpha|_{\tilde{G}} = \tilde{x}|_{\tilde{G}}$, pois $\tilde{\alpha}_j|_{\tilde{G}_i} = \tilde{\alpha}_i|_{\tilde{G}_i}$ para todo $1 \leq i \leq j$. Em particular, $\alpha|_{\tilde{G}}$ é periódica com período em $\ell \cap (\mathbb{Z}^2)^*$.

Nosso objetivo agora será provar que a reta passando pela origem e paralela a $\varpi_i(k_{min})$ é direção não-expansiva segundo X_η. No restante do texto, adotaremos portanto a convenção abaixo.

Notação 3.3. *Denote por $\vec{\ell'} \in \mathbb{G}_1$ a reta orientada paralela a $\varpi_i(k_{min}) \in E(\tilde{G}_i)$.*

Para cada $0 \leq j \leq k_{min}$, seja $\vec{\ell}_j \subset \mathbb{R}^2$ a reta orientada que contém e é paralela as arestas $\varpi_i(j) \in E(\tilde{G}_i)$. Tome $\vec{\wp}_1 := \vec{\ell}_{k_{min}}$ e defina indutivamente $\vec{\wp}_{\tau+1} := \vec{\wp}_\tau^{(-1)} \in \mathcal{H}(\vec{\wp}_\tau^{(-1)})$ para todo $\tau \in \mathbb{N}$. Considere

$$\tilde{G}_\omega^{(\tau)} := \mathcal{H}(\vec{\ell}_{k_{min}-1}) \cap (\tilde{G}_\omega \cup \vec{\wp}_1 \cup \cdots \cup \vec{\wp}_\tau) \quad \forall\, \tau \in \mathbb{N} \tag{3.1.4}$$

e

$$\tilde{G}_\omega^{(0)} := \tilde{G}_\omega.$$

Afirmação 3.4. *Existe $\tau \in \mathbb{Z}_+$ para o qual $\alpha|_{\tilde{G}_\omega^{(\tau)}} = \tilde{x}|_{\tilde{G}_\omega^{(\tau)}}$, mas $\alpha|_{\tilde{G}_\omega^{(\tau+1)}} \neq \tilde{x}|_{\tilde{G}_\omega^{(\tau+1)}}$. Em particular, se $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_\mathcal{C}^{Vol}$ for conjunto $(\eta, \vec{\ell'})$-gerador, com $\vec{\ell'}_\mathcal{U} = \vec{\wp}_{\tau+1}$, então, para $a \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathcal{U} \backslash \vec{\ell'}_\mathcal{U} + a\vec{v}_{\ell'} \subset \tilde{G}_\omega^{(\tau)}$, temos que $\alpha \in \mathcal{N}_{\vec{\ell'},a}(\vec{\ell'}, \mathcal{U})$.*

Prova. Uma vez que $\alpha|_{\tilde{G}_\omega^{(0)}} = \tilde{x}|_{\tilde{G}_\omega^{(0)}}$, suponha, por contradição, que $\alpha|_{\tilde{G}_\omega^{(\infty)}} = \tilde{x}|_{\tilde{G}_\omega^{(\infty)}}$, onde

$$\tilde{G}_\omega^{(\infty)} := \mathcal{H}(\vec{\ell}_{k_{min}-1}) \cap (\tilde{G}_\omega \cup \bigcup_{\tau=1}^{\infty} \vec{\wp}_\tau).$$

Note que as arestas $\varpi_i(k_{min} - 1), \varpi_i(k_{min}), \varpi_i(k_{min} + 1) \in \tilde{G}_i$ têm coeficientes angulares racionais constantes, isto é, independentes de $i \in \mathbb{N}$. Portanto, para $\iota \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, segue que há inteiro $\tau \in \mathbb{N}$ cumprindo

$$\vec{\ell}_{k_{min}-1} \cap \vec{\wp}_\tau \in \mathbb{Z}^2 \;\text{ e }\; \vec{\ell}_{k_{min}+1} \cap \vec{\wp}_\tau \in \mathbb{Z}^2, \tag{3.1.5}$$

onde $\vec{\ell}_{k_{min}+1} \subset \mathbb{R}^2$ denota a reta orientada que contém e é paralela a aresta $\varpi_\iota(k_{min} + 1)$. Fixado um destes índices $\iota \in \mathbb{N}$, observe então que (3.1.5) implica que

$$\tilde{G}_\iota^{(\tau)} := \mathcal{H}(\vec{\ell}_{k_{min}-1}) \cap (\tilde{G}_\iota \cup \vec{\wp}_1 \cup \cdots \cup \vec{\wp}_\tau) \cap \mathcal{H}(\vec{\ell}_{k_{min}+1})$$

é um conjunto convexo $E(\mathcal{S})$-envelopante. Todavia, da hipótese de $\alpha|_{\tilde{G}_\omega^{(\infty)}} = \tilde{x}|_{\tilde{G}_\omega^{(\infty)}}$ resulta que $\alpha|_{\tilde{G}_\iota^{(\tau)}} = \tilde{x}|_{\tilde{G}_\iota^{(\tau)}}$, o que contradiz a maximalidade de $\tilde{G}_\iota$. Portanto, existe $\tau \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$\alpha|_{\tilde{G}_\omega^{(\tau)}} = \tilde{x}|_{\tilde{G}_\omega^{(\tau)}},$$

mas

$$\alpha|_{\tilde{G}_\omega^{(\tau+1)}} \neq \tilde{x}|_{\tilde{G}_\omega^{(\tau+1)}}.$$

Em particular, para qualquer $a \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathcal{U} \backslash \vec{\ell'}_\mathcal{U} + a\vec{v}_{\ell'} \subset \tilde{G}_\omega^{(\tau)}$, ocorre $\alpha \in \mathcal{N}_{\vec{\ell'},a}(\vec{\ell'}, \mathcal{U})$. De fato, suponha, por contradição, que $N_{\vec{\ell'},\mathcal{U}}(\gamma) = 1$ para algum $\gamma \in \vec{L}_{\vec{\ell'},a}(\mathcal{U} \backslash \vec{\ell'}_\mathcal{U}, \alpha)$. Sendo

$\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ um conjunto $(\eta, \vec{\ell'})$-gerador, a igualdade $\alpha|_{\tilde{G}_\omega^{(\tau)}} = \tilde{x}|_{\tilde{G}_\omega^{(\tau)}}$ e a hipótese de $N_{\vec{\ell'},\mathcal{U}}(\gamma) = 1$ fornecem, por raciocínio indutivo, que

$$\alpha|_{A\cup\tilde{G}_\omega^{(\tau)}} = \tilde{x}|_{A\cup\tilde{G}_\omega^{(\tau)}}, \tag{3.1.6}$$

onde

$$A := \{i_{\mathcal{U}}(\vec{\ell'}_{\mathcal{U}}) + t\vec{v}_{\ell'} \ : t \geq a\}.$$

Sejam $\mathcal{S}' \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ uma translação de $\mathcal{S}$ tal que $\vec{\ell'}_{\mathcal{S}'} = \wp_{\tau+1}$ e $b \in \mathbb{Z}$ o menor inteiro tal que

$$(\vec{\ell'}_{\mathcal{S}'} \cap \mathcal{S}') + b\vec{v}_{\ell'} \subset \wp_{\tau+1} \cap \tilde{G}_\omega^{(\tau+1)}.$$

Mesmo que o conjunto $\tilde{G}_\omega^{(\tau)}$ não seja necessariamente fracamente $E(\mathcal{S})$-envelopante (ver Figura 3.1.3), não é difícil concluir que, ainda assim, ocorre

$$\mathcal{S}' \backslash \vec{\ell'}_{\mathcal{S}'} + t\vec{v}_{\ell'} \subset \tilde{G}_\omega^{(\tau)} \quad \forall\, t \geq b. \tag{3.1.7}$$

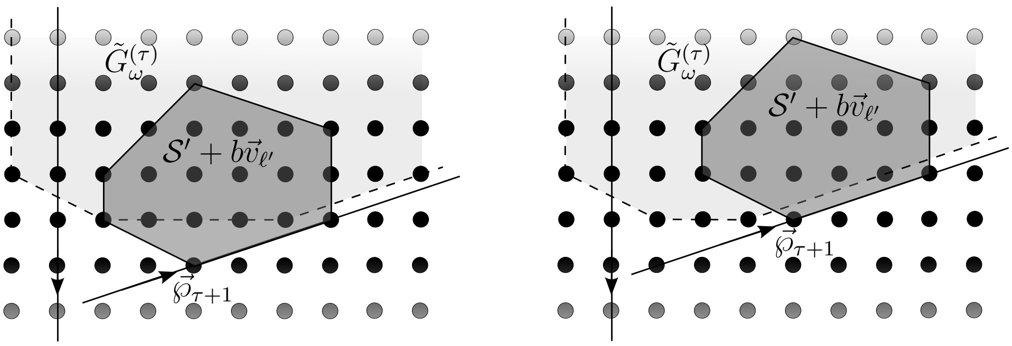


Figura 3.1.3: Principais situações em que $\tilde{G}_\omega^{(\tau)}$ não é fracamente $E(\mathcal{S})$-envelopante.

Portanto, como $\mathcal{S}' \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ é η-gerador, procedendo indutivamente, de (3.1.6) e (3.1.7) resulta que $\alpha|_{\tilde{G}_\omega^{(\tau+1)}} = \tilde{x}|_{\tilde{G}_\omega^{(\tau+1)}}$, o que viola a extremalidade de $\tau \in \mathbb{Z}_+$. $\square$

Se a reta $\vec{\ell'} \in \mathbb{G}_1$, paralela a $\vec{\ell}_{k_{min}}$, fosse uma direção expansiva segundo X_η, a partir do Lema 1.37 poderíamos obter a igualdade (3.1.6) para algum A. Como na prova acima, disporíamos de (3.1.7) para derivar absurdo, o que nos leva a concluir que $\vec{\ell'}$ é uma direção não-expansiva segundo X_η.

Para concluir esta seção e a primeira etapa da prova do Teorema 3.1, como o leitor pode suspeitar, o Corolário 2.7 fornecerá periodicidade para a configuração α ao longo da reta não-expansiva obtida.

Das construções anteriores, observe que $\tilde{G}_\omega^{(\tau)}$ (com $\tau \in \mathbb{Z}_+$ como na Afirmação 3.4) possui duas arestas semi-infinitas paralelas as arestas semi-infinitas de $\tilde{G}_\omega$. Nosso objetivo agora será construir um subconjunto convexo e ilimitado $\mathcal{K}$ de $\tilde{G}_\omega^{(\tau)}$ (com duas arestas semi-infinitas paralelas as retas orientadas $\vec{\ell}, \vec{\ell'} \in \mathbb{G}_1$) tal que a configuração $\alpha|_{\mathcal{K}}$ seja 2-periódica.

De acordo com a Proposição 2.10, existe um conjunto $(\vec{\ell'}, q)$-balanceado $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$, com $q = |\vec{\ell'}_{\mathcal{U}} \cap \mathcal{U}| - 1$, o qual pode ser transladado de forma que $\vec{\ell'}_{\mathcal{U}} = \wp_{\tau+1}$. Assim, para $a \in \mathbb{Z}$ como na Afirmação 3.4, ou melhor, quando a $(\vec{\ell}',\mathcal{U},q)$-semifaixa $\vec{F}(a)$ está contida em $\tilde{G}_\omega^{(\tau)}$, o item (ii) do Corolário 2.7 implica, em particular, que $\alpha|_{\vec{F}(a_1)}$ é periódica de período $t'\vec{v}_{\ell'}$ para certos $t' \in \mathbb{N}$ e $a_1 \in \mathbb{Z}$, com $a_1 \geq a$.

