

**Universidade Estadual de Campinas**  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

**Propriedades Dinâmicas e Ergódicas de**  
*Shifts* **Multidimensionais**

Cleber Fernando Colle

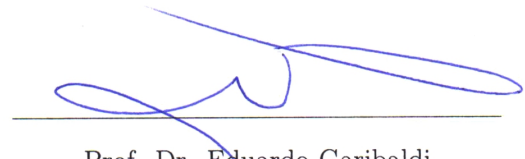
Orientador: Prof. Dr. Eduardo Garibaldi

Campinas-SP  
Agosto, 2011

# PROPRIEDADES DINÂMICAS E ERGÓDICAS DE *SHIFTS* MULTIDIMENSIONAIS

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Cleber Fernando Colle** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 15 de agosto de 2011



Prof. Dr. Eduardo Garibaldi  
Orientador

Banca Examinadora:

- 1 Prof. Dr. Eduardo Garibaldi (**IMECC - UNICAMP**)
- 2 Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino (**IMECC - UNICAMP**)
- 3 Prof. Dr. Ali Messaoudi (**IBILCE - UNESP**)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de **MESTRE em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR ANA REGINA MACHADO - CRB8/5467  
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E  
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

Colle, Cleber Fernando, 1985 -  
C685p Propriedades dinâmicas e ergódicas de shifts  
multidimensionais / Cleber Fernando Colle -  
Campinas, SP : [s.n.], 2011.

Orientador: Eduardo Garibaldi.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e  
Computação Científica.

1. Ladrilhamento (Matemática). 2. Teoria ergódica.  
3. Quase-cristais. I. Garibaldi, Eduardo, 1977.  
II. Universidade Estadual de Campinas, Instituto de  
Matemática, Estatística e Computação Científica.  
III. Título.

Título em inglês: Dynamic and ergodic properties of multidimensional shifts

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Tiling (Mathematics). 2. Ergodic theory.  
3. Quasi-crystals

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Eduardo Garibaldi [Orientador]

Prof. Dr. Paulo Regis Caron Ruffino

Prof. Dr. Ali Messaoudi

Data da defesa: 15-08-2011

Programa de Pós Graduação: Matemática

**Dissertação de Mestrado defendida em 15 de agosto de 2011 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



---

**Prof.(a). Dr(a). EDUARDO GARIBALDI**



---

**Prof. (a). Dr (a). PAULO REGIS CARON RUFFINO**



---

**Prof. (a). Dr (a). ALI MESSAOUDI**

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado condições de concluir essa etapa da minha vida, ao Prof. Dr. Eduardo Garibaldi pelos ensinamentos, pela compreensão, pela confiança que depositou em mim e pela orientação, que entre um seminário e outro deram origem a este trabalho.

Aos professores do IMECC pelos ensinamentos; aos pesquisadores Chazottes, Gambaudo e Ugalde pela atenção; ao Prof. Fernando Mucio Bando pelos ensinamentos; aos amigos pela amizade; ao João Tiago pelas críticas construtivas; à CAPES pelo apoio financeiro e em especial, à minha família pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho não teria sido possível, pela confiança, pelo carinho e pelo amor incondicional.

A quem eu dedico,

Dedico aos meus pais Arlindo Colle e Maria Iolanda  
Stefanski.

# Resumo

Focaremos sobre aspectos dinâmicos e ergódicos de *shifts* multidimensionais, atentando especialmente para suas relações com estados fundamentais e quase-cristais em reticulados. Por exemplo, em mecânica estatística, dado um potencial invariante por translação, seus estados fundamentais são medidas de probabilidade invariantes por translação suportadas no conjunto de suas configurações fundamentais, isto é, das configurações com energia específica mínima. Estados fundamentais são naturalmente associados com o bordo de certos polítopos convexos dimensionalmente finitos. Esse bordo se torna drasticamente diferente se a dimensão do modelo em questão passa de  $d = 1$  para  $d > 1$ , pois no caso multidimensional existe *shift* de tipo finito unicamente ergódico sem configurações periódicas.

# Abstract

We will focus on dynamic and ergodic aspects of multidimensional shifts, with particular care to their relations with ground states and quasicrystals in lattices. For example, in statistical mechanics, given a translation-invariant potential, its ground states are translation-invariant probability measures supported on the set of its ground configurations, i.e., of configurations with minimal specific energy. Ground states are naturally associated with the boundary of certain finite-dimensional convex polytopes. This boundary becomes drastically different if the dimension of the model in question changes from  $d = 1$  to  $d > 1$ , because in the multidimensional case there exists uniquely ergodic shift of finite type with no periodic configurations.



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Conceitos Iniciais</b>	<b>3</b>
1.1 Medidas Invariantes por Translação . . . . .	6
1.2 Entropia Topológica . . . . .	15
1.3 Entropia Métrica . . . . .	18
<b>2 Configurações Minimizantes</b>	<b>20</b>
2.1 Cristais e Quase-cristais . . . . .	20
2.2 Configuração Fundamental e Estado Fundamental . . . . .	22
<b>3 O Ponto de Vista Projetivo</b>	<b>29</b>
3.1 Cilindros e Regras de Kirchoff . . . . .	29
3.2 Limites Projetivos e Medidas . . . . .	31
3.3 Limites Indutivos e Potenciais . . . . .	36
<b>4 <i>Shifts</i> de Tipo Finito e Noções de Ladrilhamentos</b>	<b>38</b>
4.1 <i>Shifts</i> de Tipo Finito . . . . .	38
4.2 Noções de Ladrilhamentos . . . . .	45

A Prova do Teorema Ergódico de Birkhoff para $\mathbb{Z}^d$ -ações	49
Referências Bibliográficas	62

# Lista de Símbolos

$\alpha^\Delta$	Refinamento comum de $\alpha - \bar{m}$ , onde $\bar{m} \in \Delta$
$\mathcal{B}_{\Theta, \infty}$	Espaço vetorial dos potenciais com alcance finito
$\mathcal{B}_{\Theta, R}$	Espaço dos potenciais invariantes por translação com alcance menor que ou igual a $R > 0$
$\mathcal{B}(\Omega)$	$\sigma$ -álgebra de Borel
$\mathcal{C}(\Omega)$	Espaço das funções reais contínuas sobre $\Omega$
$\mathcal{E}(\Omega)$	Conjunto das medidas ergódicas
$\Lambda_n$	Cubo definido por $\mathbb{Z}^d \cap \prod_{i=1}^d [-n, n]$
$\lambda_n$	Cardinalidade do cubo $\Lambda_n$
$\mathcal{C}(\Omega)^*$	Espaço dos funcionais lineares contínuos sobre $\mathcal{C}(\Omega)$
$\mathcal{GC}(\Phi)$	Conjunto das configurações fundamentais de $\Phi$
$\mathcal{GS}_\Theta(\Phi)$	Conjunto dos estados fundamentais de $\Phi$
$\mathcal{B}_\Theta$	Espaços dos potenciais invariantes por translação absolutamente somáveis
$\mathcal{M}_\Theta(\Omega)$	Conjunto das medidas finitas invariantes por translação
$\mathcal{M}^1(\Omega)$	Conjunto das medidas de probabilidade
$\mathcal{M}(\Omega)$	Conjunto das medidas finitas
$\mathcal{O}(\omega)$	Órbita da configuração $\omega \in \Omega$
$\mathcal{P}_\Theta(\Omega)$	Conjunto das medidas de probabilidade invariantes por translação
$\mathcal{S}$	Alfabeto finito de símbolos
$\Theta$	Ação sobre o grupo aditivo $\mathbb{Z}^d$

$\Theta^{\bar{m}}$     Aplicação *shift* sobre  $\Omega$   
 $\Omega$     Espaço consistindo em todas as configurações  $\omega = (\omega_{\bar{n}})_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^d}$   
 $\mathbb{Z}^d$     Grupo aditivo \ Reticulado  $d$ -dimensional  
 $C_d^{+,1}(\Delta_n; \mathbb{R})$  Polítopo  
 $C_d^+(\Delta_n; \mathbb{R})$  Cone positivo em  $C_d(\Delta_n; \mathbb{R})$   
 $C_d(\Delta_n; \mathbb{R})$  Espaço vetorial das combinações lineares de cilindros em  $\mathcal{C}_n$   
 $C_{F, \bar{\omega}}$  Cilindro com  $F \subset \mathbb{Z}^d$  e  $\bar{\omega} \in \mathcal{S}^F$   
 $E(\mathcal{P}_\Theta(\Omega))$  Conjunto dos pontos extremais de  $\mathcal{P}_\Theta(\Omega)$   
 $h(\alpha, (X, \Theta))$  Entropia de  $(X, \Theta)$  com relação a cobertura aberta  $\alpha$  de  $X$   
 $H(\alpha, X)$  Entropia da cobertura aberta  $\alpha$  de  $X$   
 $h_\mu((X, \Theta))$  Entropia métrica da medida  $\mu \in \mathcal{P}_\Theta(X)$   
 $h_\mu(\alpha, (X, \Theta))$  Entropia de  $(X, \Theta)$  com relação a  $\mu$ -partição  $\alpha$  de  $X$   
 $H_\mu(\alpha, X)$  Entropia da  $\mu$ -partição  $\alpha$  de  $X$   
 $H_d(\Delta_n; \mathbb{R})$  Subespaço de  $C_d(\Delta_n; \mathbb{R})$  cujos coeficientes satisfazem as regras de Kirchoff  
 $h_{top}((X, \Theta))$  Entropia topológica de  $(X, \Theta)$

# Introdução

Dado um conjunto finito de símbolos  $\mathcal{S}$ , o espaço configuração de um modelo de *spins* sobre o reticulado  $\mathbb{Z}^d$  é o conjunto  $\mathcal{S}^{\mathbb{Z}^d}$ , consistindo em todas as configurações  $\omega = (\omega_{\bar{n}})_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^d}$ . *Shifts* de tipo finito (STF's), que resumidamente podem ser vistos como subconjuntos de  $\mathcal{S}^{\mathbb{Z}^d}$  definidos através de regras locais, em dinâmica simbólica são objetos fundamentais de estudo. Em tal caso, um invariante significativo é a entropia topológica, a qual, em poucos termos, mede o crescimento assintótico de restrições do *shift* de tipo finito (STF) em regiões finitas de  $\mathbb{Z}^d$ . Mesmo tendo sido estudado exaustivamente a partir de uma perspectiva dinâmica, STF's aparecem naturalmente em outras áreas. Por exemplo, em teoria da informação, STF's foram usados por Shannon como modelos para canais de comunicação discretos [21], para o qual a entropia descreve a capacidade do canal. Em física matemática, STF's são frequentemente chamados de modelos tipo caroço duro (*hard-core models*) e são usados para descrever uma variedade de sistemas físicos, onde o formalismo termodinâmico desempenha um papel importante no entendimento das propriedades ergódicas de tais sistemas [18].

Recentemente, a pré-publicação [5] evidencia importante diferença entre *shifts* unidimensionais e multidimensionais, com particular interesse na existência de STF's unicamente ergódicos sem configurações periódicas, o qual pode ser visto como um modelo para quase-cristal.

Neste trabalho, estudamos propriedades dinâmicas e ergódicas de STF's multidimensionais. Além disso, caracterizamos o conjunto das medidas finitas invariantes por translação através de limites projetivos. O trabalho está dividido em quatro capítulos, sendo que o primeiro capítulo é dedicado aos conceitos introdutórios e à fixação de notação.

No segundo capítulo, introduzimos rigorosamente as noções de cristal, quase-cristal, configuração fundamental e estado fundamental. Mostramos que, qualquer potencial invariante por

translação e absolutamente somável, o conjunto de suas configurações fundamentais é fechado e invariante por translação.

No terceiro capítulo, caracterizamos em dimensão arbitrária o cone das medidas finitas invariantes por translação através de limites projetivos. Mais precisamente, mostramos que o cone das medidas invariantes por translação é o limite projetivo do cone positivo de espaços vetoriais de dimensão finita apropriadamente construídos. Dessa maneira, descrevemos o espaço vetorial dos potenciais de alcance finito através do limite indutivo associado ao limite projetivo das medidas invariantes por translação.

O último capítulo é dedicado a STF's e a noções de ladrilhamentos. As propriedades de STF's no caso unidimensional são bem conhecidas e especialmente importantes em dinâmica simbólica [10]. No caso multidimensional, STF's são mais complexos e sua descrição ainda é precoce [5], [19]. Apresentamos aqui resultado mostrando que, em qualquer dimensão, STF's unicamente ergódicos completos tem entropia topológica nula. Por fim, definimos ladrilhamentos, enunciamos algumas de suas propriedades e mostramos como relacioná-los com *shifts* multidimensionais.

É necessário frisar que esse trabalho surgiu de um estudo aprofundado de parte substancial da pré-publicação “On The Geometry of Ground States and Quasicrystals in Lattice Systems” [4], de autoria de J. Chazottes, J. Gambaudo e E. Ugalde, os quais se mostraram extremamente atenciosos ao responderem algumas perguntas e ao enviarem a pré-publicação “On the Finite-dimensional Marginals of Shift-invariant Measures” [5].

# Capítulo 1

## Conceitos Iniciais

Neste capítulo, desenvolvemos conceitos preliminares. Sendo assim, alguns resultados não serão demonstrados. Por convenção, consideramos o conjunto  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ .

**Definição 1.1** Dizemos que um conjunto  $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$  é um reticulado  $d$ -dimensional se existe um conjunto linearmente independente de vetores,  $b_1, \dots, b_d$ , chamado base do reticulado, tal que

$$\Gamma = \mathbb{Z}b_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}b_d,$$

isto é,  $\Gamma$  consiste de todas as combinações lineares inteiras dos vetores da base.