Sendo $\alpha|_{\tilde{G}_\omega^{(\tau)}}$ verticalmente periódica, isto é, periódica de período te_2 para algum $t \in \mathbb{N}$, então $\alpha|_{\vec{F}(a_1)} = \alpha|_{\vec{F}(a_1)+te_2}$, ou seja, $\alpha|_{\vec{F}(a_1)+te_2}$ também é periódica de período $t'\vec{v}_{\ell'}$. Observe que, se

$$(\vec{F}(a_1) + te_2) \cap \vec{F}(a_1) \neq \emptyset,$$

tomando

$$\mathcal{W} := \bigcup_{s=0}^{\infty} (\vec{F}(a_1) + ste_2),$$

trivialmente temos que $\alpha|_{\mathcal{W}}$ é 2-periódica com períodos em $\ell \cap (\mathbb{Z}^2)^*$ e $\ell' \cap (\mathbb{Z}^2)^*$. Caso contrário, sejam

$$\vec{\wp}_{\tau+1} + te_2, \ldots, \vec{\wp}_{\tau+\kappa} + te_2$$

as retas paralelas a $\vec{\ell}'$ que estão entre $\vec{F}(a)$ e $\vec{F}(a) + te_2$. Denotando $\mathcal{U}_1 := \mathcal{U} + te_2$, é claro que $\vec{F}_1(a_1) := \vec{F}(a_1) + te_2$ é uma $(\vec{\ell}',\mathcal{U}_1,q)$-semifaixa contida em $\tilde{G}_\omega^{(\tau)}$. Além disso, ocorre $\vec{\ell}'_{\mathcal{U}_1} = \vec{\wp}_{\tau+1} + te_2$. Assim, uma vez que a restrição de α a $\vec{F}(a_1)$ é periódica de período $t'\vec{v}_{\ell'}$, o Lema 2.18 permite concluir que a restrição de α ao conjunto $(\vec{\ell}'_{\mathcal{U}_1} \cup \vec{F}_1)(m_1)$ (ver (2.2.2)) é periódica com período em $\ell' \cap (\mathbb{Z}^2)^*$ para algum $m_1 \in \mathbb{Z}$, com $m_1 \geq a_1$.

Supondo que $\mathcal{U}_2$ seja uma translação de $\mathcal{U}$ tal que $\vec{\ell}'_{\mathcal{U}_2} = \vec{\wp}_{\tau+2} + te_2$, escolha $a_2 \in \mathbb{Z}$ de modo que $(\vec{\ell}'_{\mathcal{U}_1} \cup \vec{F}_1)(m_1)$ contenha a $(\vec{\ell}',\mathcal{U}_2,q)$-semifaixa $\vec{F}_2(a_2)$. Logo, do Lema 2.18 resulta que a restrição de α ao conjunto $(\vec{\ell}'_{\mathcal{U}_2} \cup \vec{F}_2)(m_2)$ é periódica com período em $\ell' \cap (\mathbb{Z}^2)^*$ para algum $m_2 \in \mathbb{Z}$, com $m_2 \geq a_2$. Procedendo desta forma, obtemos que a restrição de α a

$$(\vec{\ell}'_{\mathcal{U}_1} \cup \vec{F}_1)(m_1) \cup \cdots \cup (\vec{\ell}'_{\mathcal{U}_\kappa} \cup \vec{F}_\kappa)(m_\kappa)$$

é periódica com período $\ell' \cap (\mathbb{Z}^2)^*$, onde, para cada $1 < i \leq \kappa$, $\mathcal{U}_i$ é uma translação de $\mathcal{U}$ tal que $\vec{\ell}'_{\mathcal{U}_i} = \vec{\wp}_{\tau+i} + te_2$ e $a_i \in \mathbb{Z}$ é escolhido de modo que $(\vec{\ell}'_{\mathcal{U}_{i-1}} \cup \vec{F}_{i-1})(m_{i-1})$ contenha a $(\vec{\ell}',\mathcal{U}_i,q)$-semifaixa $\vec{F}_i(a_i)$. Mais ainda, como $\alpha|_{\tilde{G}_\omega^{(\tau)}}$ é periódica de período te_2, concluímos que a restrição de α ao conjunto

$$\mathcal{W} := \bigcup_{s=0}^{\infty} \Big(\Big((\vec{\ell}'_{\mathcal{U}_1} \cup \vec{F}_1)(m_1) \cup \cdots \cup (\vec{\ell}'_{\mathcal{U}_\kappa} \cup \vec{F}_\kappa)(m_\kappa) \cup \vec{F}(a_1) \Big) + ste_2 \Big)$$

também é periódica com período em $\ell' \cap (\mathbb{Z}^2)^*$ e, portanto, 2-periódica (ver Figura 3.1.4).

Pela construção, em qualquer caso, pode-se obter um conjunto fracamente $E(\mathcal{S})$-envelopante $\mathcal{K}' \subset \mathcal{W}$ com duas arestas semi-infinitas paralelas às retas $\vec{\ell}$ e $\vec{\ell}'$.

Definição 3.5. *Seja $\mathcal{K} \subset \mathbb{Z}^2$ o conjunto convexo maximal (com relação à inclusão) dentre os conjuntos convexos $\mathcal{T} \supset \mathcal{K}'$ tais que $\alpha|_{\mathcal{T}}$ é 2-periódica com períodos em $\ell \cap (\mathbb{Z}^2)^*$ e $\ell' \cap (\mathbb{Z}^2)^*$.*

Afirmamos que $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}(\vec{\wp}_\tau)$. Com efeito, como $\mathcal{K}$ é convexo e contém $\mathcal{K}'$ (o qual possui duas arestas semi-infinitas paralelas a $\vec{\ell}$ e $\vec{\ell}'$), supondo $\mathcal{K} \not\subset \mathcal{H}(\vec{\wp}_\tau)$, segue então que $\vec{\wp}_{\tau+1} \cap \mathcal{K}$

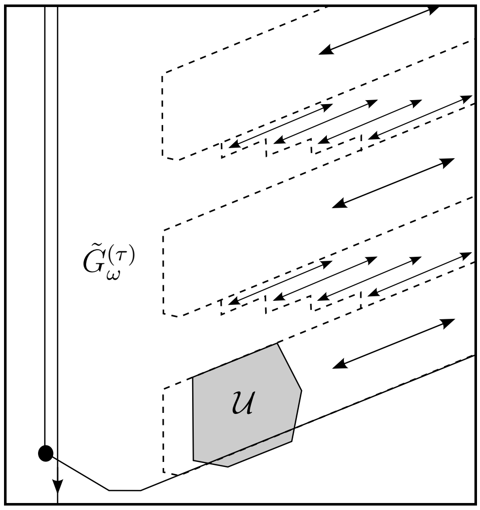


Figura 3.1.4: Representação em pontilhado do conjunto $\mathcal{W} \subset \tilde{G}_\omega^{(\tau)}$ tal que $\alpha|_{\mathcal{W}}$ é 2-periódica.

contém infinitos pontos. Deste modo, como $\alpha|_{\mathcal{K}}$ e $\tilde{x}$ são verticalmente periódicas e $\alpha|_{\tilde{G}_\omega^{(\tau)}} = \tilde{x}|_{\tilde{G}_\omega^{(\tau)}}$, segue que

$$\alpha|_{\tilde{G}_\omega^\tau \cup (\vec{\wp}_{\tau+1} \cap \mathcal{K})} = \tilde{x}|_{\tilde{G}_\omega^\tau \cup (\vec{\wp}_{\tau+1} \cap \mathcal{K})}.$$

Portanto, como na prova da Afirmação 3.4, a partir de (3.1.7) podemos contradizer a extremalidade de $\tau \in \mathbb{Z}_+$.

Como $\vec{\wp}_\tau \subset \mathbb{R}^2$ é paralela a $\vec{\ell}' \in \mathbb{G}_1$, as inclusões $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{H}(\vec{\wp}_\tau)$ garantem que $\mathcal{K}$ possui uma aresta semi-infinita paralela à reta $\vec{\ell}'$. Falta mostrar que $\mathcal{K}$ possui uma aresta semi-infinita paralela a $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$. Se $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}(\vec{\ell})$, isto é obtido de raciocínio análogo ao acima. Sendo assim, para concluir basta argumentar que $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}(\vec{\ell})$. Suponha, então, por redução ao absurdo, que $\mathcal{K} \not\subset \mathcal{H}(\vec{\ell})$. É fácil ver que, para qualquer reta $\vec{\ell}'' \subset \mathcal{H}(\vec{\ell}^{(-1)})$ paralela a $\vec{\ell}$ ocorre $|\mathcal{K} \cap \ell''| = \infty$. Portanto, o fato de $\tilde{x} = T^{(0,z)}x$ ser verticalmente periódica e coincidir com α em $\tilde{G}_\omega^{(\tau)}$ permite estender a 2-periodicidade de $\tilde{x}|_{\mathcal{K} \cap \mathcal{H}(\vec{\ell}^{(-1)})}$ para $\tilde{x}|_{\mathcal{H}(\vec{\ell}^{(-1)})}$, o que é um absurdo, pois tomamos $x|_{\mathcal{H}(\vec{\ell}^{(-1)})}$ sendo verticalmente periódica mas não horizontalmente periódica. Portanto, $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}(\vec{\ell})$ é um conjunto convexo com duas arestas semi-infinitas paralelas às retas $\vec{\ell}$ e $\vec{\ell}'$.

A maximalidade de $\mathcal{K}$ assegura, a partir do Lema 1.37, que as retas orientadas $\vec{\ell}, \vec{\ell}' \in \mathbb{G}_1$ são também direções não-expansivas segundo $X_\alpha := \overline{Orb(\alpha)}$. É claro que isto implica que $\alpha \in X_\eta$ é uma configuração aperiódica.

3.2 Limitantes para os períodos de $\alpha|_{\mathcal{K}}$

Queremos obter informações sobre os períodos da restrição de α ao conjunto $\mathcal{K}$. Para tanto, utilizando a propriedade que $P_\eta(\mathcal{S}) \leq \frac{1}{2}|\mathcal{S}|+|\mathcal{A}|-1$, construiremos inicialmente dois conjuntos η-geradores com dimensões não superiores a metade da dimensão de $\mathcal{S}$.

Dado $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$, fixado $\vec{\ell}_0 \in \mathbb{G}_1$, denote por $\operatorname{diam}_{\ell_0}(\mathcal{U})$ o número de retas paralelas a $\vec{\ell}_0$ cuja interseção com $\mathcal{U}$ é não vazio. Sejam $\vec{\boldsymbol{\ell}}_1, \overleftarrow{\boldsymbol{\ell}}_2 \subset \mathbb{R}^2$ retas antiparalelas, com $\vec{\boldsymbol{\ell}}_1$ paralela a $\vec{\ell}$, para as quais $\mathcal{U}_1 := \mathcal{S} \cap \mathcal{H}(\vec{\boldsymbol{\ell}}_1)$ e $\mathcal{U}_2 := \mathcal{S} \cap \mathcal{H}(\overleftarrow{\boldsymbol{\ell}}_2)$ cumprem $\operatorname{diam}_\ell(\mathcal{U}_1) = \lceil \frac{\operatorname{diam}_\ell(\mathcal{S})}{2} \rceil$ e $\operatorname{diam}_\ell(\mathcal{U}_2) = \lceil \frac{\operatorname{diam}_\ell(\mathcal{S})}{2} \rceil$. Note que

$$P_\eta(\mathcal{U}_1) < P_\eta(\mathcal{S}) \ \text{ e } \ P_\eta(\mathcal{U}_2) < P_\eta(\mathcal{S}),$$

pois, caso contrário, como $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{S}$, teríamos então que $\vec{\ell}$ ou $\overleftarrow{\ell}$ seria direção expansiva segundo X_η, exatamente o oposto do que acontece. Daí, se $|\mathcal{U}_1| \geq \frac{1}{2}|\mathcal{S}|$, então

$$P_\eta(\mathcal{U}_1) - |\mathcal{U}_1| < P_\eta(\mathcal{S}) - |\mathcal{U}_1| \leq \frac{1}{2}|\mathcal{S}| + |\mathcal{A}| - 1 - |\mathcal{U}_1| \leq \frac{1}{2}|\mathcal{S}| + |\mathcal{A}| - 1 - \frac{1}{2}|\mathcal{S}| = |\mathcal{A}| - 1,$$

donde segue $P_\eta(\mathcal{U}_1) \leq |\mathcal{U}_1| + |\mathcal{A}| - 2$. Logo, existe conjunto η-gerador $\mathcal{T} \subset \mathcal{U}_1$. Se $|\mathcal{U}_1| < \frac{1}{2}|\mathcal{S}|$, então, é claro que $|\mathcal{U}_2| \geq \frac{1}{2}|\mathcal{S}|$ e, como antes, existe conjunto η-gerador $\mathcal{T} \subset \mathcal{U}_2$. Em qualquer caso, há conjunto η-gerador $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ tal que $\operatorname{diam}_\ell(\mathcal{T}) \leq \lceil \frac{\operatorname{diam}_\ell(\mathcal{S})}{2} \rceil$. De forma análoga, prova-se que existe também conjunto η-gerador $\mathcal{T}' \subset \mathcal{S}$ tal que $\operatorname{diam}_{\ell'}(\mathcal{T}') \leq \lceil \frac{\operatorname{diam}_{\ell'}(\mathcal{S})}{2} \rceil$.

Faremos agora uso sobretudo de resultados da Seção 2.2.1, com o objetivo de majorar os períodos em $\ell \cap (\mathbb{Z}^2)^*$ e $\ell' \cap (\mathbb{Z}^2)^*$ da restrição de α a $\mathcal{K}$. Salientamos que são estes majorantes que permitirão derivar absurdo na última seção deste capítulo.

Outra peça útil para esta majoração será o Teorema de Fine-Wilf. Para conveniência do leitor, seu enunciado é recapitulado abaixo.

Teorema 3.6 (Fine-Wilf [10])**.** *Supondo que $f = (f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e $f' = (f'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sejam duas sequências periódicas de períodos q e q', respectivamente, se $f_i = f'_i$ para pelo menos $q + q' - mdc(q, q')$ entradas consecutivas, então $f = f'$.*

A menos de translação, podemos assumir, sem perda de generalidade, que a aresta de $\mathcal{K}$ paralela a $\vec{\ell}$ satisfaz

$$\vec{\ell}_{\mathcal{K}} \cap \mathcal{K} = \{(0, i) \in \mathbb{Z}^2 : i \geq 0\}.$$

Na demonstração da afirmação a seguir é imprescindível que o leitor tenha em mente as Notações 1.23 e 1.26, bem como a linguagem de semifaixas do Capítulo 2.

Afirmação 3.7. *A restrição de α ao conjunto $\mathcal{K}$ é verticalmente periódica de período $t_0 e_2$ para algum $t_0 \leq \lceil \frac{1}{2}|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|\rceil - 1$ e periódica de período $t'_0 \vec{v}_{\ell'}$ para algum $t'_0 \leq |\vec{\ell}'_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| - 2$.*

Prova. A demonstração será dividida em dois casos. Inicialmente, seja $a \in \mathbb{Z}$ um inteiro tal que a $(\vec{\ell}, \mathcal{S}, p)$-semifaixa $\overleftarrow{F}(a)$ esteja contida em $\mathcal{K}$. Como $\mathcal{S}$ é um conjunto η-gerador, a maximalidade de $\mathcal{K}$ implica que $\alpha \in \mathcal{N}_{\overleftarrow{\ell}, a}(\vec{\ell}, \mathcal{S})$. Portanto, o item (iii) da Proposição 2.27 fornece que a restrição de α a $\overleftarrow{F}(a + p)$ é verticalmente periódica de período $t_0 \overleftarrow{v}_\ell$, onde $\overleftarrow{v}_\ell = e_2$, com

$$t_0 \leq \left\lceil \frac{1}{2}|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \right\rceil - 1. \tag{3.2.1}$$

Além disso, como $\alpha|_{\mathcal{K}}$ é verticalmente periódica e $\overleftarrow{F}(a + p) \subset \overleftarrow{F}(a) \subset \mathcal{K}$, é fácil argumentar que a restrição de α a $\overleftarrow{F}(a)$ é verticalmente periódica de período $t_0 e_2$.

Tendo em vista a Definição 3.5, fixamos $\kappa, \kappa' \in \mathbb{N}$ para os quais $\alpha|_{\mathcal{K}}$ é periódica de períodos $h := \kappa e_2$ e $h' := \kappa' \vec{v}_{\ell'}$.

Caso 1. Assuma que $|\vec{\ell}'_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \leq |\overleftarrow{\ell}'_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|$.

Denote $q' := |\vec{\ell}'_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| - 1$. Sejam $\mathcal{S}'$ uma translação de $\mathcal{S}$ tal que $\vec{\ell}'_{\mathcal{S}'} = \vec{\ell}'^{(-1)}_{\mathcal{K}}$ e $a' \in \mathbb{Z}$ um inteiro tal que a $(\vec{\ell}', \mathcal{S}', q')$-semifaixa $\vec{F}'(a')$ esteja contida em $\mathcal{K}$. Como antes, a maximalidade de $\mathcal{K}$ implica que $\alpha \in \mathcal{N}_{\vec{\ell}', a'}(\vec{\ell}', \mathcal{S}')$. Logo, o item (i) da Proposição 2.27 estabelece que a restrição de α a $\vec{F}'(a' + q')$ e, portanto, a $\vec{F}'(a')$ é periódica de período $t'_0 \vec{v}_{\ell'}$, com

$$t'_0 \leq \left\lceil \frac{1}{2} |\vec{\ell}'_{\mathcal{S}'} \cap \mathcal{S}'| \right\rceil - 1 = \left\lceil \frac{1}{2} |\vec{\ell}'_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \right\rceil - 1. \tag{3.2.2}$$

É claro que, para todo $m \in \mathbb{Z}_+$, ocorre $\alpha|_{\overleftarrow{F}(a)} = (T^{mh'}\alpha)|_{\overleftarrow{F}(a)}$ e $\alpha|_{\vec{F}'(a')} = (T^{mh}\alpha)|_{\vec{F}'(a')}$. Sejam $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\mathit{\Pi} := (\overleftarrow{F}(a) + m_1 h') \cap (\vec{F}'(a') + m_2 h)$$

contenha uma translação de $\mathcal{S} \backslash \{\vec{\ell}_{\mathcal{S}}, \vec{\ell}'_{\mathcal{S}}\}$. Denote $\overleftarrow{\ell}'_1 := \overleftarrow{\ell}'^{(-1)}_{\mathit{\Pi}}$ e defina $\overleftarrow{\ell}'_{i+1} := \overleftarrow{\ell}'^{(-1)}_i$ para todo inteiro $i \geq 1$. Consideramos (ver Figura 3.2.1)

$$(\mathbb{Z}^2 \backslash \mathcal{H}(\overleftarrow{\ell}_{\mathit{\Pi}})) \cap \overleftarrow{\ell}'_i =: \{g_i + t\vec{v}_{\ell'} : t \geq 0\} \quad \forall\, i \geq 1.$$

Fixado $i \geq 1$, se $\mathcal{V}$ for uma translação de $\mathcal{T}$ tal que g_i é o ponto inicial de $\overleftarrow{\ell}'_{\mathcal{V}} \cap \mathcal{V}$ (com relação à orientação de $\overleftarrow{\ell}'$), resulta da majoração (3.2.2) que $\mathcal{V} - t'_0 \vec{v}_{\ell'} \subset \overleftarrow{F}(a) + m_1 h'$. De fato, denotando $\vec{v}_{\ell'} = (\mu, \nu)$, podemos interpretar $\mu \geq 1$ como o número de retas verticais que intersectam o conjunto $\{(i, 0) : 1 \leq i \leq \mu\}$. Isso nos permite então escrever $\operatorname{diam}_\ell(\mathcal{S}) = (|\vec{\ell}'_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| - 1)\mu + 1 + r$, onde $r \geq 0$. Sendo assim, como $\operatorname{diam}_\ell(\mathcal{V}) \leq \lceil \frac{1}{2} \operatorname{diam}_\ell(\mathcal{S}) \rceil$, para provar que $\mathcal{V} - t'_0 \vec{v}_{\ell'} \subset \overleftarrow{F}(a) + m_1 h'$, basta mostrar que

$$\operatorname{diam}_\ell(\mathcal{S}) - \left\lceil \frac{1}{2} \operatorname{diam}_\ell(\mathcal{S}) \right\rceil - t'_0 \mu \geq 0.$$

Isto porque, cada vez que $\mathcal{V}$ é transladado por múltiplo de $-\vec{v}_{\ell'}$, o conjunto $\overleftarrow{F}(a) + m_1 h'$ é privado do mesmo múltiplo de μ retas verticais. Uma vez que vale (3.2.2), é suficiente abordar duas situações, a saber, $|\vec{\ell}'_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| = 2s$, com $t'_0 = s - 1$, e $|\vec{\ell}'_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| = 2s + 1$, com $t'_0 = s$, onde $s \in \mathbb{N}$. Na primeira possibilidade, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}_\ell(\mathcal{S}) - \left\lceil \frac{1}{2} \operatorname{diam}_\ell(\mathcal{S}) \right\rceil - (s-1)\mu &\geq \frac{1}{2} \operatorname{diam}_\ell(\mathcal{S}) - 1 - (s-1)\mu \\ &= \frac{\mu + 1 + r}{2} - 1 \geq \frac{r}{2} \geq 0. \end{aligned}$$

Já na segunda, ou seja, para $|\vec{\ell}'_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| = 2s + 1$, ocorre

$$\operatorname{diam}_\ell(\mathcal{S}) - \left\lceil \frac{1}{2} \operatorname{diam}_\ell(\mathcal{S}) \right\rceil - s\mu \geq \frac{1}{2} \operatorname{diam}_\ell(\mathcal{S}) - \frac{1}{2} - s\mu = \frac{r}{2} \geq 0.$$

Portanto, $\mathcal{V} - t'_0 \vec{v}_{\ell'} \subset \overleftarrow{F}(a) + m_1 h'$.

Fixado $t \geq 0$, se $\mathcal{V}'$ for uma translação de $\mathcal{T}'$ tal que $g_1 + t\vec{v}_{\ell'}$ é o ponto inicial de $\overleftarrow{\ell}'_{\mathcal{V}'} \cap \mathcal{V}'$ (com relação à orientação de $\overleftarrow{\ell}'$), de forma similar ao que foi argumentado acima, segue de (3.2.1) que $\mathcal{V}' - t_0e_2 \subset \vec{F}'(a') + m_2h$.