Seja  $\mathbb{Z}^d$  o reticulado  $d$ -dimensional com pontos  $\bar{n} = (n_1, \dots, n_d)$ , onde os  $n_i$ 's são inteiros. Introduzimos em  $\mathbb{Z}^d$  a norma do máximo pondo  $\|\bar{n}\| = \max\{|n_i| : i = 1, \dots, d\}$  para todo  $\bar{n} \in \mathbb{Z}^d$ . Considerando um alfabeto finito  $\mathcal{S}$ , denotamos por  $\Omega$  o espaço produto  $\mathcal{S}^{\mathbb{Z}^d}$ , consistindo em todas as configurações  $\omega = (\omega_{\bar{n}})_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^d}$ . Chamamos  $\Omega$  de *espaço configuração*. O conjunto  $\mathcal{S}$  equipado com a topologia discreta, induzida pela métrica  $\rho : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \{0, 1\}$ , definida por  $\rho(x, y) = 1$  se  $x \neq y$  e por  $\rho(x, y) = 0$  se  $x = y$ , é compacto. Isto implica pelo Teorema de Tychonoff que é compacto o conjunto  $\Omega$  munido da topologia produto, denotada por  $\mathcal{T}_{prod}$ . Definimos a métrica  $d : \Omega \times \Omega \rightarrow [0, +\infty)$  por

$$d(\omega, \omega') := \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^d} 2^{-\|\bar{n}\|} \rho(\omega_{\bar{n}}, \omega'_{\bar{n}}).$$

Observamos que

$$\sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^d} 2^{-\|\bar{n}\|} \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^d}{2^n} < +\infty. \quad (1.1)$$

**Proposição 1.1** *A topologia induzida pela métrica  $d$  coincide com a topologia produto em  $\Omega$ , isto é,  $(\Omega, d)$  é um espaço métrico compacto.*

*Prova.* Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tomamos  $\Lambda_n = \{\bar{n} \in \mathbb{Z}^d : \|\bar{n}\| \leq n\}$ . Dado  $\epsilon > 0$ , de (1.1) segue que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda_n} 2^{-\|\bar{n}\|} < \epsilon \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Dada uma configuração  $\omega = (\omega_{\bar{n}})_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^d} \in \Omega$ , consideramos

$$A = \bigcap_{\bar{n} \in \Lambda_{n_0}} \pi_{\bar{n}}^{-1}(\{\omega_{\bar{n}}\}),$$

onde  $\pi_{\bar{n}} : \Omega \rightarrow \mathcal{S}$  denota a projeção canônica. Daí segue que  $A$  é um aberto básico da topologia produto e que  $\omega \in A \subset B(\omega, \epsilon)$ . Para mostrarmos a inclusão contrária, tomamos uma configuração  $\omega = (\omega_{\bar{n}})_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^d} \in \Omega$  e um aberto básico  $A = \bigcap_{j=1}^m \pi_{\bar{n}_j}^{-1}(A_{\bar{n}_j})$  da topologia produto contendo  $\omega$ , onde  $A_{\bar{n}_j} \subset \mathcal{S}$ . Tomando  $p = \max\{\|\bar{n}_j\| : j = 1, \dots, m\}$  e considerando  $0 < \epsilon < 2^{-p}$ , temos que  $\omega \in B(\omega, \epsilon) \subset A$ , pois se  $\omega' = (\omega'_{\bar{n}})_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^d} \in \Omega$  verifica que  $\rho(\omega_{\bar{n}_j}, \omega'_{\bar{n}_j}) \neq 0$  para algum  $j = 1, \dots, m$ , então  $\omega' \notin B(\omega, \epsilon)$ .  $\square$

Dado  $A \subset \Omega$  conexo,  $\pi_{\bar{n}}(A) \subset \mathcal{S}$  é conexo para cada  $\bar{n} \in \mathbb{Z}^d$ . Como  $\mathcal{S}$  está equipado com a topologia discreta, para cada  $\bar{n} \in \mathbb{Z}^d$  temos que  $\pi_{\bar{n}}(A)$  se resume a um elemento de  $\mathcal{S}$ . Daí segue que  $A$  contém um único ponto de  $\Omega$ , isto é,  $\Omega$  é totalmente desconexo. Além disso, todo ponto  $\omega \in \Omega$  é ponto de acumulação.

A  $\sigma$ -álgebra gerada pelos abertos da topologia produto é chamada  *$\sigma$ -álgebra de Borel* e denotada por  $\mathcal{B}(\Omega)$ . Tomando um conjunto finito  $F \subset \mathbb{Z}^d$  não-vazio, para cada configuração  $\omega = (\omega_{\bar{m}})_{\bar{m} \in \mathbb{Z}^d} \in \Omega$ , denotamos por  $\omega_F$  sua restrição ao subconjunto  $F$ , isto é,  $\omega_F = (\omega_{\bar{m}})_{\bar{m} \in F}$  é uma configuração em  $\mathcal{S}^F$ . Um *cilindro* é um subconjunto da forma

$$C_{F, \bar{\omega}} = \{\omega \in \Omega : \omega_F = \bar{\omega}\},$$



onde  $\bar{\omega}$  é um elemento de  $\mathcal{S}^F$  e  $F \subset \mathbb{Z}^d$  é um subconjunto finito não-vazio. É claro que cada cilindro  $C_{F,\bar{\omega}}$  é um subconjunto aberto e fechado de  $\Omega$ . Além disso, a  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}(\Omega)$  coincide com a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos cilindros.

Seja  $\mathcal{C}(\Omega)$  o espaço de Banach das funções reais contínuas sobre  $\Omega$ , munido da norma do supremo. Denotamos por  $\mathcal{C}(\Omega)^*$  o espaço dos funcionais lineares contínuos sobre  $\mathcal{C}(\Omega)$ , o qual, quando equipado com a topologia fraca\*, é um espaço topológico metrizável, ver [3] ou [17].

**Definição 1.2** Dizemos que uma seqüência  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $\mathcal{C}(\Omega)^*$  converge fracamente\* para um funcional linear  $L \in \mathcal{C}(\Omega)^*$  se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(\phi) = L(\phi) \quad \text{para todo } \phi \in \mathcal{C}(\Omega).$$

Denotamos por  $\mathcal{M}(\Omega)$  o conjunto das medidas finitas sobre  $\mathcal{B}(\Omega)$ , e por  $\mathcal{M}^1(\Omega)$  o conjunto das medidas de probabilidade sobre  $\mathcal{B}(\Omega)$ , o qual é um subconjunto convexo de  $\mathcal{M}(\Omega)$ . Pelo Teorema da Representação de Riesz, podemos identificar o conjunto  $\mathcal{M}(\Omega)$  com o cone convexo dos funcionais lineares positivos em  $\mathcal{C}(\Omega)^*$  e, assim, introduzir uma topologia em  $\mathcal{M}(\Omega)$  usando a topologia fraca\* induzida. Mais precisamente, para uma medida  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ , um conjunto finito  $F = \{\phi_1, \dots, \phi_N\} \subset \mathcal{C}(\Omega)$  e  $\epsilon > 0$ , definimos

$$V(\mu, F, \epsilon) := \left\{ \nu \in \mathcal{M}(\Omega) : \left| \int \phi_j d\nu - \int \phi_j d\mu \right| < \epsilon \text{ para todo } \phi_j \in F \right\}.$$

A topologia fraca\* em  $\mathcal{M}(\Omega)$  pode ser definida estipulando que os conjuntos  $V(\mu, F, \epsilon)$  constituem uma base de vizinhanças de  $\mu$ . Vale lembrar que se  $X$  é um espaço topológico compacto metrizável, o conjunto  $\mathcal{M}^1(X)$  munido da topologia fraca\* também é um espaço topológico compacto metrizável, ver [1] para mais detalhes.

**Proposição 1.2** Uma seqüência  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $\mathcal{M}^1(\Omega)$  converge para uma medida  $\mu \in \mathcal{M}^1(\Omega)$  na topologia fraca\* se, e somente se,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi d\mu_n = \int \phi d\mu \quad \text{para todo } \phi \in \mathcal{C}(\Omega). \quad (1.2)$$

*Prova.* Suponhamos válida (1.2), consideramos  $F = \{\phi_1, \dots, \phi_N\} \subset \mathcal{C}(\Omega)$  e  $\epsilon > 0$ . Para cada  $1 \leq j \leq N$ , existe  $n_j \in \mathbb{N}$  tal que  $|\int \phi_j d\mu_n - \int \phi_j d\mu| < \epsilon$  para todo  $n \geq n_j$ . Tomamos

$n_0 = \max\{n_1, \dots, n_N\}$ . Daí segue que

$$\mu_n \in V(\mu, F, \epsilon) \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Reciprocamente, suponhamos que a sequência  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para uma medida  $\mu \in \mathcal{M}^1(\Omega)$  na topologia fraca\*. Dado  $\epsilon > 0$ , tomamos o conjunto  $F = \{\phi\}$ . Então existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\mu_n \in V(\mu, F, \epsilon)$  para todo  $n \geq n_0$ , donde segue que  $|\int \phi d\mu_n - \int \phi d\mu| < \epsilon$  para todo  $n \geq n_0$ .  $\square$

## 1.1 Medidas Invariantes por Translação

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , consideramos o cubo  $\Lambda_n = \mathbb{Z}^d \cap \prod_{i=1}^d [-n, n]$  e denotamos por  $\lambda_n = |\Lambda_n|$  a cardinalidade de  $\Lambda_n$ . Sempre que não for especificado,  $\Lambda_n$  denotará o cubo acima. Mais geralmente, temos a seguinte noção.

**Definição 1.3** *Um subconjunto finito  $\Delta$  em  $\mathbb{Z}^d$  é um cubo se existem  $\bar{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$  e um inteiro positivo  $\ell$  tal que  $\Delta = \mathbb{Z}^d \cap \prod_{i=1}^d [n_i - \ell, n_i + \ell]$ . Quando  $\bar{n} = 0$ , dizemos que o cubo está centrado em zero. O inteiro positivo  $\ell$  é chamado o tamanho do cubo.*

O grupo  $\mathbb{Z}^d$  opera continuamente sobre  $\Omega$  pela ação  $\Theta = (\Theta^{\bar{m}} : \bar{m} \in \mathbb{Z}^d)$ , onde  $\Theta^{\bar{m}} : \Omega \rightarrow \Omega$  é a aplicação *shift* sobre  $\Omega$ , isto é,  $\Theta^{\bar{m}}(\omega) = \omega'$  com  $\omega'_n = \omega_{\bar{n} + \bar{m}}$  para todo  $\bar{n} \in \mathbb{Z}^d$ . Por conveniência, escrevemos  $\omega' = \omega + \bar{m}$ . Claramente, para cada  $\bar{m} \in \mathbb{Z}^d$ , a aplicação  $\Theta^{\bar{m}}$  é um homeomorfismo. Dizemos que o par  $(\Omega, \Theta)$  é um *shift* completo. Para cada configuração  $\omega \in \Omega$ , definimos sua *órbita* por  $\mathcal{O}(\omega) := \{\omega + \bar{m} : \bar{m} \in \mathbb{Z}^d\}$ .

**Definição 1.4** *Uma medida  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$  é dita ser invariante por translação se, para todo  $B \in \mathcal{B}(\Omega)$  e qualquer  $\bar{m} \in \mathbb{Z}^d$ , temos*

$$\mu(B + \bar{m}) = \mu(B)$$

ou, equivalentemente [13], se, para todo  $f \in \mathcal{C}(\Omega)$  e qualquer  $\bar{m} \in \mathbb{Z}^d$ , verificamos

$$\int f \circ \Theta^{\bar{m}} d\mu = \int f d\mu.$$

Denotamos por  $\mathcal{M}_\Theta(\Omega)$  o conjunto das medidas finitas invariantes por translação e por  $\mathcal{P}_\Theta(\Omega)$  o conjunto das medidas de probabilidade invariantes por translação.

Para exibirmos exemplos de medidas invariantes por translação, observamos que a coleção  $\mathcal{A}$  formada pelo conjunto vazio e todas as uniões finitas de cilindros em

$$\mathcal{C} = \{C_{\Lambda_n, \omega} : n \in \mathbb{N} \text{ e } \omega \in \mathcal{S}^{\Lambda_n}\}$$

define uma álgebra em  $\Omega$ .

**Exemplo 1.1 (Medida de Bernoulli)** Para cada  $s \in \mathcal{S}$ , associamos uma probabilidade de ocorrência  $p(s) \geq 0$  tal que  $\sum_{s \in \mathcal{S}} p(s) = 1$ . Para cada  $F \subset \mathbb{Z}^d$  finito e qualquer configuração  $\omega = (\omega_{\bar{m}})_{\bar{m} \in F} \in \mathcal{S}^F$ , consideramos

$$\mu(C_{F, \omega}) = \prod_{\bar{m} \in F} p(\omega_{\bar{m}}).$$

Definimos a função  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$  pondo  $\mu(A) := \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$ , quando  $A = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$  com  $A_k \in \mathcal{C}$  e  $n \in \mathbb{N}$ . A função  $\mu$  está bem definida e claramente define uma medida em  $\mathcal{A}$ . Note que, para  $\omega = (\omega_{\bar{m}})_{\bar{m} \in \Lambda_n} \in \mathcal{S}^{\Lambda_n}$  e  $\bar{n} \in \mathbb{Z}^d$ , vale a igualdade  $C_{\Lambda_n, \omega} + \bar{n} = C_{\Lambda_n - \bar{n}, \omega'}$ , onde  $\omega' \in \mathcal{S}^{\Lambda_n - \bar{n}}$  é tal que  $\omega'_{\bar{m}} = \omega_{\bar{m} + \bar{n}}$  para todo  $\bar{m} \in \Lambda_n - \bar{n}$ . Daí segue que

$$\mu(C_{\Lambda_n, \omega}) = \prod_{\bar{m} \in \Lambda_n} p(\omega_{\bar{m}}) = \prod_{\bar{m} \in \Lambda_n - \bar{n}} p(\omega'_{\bar{m}}) = \mu(C_{\Lambda_n - \bar{n}, \omega'}) = \mu(C_{\Lambda_n, \omega} + \bar{n}).$$

Seja  $\mu^* \in \mathcal{M}(\Omega)$  a extensão da medida  $\mu$ . O Teorema de Extensão de Kolmogorov e a igualdade acima implicam que  $\mu^*$  é uma medida invariante por translação.

**Exemplo 1.2 (Medida de Markov)** Tomamos  $\mathcal{S} = \{1, \dots, k\}$  e  $d = 1$ . Dada  $P = (P_{ij})$  uma matriz de ordem  $k$  com  $P_{ij} \geq 0$  tal que  $\sum_{j=1}^k P_{ij} = 1$  para todo  $i = 1, \dots, k$ , considere vetor  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k)$  com  $\pi_j \geq 0$  tal que  $\pi \cdot P = \pi$ . Para cada  $F = \{m, m+1, \dots, m+n\}$  em  $\mathbb{Z}$  e qualquer  $x = (x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) \in \mathcal{S}^F$ , consideramos

$$\mu(C_{F, x}) = \pi_{x_m} \prod_{j=1}^n P_{x_{m+j-1}, x_{m+j}}.$$

Como no exemplo anterior, definimos a medida  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$  pondo  $\mu(A) := \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$ , quando  $A = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$  com  $A_k \in \mathcal{C}$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Como a medida de cada cilindro  $C_{\Lambda_n, \omega}$  depende somente da configuração  $\omega$  e não do cubo  $\Lambda_n$ , para cada  $m \in \mathbb{Z}$ , temos que  $\mu(C_{\Lambda_n, \omega} + m) = \mu(C_{\Lambda_n, \omega})$ . Seja  $\mu^* \in \mathcal{M}(\Omega)$  a extensão da medida  $\mu$ . Pelo Teorema de Extensão de Kolmogorov, concluímos que  $\mu^*$  é uma medida invariante por translação.

A partir da ordem indicada na Figura 1.1, é possível fornecer um exemplo de medida de Markov quando a dimensão do reticulado em questão é igual a dois.

**Exemplo 1.3** Consideremos  $\mathbb{Z}^2$  munido com a ordem detalhada na Figura 1.1, bem como a matriz  $P$  e o vetor  $\pi$  definidos como no exemplo anterior. Para cada conjunto finito  $F \subset \mathbb{Z}^2$  não-vazio e qualquer configuração  $x = (x_{\bar{m}})_{\bar{m} \in F} \in \mathcal{S}^F$ , tomamos

$$\mu(C_{F,x}) = \pi_{x_{\eta_0}} \prod_{j=1}^{|F|-1} P_{x_{\eta_{j-1}}, x_{\eta_j}},$$

onde  $\eta_0$  é o menor elemento de  $F$ ,  $\eta_1$  o menor elemento de  $F \setminus \{\eta_0\}$  e indutivamente  $\eta_n$  o menor elemento de  $F \setminus \{\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}\}$ . Como de costume, definimos a medida  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$  pondo  $\mu(A) := \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$ , quando  $A = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$  com  $A_k \in \mathcal{C}$  e  $n \in \mathbb{N}$ .