Recorde que $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ é um conjunto $(\vec{\ell}, p)$-balanceado. Além disso, no presente caso, como argumentado na Observação 2.25, temos que $\mathcal{S}$ também é um conjunto $(\vec{\ell}', q')$-balanceado. Logo, usando o item (i) da Definição 2.5, uma vez que

$$t_0 \leq |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|-2 \leq \operatorname{diam}_{\ell'}(\mathit{\Pi}) \quad \text{e} \quad t_0' \leq |\vec{\ell}'_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|-2 \leq \operatorname{diam}_{\ell}(\mathit{\Pi}),$$

segue que a restrição de α ao conjunto $(\overleftarrow{F}(a) + m_1h') \cup (\vec{F}'(a') + m_2h)$ é 2-periódica de períodos t_0e_2 e $t_0'\vec{v}_{\ell'}$.

Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}'$ translações de $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ tais que g_1 é o ponto inicial de $\overleftarrow{\ell}'_{\mathcal{V}} \cap \mathcal{V}$ e $\overleftarrow{\ell}'_{\mathcal{V}'} \cap \mathcal{V}'$ (com relação à orientação de $\overleftarrow{\ell}'$). Pelo argumentado acima, resulta que $\mathcal{V} - t_0'\vec{v}_{\ell'} \subset \overleftarrow{F}(a) + m_1h'$ e $\mathcal{V}' - t_0e_2 \subset \vec{F}'(a') + m_2h$ (ver Figura 3.2.1). Este fato e a discussão no parágrafo anterior implicam

$$\alpha|_{\mathcal{V}\setminus\{g_1\}} = (T^{-t_0'\vec{v}_{\ell'}}\alpha)|_{\mathcal{V}\setminus\{g_1\}} \quad \text{e} \quad \alpha|_{\mathcal{V}'\setminus\{g_1\}} = (T^{-t_0e_2}\alpha)|_{\mathcal{V}'\setminus\{g_1\}}.$$

Logo, uma vez que $\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}'$ são conjuntos η-geradores, das igualdades acima resulta

$$(T^{-t_0e_2}\alpha)_{g_1} = \alpha_{g_1} = (T^{-t_0'\vec{v}_{\ell'}}\alpha)_{g_1},$$

o que estende a 2-periodicidade de α para g_1.

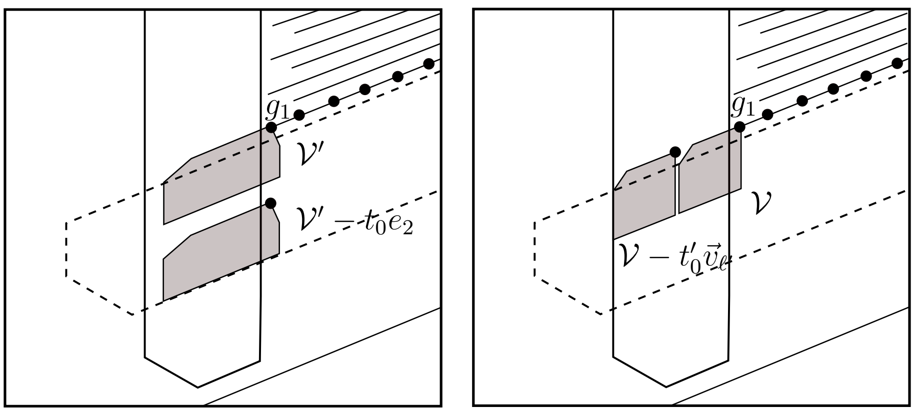


Figura 3.2.1: Representação dos conjuntos $\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}'$, onde o pontilhado representa $\vec{F}'(a')$.

Sejam, agora, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}'$ translações de $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ tais que $g_1 + \vec{v}_{\ell'}$ é o ponto inicial de $\overleftarrow{\ell}'_{\mathcal{V}} \cap \mathcal{V}$ e $\overleftarrow{\ell}'_{\mathcal{V}'} \cap \mathcal{V}'$ (com relação à orientação de $\overleftarrow{\ell}'$). Temos que $\mathcal{V}' - t_0e_2 \subset \vec{F}'(a') + m_2h$. Além disso, decorre de (3.2.2) que

$$\mathcal{V} - t_0'\vec{v}_{\ell'} \subset (\overleftarrow{F}(a) + m_1h') \cup (\vec{F}'(a') + m_2h) \cup \{g_1\}.$$

Logo, o fato da restrição de α ao conjunto $(\overleftarrow{F}(a) + m_1h') \cup (\vec{F}'(a') + m_2h) \cup \{g_1\}$ ser 2-periódica de períodos t_0e_2 e $t_0'\vec{v}_{\ell'}$ assegura as igualdades

$$\alpha|_{\mathcal{V}\setminus\{g_1+\vec{v}_{\ell'}\}} = (T^{-t_0'\vec{v}_{\ell'}}\alpha)|_{\mathcal{V}\setminus\{g_1+\vec{v}_{\ell'}\}} \quad e \quad \alpha|_{\mathcal{V}'\setminus\{g_1+\vec{v}_{\ell'}\}} = (T^{-t_0e_2}\alpha)|_{\mathcal{V}'\setminus\{g_1+\vec{v}_{\ell'}\}},$$

donde segue que

$$(T^{-t_0e_2}\alpha)_{g_1+\vec{v}_{\ell'}} = \alpha_{g_1+\vec{v}_{\ell'}} = (T^{-t_0'\vec{v}_{\ell'}}\alpha)_{g_1+\vec{v}_{\ell'}},$$

ou seja, a 2-periodicidade de α é estendida então para $g_1+\vec{v}_{\ell'}$. Por indução, concluímos que a restrição de α ao conjunto

$$(\overleftarrow{F}(a)+m_1h') \cup (\vec{F}'(a')+m_2h) \cup \{g_1+t\vec{v}_{\ell'} : t \geq 0\}$$

é periódica de períodos t_0e_2 e $t_0'\vec{v}_{\ell'}$. Levando-se em consideração o passo anterior, uma argumentação análoga fornece que a restrição de α ao conjunto

$$(\overleftarrow{F}(a)+m_1h') \cup (\vec{F}'(a')+m_2h) \cup \{g_1+t\vec{v}_{\ell'} : t \geq 0\} \cup \{g_2+t\vec{v}_{\ell'} : t \geq 0\}$$

é periódica de períodos t_0e_2 e $t_0'\vec{v}_{\ell'}$. Portanto, por indução, obtemos que a restrição de α ao conjunto

$$(\overleftarrow{F}(a)+m_1h') \cup (\vec{F}'(a')+m_2h) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{g_i+t\vec{v}_{\ell'} : t \geq 0\}\right)$$

é periódica de períodos t_0e_2 e $t_0'\vec{v}_{\ell'}$.

Por fim, como $\alpha|_{\mathcal{K}}$ é periódica de períodos $h=\kappa e_2$ e $h'=\kappa'\vec{v}_{\ell'}$, utilizando o Teorema de Fine-Wilf não é difícil argumentar que $\alpha|_{\mathcal{K}}$ é periódica de períodos t_0e_2 e $t_0'\vec{v}_{\ell'}$, o que encerra este caso.

Caso 2. Assuma que $|\overleftarrow{\ell}'_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| < |\vec{\ell}'_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|$.

Denote $q' := |\overleftarrow{\ell}'_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|-1$. Se para alguma translação $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ existir $(\overleftarrow{\ell}', \mathcal{S}', q')$-semi-faixa $\vec{F}'(a') \subset \mathcal{K}$ tal que $\alpha \in \mathcal{N}_{\overleftarrow{\ell}',a'}(\overleftarrow{\ell}', \mathcal{S}')$, observando que $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ agora é também um conjunto $(\overleftarrow{\ell}', q')$-balanceado, com raciocínio similar ao caso anterior, obtemos que $\alpha|_{\mathcal{K}}$ é periódica de períodos t_0e_2 e $t_0'\vec{v}_{\ell'}$, com

$$t_0 \leq \left\lceil \frac{1}{2}|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \right\rceil - 1$$

e

$$t_0' \leq \left\lceil \frac{1}{2}|\overleftarrow{\ell}'_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \right\rceil - 1 \leq |\overleftarrow{\ell}'_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|-1 \leq |\vec{\ell}'_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|-2,$$

o que encerra o resultado.

Caso contrário, inicialmente, a Proposição 2.10 afirma que existe conjunto $(\vec{\ell}', r)$-balanceado $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$, com $r = |\vec{\ell}'_{\mathcal{U}} \cap \mathcal{U}|-1$, o qual podemos supor satisfazer $\vec{\ell}'_{\mathcal{U}} = \vec{\ell}'^{(-1)}_{\mathcal{K}}$. Para cada inteiro $i \geq 1$, seja $\mathcal{U}_i$ uma translação de $\mathcal{U}$ tal que

$$\vec{\ell}'_{\mathcal{U}_{i+1}} := \vec{\ell}'^{(-1)}_{\mathcal{U}_i} \in \mathcal{H}(\vec{\ell}'^{(-1)}_{\mathcal{U}_i}),$$

onde $\vec{\ell}'_{\mathcal{U}_1} := \vec{\ell}'_{\mathcal{U}}$. Retomando a notação estabelecida no início da Seção 2.2, não é difícil argumentar que $\varPhi_{\vec{\ell}',r}(\mathcal{U}_i) = \varPhi_{\vec{\ell}',r}(\mathcal{U}) =: \varPhi$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Seja $b_1 \in \mathbb{Z}$ um inteiro tal que a $(\vec{\ell}', \mathcal{U}_1, r)$-semifaixa $\vec{F}_1'(b_1)$ esteja contida em $\mathcal{K}$. Recordando que $h' = \kappa'\vec{v}_{\ell'}$, note que o Lema 2.18 implica, em particular, que a restrição de α a $(\vec{\ell}'_{\mathcal{U}_1} \cup \vec{F}_1')(b_1+2\varPhi)$ é periódica de período $t\vec{v}_{\ell'}$ com $t \leq \max\{\kappa', 2\varPhi\}$. Suponha construída uma sequência de números inteiros $b_1, b_2, \ldots, b_m$ tais que, para cada $1 \leq i \leq m$, $\vec{F}_i'(b_i)$ é uma $(\vec{\ell}', \mathcal{U}_i, r)$-semifaixa que satisfaz

(i) a restrição de α a $(\vec{\ell}'_{\mathcal{U}_i} \cup \vec{F}'_i)(b_i + 2\Phi)$ é periódica de período $t\vec{v}_{\ell'}$ com $t \leq \max\{\kappa', 2\Phi\}$,

(ii) $\vec{F}'_{i+1}(b_{i+1}) \subset (\vec{\ell}'_{\mathcal{U}_i} \cup \vec{F}'_i)(b_i + 2\Phi)$.

Seja $b_{m+1} \in \mathbb{Z}$ um inteiro tal que a $(\vec{\ell}', \mathcal{U}_{m+1}, r)$-semifaixa $\vec{F}'_{m+1}(b_{m+1})$ esteja contida em $(\vec{\ell}'_{\mathcal{U}_m} \cup \vec{F}'_m)(b_m + 2\Phi)$. Denotando por $\kappa''\vec{v}_{\ell'}$, com $\kappa'' \leq \max\{\kappa', 2\Phi\}$, o período da restrição de α a $\vec{F}'_{m+1}(b_{m+1})$, segue do Lema 2.18 que a restrição de α a $(\vec{\ell}'_{\mathcal{U}_{m+1}} \cup \vec{F}'_{m+1})(b_{m+1} + 2\Phi)$ é periódica de período $t\vec{v}_{\ell'}$, onde $t \leq \max\{\kappa'', 2\Phi\}$. Por indução, os números inteiros b_i estão definidos para todo $i \in \mathbb{N}$. Em particular, resulta desta construção que a restrição de α ao conjunto

$$\Gamma := \mathcal{K} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \vec{F}'_i(b_i) \right)$$

é periódica com período paralelo a $\vec{\ell}'$ (mas não verticalmente periódica pela maximalidade de $\mathcal{K}$).

Este fato assegura a existência de uma translação $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ e de uma $(\overleftarrow{\ell}', \mathcal{S}', q')$-semifaixa $\vec{F}'(a')$, com $a' \in \mathbb{Z}$, contida em Γ para a qual $\alpha \in \mathcal{N}_{\vec{\ell}', a'}(\overleftarrow{\ell}', \mathcal{S}')$. Com efeito, suponha, por redução ao absurdo, que, para qualquer translação $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$, não existe $(\overleftarrow{\ell}', \mathcal{S}', q')$-semifaixa $\vec{F}'(a')$ contida em Γ cumprindo $\alpha \in \mathcal{N}_{\vec{\ell}', a'}(\overleftarrow{\ell}', \mathcal{S}')$. Uma vez que $\alpha|_{\Gamma \backslash \mathcal{K}}$ é periódica com período paralelo a $\vec{\ell}'$, aplicando o Princípio das Casas dos Pombos, é possível obter translação $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ tal que, para uma $(\overleftarrow{\ell}', \mathcal{S}', q')$-semifaixa $\vec{F}'(a')$, com $a' \in \mathbb{Z}$, e para algum $t \in \mathbb{N}$, acontece $\alpha|_{\vec{F}'(a')} = \alpha|_{\vec{F}'(a') + te_2}$ e tanto $\vec{F}'(a')$ quanto $\vec{F}'(a') + te_2$ estão contidos em $\Gamma \backslash \mathcal{K} = \bigcup \vec{F}'_i(b_i)$. Sendo assim, usando a suposição de redução ao absurdo, isto é, que $\alpha \notin \mathcal{N}_{\vec{\ell}', a'}(\overleftarrow{\ell}', \mathcal{S}')$, um raciocínio similar ao que foi utilizado para construir Γ permite produzir periodicidade vertical em região ilimitada cuja a interseção com Γ também é ilimitada (ver Figura 3.2.2). Isto possibilita violar a maximalidade de $\mathcal{K}$, pois, para algum $g \in \vec{\ell}'^{(-1)}_{\mathcal{K}} \cap \mathbb{Z}^2$, é possível estender sua 2-periodicidade ao conjunto $\{g + t\vec{v}_{\ell'} : t \geq 0\}$.

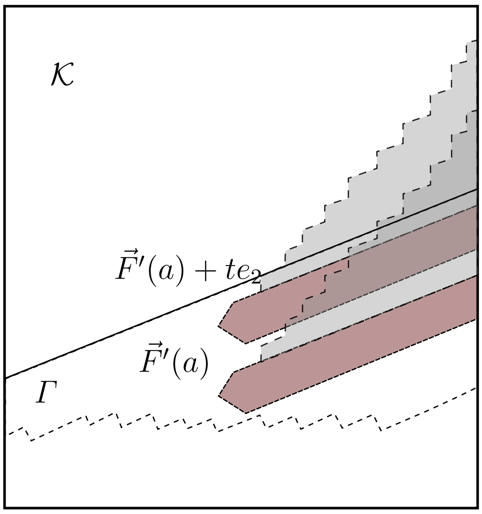


Figura 3.2.2: Representação da $(\overleftarrow{\ell}', \mathcal{S}', q')$-semifaixa $\vec{F}'(a')$ e do conjunto $\vec{F}'(a') + te_2$.

Para cada $i \geq 1$, seja então $\mathcal{S}'_i$ uma translação de $\mathcal{S}'$ tal que

$$\overleftarrow{\ell}'_{i+1} := \overleftarrow{\ell}'^{(-1)}_i \in \mathcal{H}(\overleftarrow{\ell}'^{(-1)}_i),$$

onde $\overleftarrow{\ell}'_1 := \overleftarrow{\ell}'_{\mathcal{S}'}$. Seja $a'_1 \in \mathbb{Z}$ um inteiro tal que a $(\overleftarrow{\ell}', \mathcal{S}'_1, q')$-semifaixa $\vec{\mathbf{F}}'_1(a'_1)$ esteja contida em Γ e, para cada inteiro $i > 1$, seja $a'_i \in \mathbb{Z}$ um inteiro tal que a $(\overleftarrow{\ell}', \mathcal{S}'_i, q')$-semifaixa $\vec{\mathbf{F}}'_i(a'_i)$ esteja contida em $(\overleftarrow{\ell}'_{\mathcal{S}_{i-1}} \cup \vec{\mathbf{F}}'_{i-1})(a'_{i-1} + 2q')$. Como o número de retas paralelas a $\overleftarrow{\ell}'$ entre $\mathcal{S}'$ e $\mathcal{K}$ é finito e, estamos assumindo que, para qualquer translação $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$, não há $(\overleftarrow{\ell}', \mathcal{S}', q')$-semifaixa $\vec{F}'(a') \subset \mathcal{K}$ cumprindo $\alpha \in \mathcal{N}_{\vec{\ell}, a'}(\overleftarrow{\ell}', \mathcal{S}')$, tome $I \geq 1$ o maior número inteiro tal que $\alpha \in \mathcal{N}_{\vec{\ell}, a_I}(\overleftarrow{\ell}', \mathcal{S}'_I)$. Sendo assim, na Proposição 2.27, o item (iii) fornece que a restrição de α a $\vec{\mathbf{F}}'_I(a'_I + q')$ é periódica de período $t'\vec{v}_{\ell'}$ com $t' \leq \lceil \frac{1}{2} |\overleftarrow{\ell}'_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \rceil - 1$ e o item (iv), em particular, que a restrição de α a $(\overleftarrow{\ell}'_{\mathcal{S}_I} \cup \vec{\mathbf{F}}'_I)(a'_I + 2q')$ é periódica de período $t'_0 \vec{v}_{\ell'}$ com $t'_0 \leq 2\lceil \frac{1}{2} |\overleftarrow{\ell}'_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \rceil - 2$. O item (iv) da Proposição 2.27 e a maximalidade de I asseguram então que, para cada $i > I$, a restrição de α a $(\overleftarrow{\ell}'_{\mathcal{S}_i} \cup \vec{\mathbf{F}}'_i)(a'_i + 2q')$ é periódica de período $t'_0 \vec{v}_{\ell'}$. Isto significa que a restrição de α ao conjunto

$$\Gamma' := \bigcup_{i=I}^{\infty} \vec{\mathbf{F}}'_i(a'_i + 2q')$$

é periódica de período $t'_0 \vec{v}_{\ell'}$, onde

$$t'_0 \leq 2 \left\lceil \frac{1}{2} |\overleftarrow{\ell}'_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \right\rceil - 2 \leq |\overleftarrow{\ell}'_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| - 1 \leq |\vec{\ell}'_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| - 2.$$

Por fim, note que a interseção de Γ' com $\mathcal{K}$ é um conjunto ilimitado tal que, para qualquer reta $\vec{\ell}''$ paralela a $\vec{\ell}'$, se $\ell'' \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$, então $|\ell'' \cap \Gamma'| = \infty$. Usando que $\alpha|_{\mathcal{K}}$ é periódica de período $h' = \kappa' \vec{v}_{\ell'}$, é fácil argumentar a partir do Teorema de Fine-Wilf que a restrição de α a $\mathcal{K}$ é periódica de período $t'_0 \vec{v}_{\ell'}$. Com relação à periodicidade vertical, observe que a majoração $t'_0 \leq |\overleftarrow{\ell}'_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| - 2$ garante que $\overleftarrow{F}(a) \cap (\overleftarrow{F}(a) + t'_0 \vec{v}_{\ell'}) \neq \emptyset$, donde resulta que $\alpha|_{\mathcal{K}}$ é periódica de período $t_0 e_2$, o que encerra a demonstração. $\square$

3.3 Conclusão da prova do Teorema 3.1

Esta seção é dedicada aos argumentos finais da demonstração do Teorema 3.1. A configuração abaixo será uma ferramenta importante nos nossos argumentos e sua unicidade é garantida pelo Teorema de Fine-Wilf.

Definição 3.8. *Seja $\beta \in X_\eta$ a única configuração 2-periódica de períodos $t_0 e_2$ e $t'_0 \vec{v}_{\ell'}$ (como na Afirmação 3.7) satisfazendo $\alpha|_{\mathcal{K}} = \beta|_{\mathcal{K}}$.*

Denote $\overleftarrow{\ell}_0 := \overleftarrow{\ell}_{\mathcal{S}}$ e defina indutivamente $\overleftarrow{\ell}_{i+1} := \overleftarrow{\ell}^{(+1)}_i$ para todo $i \geq 1$. Tendo em vista a Proposição 2.26, dado $d' \geq 1$, defina o conjunto

$$B_{d'} := \bigcup_{i=0}^{d'-1} \left\{ f_{\mathcal{S}}(\overleftarrow{\ell}_i) - l e_2 : 0 \leq l \leq |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| - 3 \right\},$$

onde $f_{\mathcal{S}}(\overleftarrow{\ell_i}) \in \mathbb{Z}^2$ denota o ponto final de $\ell_i \cap \mathcal{S}$ com relação a orientação de $\overleftarrow{\ell_i}$ (como introduzido no início do Capítulo 2). Defina

$$\mathcal{S}^* := \mathcal{S} \backslash \{ i_{\mathcal{S}}(\overleftarrow{\ell''}) : \overleftarrow{\ell''} \text{ é antiparalela a } \vec{\ell},\ \ell'' \cap \mathcal{S} \neq \emptyset \}.$$

Note que, para obter $\mathcal{S}^*$, de cada reta $\overleftarrow{\ell''}$ antiparalela a $\vec{\ell}$, com $\ell'' \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$, é removido de $\ell'' \cap \mathcal{S}$ o ponto mais baixo $i_{\mathcal{S}}(\overleftarrow{\ell''})$. Sendo $\mathcal{S}^*$ um subconjunto convexo próprio de $\mathcal{S}$ (o qual é η-gerador mbc), ocorre

$$P_\eta(\mathcal{S}) - P_\eta(\mathcal{S}^*) \leq \left\lceil \frac{1}{2} |\mathcal{S} \backslash \mathcal{S}^*| \right\rceil - 1 < |\mathcal{S} \backslash \mathcal{S}^*| - 1. \tag{3.3.1}$$

Segundo a Afirmação 3.7, $\alpha|_{\mathcal{K}}$ é periódica de períodos $t_0 e_2$ e $h' := t'_0 \vec{v}_{\ell'}$, onde

$$t_0 \leq \left\lceil \frac{1}{2} |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \right\rceil - 1 \leq |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| - 2 \tag{3.3.2}$$

e

$$t'_0 \leq |\vec{\ell'}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| - 2. \tag{3.3.3}$$

Denote por $z_0 \prec z_1 \prec \cdots \prec z_{m'}$ os pontos de $\mathcal{S} \backslash \mathcal{S}^*$, ordenados pela ordem lexicográfica, que estão entre os pontos inicial $z_0 := i_{\mathcal{S}}(\vec{\ell'}_{\mathcal{S}}) \in \vec{\ell'}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}$ e final $z_{m'} := f_{\mathcal{S}}(\vec{\ell'}_{\mathcal{S}}) \in \vec{\ell'}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}$. Para cada par de inteiros $0 \leq i < j \leq m'$, defina o vetor $(\phi_{ij}, \psi_{ij}) := z_j - z_i$, o qual, por construção, satisfaz $\phi_{ij} \geq 1$. Por conta de (3.3.3), é claro que existem $0 \leq i < j \leq m'$ para os quais $t'_0 \vec{v}_{\ell'} = z_j - z_i$. Defina então

$$d := \min \{ \phi_{ij} : 0 \leq i < j \leq m',\ \beta \text{ é periódica de período } z_j - z_i \}.$$

Retomando a escritura $\operatorname{diam}_\ell(\mathcal{S}) = (|\vec{\ell'}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| - 1)\mu + 1 + r$, onde $\mu \geq 1$ é a primeira coordenada de $\vec{v}_{\ell'}$ e $r \geq 0$, note que

$$\operatorname{diam}_\ell(\mathcal{S}) > (|\vec{\ell'}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| - 2)\mu + 1 + r \geq t'_0 \mu + 1,$$

donde segue que $d \leq t'_0 \mu \leq \operatorname{diam}_\ell(\mathcal{S}) - 2$. Em particular, claramente acontece $\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap B_d = \emptyset$.