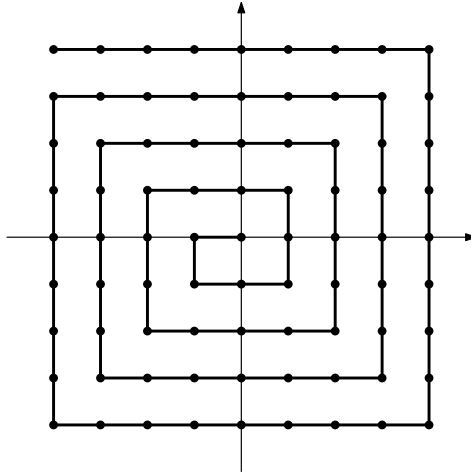


Figura 1.1: Ordem de  $\mathbb{Z}^2$  com o ponto  $(0,0)$  sendo o maior elemento

Além destes exemplos, toda configuração periódica, ver seção 2.1, está naturalmente associada a uma probabilidade invariante por translação, dada pela expressão (2.1).

Verificar que uma medida é invariante por translação pode não ser uma tarefa simples. No Capítulo 3, caracterizamos o conjunto das medidas invariantes por translação através do limite projetivo de espaços vetoriais de dimensão finita construídos usando as regras de Kirchoff. Esta nova abordagem fornece um ponto de vista geométrico para tal problema, ver Teorema 3.1.

**Definição 1.5** Um conjunto  $B \in \mathcal{B}(\Omega)$  é dito ser invariante por translação se  $B + \bar{m} = B$  para todo  $\bar{m} \in \mathbb{Z}^d$ .

Observemos que se  $X \subset \Omega$  é um subconjunto invariante por translação, então o fecho de  $X$  também é um conjunto invariante por translação, pois, para qualquer conjunto fechado  $A$  em  $\Omega$  contendo  $X$  e para todo  $\bar{m} \in \mathbb{Z}^d$ , temos que  $A + \bar{m}$  é fechado e contém  $X$ .

**Lema 1.1 (Krylov - Bogoulioubov)** Seja  $X \subset \Omega$  um subconjunto fechado e invariante por translação. Então  $\mathcal{P}_\Theta(X)$  é não-vazio.

*Prova.* Seja  $\nu \in \mathcal{M}^1(X)$  uma medida de probabilidade. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definimos a medida  $\mu_n := \frac{1}{\lambda_n} \sum_{\bar{n} \in \Lambda_n} (\Theta^{\bar{n}})_* \nu \in \mathcal{M}^1(\Omega)$ , onde  $(\Theta^{\bar{n}})_* \nu(A) = \nu(A + \bar{n})$  para todo  $A \in \mathcal{B}(X)$ . Sabemos que  $\mathcal{M}^1(X)$  é um espaço topológico compacto metrizável na topologia fraca\*, donde segue que a sequência  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admite uma subsequência  $(\mu_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$  que converge na topologia fraca\*. Logo, existe uma medida  $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$  tal que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int f d\mu_{n_i} = \int f d\mu \text{ para todo } f \in \mathcal{C}(X).$$

Fixados  $f \in \mathcal{C}(X)$  e  $\bar{m} \in \mathbb{Z}^d$ , obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int f d\mu - \int f \circ \Theta^{-\bar{m}} d\mu \right| &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \int f d\mu_{n_i} - \int f \circ \Theta^{-\bar{m}} d\mu_{n_i} \right| \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\lambda_{n_i}} \sum_{\bar{n} \in \Lambda_{n_i}} \int f d(\Theta^{\bar{n}})_* \nu - \frac{1}{\lambda_{n_i}} \sum_{\bar{n} \in \Lambda_{n_i} + \bar{m}} \int f d(\Theta^{\bar{n}})_* \nu \right| \\ &\leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_{n_i}} \sum_{\bar{n} \in \Lambda_{n_i} \Delta (\Lambda_{n_i} + \bar{m})} \int |f| d(\Theta^{\bar{n}})_* \nu \\ &\leq \|f\|_\infty \cdot \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|\Lambda_{n_i} \Delta (\Lambda_{n_i} + \bar{m})|}{\lambda_{n_i}} = 0, \end{aligned}$$

já que

$$\frac{1}{\lambda_{n_i}} |\Lambda_{n_i} \Delta (\Lambda_{n_i} + \bar{m})| \leq 2 \cdot \frac{(2n_i + 1)^d - (2n_i - \|\bar{m}\|)^d}{(2n_i + 1)^d} \text{ para todo } n_i > \|\bar{m}\|.$$

Como  $f \in \mathcal{C}(X)$  e  $\bar{m} \in \mathbb{Z}^d$  são arbitrários, concluímos que  $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$  é uma medida invariante por translação.  $\square$

Tanto o lema anterior quanto o próximo são resultados clássicos em Teoria Ergódica. Para conveniência do leitor, suas demonstrações aqui foram incluídas.

**Lema 1.2** *Seja  $X \subset \Omega$  um subconjunto fechado e invariante por translação. Então  $\mathcal{P}_\Theta(X)$  é um subconjunto compacto e convexo de  $\mathcal{M}^1(X)$ .*

*Prova.* Como  $\mathcal{M}^1(X)$  munido da topologia fraca\* é compacto e metrizável, é suficiente mostrarmos que  $\mathcal{P}_\Theta(X)$  é um subconjunto fechado em  $\mathcal{M}^1(X)$ . Dada uma medida  $\mu \in \overline{\mathcal{P}_\Theta(X)}$ , existe uma sequência  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $\mathcal{P}_\Theta(X)$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu \text{ para todo } f \in \mathcal{C}(X).$$

Fixemos  $f \in \mathcal{C}(X)$  e  $\bar{m} \in \mathbb{Z}^d$ . Então

$$\int f \circ \Theta^{\bar{m}} d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f \circ \Theta^{\bar{m}} d\mu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu.$$

Daí segue que  $\mu \in \mathcal{P}_\Theta(X)$ . Claramente  $\mathcal{P}_\Theta(X)$  é um subconjunto convexo em  $\mathcal{M}^1(\Omega)$ .  $\square$

**Definição 1.6** *Uma medida de probabilidade  $\mu \in \mathcal{P}_\Theta(\Omega)$  é dita ser ergódica se, para qualquer  $B \in \mathcal{B}(\Omega)$  invariante por translação, temos que ou  $\mu(B) = 0$  ou  $\mu(B) = 1$ .*

Denotamos por  $\mathcal{E}(\Omega)$  o subconjunto das medidas de probabilidade invariantes por translação que são ergódicas.

**Definição 1.7** *Um ponto  $\mu$  em um subespaço compacto e convexo  $D$  de um espaço vetorial  $E$  é extremal se, para cada par de pontos  $\mu_1$  e  $\mu_2$  em  $D$  e qualquer número real  $\lambda \in (0, 1)$  tais que  $\mu = \lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2$ , temos que  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ .*

**Definição 1.8** *Seja  $\mu \in \mathcal{P}_\Theta(\Omega)$ . Dizemos que uma função  $\mathcal{B}(\Omega)$ -mensurável  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é  $\Theta$ -invariante mod  $\mu$  se, para todo  $\bar{m} \in \mathbb{Z}^d$ ,  $f(\omega + \bar{m}) = f(\omega)$  em  $\mu$ -q.t.p.  $\omega \in \Omega$ . Escrevemos*

$$\mathcal{I}_\mu(\Theta) = \{A \in \mathcal{B}(\Omega) : \mu((A - \bar{m}) \Delta A) = 0 \text{ para todo } \bar{m} \in \mathbb{Z}^d\}.$$

**Teorema 1.1 (Teorema Ergódico de Birkhoff)** Dadas uma medida  $\mu \in \mathcal{P}_\Theta(\Omega)$  e uma função  $f \in L_1(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$ , o limite

$$\bar{f}(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{\bar{n} \in \Lambda_n} f(\omega + \bar{n}) \quad (1.3)$$

existe em  $\mu$ -q.t.p.  $\omega \in \Omega$ . Além disso, a função  $\bar{f}$  é  $\Theta$ -invariante mod  $\mu$  e

$$\int_A \bar{f} d\mu = \int_A f d\mu \quad \text{para todo } A \in \mathcal{I}_\mu(\Theta). \quad (1.4)$$

O Teorema Ergódico de Birkhoff apresentado acima é uma generalização da formulação clássica, a qual pode ser encontrada, por exemplo, em [12]. Tendo em vista a importância do Teorema Ergódico de Birkhoff, uma prova do mesmo encontra-se no apêndice.

Dada uma medida  $\mu \in \mathcal{P}_\Theta(\Omega)$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  e  $f \in L_1(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$ , chamamos a função  $A_n f := \frac{1}{\lambda_n} \sum_{\bar{m} \in \Lambda_n} f \circ \Theta^{\bar{m}}$  de *n-ésima soma de Birkhoff de f*.

**Proposição 1.3** *Sejam  $\mu \in \mathcal{P}_\Theta(\Omega)$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $\Theta$ -invariante mod  $\mu$ . Se  $\mu$  é uma medida ergódica, então  $f$  é constante em  $\mu$ -q.t.p.*

*Prova.* Seja  $A \in \mathcal{B}(\Omega)$  um conjunto com  $\mu(A) = 0$  tal que

$$f(\omega + \bar{m}) = f(\omega) \text{ para todo } \omega \in \Omega \setminus A, \bar{m} \in \mathbb{Z}^d.$$

Para cada  $r \in \mathbb{R}$ , definimos  $B_r := \{\omega \in \Omega \setminus A : f(\omega) > r\} \in \mathcal{B}(\Omega)$ , o qual é invariante por translação. Existem  $r_0, r'_0 \in \mathbb{R}$  com  $r'_0 > r_0$  tais que  $\mu(B_{r'_0}) = 0$  e  $\mu(B_{r_0}) = 1$ . Tomando  $a = \inf\{r \in \mathbb{R} : \mu(B_r) = 0\} \in \mathbb{R}$ , temos que

$$\mu(f^{-1}([a, +\infty)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu\left(B_{a - \frac{1}{n}}\right) = 1 \text{ e } \mu(B_a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu\left(B_{a + \frac{1}{n}}\right) = 0.$$

Daí segue que  $f(\omega) = a$  em  $\mu$ -q.t.p.  $\omega \in \Omega$ . □

**Proposição 1.4** *Sejam  $\mu \in \mathcal{P}_\Theta(\Omega)$  uma medida ergódica e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $\mathcal{B}(\Omega)$ -mensurável tal que  $f \in L_1(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$ . Então  $\bar{f}(\omega) = \int f d\mu$  em  $\mu$ -q.t.p.  $\omega \in \Omega$ .*

*Prova.* Sabemos que  $\bar{f}$  é  $\Theta$ -invariante mod  $\mu$  pelo Teorema Ergódico de Birkhoff. Então pela proposição anterior temos que  $\bar{f}$  é constante em  $\mu$ -q.t.p. Daí segue que

$$\int f d\mu = \int \bar{f} d\mu = \bar{f}(\omega) \text{ em } \mu\text{-q.t.p. } \omega \in \Omega.$$

□

Consequentemente, se  $\mu \in \mathcal{P}_\Theta(\Omega)$  é uma medida ergódica e se  $\nu \in \mathcal{P}_\Theta(\Omega)$  é uma medida de probabilidade tal que  $\nu \ll \mu$ , então  $\mu = \nu$ . Com efeito, para cada  $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ , o fato que  $\bar{\chi}_A(\omega) = \mu(A)$  em  $\mu$ -q.t.p. implica que  $\bar{\chi}_A(\omega) = \mu(A)$  em  $\nu$ -q.t.p. O Teorema Ergódico de Birkhoff, por outro lado, afirma que

$$\int \bar{\chi}_A d\nu = \nu(A),$$

donde concluímos que  $\mu(A) = \int \bar{\chi}_A d\nu = \nu(A)$  para todo  $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ .

**Proposição 1.5** Denotando por  $E(\mathcal{P}_\Theta(\Omega))$  o conjunto das medidas extremais de  $\mathcal{P}_\Theta(\Omega)$ , temos que  $E(\mathcal{P}_\Theta(\Omega)) = \mathcal{E}(\Omega)$ .

*Prova.* Dada uma medida  $\mu \in E(\mathcal{P}_\Theta(\Omega))$ , suponhamos por absurdo que  $\mu \notin \mathcal{E}(\Omega)$ , isto é, que existe um conjunto  $A \in \mathcal{B}(\Omega)$  invariante por translação tal que  $0 < \mu(A) < 1$ . Definimos as medidas

$$\mu_A(B) := \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)} \text{ para todo } B \in \mathcal{B}(\Omega)$$

e

$$\mu_{\Omega \setminus A}(B) := \frac{\mu(B \cap (\Omega \setminus A))}{\mu(\Omega \setminus A)} \text{ para todo } B \in \mathcal{B}(\Omega).$$

As medidas de probabilidade  $\mu_A$  e  $\mu_{\Omega \setminus A}$  são distintas, invariantes por translação e verificam que  $\mu = \mu(A)\mu_A + (1 - \mu(A))\mu_{\Omega \setminus A}$ , o que é um absurdo. Daí segue que  $\mu \in \mathcal{E}(\Omega)$ .

Dada uma medida  $\mu \in \mathcal{E}(\Omega)$ , suponhamos que existem medidas  $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}_\Theta(\Omega)$  e  $\lambda \in (0, 1)$  tais que  $\mu = \lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2$ . Daí segue que  $\mu_1 \ll \mu$  e  $\mu_2 \ll \mu$ , o que implica pela observação anterior que

$$\mu_1 = \mu = \mu_2.$$

Então  $\mu \in E(\mathcal{P}_\Theta(\Omega))$  e, portanto, provamos que  $E(\mathcal{P}_\Theta(\Omega)) = \mathcal{E}(\Omega)$ .

□



**Definição 1.9** O suporte de uma medida  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$  denotado por  $\text{supp}(\mu)$  é definido por

$$\text{supp}(\mu) := \{\omega \in \Omega : \mu(U) > 0 \text{ sempre que } \omega \in U, U \in \mathcal{T}_{\text{prod}}\}.$$

Observemos que o suporte de uma medida  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$  é fechado. Isto porque se  $\omega \in \overline{\text{supp}(\mu)}$ , então todo conjunto  $U \in \mathcal{T}_{\text{prod}}$  que contém  $\omega$  também contém pontos de  $\text{supp}(\mu)$ , o que implica que  $\mu(U) > 0$ . Daí segue que  $\overline{\text{supp}(\mu)} \subset \text{supp}(\mu)$ . Se  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$  é uma medida de probabilidade, podemos representar o conjunto  $\text{supp}(\mu)$  como sendo a interseção de todos os subconjuntos fechados em  $\Omega$  com medida igual a 1.

**Definição 1.10** Dizemos que um conjunto  $X \subset \Omega$  fechado e invariante por translação é unicamente ergódico se contém o suporte de uma única medida  $\mu_X \in \mathcal{P}_\Theta(\Omega)$ .

Equivalentemente, um conjunto  $X \subset \Omega$  fechado e invariante por translação é unicamente ergódico se, e somente se,  $\mathcal{P}_\Theta(X) = \{\mu\}$ . Daí segue que se  $X$  é um subconjunto unicamente ergódico de  $\Omega$  e  $\mu \in \mathcal{P}_\Theta(\Omega)$  é a medida tal que o suporte está em  $X$ , então  $\mu \in \mathcal{E}(\Omega)$ .

Dada uma medida  $\mu \in \mathcal{P}_\Theta(\Omega)$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  e  $f \in L_1(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$ , recordamos que  $A_n f = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{\bar{m} \in \Lambda_n} f \circ \Theta^{\bar{m}}$ , onde  $\Lambda_n = \mathbb{Z}^d \cap \prod_{i=1}^d [-n, n]$  e  $\lambda_n = |\Lambda_n|$ .

**Lema 1.3** Sejam  $X \subset \Omega$  um subconjunto unicamente ergódico e  $\mu \in \mathcal{P}_\Theta(\Omega)$  a medida cujo suporte está em  $X$ . Então para cada função  $f \in \mathcal{C}(X)$ , a sequência de funções  $(A_n f(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente para a função constante  $\int f d\mu$ .

*Prova.* Como  $X$  é unicamente ergódico, então  $\mu \in \mathcal{P}_\Theta(\Omega)$  é uma medida ergódica. Se  $A_n f(\omega)$  converge uniformemente a uma constante, pela Proposição 1.4 essa constante é igual a  $\int f d\mu$ . Suponhamos, por contradição, que  $A_n f(\omega)$  não converge uniformemente para a constante  $\int f d\mu$ . Então existe  $\epsilon > 0$  tal que, para cada  $N \in \mathbb{N}$ , existem  $n > N$  e  $\omega_n \in X$  satisfazendo

$$\left| A_n f(\omega_n) - \int f d\mu \right| \geq \epsilon. \quad (1.5)$$

Para cada  $n > N$  que verifica (1.5), definimos a medida  $\mu_n := \frac{1}{\lambda_n} \sum_{\bar{m} \in \Lambda_n} (\Theta^{\bar{m}})_* \delta_{\omega_n} \in \mathcal{M}^1(X)$ , onde  $\delta_{\omega_n} \in \mathcal{M}^1(X)$  é a delta de Dirac no ponto  $\omega_n$ . Como  $\mathcal{M}^1(X)$  é um espaço topológico

compacto metrizável na topologia fraca\*, a sequência  $(\mu_n)$  admite uma subsequência  $(\mu_{n_i})$  convergente, ou seja, existe uma medida  $\mu_\infty \in \mathcal{M}^1(X)$  tal que

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \int g d\mu_{n_i} = \int g d\mu_\infty \quad \text{para todo } g \in \mathcal{C}(X).$$

Para cada  $\bar{m} \in \Lambda_n$ , trocando a medida  $(\Theta^{\bar{m}})_* \nu$  pela medida  $(\Theta^{\bar{m}})_* \delta_{\omega_n}$  na prova do Lema 1.1, mostra-se de modo análogo que  $\mu_\infty \in \mathcal{P}_\Theta(X)$ . Para cada  $n > N$  que verifica (1.5), temos  $\int f d\mu_n = A_n f(\omega_n)$ , donde  $|\int f d\mu_n - \int f d\mu| \geq \epsilon$ . Daí segue que

$$\left| \int f d\mu_\infty - \int f d\mu \right| = \lim_{i \rightarrow +\infty} \left| \int f d\mu_{n_i} - \int f d\mu \right| \geq \epsilon,$$

o que implica que  $\mu_\infty \neq \mu$ . Isso contradiz o fato de  $X$  ser unicamente ergódico.  $\square$

**Definição 1.11** Dizemos que um conjunto  $X \subset \Omega$  fechado e invariante por translação é minimal se não contém nenhum subconjunto fechado próprio invariante por translação não-vazio.

**Proposição 1.6** Sejam  $X \subset \Omega$  um subconjunto unicamente ergódico e  $\mu \in \mathcal{P}_\Theta(\Omega)$  a medida tal que o suporte está em  $X$ . Então o conjunto  $\text{supp}(\mu)$  é minimal.

*Prova.* Dado um ponto  $\omega \in \text{supp}(\mu)$ , desejamos mostrar que  $\omega + \bar{m} \in \text{supp}(\mu)$ . Para isso, seja  $U \in \mathcal{T}_{prod}$  um aberto tal que  $\omega + \bar{m} \in U$ . Então  $U - \bar{m} \in \mathcal{T}_{prod}$  contém o ponto  $\omega$ . Daí segue que  $\mu(U) = \mu(U - \bar{m}) > 0$ , donde concluímos que  $\text{supp}(\mu) + \bar{m} \subset \text{supp}(\mu)$ . Agora, basta verificarmos que  $\text{supp}(\mu) \subset \text{supp}(\mu) + \bar{m}$ . Sendo assim, dado  $\omega \in \text{supp}(\mu)$ , sabemos que  $\omega' = \omega - \bar{m} \in \text{supp}(\mu)$ , donde segue que  $\omega = \omega' + \bar{m} \in \text{supp}(\mu) + \bar{m}$ .

Suponhamos que existe um conjunto fechado  $N \in \mathcal{B}(\Omega)$  invariante por translação não-vazio tal que  $N \subset \text{supp}(\mu)$ . Consideramos uma medida  $\nu_N \in \mathcal{P}_\Theta(N)$  e definimos

$$\nu(A) = \nu_N(A \cap N) \quad \text{para todo } A \in \mathcal{B}(\Omega).$$

Daí segue que  $\nu \in \mathcal{P}_\Theta(\Omega)$  cumpre  $\text{supp}(\nu) \subset N$ . Como  $X$  é unicamente ergódico, concluímos que  $\mu = \nu$  e, portanto, temos que  $\text{supp}(\mu) = \text{supp}(\nu) \subset N$ .  $\square$

## 1.2 Entropia Topológica

Nesta seção, introduzimos a entropia topológica por meio de coberturas abertas. Este é um importante quantificador do comportamento dinâmico da ação  $\Theta$ , sendo um invariante por conjugação topológica.

**Definição 1.12** *Seja  $\alpha$  uma cobertura aberta de  $\Omega$ . Dizemos que  $\beta \subset \alpha$  é uma subcobertura se ainda cobre  $\Omega$ , isto é,  $\bigcup_{B \in \beta} B = \Omega$ . Dada uma cobertura aberta  $\alpha$  de  $\Omega$ , consideremos*

$$N(\alpha) = \inf\{|\beta| : \beta \subset \alpha \text{ é subcobertura finita}\}.$$

*Definimos a entropia de  $\alpha$  por  $H(\alpha, \Omega) := \log(N(\alpha))$ .*

**Definição 1.13** *Uma cobertura aberta  $\beta$  é um refinamento da cobertura aberta  $\alpha$ , isto sendo denotado por  $\alpha < \beta$ , se para todo  $B \in \beta$  existe  $A \in \alpha$  tal que  $B \subset A$ .*

Seja  $\alpha$  uma cobertura aberta de  $\Omega$ . Denotamos por  $\alpha - \bar{m} = \{A - \bar{m} : A \in \alpha\}$  a cobertura aberta formada por  $\Theta^{\bar{m}}$ -pré-imagens de conjuntos  $A \in \alpha$ , onde  $\bar{m} \in \mathbb{Z}^d$ . Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  coberturas abertas de  $\Omega$ . O *refinamento comum* de  $\alpha$  e  $\beta$  é a cobertura aberta de  $\Omega$  definida por

$$\alpha \vee \beta := \{A \cap B : A \in \alpha, B \in \beta \text{ e } A \cap B \neq \emptyset\}.$$

**Proposição 1.7** *Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  coberturas abertas de  $\Omega$ . Verificam-se os seguintes itens:*

- (i) *se  $\alpha < \beta$ , então  $H(\alpha, \Omega) \leq H(\beta, \Omega)$ ;*
- (ii)  *$H(\alpha \vee \beta, \Omega) \leq H(\alpha, \Omega) + H(\beta, \Omega)$ ;*
- (iii)  *$H(\alpha - \bar{m}, \Omega) = H(\alpha, \Omega)$  para todo  $\bar{m} \in \mathbb{Z}^d$ .*

*Prova.*

(i)- Seja  $\beta' = \{B_1, \dots, B_{N(\beta)}\} \subset \beta$  uma subcobertura com cardinalidade mínima. Para cada  $B_i \in \beta'$  existe  $A_i \in \alpha$  tal que  $B_i \subset A_i$ . Então  $\alpha' = \{A_1, \dots, A_{N(\beta)}\} \subset \alpha$  é uma subcobertura, donde segue que  $N(\alpha) \leq N(\beta)$ .

- (ii)- Sejam  $\alpha' = \{A_1, \dots, A_{N(\alpha)}\} \subset \alpha$  e  $\beta' = \{B_1, \dots, B_{N(\beta)}\} \subset \beta$  subcoberturas com cardinalidade mínima. Como  $\alpha' \vee \beta' \subset \alpha \vee \beta$  é uma subcobertura, segue que  $N(\alpha \vee \beta) \leq N(\alpha)N(\beta)$ .
- (iii)- Fixemos  $\bar{m} \in \mathbb{Z}^d$  e tomemos  $\{A_1, \dots, A_{N(\alpha)}\} \subset \alpha$  uma subcobertura com cardinalidade mínima. Como  $\{A_1 - \bar{m}, \dots, A_{N(\alpha)} - \bar{m}\} \subset \alpha - \bar{m}$  é uma subcobertura, temos que  $N(\alpha - \bar{m}) \leq N(\alpha)$ . Por outro lado, seja  $\{A_1 - \bar{m}, \dots, A_{N(\alpha - \bar{m})} - \bar{m}\} \subset \alpha - \bar{m}$  uma subcobertura com cardinalidade mínima. Então  $\{A_1, \dots, A_{N(\alpha - \bar{m})}\} \subset \alpha$  é uma subcobertura, donde temos que  $N(\alpha) \leq N(\alpha - \bar{m})$ .  $\square$

**Definição 1.14** *Seja  $\alpha$  uma cobertura aberta de  $\Omega$ . Para um subconjunto finito  $\Delta \subset \mathbb{Z}^d$ , tomamos  $\alpha^\Delta = \bigvee_{\bar{m} \in \Delta} \alpha - \bar{m}$  o refinamento comum das coberturas  $\alpha - \bar{m}$ . Definimos a entropia de  $(\Omega, \Theta)$  com relação a cobertura  $\alpha$  por*

$$h(\alpha, (\Omega, \Theta)) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} H(\alpha^{\Lambda_n}, \Omega),$$

onde  $\Lambda_n = \mathbb{Z}^d \cap \prod_{i=1}^d [-n, n]$  e  $\lambda_n = |\Lambda_n|$ .

Segue pela Proposição 1.7, mais precisamente pelos itens (ii) e (iii), que a entropia de  $(\Omega, \Theta)$  com relação a qualquer cobertura aberta  $\alpha$  de  $\Omega$  é finita, visto que temos a desigualdade

$$h(\alpha, (\Omega, \Theta)) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} H(\alpha^{\Lambda_n}, \Omega) \leq H(\alpha, \Omega) < +\infty. \quad (1.6)$$

**Definição 1.15** *A entropia topológica de  $(\Omega, \Theta)$  é definida por*

$$h_{top}((\Omega, \Theta)) := \sup\{h(\alpha, (\Omega, \Theta)) : \alpha \text{ é cobertura aberta de } \Omega\}.$$

Para sistemas dinâmicos em geral, a entropia topológica não é necessariamente finita. Mas, como logo abaixo veremos, devido a compacidade de  $\Omega$ , é possível mostrar que a entropia topológica neste caso é, de fato, finita.

**Proposição 1.8** *Seja  $\alpha$  uma cobertura aberta de  $\Omega$  tal que, para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  cumprindo  $\sup\{\text{diam}(A) : A \in \alpha^{\Lambda_n}\} < \epsilon$ . Então  $h_{top}((\Omega, \Theta)) = h(\alpha, (\Omega, \Theta))$ .*

*Prova.* Seja  $\beta$  uma cobertura aberta arbitrária de  $\Omega$ . Seja  $\delta$  o número de Lebesgue associado a  $\beta$ . Isto significa que cada subconjunto de  $\Omega$  tendo diâmetro menor que  $\delta$  está contido em algum elemento de  $\beta$ . Tomando  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\sup \{\text{diam}(A) : A \in \alpha^{\Lambda_n}\} < \delta$ , temos que  $\beta < \alpha^{\Lambda_n}$ . Assim, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , segue que  $\beta^{\Lambda_k} < \bigvee_{\bar{n} \in \Lambda_k} \alpha^{\Lambda_n - \bar{n}}$ . Para cada  $A \in \alpha^{\Lambda_{n+k}}$ , o fato de

$$A = \bigcap_{\bar{q} \in \Lambda_{n+k}} A_{\bar{q}} - \bar{q} = \bigcap_{\bar{n} \in \Lambda_k} \left( \bigcap_{\substack{\bar{q} \in \Lambda_{n+k} \\ \bar{q} - \bar{n} \in \Lambda_n}} A_{\bar{q}} - \bar{q} \right) = \bigcap_{\bar{n} \in \Lambda_k} \left( \bigcap_{\bar{m} \in \Lambda_n} A_{(\bar{m} + \bar{n})} - \bar{m} \right) - \bar{n}$$

implica que  $\bigvee_{\bar{n} \in \Lambda_k} \alpha^{\Lambda_n - \bar{n}} < \alpha^{\Lambda_{n+k}}$ . Pela Proposição 1.7, temos

$$h(\beta, (\Omega, \Theta)) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} H(\beta^{\Lambda_k}, \Omega) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_{n+k}} H(\alpha^{\Lambda_{n+k}}, \Omega) = h(\alpha, (\Omega, \Theta)).$$

Portanto, provamos que  $h_{top}((\Omega, \Theta)) = h(\alpha, (\Omega, \Theta))$ .  $\square$

Dado um cubo  $\Delta = \mathbb{Z}^d \cap \prod_{i=1}^d [-\ell, \ell]$ , observamos que  $\alpha = \{C_{\Delta, \omega} : \omega \in \mathcal{S}^\Delta\}$  é uma cobertura aberta de  $\Omega$ . Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\sum_{\bar{m} \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda_n} 2^{-\|\bar{m}\|} < \epsilon \quad \text{para todo } n \geq n_0. \quad (1.7)$$

O refinamento comum  $\alpha^{\Lambda_{n_0}}$  é constituído por cilindros  $C_{\Lambda_{\ell+n_0}, \omega}$  com  $\omega \in \mathcal{S}^{\Lambda_{\ell+n_0}}$ . Para cada  $A \in \alpha^{\Lambda_{n_0}}$ , temos que

$$d(\omega, \omega') = \sum_{\bar{m} \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda_{\ell+n_0}} \rho(\omega_{\bar{m}}, \omega'_{\bar{m}}) \leq \sum_{\bar{m} \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda_{n_0}} 2^{-\|\bar{m}\|} \quad \text{para todo } \omega, \omega' \in A,$$

o que por (1.7) implica que

$$\sup\{\text{diam}(A) : A \in \alpha^{\Lambda_{n_0}}\} \leq \sum_{\bar{m} \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda_{n_0}} 2^{-\|\bar{m}\|} < \epsilon.$$

Segue pela Proposição 1.8 que  $h_{top}((\Omega, \Theta)) = h(\alpha, (\Omega, \Theta)) < +\infty$ , ou seja, a entropia topológica de um *shift* completo é finita.

Por fim, se  $X \subset \Omega$  é um subconjunto fechado e invariante por translação, faz sentido introduzirmos a entropia topológica de  $(X, \Theta)$ . Naturalmente, consideramos neste caso

$$h_{top}((X, \Theta)) := \sup\{h(\alpha, (X, \Theta)) : \alpha \text{ é cobertura aberta de } X\}.$$

É claro que a entropia topológica de  $(X, \Theta)$  ainda é finita, isto é,  $h_{top}((X, \Theta)) < +\infty$ .

### 1.3 Entropia Métrica

Nesta seção, definimos a entropia de uma medida invariante por translação, um conceito que traz informações ergódicas do sistema dinâmico. Por exemplo, a entropia de uma medida invariante por translação pode ser vista como um número que mede quão desordenada pode ser a ação de  $\Theta$  sobre o suporte de tal medida.