Recordando que $\vec{\ell}_{\mathcal{K}} \cap \mathcal{K} = \{(0, i) \in \mathbb{Z}^2 : i \geq 0\}$ e que $\vec{\ell}_{\mathcal{S}} = \vec{\ell}^{(-1)} \in \mathcal{H}(\vec{\ell}^{(-1)})$, seja $a' \in \mathbb{Z}$ um inteiro tal que a $(\vec{\ell}, \mathcal{S}, p)$-semifaixa $\overleftarrow{F}(a')$ esteja contida em $\mathcal{K}$. Como $\alpha|_{\tilde{G}_\omega^{(\tau)}}$ é, por construção, verticalmente periódica e $\mathcal{K} \cap \vec{\ell}^{(-1)} = \emptyset$, seja $a \geq a'$ inteiro tal que a restrição de α ao conjunto $(\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cup \overleftarrow{F})(a)$ é verticalmente periódica. Note, no entanto, que, devido à maximalidade de $\mathcal{K}$, a restrição de α a $(\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cup \overleftarrow{F})(a)$ não é 2-periódica. Com isto, resulta que

$$\alpha|_{(\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cup \overleftarrow{F})(a)} \neq (T^{h'} \alpha)|_{(\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cup \overleftarrow{F})(a)},$$

embora tenhamos

$$\alpha|_{\overleftarrow{F}(a)} = (T^{h'} \alpha)|_{\overleftarrow{F}(a)}.$$

Afirmação 3.9. *A restrição de α ao conjunto $(\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cup \overleftarrow{F})(a)$ é verticalmente periódica de período te_2 para algum inteiro positivo $t \leq \lceil \frac{1}{2} |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \rceil - 1$.*

Prova. Inicialmente, suponha que

$$(T^{je_2}\alpha)|_{\mathcal{S}} \neq (T^{j'e_2+h'}\alpha)|_{\mathcal{S}} \quad \forall\ j, j' \geq a. \tag{3.3.4}$$

Note que, no entanto, como h' é um período de $\alpha|_{\mathcal{K}}$, acontece

$$(T^{je_2}\alpha)|_{\mathcal{S}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{S}}} = (T^{je_2+h'}\alpha)|_{\mathcal{S}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{S}}} \quad \forall\ j \geq a. \tag{3.3.5}$$

Para $A = \{(T^{je_2}\alpha)|_{\mathcal{S}} : j \geq a\}$, $B = \{(T^{je_2+h'}\alpha)|_{\mathcal{S}} : j \geq a\}$ e $B' = \{(T^{je_2+h'}\alpha)|_{\mathcal{S}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{S}}} : j \geq a\}$, de (3.3.4) e (3.3.5) segue que

$$|A| + |B| = |A \cup B| \leq \sum_{\gamma \in B'} |\{\gamma' \in L(\mathcal{S}, \eta) : \gamma'|_{\mathcal{S}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{S}}} = \gamma\}|.$$

A desigualdade $|B'| \leq |B|$ e a hipótese de $\mathcal{S}$ ser η-gerador mbc implicam que

$$\begin{aligned} |A| &\leq \left(\sum_{\gamma \in B'} |\{\gamma' \in L(\mathcal{S}, \eta) : \gamma'|_{\mathcal{S}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{S}}} = \gamma\}|\right) - |B'| = \sum_{\gamma \in B'} \Big(|\{\gamma' \in L(\mathcal{S}, \eta) : \gamma'|_{\mathcal{S}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{S}}} = \gamma\}| - 1\Big) \\ &\leq P_\eta(\mathcal{S}) - P_\eta(\mathcal{S}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{S}}) \leq \left\lceil \frac{1}{2} |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \right\rceil - 1. \end{aligned}$$

Portanto, como $|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \leq |\overleftarrow{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|$, introduzindo o alfabeto finito

$$\overleftarrow{L}_{\vec{\ell},a}\left(\mathcal{F}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{S}) \cup \{f_{\mathcal{S}}(\vec{\ell}_{\mathcal{S}})\}, \alpha\right),$$

a majoração $|A| \leq \lceil \frac{1}{2} |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \rceil - 1$ e o Teorema de Morse-Hedlund (ver Teorema [15]) asseguram que a restrição de α ao conjunto $(\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cup \overleftarrow{F})(a+p)$ e, portanto, a $(\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cup \overleftarrow{F})(a)$ é verticalmente periódica de período te_2 com $t \leq \lceil \frac{1}{2} |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| \rceil - 1$. Por fim, denotando por κe_2 o período vertical minimal de $\alpha|_{\overleftarrow{F}(a)} = (T^{h'}\alpha)|_{\overleftarrow{F}(a)}$, para concluir a demonstração, observe que basta mostrar (3.3.4) apenas para $a \leq j, j' < a + \kappa$. Sendo assim, suponha, por redução ao absurdo, que existem $a \leq j, j' < a + \kappa$ tais que

$$(T^{je_2}\alpha)|_{\mathcal{S}} = (T^{j'e_2+h'}\alpha)|_{\mathcal{S}}.$$

Se $j = j'$, como $(T^{je_2}\alpha)|_{\overleftarrow{F}(a)} = (T^{je_2+h'}\alpha)|_{\overleftarrow{F}(a)}$, da igualdade acima segue que

$$(T^{je_2}\alpha)|_{\overleftarrow{F}(a) \cup \mathcal{S}} = (T^{je_2+h'}\alpha)|_{\overleftarrow{F}(a) \cup \mathcal{S}}.$$

Logo, como $\mathcal{S}$ é um conjunto η-gerador, por indução, obtemos que $T^{je_2}\alpha$ e $T^{je_2+h'}\alpha$ coincidem em $(\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cup \overleftarrow{F})(a)$, o que contradiz a maximalidade de $\mathcal{K}$.

Se $j < j'$, como

$$(T^{je_2}\alpha)|_{\mathcal{S}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{S}}} = (T^{j'e_2+h'}\alpha)|_{\mathcal{S}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{S}}} = (T^{j'e_2}\alpha)|_{\mathcal{S}\backslash\vec{\ell}_{\mathcal{S}}},$$

a sequência $\xi = (\xi_i)_{i \geq a}$ definida por $\xi_i := (T^{ie_2}\alpha)|_{\mathcal{F}^{\vec{\ell},p}(\mathcal{S})}$ satisfaz

$$\xi_j \xi_{j+1} \ldots \xi_{j+p-1} = \xi_{j'} \xi_{j'+1} \ldots \xi_{j'+p-1}.$$

Sendo $\alpha|_{\mathcal{K}}$ verticalmente periódica de período $t_0 e_2$, é claro que ξ é uma sequência periódica de período $t_0 \leq |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|-2 < p$. Daí, para $i = j + t_0 m + s$, onde $0 \leq s < t_0$ e $m \geq 0$, ocorre

$$\xi_i = \xi_{j+t_0 m+s} = \xi_{j+s} = \xi_{j'+s} = \xi_{j'+t_0 m+s} = \xi_{i+j'-j}.$$

A igualdade acima significa que a sequência $(\xi_i)_{i \geq j}$ e, portanto, a sequência $(\xi_i)_{i \geq a}$ é periódica de período $j' - j < \kappa$, o que viola a minimalidade de κe_2.

O caso em que $j > j'$ é completamente análogo ao anterior, o que completa a demonstração. $\square$

Para cada inteiro $l \in \mathbb{Z}_+$, denote $\mathcal{S}_l := \mathcal{S} + (-l, 0)$. Sendo α aperiódica, como $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ é uma direção não-expansiva segundo $X_\alpha = \overline{Orb(\alpha)}$, a Proposição 2.21 permite concluir que a restrição de α a qualquer $(\vec{\ell}, \mathcal{S}_l, p)$-faixa $\overleftarrow{F}_l$ não é em particular verticalmente periódica. Sendo assim, definindo

$$\overline{d} := |\mathcal{S} \backslash \mathcal{S}^*| - d = \operatorname{diam}_\ell(\mathcal{S}) - d \geq 2,$$

para cada $0 \leq l \leq \overline{d} - 1$, seja $a_l \in \mathbb{Z}$ o menor inteiro tal que a restrição de α a

$$(\vec{\ell}_{\mathcal{S}_l} \cup \overleftarrow{F}_l)(a_l) = \bigcup_{i \geq a_l} (\mathcal{S} + (-l, i))$$

é verticalmente periódica. Note que a semifaixa acima existe porque podemos aplicar o Lema 2.18 sucessivas vezes e obter uma região no segundo quadrante onde α é verticalmente periódica (mas não 2-periódica). Ademais, é claro que, para cada $0 \leq l \leq \overline{d} - 1$, a definição de B_d assegura

$$B_d + (-l, i) \subset \mathcal{K} \quad \forall\, i \geq a.$$

Para cada $\mathcal{S}^*$-configuração $\gamma \in L(\mathcal{S}^*, \eta)$, denotamos por $N^*_{\mathcal{S}}(\gamma)$ o número de $\mathcal{S}$-configurações $\gamma' \in L(\mathcal{S}, \eta)$ tais que $\gamma'|_{\mathcal{S}^*} = \gamma$. Observe que $N^*_{\mathcal{S}}(\gamma) = 1$ significa que, para quaisquer $\mathcal{S}$-configurações $\gamma', \gamma'' \in L(\mathcal{S}, \eta)$, $\gamma'|_{\mathcal{S}^*} = \gamma = \gamma''|_{\mathcal{S}^*}$ implica que $\gamma' = \gamma''$.

Afirmação 3.10. *Para cada $0 \leq l \leq \overline{d} - 1$, supondo $a_l \in \mathbb{Z}$ definido como acima, então*

(i) $\left|\{\alpha|_{\mathcal{S}^*+(-l,a_l-1)} : 0 \leq l \leq \overline{d} - 1\}\right| = \overline{d}$,

(ii) para todo $\gamma \in \{\alpha|_{\mathcal{S}^*+(-l,a_l-1)} : 0 \leq l \leq \overline{d} - 1\}$, tem-se que $N^*_{\mathcal{S}}(\gamma) > 1$.