**Definição 1.16** *Dada uma medida  $\mu \in \mathcal{M}^1(\Omega)$ , uma coleção  $\alpha = \{A_i : i \in I\}$  de subconjuntos  $\mathcal{B}(\Omega)$ -mensuráveis é uma  $\mu$ -partição de  $\Omega$  se  $\mu(A_i \cap A_j) = 0$  para  $i \neq j$ ,  $\mu(\Omega \setminus (\bigcup_{i \in I} A_i)) = 0$  e  $\mu(A_i) > 0$  para todo  $i \in I$ .*

**Definição 1.17** *A entropia de uma  $\mu$ -partição  $\alpha$  de  $\Omega$  é definida por*

$$H_\mu(\alpha, \Omega) := - \sum_{A \in \alpha} \mu(A) \log(\mu(A)). \quad (1.8)$$

Dadas uma medida  $\mu \in \mathcal{P}_\Theta(\Omega)$  e uma  $\mu$ -partição  $\alpha$  de  $\Omega$ , para cada  $\bar{m} \in \mathbb{Z}^d$ , denotamos por  $\alpha - \bar{m} = \{A - \bar{m} : A \in \alpha\}$  a  $\mu$ -partição de  $\Omega$  formada por  $\Theta^{\bar{m}}$ -pré-imagens de conjuntos  $A \in \alpha$ . Sejam  $\alpha$  e  $\beta$   $\mu$ -partições de  $\Omega$ . O refinamento comum de  $\alpha$  e  $\beta$  é a  $\mu$ -partição de  $\Omega$  definida por

$$\alpha \vee \beta := \{A \cap B : A \in \alpha, B \in \beta \text{ e } \mu(A \cap B) > 0\}.$$

Observamos que se  $\alpha$  e  $\beta$  são  $\mu$ -partições independentes, isto é,  $\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$  para todo  $A \in \alpha$  e  $B \in \beta$ , então  $H_\mu(\alpha \vee \beta, \Omega) = H_\mu(\alpha, \Omega) + H_\mu(\beta, \Omega)$ , ver [11] para mais detalhes.

**Definição 1.18** *Sejam  $\mu \in \mathcal{P}_\Theta(\Omega)$  e  $\alpha$  uma  $\mu$ -partição de  $\Omega$ . Para um subconjunto finito  $\Delta \subset \mathbb{Z}^d$ , tomamos  $\alpha^\Delta = \bigvee_{\bar{m} \in \Delta} \alpha - \bar{m}$  o refinamento comum das  $\mu$ -partições  $\alpha - \bar{m}$ . Definimos a entropia de  $(\Omega, \Theta)$  com relação a  $\mu$ -partição  $\alpha$  por*

$$h_\mu(\alpha, (\Omega, \Theta)) := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda_n} H_\mu(\alpha^{\Lambda_n}, \Omega),$$

onde  $\Lambda_n = \mathbb{Z}^d \cap \prod_{i=1}^d [-n, n]$  e  $\lambda_n = |\Lambda_n|$ .

**Definição 1.19** *A entropia métrica de uma medida  $\mu \in \mathcal{P}_\Theta(\Omega)$  é definida por*

$$h_\mu((\Omega, \Theta)) := \sup \{h_\mu(\alpha, (\Omega, \Theta)) : \alpha \text{ é } \mu\text{-partição de } \Omega \text{ com } H_\mu(\alpha, \Omega) < +\infty\}.$$

Como veremos no Teorema 1.2, ao estabelecer a entropia topológica como o supremo das entropias métricas, o Princípio Variacional indica, pelo discutido na seção anterior, que a entropia métrica de qualquer medida de probabilidade invariante por translação é finita. Em particular, deduz-se que a entropia de  $(\Omega, \Theta)$  com relação a qualquer  $\mu$ -partição de  $\Omega$  também é finita.

Mais geralmente, se  $X \subset \Omega$  é um subconjunto fechado e invariante por translação, então é possível introduzir de forma análoga a entropia métrica para medidas em  $\mathcal{P}_\Theta(X)$ .

**Definição 1.20** *Seja  $X \subset \Omega$  um subconjunto fechado e invariante por translação. A entropia métrica de uma medida  $\mu \in \mathcal{P}_\Theta(X)$  é definida por*

$$h_\mu((X, \Theta)) := \sup \{h_\mu(\alpha, (X, \Theta)) : \alpha \text{ é } \mu\text{-partição de } X \text{ com } H_\mu(\alpha, X) < +\infty\}.$$

Também nesse caso o Princípio Variacional assinala que a entropia métrica de qualquer medida  $\mu \in \mathcal{P}_\Theta(X)$  é finita.

**Teorema 1.2 (Princípio Variacional)** *Seja  $X \subset \Omega$  um subconjunto fechado e invariante por translação. Então*

$$h_{top}((X, \Theta)) = \sup_{\mu \in \mathcal{P}_\Theta(X)} h_\mu((X, \Theta)).$$

Uma demonstração do Princípio Variacional pode ser encontrada, por exemplo, em [11].

# Capítulo 2

## Configurações Minimizantes

Neste capítulo, introduzimos as noções de cristal, quase-cristal, configuração fundamental e estado fundamental. Provamos que, para um potencial invariante por translação e absolutamente somável, o conjunto de suas configurações fundamentais é fechado e invariante por translação.

### 2.1 Cristais e Quase-cristais

Dizemos que a configuração  $\omega \in \Omega = \mathcal{S}^{\mathbb{Z}^d}$  tem *direção periódica*  $\bar{m} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$  quando  $\omega + \bar{m} = \omega$ . A configuração  $\omega \in \Omega$  é chamada *periódica* se tem  $d$  direções periódicas linearmente independentes. Por outro lado, dizemos que a configuração  $\omega \in \Omega$  é *aperiódica* se não possui direção periódica.

**Definição 2.1** *Dizemos que a órbita da configuração  $\omega \in \Omega$  é periódica quando  $\omega$  é uma configuração periódica.*

Dada uma configuração periódica  $\omega \in \Omega$ , podemos definir uma medida de probabilidade invariante por translação associada a  $\omega$ . Com efeito, tomando um conjunto  $F \subset \mathbb{Z}^d$  finito tal que  $\mathcal{O}(\omega) = \{\omega + \bar{m} : \bar{m} \in F\}$ , definimos  $\mu_\omega : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  por

$$\mu_\omega := \frac{1}{|F|} \sum_{\bar{m} \in F} \delta_{\omega + \bar{m}}. \quad (2.1)$$



É claro que  $\mu_\omega$  é uma medida de probabilidade invariante por translação. Além disso, temos que  $\text{supp}(\mu_\omega) = \mathcal{O}(\omega)$ .

**Definição 2.2** *Definimos um cristal como uma configuração  $\omega \in \Omega$  periódica. Sua órbita é suporte de uma única medida de probabilidade invariante por translação, a saber,  $\mu_\omega \in \mathcal{P}_\Theta(\Omega)$ .*

Para um cristal  $\omega \in \Omega$ , não é difícil ver que  $h_{\text{top}}((\mathcal{O}(\omega), \Theta)) = 0 = h_{\mu_\omega}((\mathcal{O}(\omega), \Theta))$ .

A Figura 2.1 representa um cristal cujas direções periódicas são os vetores  $\vec{u} = (1, 2)$  e  $\vec{v} = (3, 1)$ . Observe que podemos ladrilhar o plano de modo que as entradas em cada ladrilho sejam as mesmas.

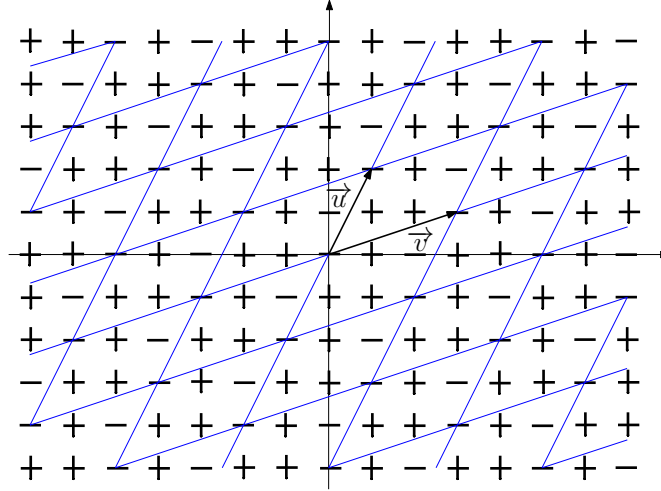


Figura 2.1: Configuração periódica com  $\mathcal{S} = \{+, -\}$  e  $d = 2$

**Definição 2.3** *Dizemos que a configuração  $\omega \in \Omega$  é repetitiva se, para qualquer subconjunto finito  $F \subset \mathbb{Z}^d$ , existe  $r(F) > 0$  tal que, para cada cubo  $\Delta_{r(F)} \subset \mathbb{Z}^d$  com tamanho  $r(F)$ , podemos encontrar  $\vec{m} \in \mathbb{Z}^d$  de forma que  $F + \vec{m} \subset \Delta_{r(F)}$  e  $\omega_{\vec{n} + \vec{m}} = \omega_{\vec{n}}$  para todo  $\vec{n} \in F$ .*

**Teorema 2.1 (Teorema de Gottschalk)** *Uma configuração  $\omega \in \Omega$  é repetitiva se, e somente se, o fecho de sua órbita  $\overline{\mathcal{O}(\omega)}$  é um conjunto minimal.*

O Teorema de Gottschalk é uma ferramenta importante na verificação de repetitividade sem utilizarmos diretamente a definição, o que em muitos casos seria extremamente trabalhoso. Uma prova do mesmo encontra-se, por exemplo, em [8].

É claro que toda configuração  $\omega \in \Omega$  periódica também é uma configuração repetitiva, pois nesse caso, o fecho de sua órbita  $\overline{\mathcal{O}(\omega)} = \mathcal{O}(\omega)$  é um conjunto minimal. Isto motiva a considerar repetitividade como uma generalização de periodicidade.

Finalmente estamos em condições de definir quase-cristais. Tendo em vista que o fecho da órbita de um cristal é um subconjunto minimal e unicamente ergódico com entropia nula, introduzimos o seguinte conceito.

**Definição 2.4** *Dizemos que uma configuração  $\omega \in \Omega$  aperiódica e repetitiva é um quase-cristal se o fecho de sua órbita  $\overline{\mathcal{O}(\omega)}$  é um subconjunto unicamente ergódico com entropia nula, isto é,*

$$h_{top}((\overline{\mathcal{O}(\omega)}, \Theta)) = 0 = h_{\mu}((\overline{\mathcal{O}(\omega)}, \Theta)),$$

onde  $\mu \in \mathcal{P}_{\Theta}(\Omega)$  é a única probabilidade suportada em  $\overline{\mathcal{O}(\omega)}$ .

O ladrilhamento de Penrose apresentado no Capítulo 4 pode fornecer ao mesmo tempo exemplo de configuração repetitiva e quase-cristal, ver Figura 4.3.

## 2.2 Configuração Fundamental e Estado Fundamental

Seja  $\mathcal{F}$  a família de todos os subconjuntos finitos não-vazios de  $\mathbb{Z}^d$ . Um *potencial* é uma família de funções  $\Phi = (\Phi_B)_{B \in \mathcal{F}}$ , onde cada  $\Phi_B : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  depende somente da configuração  $\omega \in \Omega$  restrita ao subconjunto  $B$ . Em particular, cada função  $\Phi_B$  é  $\mathcal{B}(\Omega)$ -mensurável. De agora em diante, um potencial  $\Phi = (\Phi_B)_{B \in \mathcal{F}}$  será denotado apenas por  $\Phi$ .

**Definição 2.5** *Um potencial  $\Phi$  é dito ser de alcance finito se*

$$\sup\{\text{diam}(B) : B \in \mathcal{F} \text{ e } \Phi_B \neq 0\} < +\infty.$$

*Mais precisamente,  $\Phi$  é dito ser de alcance  $R > 0$  quando*

$$\sup\{\text{diam}(B) : B \in \mathcal{F} \text{ e } \Phi_B \neq 0\} = R.$$

**Exemplo 2.1** *Sejam  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$  uma medida e  $R \geq 1$  um número real. Para cada conjunto  $B \in \mathcal{F}$ , definimos  $\Phi_B : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  por*

$$\Phi_B(\omega) := \iota(B)\mu(C_{B,\omega_B}) \quad \text{para todo } \omega \in \Omega,$$

onde  $\iota(B) = \chi_{[0,1]}(\frac{1}{R} \text{diam}(B))$ . É claro que  $\Phi_B$  depende somente da configuração  $\omega \in \Omega$  restrita ao subconjunto  $B$  e que  $\Phi = (\Phi_B)_{B \in \mathcal{F}}$  define um potencial de alcance finito.

**Definição 2.6** *Um potencial  $\Phi$  é dito ser invariante por translação se*

$$\Phi_{B+\bar{n}}(\omega) = \Phi_B(\omega + \bar{n}) \quad \text{para quaisquer } \omega \in \Omega, \bar{n} \in \mathbb{Z}^d, B \in \mathcal{F}.$$

**Exemplo 2.2** *Sejam  $\mu \in \mathcal{M}_\Theta(\Omega)$  uma medida invariante por translação e  $R \geq 1$  um número real. Para cada conjunto  $B \in \mathcal{F}$ , definimos  $\Phi_B : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  por*

$$\Phi_B(\omega) := \iota(B)\mu(C_{B,\omega_B}) \quad \text{para todo } \omega \in \Omega,$$

onde  $\iota(B) = \chi_{[0,1]}(\frac{1}{R} \text{diam}(B))$ . Sabemos que  $\Phi = (\Phi_B)_{B \in \mathcal{F}}$  define um potencial de alcance finito, mais especificamente, de alcance  $R \geq 1$ . Além disso, temos que  $\Phi$  é invariante por translação, pois para cada conjunto  $B \in \mathcal{F}$  com diâmetro menor que ou igual a  $R$  e qualquer configuração  $\omega \in \Omega$ , obtemos

$$\Phi_{B+\bar{n}}(\omega) = \mu(C_{B+\bar{n},\omega_{(B+\bar{n})}}) = \mu(C_{B+\bar{n},\omega_{(B+\bar{n})}} + \bar{n}) = \mu(C_{B,(\omega+\bar{n})_B}) = \Phi_B(\omega + \bar{n}).$$

A mecânica estatística fornece vários exemplos de potenciais invariantes por translação, ver [11] para mais detalhes.

Denotamos por  $\mathcal{B}_\Theta$  o espaço vetorial dos potenciais  $\Phi$  invariantes por translação tais que  $\sum_{B \ni 0} \|\Phi_B\|_\infty < +\infty$ , onde  $\|\cdot\|_\infty$  denota a norma do supremo. Podemos introduzir uma norma em  $\mathcal{B}_\Theta$  definindo

$$\|\Phi\|_0 := \sum_{B \ni 0} \|\Phi_B\|_\infty.$$

Não é difícil verificar que o espaço vetorial  $\mathcal{B}_\Theta$  munido da norma  $\|\cdot\|_0$  é um espaço de Banach. Denotamos por  $\mathcal{B}_{\Theta,R}$  o subespaço vetorial de  $\mathcal{B}_\Theta$  constituído dos potenciais invariantes por translação com alcance menor que ou igual a  $R > 0$ . Definimos  $\mathcal{B}_{\Theta,\infty} := \bigcup_{R>0} \mathcal{B}_{\Theta,R}$ , o

espaço vetorial dos potenciais com alcance finito. Introduzimos para um potencial  $\Phi \in \mathcal{B}_{\Theta, \infty}$  a função  $f_\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f_\Phi := \sum_{B \ni 0} |B|^{-1} \Phi_B.$$

Observe que a função  $f_\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  está bem definida e, além disso, é uma função contínua, pois a soma que a define é, de fato, finita. Para  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ , usaremos a notação

$$\langle \mu, \Phi \rangle = \int f_\Phi d\mu = \sum_{B \ni 0} |B|^{-1} \int \Phi_B d\mu. \quad (2.2)$$

**Definição 2.7** *Dados um cubo  $\Lambda \in \mathcal{F}$  e um potencial  $\Phi \in \mathcal{B}_\Theta$ , o Hamiltoniano sobre  $\Lambda$  para  $\Phi$  com condição externa  $\omega' \in \Omega$  é a função*

$$H_{\Lambda, \omega'}^\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

dada por

$$H_{\Lambda, \omega'}^\Phi(\omega) = \sum_{B: B \cap \Lambda \neq \emptyset} \Phi_B(\omega_\Lambda \omega'_{\Lambda^c}) \quad \text{para todo } \omega \in \Omega,$$

onde  $\omega_\Lambda \omega'_{\Lambda^c} \in \Omega$  é a configuração que coincide com  $\omega$  em  $\Lambda$  e com  $\omega'$  em  $\Lambda^c$ . O Hamiltoniano sobre  $\Lambda$  para  $\Phi$  é a função

$$H_\Lambda^\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

dada por

$$H_\Lambda^\Phi(\omega) = \sum_{B: B \cap \Lambda \neq \emptyset} \Phi_B(\omega) = H_{\Lambda, \omega}^\Phi(\omega) \quad \text{para todo } \omega \in \Omega.$$

Por questão de clareza, sempre que não houver dúvida, denotaremos  $H_{\Lambda, \omega'}^\Phi$  e  $H_\Lambda^\Phi$  apenas por  $H_{\Lambda, \omega'}$  e  $H_\Lambda$ , respectivamente. Observamos que a função  $H_{\Lambda, \omega'} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  está bem definida e, além disso, vale a seguinte desigualdade

$$H_{\Lambda, \omega'}(\omega) \leq \sum_{B: B \cap \Lambda \neq \emptyset} \|\Phi_B\|_\infty \leq \sum_{\bar{n} \in \Lambda} \left( \sum_{B \ni \bar{n}} \|\Phi_B\|_\infty \right) < +\infty \quad \text{para todo } \omega \in \Omega. \quad (2.3)$$

**Lema 2.1** *Dados um cubo  $\Lambda \in \mathcal{F}$  e um potencial  $\Phi \in \mathcal{B}_\Theta$ , a função  $H_\Lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua.*

*Prova.* Segue de (2.3) que  $\sum_{B: B \cap \Lambda \neq \emptyset} \|\Phi_B\|_\infty < +\infty$ . Então dado  $\epsilon > 0$ , existe  $m_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\sum_{\substack{B: B \cap \Lambda \neq \emptyset \\ B \subset \Lambda_m}} \|\Phi_B\|_\infty = \left| \sum_{\substack{B: B \cap \Lambda \neq \emptyset \\ B \subset \Lambda_m}} \|\Phi_B\|_\infty - \sum_{B: B \cap \Lambda \neq \emptyset} \|\Phi_B\|_\infty \right| < \epsilon \text{ para todo } m \geq m_0,$$

onde  $\Lambda_m = \mathbb{Z}^d \cap \prod_{i=1}^d [-m, m]$ . Daí segue que

$$\left| \sum_{\substack{B: B \cap \Lambda \neq \emptyset \\ B \subset \Lambda_m}} \Phi_B(\omega) - \sum_{B: B \cap \Lambda \neq \emptyset} \Phi_B(\omega) \right| \leq \sum_{\substack{B: B \cap \Lambda \neq \emptyset \\ B \subset \Lambda_m}} |\Phi_B(\omega)| < \epsilon \text{ para quaisquer } m \geq m_0, \omega \in \Omega. \quad (2.4)$$

Para cada  $m \in \mathbb{N}$ , considere a função  $H_m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$H_m(\omega) = \sum_{\substack{B: B \cap \Lambda \neq \emptyset \\ B \subset \Lambda_m}} \Phi_B(\omega).$$

É claro que cada função  $H_m$  é contínua. De (2.4) segue que a sequência de funções  $(H_m)_{m \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente para a função  $H_\Lambda$ . Finalmente, o Teorema do Limite Uniforme garante que  $H_\Lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua.  $\square$

Dados um potencial  $\Phi \in \mathcal{B}_\Theta$  e um cubo  $\Lambda \in \mathcal{F}$ , definimos

$$\mathcal{GC}_\Lambda(\Phi) := \left\{ \omega \in \Omega : \sum_{B: B \cap \Lambda \neq \emptyset} \Phi_B(\omega) = \min_{\omega' \in \Omega} H_{\Lambda, \omega}(\omega') \right\}.$$

**Proposição 2.1** *Seja  $\{\Delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência crescente de cubos tal que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n = \mathbb{Z}^d$ . A família  $\{\mathcal{GC}_{\Delta_n}(\Phi)\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma família decrescente de conjuntos compactos não-vazios.*

*Prova.* Para qualquer cubo  $\Lambda \in \mathcal{F}$ , temos que  $|\mathcal{S}^\Lambda| < +\infty$ . Então existe  $\bar{\omega}' \in \Omega$  tal que

$$\min_{\omega' \in \Omega} H_{\Lambda, \omega}(\omega') = H_{\Lambda, \omega}(\bar{\omega}') = \sum_{B: B \cap \Lambda \neq \emptyset} \Phi_B(\bar{\omega}'_\Lambda \omega_{\Lambda^c}),$$

onde  $\omega \in \Omega$  é fixo. Notemos que  $H_{\Lambda, \bar{\omega}'_\Lambda \omega_{\Lambda^c}}(\omega') = H_{\Lambda, \omega}(\omega')$  para todo  $\omega' \in \Omega$ . Assim

$$\min_{\omega' \in \Omega} H_{\Lambda, \bar{\omega}'_\Lambda \omega_{\Lambda^c}}(\omega') = \min_{\omega' \in \Omega} H_{\Lambda, \omega}(\omega') = \sum_{B: B \cap \Lambda \neq \emptyset} \Phi_B(\bar{\omega}'_\Lambda \omega_{\Lambda^c}).$$

Daí segue que  $\bar{\omega}'_{\Lambda}\omega_{\Lambda^c} \in \mathcal{GC}_{\Lambda}(\Phi)$ . Em particular, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , temos que  $\mathcal{GC}_{\Delta_n}(\Phi) \neq \emptyset$ . Para mostrarmos que o conjunto  $\mathcal{GC}_{\Delta_n}(\Phi)$  é compacto, é suficiente verificarmos que o mesmo é fechado, pois  $\Omega$  é compacto. Para isso, fixado  $n \in \mathbb{N}$ , não é difícil verificar que a aplicação  $T_{\Delta_n}^{\omega'} : \Omega \rightarrow \Omega$  dada por  $T_{\Delta_n}^{\omega'}(\omega) = \omega'_{\Delta_n}\omega_{\Delta_n^c}$  é contínua para cada  $\omega' \in \Omega$ . Dado  $\omega \in \overline{\mathcal{GC}_{\Delta_n}(\Phi)}$ , existe uma sequência  $(\omega_m)_{m \in \mathbb{N}}$  em  $\mathcal{GC}_{\Delta_n}(\Phi)$  tal que  $\omega_m \rightarrow \omega$ . Pelo Lema 2.1, temos que  $H_{\Delta_n}$  é contínua, donde segue que

$$\begin{aligned} H_{\Delta_n}(\omega) &= \lim_{m \rightarrow +\infty} H_{\Delta_n}(\omega_m) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \min_{\omega' \in \Omega} H_{\Delta_n} \circ T_{\Delta_n}^{\omega'}(\omega_m) = \min_{\omega' \in \Omega} H_{\Delta_n} \circ T_{\Delta_n}^{\omega'}(\omega) \\ &= \min_{\omega' \in \Omega} H_{\Delta_n, \omega}(\omega'). \end{aligned}$$

Daí segue que  $\omega \in \mathcal{GC}_{\Delta_n}(\Phi)$ , donde concluímos que  $\overline{\mathcal{GC}_{\Delta_n}(\Phi)} = \mathcal{GC}_{\Delta_n}(\Phi)$ . Sejam  $\Lambda$  e  $\Delta$  cubos tais que  $\Lambda \subset \Delta$ . Mostraremos que  $\mathcal{GC}_{\Delta}(\Phi) \subset \mathcal{GC}_{\Lambda}(\Phi)$ . Dado  $\omega \in \mathcal{GC}_{\Delta}(\Phi)$ , suponhamos por contradição que existe uma configuração  $\omega' \in \Omega$  tal que  $H_{\Lambda, \omega}(\omega) > H_{\Lambda, \omega}(\omega')$ . Daí segue que

$$H_{\Delta, \omega}(\omega) = \sum_{B: B \cap \Lambda \neq \emptyset} \Phi_B(\omega) + \sum_{\substack{B: B \cap \Delta \neq \emptyset \\ B \subset \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda}} \Phi_B(\omega) > \sum_{B: B \cap \Lambda \neq \emptyset} \Phi_B(\omega'_{\Lambda}\omega_{\Lambda^c}) + \sum_{\substack{B: B \cap \Delta \neq \emptyset \\ B \subset \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda}} \Phi_B(\omega).$$

Cada  $\Phi_B$  depende somente da configuração  $\omega \in \Omega$  restrita a  $B \in \mathcal{F}$ . Assim

$$H_{\Delta, \omega}(\omega) > \sum_{B: B \cap \Lambda \neq \emptyset} \Phi_B(\omega'_{\Lambda}\omega_{\Lambda^c}) + \sum_{\substack{B: B \cap \Delta \neq \emptyset \\ B \subset \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda}} \Phi_B(\omega'_{\Lambda}\omega_{\Lambda^c}) = \sum_{B: B \cap \Delta \neq \emptyset} \Phi_B(\omega'_{\Lambda}\omega_{\Lambda^c}) = H_{\Delta, \omega}(\omega'),$$

uma contradição. Em particular, segue que  $\mathcal{GC}_{\Delta_{n+1}}(\Phi) \subset \mathcal{GC}_{\Delta_n}(\Phi)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Denotamos a interseção da família  $\{\mathcal{GC}_{\Delta_n}(\Phi)\}_{n \in \mathbb{N}}$  por

$$\mathcal{GC}(\Phi) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{GC}_{\Delta_n}(\Phi).$$

Observemos que  $\mathcal{GC}(\Phi)$  independe da escolha da sequência  $\{\Delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Para verificarmos isso, sejam  $\{\Delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $\{\tilde{\Delta}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  quaisquer duas sequências crescentes de cubos tais que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n = \mathbb{Z}^d = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\Delta}_n.$$

Consideremos

$$\mathcal{GC}^{\Delta}(\Phi) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{GC}_{\Delta_n}(\Phi) \quad \text{e} \quad \mathcal{GC}^{\tilde{\Delta}}(\Phi) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{GC}_{\tilde{\Delta}_n}(\Phi).$$

Dado  $j \in \mathbb{N}$ , existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\tilde{\Delta}_j \subset \Delta_k$ . Segue da prova da proposição anterior que  $\mathcal{GC}_{\Delta_k}(\Phi) \subset \mathcal{GC}_{\tilde{\Delta}_j}(\Phi)$ , o que garante que  $\mathcal{GC}^\Delta(\Phi) \subset \mathcal{GC}^{\tilde{\Delta}}(\Phi)$ . Analogamente se verifica que  $\mathcal{GC}^{\tilde{\Delta}}(\Phi) \subset \mathcal{GC}^\Delta(\Phi)$ , donde concluímos que  $\mathcal{GC}^\Delta(\Phi) = \mathcal{GC}^{\tilde{\Delta}}(\Phi) = \mathcal{GC}(\Phi)$ .

**Corolário 2.1** *O conjunto  $\mathcal{GC}(\Phi)$  é invariante por translação.*

*Prova.* Dados  $\bar{m} \in \mathbb{Z}^d$  e  $\omega \in \mathcal{GC}(\Phi)$ , desejamos mostrar que  $\omega + \bar{m} \in \mathcal{GC}(\Phi)$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , note que

$$(\omega' + \bar{m})_{\Lambda_n} (\omega + \bar{m})_{\Lambda_n^c} = \omega'_{\Lambda_n + \bar{m}} \omega_{(\Lambda_n + \bar{m})^c} + \bar{m} \quad \text{para todo } \omega' \in \Omega.$$

Então para cada  $\omega' \in \Omega$ , temos que

$$\begin{aligned} H_{\Lambda_n, \omega + \bar{m}}(\omega' + \bar{m}) &= \sum_{B: B \cap \Lambda_n \neq \emptyset} \Phi_B((\omega' + \bar{m})_{\Lambda_n} (\omega + \bar{m})_{\Lambda_n^c}) \\ &= \sum_{B: B \cap \Lambda_n \neq \emptyset} \Phi_{B + \bar{m}}(\omega'_{\Lambda_n + \bar{m}} \omega_{(\Lambda_n + \bar{m})^c}) \\ &= H_{\Lambda_n + \bar{m}, \omega}(\omega'). \end{aligned}$$

Daí segue que

$$\min_{\omega' \in \Omega} H_{\Lambda_n, \omega + \bar{m}}(\omega' + \bar{m}) = \min_{\omega' \in \Omega} H_{\Lambda_n + \bar{m}, \omega}(\omega') = H_{\Lambda_n + \bar{m}}(\omega) = H_{\Lambda_n}(\omega + \bar{m}),$$

ou seja,  $\omega + \bar{m} \in \mathcal{GC}_{\Lambda_n}(\Phi)$ . Por simetria, temos que  $\mathcal{GC}_{\Lambda_n}(\Phi) + \bar{m} = \mathcal{GC}_{\Lambda_n}(\Phi)$ .  $\square$

**Definição 2.8** *Dizemos que uma medida  $\nu \in \mathcal{P}_\Theta(\Omega)$  minimiza a energia específica se*

$$\langle \nu, \Phi \rangle \leq \langle \mu, \Phi \rangle \quad \text{para qualquer } \mu \in \mathcal{P}_\Theta(\Omega).$$

(Reveja a notação 2.2.)

**Definição 2.9** *Dizemos que uma configuração  $\omega \in \mathcal{GC}(\Phi)$  é uma configuração fundamental de  $\Phi$  e que uma medida  $\mu \in \mathcal{M}^1(\Omega)$  com suporte em  $\mathcal{GC}(\Phi)$  é um estado fundamental de  $\Phi$ .*

O Lema 1.1 e o Corolário 2.1 garantem que existe um estado fundamental invariante por translação, ou seja, que existe uma medida  $\mu \in \mathcal{P}_\Theta(\Omega)$  tal que  $\text{supp}(\mu) \subset \mathcal{GC}(\Phi)$ . Denotamos

por  $\mathcal{GS}_\Theta(\Phi)$  o conjunto de todas as medidas  $\mu \in \mathcal{P}_\Theta(\Omega)$  tal que  $\text{supp}(\mu) \subset \mathcal{GC}(\Phi)$ . De agora em diante, um estado fundamental deve ser entendido como um estado fundamental invariante por translação.

O teorema a seguir é devido a R. Schrader [20]. Ele afirma que, para um potencial  $\Phi \in \mathcal{B}_{\Theta, \infty}$ , o conjunto das medidas que minimizam a energia específica coincide com o conjunto dos estados fundamentais de  $\Phi$ .