Prova. Com relação à primeira parte, suponha, por contradição, que há $0 \leq l < l' \leq \overline{d} - 1$ tais que

$$\alpha|_{\mathcal{S}^*+(-l,a_l-1)} = \alpha|_{\mathcal{S}^*+(-l',a_{l'}-1)}.$$

Seja $\vec{\wp}' \subset \mathbb{R}^2$ a reta paralela a $\vec{\ell}$ tal que $\mathcal{U}^* := \mathcal{S}^* \cap \mathcal{H}(\vec{\wp}')$ satisfaz $\mathcal{U}^* + (-l', 0) \subset \mathcal{H}(\vec{\ell}^{(-1)})$ e $(\mathcal{U}^* + (-l', 0)) \cap \vec{\ell}^{(-1)} \neq \emptyset$. Denotando, respectivamente, por $e_2 t_l$ e $e_2 t_{l'}$ os períodos de $\alpha|_{(\vec{\ell}_{\mathcal{S}_l} \cup \overleftarrow{F}_l)(a_l)}$ e $\alpha|_{(\vec{\ell}_{\mathcal{S}_{l'}} \cup \overleftarrow{F}_{l'})(a_{l'})}$, escolha $m \in \mathbb{N}$ tal que tanto $\mathcal{U}^* + (-l, a_l - 1) + m t_l e_2$ quanto

$\mathcal{U}^*+(-l',a_{l'}-1)+mt_{l'}e_2$ estejam contidos em $(\vec{\ell}_{\mathcal{S}}\cup\overleftarrow{F})(a)$. Tomando $J:=(-l,a_l-1)+mt_le_2$ e $J':=(-l',a_{l'}-1)+mt_{l'}e_2$, em particular, ocorre

$$\alpha|_{\mathcal{U}^*+J}=\alpha|_{\mathcal{U}^*+(-l,a_l-1)}=\alpha|_{\mathcal{U}^*+(-l',a_{l'}-1)}=\alpha|_{\mathcal{U}^*+J'}. \tag{3.3.6}$$

Recorde que da Proposição 2.26 temos $p-1=|\vec{\ell}_{\mathcal{S}}\cap\mathcal{S}|-2\geq 1$. Como $\mathcal{U}^*$ possui duas arestas antiparalelas verticais, das quais uma é $\mathrm{Conv}(\overleftarrow{\ell}_{\mathcal{S}}\cap\mathcal{S})$, observe que toda reta vertical que intersepta $\mathcal{U}^*$ o faz em pelo menos $p-1$ pontos. Considerando agora os conjuntos

$$\mathcal{F}_J:=\left(\mathcal{F}^{\vec{\ell},p-1}(\mathcal{U}^*)\cup\{f_{\mathcal{U}^*}(\vec{\ell}_{\mathcal{U}^*})\}\right)+J \quad e \quad \mathcal{F}_{J'}:=\left(\mathcal{F}^{\vec{\ell},p-1}(\mathcal{U}^*)\cup\{f_{\mathcal{U}^*}(\vec{\ell}_{\mathcal{U}^*})\}\right)+J',$$

defina as sequências $\xi=(\xi_r)_{r\geq 0}$ e $\xi'=(\xi'_r)_{r\geq 0}$ pondo $\xi_r:=(T^{re_2}\alpha)|_{\mathcal{F}_J}$ e $\xi'_r:=(T^{re_2}\alpha)|_{\mathcal{F}_{J'}}$ para todo $r\geq 0$. Note que, das Afirmações 3.7 e 3.9, segue que ξ e ξ' são periódicas de períodos $n,n'\leq\lceil\frac{1}{2}|\vec{\ell}_{\mathcal{S}}\cap\mathcal{S}|\rceil-1$. Assim, a igualdade em (3.3.6) nos diz que ξ e ξ' coincidem em pelo menos $|\vec{\ell}_{\mathcal{S}}\cap\mathcal{S}|-2$ entradas consecutivas e, portanto, como

$$n+n'-mdc(n,n')\leq|\vec{\ell}_{\mathcal{S}}\cap\mathcal{S}|-2,$$

o Teorema de Fine-Wilf implica que as sequências ξ e ξ' são iguais. Em particular, definindo $F^*:=\bigcup_{r\geq 0}(\mathcal{U}^*+re_2)$, temos que

$$\alpha|_{F^*+J}=\alpha|_{F^*+J'}.$$

Admitindo $d=\phi_{ij}$, a definição de d prediz que a configuração $\alpha|_{\mathcal{K}}$ é periódica de período $u:=(d,\psi_{ij})$. Dado $g'=g+J'\in(F^*+J')\cap\vec{\ell}^{(-1)}$, como $g'+e_2\in(F^*+J')\cap\vec{\ell}^{(-1)}$, da igualdade acima segue que

$$\alpha_{g'+e_2}=\alpha_{g+e_2+J'}=\alpha_{g+e_2+J}=\alpha_{g+e_2+J+u}.$$

Uma vez que $g\in F^*\cap\vec{\wp}'$ e que $\mathrm{diam}_\ell(\mathcal{U}^*)\geq d+1$, é fácil ver que $g+e_2+u\in F^*$, donde segue que $g+e_2+u+J\in(F^*+J)$. Logo, isto implica que

$$\alpha_{g+e_2+u+J}=\alpha_{g+e_2+u+J'}=\alpha_{g'+e_2+u}.$$

Temos então $\alpha_{g'+e_2}=\alpha_{g'+e_2+u}$. Portanto, a restrição de α ao conjunto

$$\left\{g'+e_2: g'\in(F^*+J')\cap\vec{\ell}^{(-1)}\right\}\cup\mathcal{K}$$

é periódica de períodos u e κe_2 para algum $\kappa\in\mathbb{N}$. Por fim, denotando $(v'_1,v'_2):=t'_0\vec{v}_{\ell'}$, como $d\geq 1$ e $v'_1\geq 1$, a escritura $(dv'_2-v'_1\psi_{ij})(\kappa e_2)+v'_1\kappa\, u=d\kappa(t'_0\vec{v}_{\ell'})$ permite construir conjunto que contém $\mathcal{K}$ estritamente e cuja restrição de α é periódica com períodos em $\ell\cap\mathbb{Z}^2$ e $\ell'\cap\mathbb{Z}^2$, o que viola a maximalidade de $\mathcal{K}$.

Com relação à segunda afirmação, como $\mathcal{S}^*+(-l,a_l-1)\subset(\vec{\ell}_{\mathcal{S}_l}\cup\overleftarrow{F}_l)(a_l)$, da minimalidade de a_l segue o resultado. $\square$

Sejam

$$z_{m'-d} \prec z_{m'-d+1} \prec \cdots \prec z_{m'}$$

os últimos $d+1$ pontos de $z_0, z_1, \ldots, z_{m'}$ (preservando a ordenação original). Para cada inteiro $0 \leq l \leq d-1$, defina o vetor

$$u_l := z_{m'} - z_{m'-d+l}.$$

Seja $\tilde{\mathcal{S}}$ uma translação de $\mathcal{S}$ satisfazendo $\vec{\ell'}_{\tilde{\mathcal{S}}} = \vec{\ell'}^{(-1)}_{\mathcal{K}}$ e $\tilde{\mathcal{S}} \backslash \vec{\ell'}_{\tilde{\mathcal{S}}} \subset \mathcal{K}$, e seja $\tilde{\mathcal{S}}^*$ a correspondente translação de $\mathcal{S}^*$. Uma vez que $z_{m'-d+l}$ e $z_{m'}$ pertencem ao subconjunto de $\mathcal{S} \backslash \mathcal{S}^*$ e que $\vec{\ell'}_{\mathcal{S}^*} \cap (\mathcal{S} \backslash \mathcal{S}^*) = \emptyset$, não é difícil se convencer que $\tilde{\mathcal{S}}^* + u_l \subset \mathcal{K}$ para todo $0 \leq l \leq d-1$ (mesmo quando $z_{m'-d+l} \in \vec{\ell'}^{(-1)}_{\mathcal{S}^*}$).

Afirmação 3.11. *Para cada $0 \leq l \leq d-1$, supondo u_l definido como acima, então*

(i) $\left|\{\alpha|_{\tilde{\mathcal{S}}^*+u_l} : 0 \leq l \leq d-1\}\right| = d,$

(ii) para todo $\gamma \in \{\alpha|_{\tilde{\mathcal{S}}^*+u_l} : 0 \leq l \leq d-1\}$, tem-se que $N^*_{\tilde{\mathcal{S}}}(\gamma) > 1$.

Prova. Com relação à primeira parte, suponha, por contradição, que há $0 \leq l < l' \leq d-1$ tais que

$$\alpha|_{\tilde{\mathcal{S}}^*+u_l} = \alpha|_{\tilde{\mathcal{S}}^*+u_{l'}}. \tag{3.3.7}$$

Como observado acima, temos que tanto $\tilde{\mathcal{S}}^*+u_l$ quanto $\tilde{\mathcal{S}}^*+u_{l'}$ estão contidos em $\mathcal{K}$. Levando em consideração que α e β coincidem em $\mathcal{K}$, de (3.3.7) e do fato de β ser verticalmente periódica de período $t_0 e_2$, com $t_0 \leq |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|-2$, segue que

$$\beta|_{\tilde{F}+u_l} = \beta|_{\tilde{F}+u_{l'}}, \tag{3.3.8}$$

onde $\tilde{F} := \bigcup_{i\in\mathbb{Z}}(\tilde{\mathcal{S}} + ie_2)$. Logo, como β é periódica de período (d, ψ_{ij}) para algum $0 \leq i < j \leq m'$ e $d \leq \operatorname{diam}_\ell(\mathcal{S}) - 2$, usando (3.3.8) é fácil argumentar que β é periódica de período

$$u_l - u_{l'} = z_{m'-d+l'} - z_{m'-d+l}.$$

Porém, pela construção, a primeira coordenada do vetor $u_l - u_{l'}$ é positiva e estritamente menor que d, o que contradiz a minimalidade de d.