**Teorema 2.2 (Schrader)** *Para um potencial  $\Phi \in \mathcal{B}_{\Theta, \infty}$ , o conjunto das medidas  $\mu \in \mathcal{P}_\Theta(\Omega)$  que minimizam a energia específica coincide com o conjunto  $\mathcal{GS}_\Theta(\Phi)$ .*

O Teorema de Schrader fornece uma outra caracterização para o conjunto  $\mathcal{GS}_\Theta(\Phi)$ . Esta nova caracterização, por ser mais simples, facilita a busca por estados fundamentais de  $\Phi$ .



# Capítulo 3

## O Ponto de Vista Projetivo

Neste capítulo, introduzimos os conceitos de regras de Kirchoff, limites projetivos e indutivos. Mostramos que o conjunto das medidas invariantes por translação pode ser associado ao limite projetivo de certos espaços vetoriais de dimensão finita.

### 3.1 Cilindros e Regras de Kirchoff

Por conveniência, neste capítulo,  $\{\Delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  denotará uma sequência crescente de cubos centrados em zero cuja união é  $\mathbb{Z}^d$ . Recordamos que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta_n = \mathbb{Z}^d \cap \prod_{i=1}^d [-l_n, l_n]$ , onde  $l_n$  é um inteiro positivo. Para qualquer configuração  $\omega = (\omega_{\bar{m}})_{\bar{m} \in \Delta_n} \in \mathcal{S}^{\Delta_n}$ , consideramos o cilindro

$$C_{\Delta_n, \omega} = \{\omega' \in \Omega : \omega'_{\Delta_n} = \omega\}.$$

Quando não houver dúvida quanto à sequência de cubos utilizada, denotaremos  $C_{\Delta_n, \omega}$  apenas por  $C_{n, \omega}$ . Podemos identificar a configuração  $\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_n}$  com o mapa  $\omega : \Delta_n \rightarrow \mathcal{S}$  definido por  $\omega(\bar{m}) = \omega_{\bar{m}}$  para todo  $\bar{m} \in \Delta_n$ . Assim sendo, toda vez que mencionarmos mapa  $\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_n}$ , está subentendida esta identificação. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , denotamos por  $\mathcal{C}_n$  a família de todos os cilindros  $C_{n, \omega}$  com  $\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_n}$  e tomamos  $\mathcal{C} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_n$ . Observe que os cilindros em  $\mathcal{C}$  geram a topologia produto sobre  $\Omega$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , identificamos o cilindro  $C_{n, \omega}$  com a função

$\delta_{n,\omega} : \mathcal{C}_n \longrightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\delta_{n,\omega}(C_{n,\omega'}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega'_{\bar{m}} = \omega_{\bar{m}} \text{ para todo } \bar{m} \in \Delta_n, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então qualquer função  $\mathcal{F} : \mathcal{C}_n \longrightarrow \mathbb{R}$  pode ser escrita unicamente na forma  $\mathcal{F} = \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_n}} \alpha_\omega C_{n,\omega}$ , onde  $\alpha_\omega = \mathcal{F}(C_{n,\omega})$ . Feita essa identificação, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definimos o espaço vetorial de dimensão finita das combinações lineares de cilindros em  $\mathcal{C}_n$  com coeficientes reais por

$$C_d(\Delta_n; \mathbb{R}) := \left\{ \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_n}} \alpha_\omega C_{n,\omega}, \text{ onde } \alpha_\omega \in \mathbb{R} \right\},$$

o qual equipamos com a norma  $\| \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_n}} \alpha_\omega C_{n,\omega} \| = \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_n}} |\alpha_\omega|$ . Definimos o cone positivo em  $C_d(\Delta_n; \mathbb{R})$  por

$$C_d^+(\Delta_n; \mathbb{R}) := \left\{ \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_n}} \alpha_\omega C_{n,\omega}, \text{ onde } \alpha_\omega \geq 0 \right\}.$$

**Definição 3.1** *Dizemos que uma região convexa limitada de um espaço vetorial  $n$ -dimensional delimitada por um número finito de hiperplanos é um polítopo.*

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definimos o polítopo (ou simplexo)

$$C_d^{+,1}(\Delta_n; \mathbb{R}) := \left\{ \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_n}} \alpha_\omega C_{n,\omega}, \text{ onde } \alpha_\omega \geq 0 \text{ e } \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_n}} \alpha_\omega = 1 \right\},$$

cujo o bordo denotamos por  $\partial C_d^{+,1}(\Delta_n; \mathbb{R})$ . Esse bordo herda uma estratificação natural em faces  $F_n^{\omega'} := V_n^{\omega'} \cap C_d^{+,1}(\Delta_n; \mathbb{R})$ , onde  $V_n^{\omega'}$  é o subespaço próprio de  $C_d(\Delta_n; \mathbb{R})$  gerado pelo conjunto  $\mathcal{C}_n \setminus \{C_{n,\omega'}\}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definimos a aplicação linear  $\text{Ev}_n : \mathcal{C}(\Omega)^* \longrightarrow C_d(\Delta_n; \mathbb{R})$  por

$$\text{Ev}_n(L) := \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_n}} L(\chi_{n,\omega}) C_{n,\omega} \quad \text{para todo } L \in \mathcal{C}(\Omega)^*,$$

onde  $\chi_{n,\omega} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  denota a função indicadora do cilindro  $C_{n,\omega}$ . Finalmente, definimos a aplicação linear  $\text{Ev} : \mathcal{C}(\Omega)^* \longrightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} C_d(\Delta_n; \mathbb{R})$  por

$$\text{Ev}(L) := (\text{Ev}_n(L))_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{para todo } L \in \mathcal{C}(\Omega)^*.$$

A inclusão  $i_n : \Delta_n \rightarrow \Delta_{n+1}$  induz uma aplicação sobrejetora  $p_n : \mathcal{S}^{\Delta_{n+1}} \rightarrow \mathcal{S}^{\Delta_n}$ , a qual associa cada mapa  $\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_{n+1}}$  ao mapa  $\omega \circ i_n \in \mathcal{S}^{\Delta_n}$ . Sucessivamente,  $p_n$  induz uma aplicação linear sobrejetora  $(p_n)_* : C_d(\Delta_{n+1}; \mathbb{R}) \rightarrow C_d(\Delta_n; \mathbb{R})$  dada por

$$(p_n)_* \left( \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_{n+1}}} \alpha_\omega C_{n+1, \omega} \right) = \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_n}} \alpha_\omega C_{n, \omega \circ i_n}.$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , observamos que

$$\begin{aligned} (p_n)_*(\text{Ev}_{n+1}(L)) &= \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_{n+1}}} L(\chi_{n+1, \omega}) C_{n, \omega \circ i_n} = \sum_{\omega' \in \mathcal{S}^{\Delta_n}} \left( \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_{n+1}}: \omega \circ i_n = \omega'} L(\chi_{n+1, \omega}) \right) C_{n, \omega'} \\ &= \sum_{\omega' \in \mathcal{S}^{\Delta_n}} L(\chi_{n, \omega'}) C_{n, \omega'} = \text{Ev}_n(L). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Para  $k \in \{1, \dots, d\}$ , seja  $\bar{e}_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^d$ , onde 1 está na  $k$ -ésima posição. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definimos  $R_n^k := \Delta_n \cap (\Delta_n + \bar{e}_k)$  e  $L_n^k := \Delta_n \cap (\Delta_n - \bar{e}_k)$ . Consideramos a translação  $t_n^k : L_n^k \rightarrow R_n^k$  dada por  $t_n^k(\bar{m}) = \bar{m} + \bar{e}_k$  para todo  $\bar{m} \in L_n^k$  e introduzimos o subespaço vetorial  $H_d(\Delta_n; \mathbb{R})$  de  $C_d(\Delta_n; \mathbb{R})$  impondo que os coeficientes  $\alpha_\omega$  satisfaçam

$$\sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_n}: \omega_{R_n^k} = \omega'} \alpha_\omega = \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_n}: \omega_{L_n^k} = \omega' \circ t_n^k} \alpha_\omega \quad \text{para todo } \omega' \in \mathcal{S}^{R_n^k}, k = 1, \dots, d. \tag{3.2}$$

Consideramos

$$H_d^+(\Delta_n; \mathbb{R}) = H_d(\Delta_n; \mathbb{R}) \cap C_d^+(\Delta_n; \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad H_d^{+,1}(\Delta_n; \mathbb{R}) = H_d^+(\Delta_n; \mathbb{R}) \cap C_d^{+,1}(\Delta_n; \mathbb{R}).$$

**Definição 3.2** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , dizemos que os coeficientes de um vetor em  $H_d^+(\Delta_n; \mathbb{R})$  satisfazem as regras de Kirchoff de ordem  $n$  ditadas por (3.2).

## 3.2 Limites Projetivos e Medidas

Nesta seção, descrevemos a estrutura projetiva das medidas invariantes por translação. Dados  $n \in \mathbb{N}$  e  $\sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_{n+1}}} \alpha_\omega C_{n+1, \omega} \in H_d(\Delta_{n+1}; \mathbb{R})$ , para cada  $\omega' \in \mathcal{S}^{R_n^k}$  e  $k \in \{1, \dots, d\}$ , temos

$$\sum_{\bar{\omega} \in \mathcal{S}^{R_{n+1}^k} \setminus R_n^k} \left( \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_{n+1}}: \omega_{R_{n+1}^k} = \bar{\omega}} \alpha_\omega \right) = \sum_{\bar{\omega} \in \mathcal{S}^{R_{n+1}^k} \setminus R_n^k} \left( \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_{n+1}}: \omega_{L_{n+1}^k} = (\bar{\omega}) \circ t_{n+1}^k} \alpha_\omega \right),$$

onde  $\omega'\bar{\omega} \in \mathcal{S}^{R_{n+1}^k}$  denota a configuração que coincide com  $\omega'$  em  $R_n^k$  e com  $\bar{\omega}$  em  $R_{n+1}^k \setminus R_n^k$ . Daí segue que

$$\sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_{n+1}}: (\omega \circ i_n)_{R_n^k} = \omega'} \alpha_\omega = \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_{n+1}}: (\omega \circ i_n)_{L_n^k} = \omega' \circ t_n^k} \alpha_\omega,$$

o que implica

$$(p_n)_*(H_d^+(\Delta_{n+1}; \mathbb{R})) \subset H_d^+(\Delta_n; \mathbb{R})$$

e

$$(p_n)_*(H_d^{+,1}(\Delta_{n+1}; \mathbb{R})) \subset H_d^{+,1}(\Delta_n; \mathbb{R}).$$

**Definição 3.3** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definimos os limites projetivos pondo

$$\lim_{\leftarrow (p_n)_*} C_d^+(\Delta_n; \mathbb{R}) := \{(c_n)_{n \in \mathbb{N}} : c_n \in C_d^+(\Delta_n; \mathbb{R}) \text{ e } (p_n)_*(c_{n+1}) = c_n, \forall n \in \mathbb{N}\},$$

$$\lim_{\leftarrow (p_n)_*} H_d^+(\Delta_n; \mathbb{R}) := \{(c_n)_{n \in \mathbb{N}} : c_n \in H_d^+(\Delta_n; \mathbb{R}) \text{ e } (p_n)_*(c_{n+1}) = c_n, \forall n \in \mathbb{N}\},$$

$$\lim_{\leftarrow (p_n)_*} H_d^{+,1}(\Delta_n; \mathbb{R}) := \{(c_n)_{n \in \mathbb{N}} : c_n \in H_d^{+,1}(\Delta_n; \mathbb{R}) \text{ e } (p_n)_*(c_{n+1}) = c_n, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Dada uma medida  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ , consideramos o funcional linear  $L_\mu \in \mathcal{C}(\Omega)^*$  definido por  $L_\mu(f) := \int f d\mu$  para todo  $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tomando  $\text{Ev}_n(\mu) = \text{Ev}_n(L_\mu)$ , temos, como caso particular de (3.1), a relação

$$\text{Ev}_n(\mu) = (p_n)_*(\text{Ev}_{n+1}(\mu)) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (3.3)$$

Note que a família  $\mathcal{A}$  formada pelo conjunto vazio e todas as uniões finitas de cilindros em  $\mathcal{C}$  define uma álgebra em  $\Omega$ , isto é, verificam-se que  $\Omega \in \mathcal{A}$ ,  $A^c \in \mathcal{A}$  sempre que  $A \in \mathcal{A}$  e  $A \cup B \in \mathcal{A}$  sempre que  $A, B \in \mathcal{A}$ .

**Teorema 3.1** A aplicação linear  $\text{Ev}$  satisfaz:

(i)  $\text{Ev}(\mathcal{M}(\Omega)) = \lim_{\leftarrow (p_n)_*} C_d^+(\Delta_n; \mathbb{R});$

(ii) quando restrita a  $\mathcal{M}(\Omega)$ ,  $\text{Ev}$  é uma bijeção sobre sua imagem;

(iii)  $\text{Ev}(\mathcal{M}_\Theta(\Omega)) = \lim_{\leftarrow (p_n)_*} H_d^+(\Delta_n; \mathbb{R});$

$$(iv) \text{ Ev}(\mathcal{P}_\Theta(\Omega)) = \lim_{\leftarrow (p_n)_*} H_d^{+,1}(\Delta_n; \mathbb{R}).$$

*Prova.*

(i)- Segue de (3.3) que

$$\text{Ev}(\mathcal{M}(\Omega)) \subset \lim_{\leftarrow (p_n)_*} C_d^+(\Delta_n; \mathbb{R}).$$

Reciprocamente, dada qualquer sequência  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $\lim_{\leftarrow (p_n)_*} C_d^+(\Delta_n; \mathbb{R})$ , seja  $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow [0, +\infty)$  a função tal que

$$c_n = \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_n}} \mathcal{F}(C_{n,\omega}) C_{n,\omega} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Para cada  $\omega' \in \mathcal{S}^{\Delta_n}$  e  $n \in \mathbb{N}$ , temos de (3.1) que

$$\sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_{n+1}}: \omega \circ i_n = \omega'} \mathcal{F}(C_{n+1,\omega}) = \mathcal{F}(C_{n,\omega'}). \quad (3.4)$$

Sabemos que todo elemento não-vazio  $A \in \mathcal{A}$  pode ser escrito como união finita de cilindros em  $\mathcal{C}$  dois a dois disjuntos. Dado  $A \in \mathcal{A}$ , seja  $A = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$  uma união finita de cilindros em  $\mathcal{C}$  dois a dois disjuntos. Definimos a função  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$  pondo

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{se } A = \emptyset, \\ \sum_{k=1}^n \mathcal{F}(A_k) & \text{se } A = \bigsqcup_{k=1}^n A_k, \ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Seja  $B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$ , onde  $B_k \cap B_j = \emptyset$  se  $k \neq j$ ,  $B \in \mathcal{A}$  e  $B_k \in \mathcal{A}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tomando  $C_n = B \setminus (\bigcup_{k=1}^n B_k)$ , temos que  $C_n^c \in \mathcal{T}_{prod}$ , pois tanto  $B$  quanto  $B_k$  são conjuntos abertos e fechados na topologia produto. Como  $\Omega$  munido da topologia produto é compacto e  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = \emptyset$ , existem  $C_{n_1}, \dots, C_{n_m}$  tais que  $\bigcup_{i=1}^m C_{n_i}^c = \Omega$ , o que implica que  $B \cap (\bigcup_{k=1}^p B_k)^c = \emptyset$ , onde  $p = \max\{n_i : i = 1, \dots, m\}$ . Daí segue que  $B \subset \bigcup_{k=1}^p B_k \subset B$ , ou seja, temos que  $B = \bigcup_{k=1}^p B_k$ . Dado  $A \in \mathcal{A}$ , suponhamos que  $\bigsqcup_{j=1}^m C_{n_j, \omega_j} = A = \bigsqcup_{k=1}^p C_{m_k, \bar{\omega}_k}$ . Tomando  $n = \max\{n_j, m_k : j = 1, \dots, m \text{ e } k = 1, \dots, p\}$ , podemos reescrever cada cilindro  $C_{n_j, \omega_j}$  (respectivamente  $C_{m_k, \bar{\omega}_k}$ ) como união de seus sub-cilindros de ordem  $n$ , ou seja, temos

$$\bigsqcup_{j=1}^{m'} C_{n, \omega'_j} = \bigsqcup_{j=1}^m C_{n_j, \omega_j} = A = \bigsqcup_{k=1}^p C_{m_k, \bar{\omega}_k} = \bigsqcup_{k=1}^{p'} C_{n, \bar{\omega}'_k}. \quad (3.5)$$