Com relação à segunda afirmação, observe que a definição de $u_l = z_{m'} - z_{m'-d+l}$ e o fato de $z_{m'} = f_{\mathcal{S}}(\vec{\ell'}_{\mathcal{S}})$ garantem que $\tilde{\mathcal{S}} + u_l \not\subset \mathcal{K}$ para todo $0 \leq l \leq d-1$. Logo, se $N^*_{\tilde{\mathcal{S}}}(\gamma) = 1$ para algum $\gamma \in \{\alpha|_{\tilde{\mathcal{S}}^*+u_l} : 0 \leq l \leq d-1\}$, usando que $\tilde{\mathcal{S}}$ é η-gerador e que $\alpha|_{\mathcal{K}}$ é periódica de período $t_0'\vec{v}_{\ell'}$, então, para $g \in \vec{\ell'}^{(-1)}_{\mathcal{K}} \cap (\tilde{\mathcal{S}} + u_l)$, teríamos que a restrição de α ao conjunto $\mathcal{K} \cup \{g + t\vec{v}_{\ell'} : t \geq 0\}$ também seria periódica de período $t_0'\vec{v}_{\ell'}$. Note que essa conclusão só é possível porque $|\vec{\ell'}^{(-1)}_{\mathcal{K}} \cap (\tilde{\mathcal{S}} + u_l)| \geq |\vec{\ell'}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|-1$ mesmo quando $|\vec{\ell'}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| > |\overleftarrow{\ell'}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|$. Isto ocorre porque, segundo a Proposição 2.26, o paralelogramo de vértices

$$i_{\tilde{\mathcal{S}}}(\vec{\ell'}_{\tilde{\mathcal{S}}}), i_{\tilde{\mathcal{S}}}(\vec{\ell'}_{\tilde{\mathcal{S}}}) + e_2, f_{\tilde{\mathcal{S}}}(\vec{\ell'}_{\tilde{\mathcal{S}}}), f_{\tilde{\mathcal{S}}}(\vec{\ell'}_{\tilde{\mathcal{S}}}) + e_2$$

está contido em $\tilde{\mathcal{S}}$. Eventualmente, poderia ser necessário considerar uma translação $\hat{\mathcal{S}}$ de $\tilde{\mathcal{S}} + u_l$ de modo que $f_{\hat{\mathcal{S}}}(\vec{\ell}'_{\hat{\mathcal{S}}}) \in \vec{\ell}'^{(-1)}_{\mathcal{K}}$. Por fim, como

$$\alpha|_{\tilde{\mathcal{S}}^*+u_l} = (T^{t_0e_2}\alpha)|_{\tilde{\mathcal{S}}^*+u_l},$$

o fato de $\tilde{\mathcal{S}}$ ser um conjunto η-gerador aliado a $N^*_{\tilde{\mathcal{S}}}(\gamma) = 1$ garantiria então

$$\alpha|_{\{g+t\vec{v}_{\ell'}:\, t\geq 0\}} = (T^{t_0e_2}\alpha)|_{\{g+t\vec{v}_{\ell'}:\, t\geq 0\}},$$

o que violaria a maximalidade de $\mathcal{K}$. □

Enfim, para gerar uma contradição, é necessário provar que as $\mathcal{S}^*$-configurações presentes no item (i) da Afirmação 3.10 são diferentes das $\mathcal{S}^*$-configurações presentes no item (i) da Afirmação 3.11. Uma vez que as configurações do item (i) da Afirmação 3.11 são elementos de $L(\mathcal{S}^*, \beta)$, para tal é suficiente então provar o resultado abaixo.

Afirmação 3.12. *Para cada inteiro* $0 \leq s \leq \overline{d} - 1$*, tem-se que*

$$(T^{(-s,i)}\alpha)|_{\mathcal{S}^*} \notin L(\mathcal{S}^*, \beta) \quad \forall\ i \geq a.$$

Prova. Suponha, por contradição, que existem inteiros $0 \leq s \leq \overline{d} - 1$ e $i \geq a$ tais que

$$(T^{(-s,i)}\alpha)|_{\mathcal{S}^*} \in L(\mathcal{S}^*, \beta). \tag{3.3.9}$$

Recorde que β é periódica de períodos t_0e_2, com $t_0 \leq \lceil \frac{1}{2}|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|\rceil - 1 \leq |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| - 2$, e (d, ψ_{ij}) para algum par $0 \leq i < j \leq m'$. Assim sendo, a definição de $B_d \subset \mathcal{S}^*$ garante que

$$\forall\ \gamma', \gamma'' \in L(\mathcal{S}^*, \beta), \quad \gamma'|_{B_d} = \gamma''|_{B_d} \Longrightarrow \gamma' = \gamma''. \tag{3.3.10}$$

Claramente $(T^{(-s,i)}\alpha)|_{B_d} \in L(B_d, \beta)$. Uma vez que $h' = t'_0\vec{v}_{\ell'}$ é um período de $\alpha|_{\mathcal{K}}$, como $B_d + (-s, i) \subset \mathcal{K}$, ocorre $(T^{(-s,i)}\alpha)|_{B_d} = (T^{(-s,i)+mh'}\alpha)|_{B_d}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Para m suficientemente grande fixado, temos $B_d + (-s, i) + mh' \subset \mathcal{K}$, donde segue que $(T^{(-s,i)+mh'}\alpha)|_{\mathcal{S}^*} \in L(\mathcal{S}^*, \beta)$. Logo, do fato de $\alpha|_{\mathcal{K}} = \beta|_{\mathcal{K}}$, resulta de (3.3.9) e (3.3.10) que

$$(T^{(-s,i)}\alpha)|_{\mathcal{S}^*} = (T^{(-s,i)+mh'}\alpha)|_{\mathcal{S}^*}.$$

Assim, considerando $A := \vec{\ell}^{(-1)} \cap (\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cup \overleftarrow{F})(a)$, a igualdade acima implica, em particular, que as sequências $\alpha|_A$ e $(T^{mh'}\alpha)|_A$ coincidem em pelo menos $|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| - 2$ entradas consecutivas. Da Afirmação 3.9 segue que a sequência $\alpha|_A$ é periódica de período te_2 com $t \leq \lceil \frac{1}{2}|\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}|\rceil - 1$. Portanto, como

$$t + t_0 - mdc(t, t_0) \leq |\vec{\ell}_{\mathcal{S}} \cap \mathcal{S}| - 2,$$

do Teorema de Fine-Wilf resulta $\alpha|_A = (T^{mh'}\alpha)|_A$, o que contradiz a maximalidade de $\mathcal{K}$. □

Por fim, como $L(\mathcal{S}^*, \alpha) \subset L(\mathcal{S}^*, \eta)$, das Afirmações 3.10, 3.11 e 3.12 resulta que o número de $\mathcal{S}^*$-configurações $\gamma \in L(\mathcal{S}^*, \eta)$ distintas tais que $N^*_{\mathcal{S}}(\gamma) > 1$ é ao menos $\overline{d} + d = |\mathcal{S} \backslash \mathcal{S}^*|$, ou seja,

$$P_\eta(\mathcal{S}) - P_\eta(\mathcal{S}^*) \geq \overline{d} + d = |\mathcal{S} \backslash \mathcal{S}^*|,$$

o que contradiz (3.3.1) e, portanto, encerra a demonstração do Teorema 3.1. $\square$

A Proposição 2.12 e o Teorema 3.1 permitem derivar periodicidade a partir de hipótese de caráter assintótico. Mais precisamente, temos o resultado a seguir.

Teorema 3.13. *Dado $\eta \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$, suponha que $P_\eta(\mathcal{T}) \leq |\mathcal{T}|+|\mathcal{A}|-2$ para algum $\mathcal{T} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$. Se existirem $A \in SL_2(\mathbb{Z})$, com $A(e_1) \notin \mathcal{T} - \mathcal{T}$ ou $A(e_2) \notin \mathcal{T} - \mathcal{T}$, e $C' > 1$ tais que*

$$P_{\eta \circ A}(R_{\kappa,\tau}) \leq C'\kappa\tau + |\mathcal{A}|-1$$

para todo $\kappa, \tau \in \mathbb{N}$ suficientemente grandes, então η é periódica.

Prova. Para fixar ideias, suponha que $A(e_1) \notin \mathcal{T} - \mathcal{T}$, e seja $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ a reta orientada tal que $A(e_1) = \vec{v}_\ell$. Como existe conjunto η-gerador contido em $\mathcal{T}$, a Observação 1.36 e a hipótese de $A(e_1) \notin \mathcal{T} - \mathcal{T}$ permitem concluir que $\vec{\ell} \in \mathbb{G}_1$ é uma direção expansiva segundo X_η. Logo, se $\vec{\ell'} = \vec{\ell}_{e_1} \in \mathbb{G}_1$ denota a reta orientada tal que $\vec{v}_{\ell'} = e_1$, então, pela Proposição 1.34, temos que $\vec{\ell}_{e_1}$ é uma direção expansiva segundo $X_{\eta \circ A} = \overline{Orb(\eta \circ A)}$. Uma vez que $A(-e_1) \notin \mathcal{T} - \mathcal{T}$, é claro que $\overleftarrow{\ell}_{e_1}$ também é uma direção expansiva segundo $X_{\eta \circ A}$, donde decorre que $\ell_{e_1} \in \mathbb{G}_1$ é uma reta expansiva segundo $X_{\eta \circ A}$. Um caso particular da Proposição 2.12 afirma que há então conjunto quase-regular $\mathcal{U} \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}^{Vol}$ tal que

$$P_{\eta \circ A}(\mathcal{U}) \leq \frac{1}{2}|\mathcal{U}|+|\mathcal{A}|-1.$$

Portanto, o Teorema 3.1 implica que $\eta \circ A$ é periódica, donde, naturalmente, segue que η é periódica. $\square$

Referências

[1] E. Altman, B. Gaujal e A. Hordijk. “Balanced Sequences and Optimal Routing”. Em: *J. ACM* 47 (2000), pp. 752–775.

[2] P. Amoux e G. Rauzy. “Représentation géométrique de suites de complexité 2n+1”. Em: *Bull. Sot. Math. France* 119 (1991), pp. 199–215.

[3] J. Berstel. “Recent results on Sturmian words, in Developments in Language Theory II”. Em: *World Scientific Publishing, River Edge, NJ* (1996), pp. 13–24.

[4] M. Boyle e D. Lind. “Expansive subdynamics”. Em: *Trans. Amer. Math. Soc.* 349.1 (1997), pp. 55–102.

[5] J. Cassaigne. “On a new notion of complexity on infinite words”. Em: *Acta Univ. Sapientiae, Mathematica* 2 (2010), pp. 127–136.

[6] V. Cyr e B. Kra. “Complexity of short rectangles and periodicity”. Em: *European Journal of Combinatorics* 52 (2016), pp. 146–173.

[7] V. Cyr e B. Kra. “Nonexpansive $\mathbb{Z}^2$-Subdynamics and Nivat’s Conjecture”. Em: *Trans. Amer. Math. Soc.* 367 (2015), pp. 6487–6537.

[8] F. Durand e M. Rigo. “Multidimensional extension of the Morse-Hedlund theorem”. Em: *European J. Combin* 34 (2013), pp. 391–409.

[9] C. Epifanio, M. Koskas e F. Mignosi. “On a Conjecture on Bidimensional Words”. Em: *Theor. Comput. Sci.* 299 (2003), pp. 123–150.

[10] N. J. Fine e H. S. Wilf. “Uniqueness Theorems For Periodic Functions”. Em: *Proc. Amer. Math. Soc.* 16 (1965), pp. 109–114.

[11] T. Kamae e H. K. Dong. “A characterization of eventual periodicity”. Em: *Theor. Comp. Sci.* 581 (2015), pp. 1–8.

[12] J. Karhumäki. “Combinatorics on Words: A New Challenging Topic”. Em: *TUCS Technical Report* 645 (2004).

[13] J. Kari e M. Szabados. “An Algebraic Geometric Approach to Nivat’s Conjecture”. Em: *Lecture Notes in Computer Science* 9135 (2015), pp. 273–285.

[14] M. Morse e G. A. Hedlund. “Symbolic dynamics”. Em: *Amer. J. Math.* 60 (1938), pp. 815–866.

[15] M. Morse e G. A. Hedlund. “Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories”. Em: *Amer. J. Math.* 62 (1940), pp. 1–42.

[16] M. Nivat. *Invited talk at ICALP*. Bologna, 1997.

[17] S. T. R. Pinho e T. C. P. Lobão. “Rigorous Results for Aperiodic and Amolst Periodic Substitution Sequences”. Em: *Brazilian Journal of Physics* 30 (2000), pp. 772–777.

[18] A. Quas e L. Zamboni. “Periodicity and Local Complexity”. Em: *Theor. Comput. Sci.* 319 (2004), pp. 229–240.

[19] J. Sander e R. Tijdeman. “The Complexity Function on Lattices”. Em: *Theor. Comput. Sci.* 246 (2000), pp. 195–225.

[20] J. Sander e R. Tijdeman. “The Rectangle Complexity of Functions on Two-Dimensional Lattices”. Em: *Theor. Comp. Sci.* 270 (2002), pp. 857–863.