Podemos supor sem perda de generalidade que  $m' \leq p'$ . Assim, para cada  $j \in \{1, \dots, m'\}$ , de (3.5) segue que existe um único  $k \in \{1, \dots, p'\}$  tal que

$$C_{n, \omega'_j} = \bigsqcup_{k=1}^{p'} (C_{n, \omega'_j} \cap C_{n, \bar{\omega}'_k}) = C_{n, \bar{\omega}'_k}, \quad (3.6)$$

o que implica que  $m' = p'$ . Da definição de  $\mu$ , por um lado temos que  $\mu(A) = \sum_{j=1}^m \mathcal{F}(C_{n_j, \omega_j})$ , por outro lado temos que  $\mu(A) = \sum_{k=1}^p \mathcal{F}(C_{m_k, \bar{\omega}_k})$ . De (3.4) temos que

$$\sum_{j=1}^m \mathcal{F}(C_{n_j, \omega_j}) = \sum_{j=1}^{m'} \mathcal{F}(C_{n, \omega'_j}) \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^p \mathcal{F}(C_{m_k, \bar{\omega}_k}) = \sum_{k=1}^{p'} \mathcal{F}(C_{n, \bar{\omega}'_k}).$$

De (3.6) e do fato de  $m' = p'$ , concluímos que

$$\sum_{j=1}^{m'} \mathcal{F}(C_{n, \omega'_j}) = \sum_{k=1}^{p'} \mathcal{F}(C_{n, \bar{\omega}'_k}).$$

Assim, segue que  $\mu$  está bem definida e por vacuidade define uma medida em  $\mathcal{A}$ . Seja então  $\mu^* \in \mathcal{M}(\Omega)$  a extensão de  $\mu$ , a qual por construção verifica que  $\text{Ev}(\mu^*) = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

(ii)- Consideremos duas medidas  $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\Omega)$  tais que  $\text{Ev}(\mu) = \text{Ev}(\nu)$ . Assim, temos que  $\mu(C_{n, \omega}) = \nu(C_{n, \omega})$  para todo  $C_{n, \omega} \in \mathcal{C}$ . Como todo elemento não-vazio em  $\mathcal{A}$  pode ser escrito como união finita de cilindros em  $\mathcal{C}$  dois a dois disjuntos, temos que  $\mu$  coincide com  $\nu$  em  $\mathcal{A}$ . Então, pelo Teorema de Extensão de Kolmogorov, segue que  $\mu = \nu$ .

(iii)- Para todo  $k \in \{1, \dots, d\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $\omega' \in \mathcal{S}^{R_n^k}$ , consideremos os cilindros

$$C_{n, \omega'}^k = \{\omega \in \Omega : \omega_{R_n^k} = \omega'\} \quad \text{e} \quad C_{n, \omega' \circ t_n^k}^k = \{\omega \in \Omega : \omega_{L_n^k} = \omega' \circ t_n^k\}.$$

Para cada  $\omega \in \Omega$ , observe que  $(\omega - \bar{e}_k)_{R_n^k} = \omega'$  se, e somente se,  $\omega_{L_n^k} = \omega' \circ t_n^k$ , donde segue que  $C_{n, \omega' \circ t_n^k}^k = C_{n, \omega'}^k + \bar{e}_k$ . Para cada  $\mu \in \mathcal{M}_\Theta(\Omega)$ , temos que

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_n} : \omega_{L_n^k} = \omega' \circ t_n^k} \mu(C_{n, \omega}) &= \mu(C_{n, \omega' \circ t_n^k}^k) = \mu(C_{n, \omega'}^k + \bar{e}_k) = \mu(C_{n, \omega'}^k) \\ &= \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_n} : \omega_{R_n^k} = \omega'} \mu(C_{n, \omega}). \end{aligned}$$

Daí segue que  $\text{Ev}(\mu) \in \lim_{\leftarrow p_n^*} H_d^+(\Delta_n; \mathbb{R})$ . Reciprocamente, dada qualquer seqüência  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $\lim_{\leftarrow (p_n)^*} H_d^+(\Delta_n; \mathbb{R})$ , seja  $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow [0, +\infty)$  a função tal que

$$c_n = \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_n}} \mathcal{F}(C_{n, \omega}) C_{n, \omega} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , os coeficientes de  $c_n$  satisfazem as regras de Kirchoff de ordem  $n$ . Então, para todo  $\omega' \in \mathcal{S}^{\Delta_n}$  e  $k \in \{1, \dots, d\}$ , temos que

$$\sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_n} : \omega_{R_n^k} = \omega'} \mathcal{F}(C_{n, \omega}) = \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_n} : \omega_{L_n^k} = \omega' \circ t_n^k} \mathcal{F}(C_{n, \omega}). \quad (3.7)$$

Definimos a função  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$  pondo

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{se } A = \emptyset, \\ \sum_{k=1}^n \mathcal{F}(A_k) & \text{se } A = \bigsqcup_{k=1}^n A_k, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Pelo item (i) temos que  $\mu$  está bem definida e além disso define uma medida em  $\mathcal{A}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , de (3.7) temos que

$$\mu(C_{n,\omega'}^k) = \mu(C_{n,\omega'}^k + \bar{e}_k) \quad \text{para todo } \omega' \in \mathcal{S}^{R_n^k}, \quad k = 1, \dots, d \quad (3.8)$$

e

$$\mu(C_{n,\omega'ot_n^k}^k) = \mu(C_{n,\omega'ot_n^k}^k - \bar{e}_k) \quad \text{para todo } \omega' \in \mathcal{S}^{R_n^k}, \quad k = 1, \dots, d. \quad (3.9)$$

Dados  $C_{n,\omega} \in \mathcal{C}$  e  $k \in \{1, \dots, d\}$ , tomemos  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\Delta_n \subset R_m^k \cap L_m^k$ . Então, podemos considerar  $C_{n,\omega}$  escrito como

$$\bigsqcup_{\omega' \in \mathcal{S}^{R_m^k}: (\omega'ot_m^k)_{\Delta_n} = \omega} C_{m,\omega'ot_m^k}^k = C_{n,\omega} = \bigsqcup_{\omega' \in \mathcal{S}^{R_m^k}: \omega'_{\Delta_n} = \omega} C_{m,\omega'}^k$$

donde segue que

$$C_{n,\omega} - \bar{e}_k = \bigsqcup_{\omega' \in \mathcal{S}^{R_m^k}: (\omega'ot_m^k)_{\Delta_n} = \omega} (C_{m,\omega'ot_m^k}^k - \bar{e}_k) \quad \text{e} \quad C_{n,\omega} + \bar{e}_k = \bigsqcup_{\omega' \in \mathcal{S}^{R_m^k}: \omega'_{\Delta_n} = \omega} (C_{m,\omega'}^k + \bar{e}_k).$$

De (3.8) e (3.9) segue que  $\mu(C_{n,\omega} - \bar{e}_k) = \mu(C_{n,\omega}) = \mu(C_{n,\omega} + \bar{e}_k)$ . Tanto  $C_{n,\omega} - \bar{e}_k$  quanto  $C_{n,\omega} + \bar{e}_k$  podem ser escritos como união de cilindros em  $\mathcal{C}$  dois a dois disjuntos. Aplicando o mesmo raciocínio acima, temos que  $\mu(C_{n,\omega} \pm \bar{e}_{k_1} \pm \bar{e}_{k_2} \pm \dots \pm \bar{e}_{k_j}) = \mu(C_{n,\omega})$ . De modo geral, concluímos que  $\mu(C_{n,\omega} + \bar{m}) = \mu(C_{n,\omega})$  para todo  $\bar{m} \in \mathbb{Z}^d$ . Seja  $\mu^* \in \mathcal{M}(\Omega)$  a extensão de  $\mu$ . Para cada  $\bar{m} \in \mathbb{Z}^d$ , definimos a medida  $\nu_{\bar{m}} \in \mathcal{M}(\Omega)$  pondo  $\nu_{\bar{m}}(A) = \mu^*(A + \bar{m})$  para todo  $A \in \mathcal{B}(\Omega)$  e observamos que

$$\mu^*(A) = \mu(A) = \mu(A + \bar{m}) = \mu^*(A + \bar{m}) = \nu_{\bar{m}}(A) \quad \text{para todo } A \in \mathcal{C}, \quad \bar{m} \in \mathbb{Z}^d.$$

Segue pelo item (ii) que  $\mu^*(A) = \nu_{\bar{m}}(A)$  para todo  $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ ,  $\bar{m} \in \mathbb{Z}^d$ . Assim, temos que  $\mu^* \in \mathcal{M}_{\Theta}(\Omega)$  e por construção esta verifica  $\text{Ev}(\mu^*) = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

(iv)- Como toda medida finita não-nula é obtida de uma medida de probabilidade pela multiplicação de um número real positivo, de (iii) imediatamente temos (iv).  $\square$

### 3.3 Limites Indutivos e Potenciais

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , consideramos os espaços vetoriais duais  $C_d^*(\Delta_n; \mathbb{R})$  (respectivamente  $H_d^*(\Delta_n; \mathbb{R})$ ) de formas lineares sobre  $C_d(\Delta_n; \mathbb{R})$  (respectivamente  $H_d(\Delta_n; \mathbb{R})$ ) e a aplicação linear

$$(p_n)^* : C_d^*(\Delta_n; \mathbb{R}) \longrightarrow C_d^*(\Delta_{n+1}; \mathbb{R})$$

dada por

$$(p_n)^*(\tau) = \tau \circ (p_n)_* \text{ para todo } \tau \in C_d^*(\Delta_n; \mathbb{R}).$$

**Definição 3.4** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definimos os limites indutivos pondo

$$\lim_{\rightarrow (p_n)^*} C_d^*(\Delta_n; \mathbb{R}) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \left\{ (\tau_n)_{n \geq j} \in \prod_{n \geq j} C_d^*(\Delta_n; \mathbb{R}), \text{ onde } (p_n)^*(\tau_n) = \tau_{n+1}, \forall n \geq j \right\},$$

$$\lim_{\rightarrow (p_n)^*} H_d^*(\Delta_n; \mathbb{R}) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \left\{ (\tau_n)_{n \geq j} \in \prod_{n \geq j} H_d^*(\Delta_n; \mathbb{R}), \text{ onde } (p_n)^*(\tau_n) = \tau_{n+1}, \forall n \geq j \right\}.$$

Consideremos um potencial  $\Phi \in \mathcal{B}_{\Theta, \infty}$  com alcance  $R > 0$  e denotemos por  $n_0(\Phi)$  o menor inteiro  $n$  tal que o tamanho  $l(n)$  do cubo  $\Delta_n$  é maior que  $R - 1$ , ver Figura 3.1.

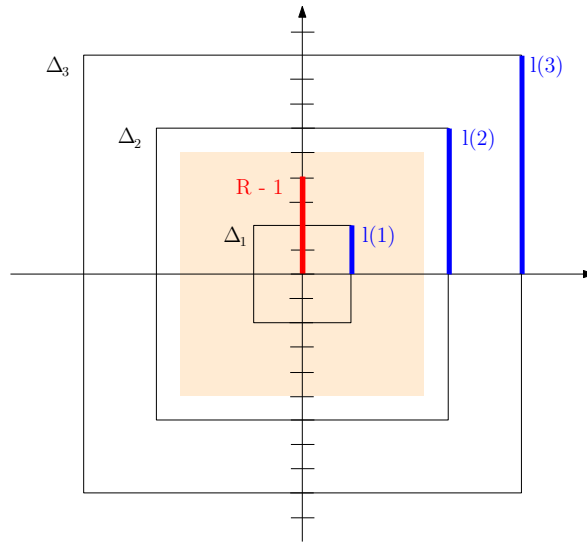


Figura 3.1:  $d = 2$  e  $n_0(\Phi) = 2$



Para cada  $B \ni 0$  tal que  $\text{diam}(B) \leq R$ , temos que  $B \subset \Delta_n$  para todo  $n \geq n_0(\Phi)$ . Como  $\Phi_B = 0$  para todo  $B \in \mathcal{F}$  que verifica  $\text{diam}(B) > R$ , então para cada  $\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_n}$  e  $n \geq n_0(\Phi)$ , temos que  $f_\Phi = \sum_{B \ni 0} |B|^{-1} \Phi_B$  restrita a  $C_{n,\omega}$  é constante. Denotamos essas constantes por  $f_\Phi^{n,\omega}$ . Assim, para cada  $n \geq n_0(\Phi)$ , o potencial  $\Phi$  define uma forma linear  $\text{Ev}_n^*(\Phi) : C_d(\Delta_n; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\text{Ev}_n^*(\Phi) \left( \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_n}} \alpha_{n,\omega} C_{n,\omega} \right) = \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_n}} \alpha_{n,\omega} f_\Phi^{n,\omega} \quad \text{para todo } \alpha_{n,\omega} \in \mathbb{R}.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} (p_n)^*(\text{Ev}_n^*(\Phi)) \left( \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_{n+1}}} \alpha_{n+1,\omega} C_{n+1,\omega} \right) &= \text{Ev}_n^*(\Phi) \left( (p_n)_* \left( \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_{n+1}}} \alpha_{n+1,\omega} C_{n+1,\omega} \right) \right) \\ &= \text{Ev}_n^*(\Phi) \left( \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_{n+1}}} \alpha_{n+1,\omega} C_{n,\omega \circ i_n} \right) \\ &= \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_{n+1}}} \alpha_{n+1,\omega} f_\Phi^{n,\omega \circ i_n}. \end{aligned}$$

Como  $C_{n+1,\omega} \subset C_{n,\omega \circ i_n}$  para todo  $\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_{n+1}}$ , temos que  $f_\Phi^{n+1,\omega} = f_\Phi^{n,\omega \circ i_n}$  para todo  $\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_{n+1}}$ . Daí segue que

$$\sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_{n+1}}} \alpha_{n+1,\omega} f_\Phi^{n,\omega \circ i_n} = \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_{n+1}}} \alpha_{n+1,\omega} f_\Phi^{n+1,\omega} = \text{Ev}_{n+1}^*(\Phi) \left( \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_{n+1}}} \alpha_{n+1,\omega} C_{n+1,\omega} \right).$$

Logo, concluímos que  $(\text{Ev}_n^*(\Phi))_{n \geq n_0(\Phi)} \in \lim_{\rightarrow (p_n)^*} C_d^*(\Delta_n; \mathbb{R})$ . Finalmente, podemos definir a aplicação linear  $\text{Ev}^* : \mathcal{B}_{\Theta,\infty} \longrightarrow \lim_{\rightarrow (p_n)^*} C_d^*(\Delta_n; \mathbb{R})$  por

$$\text{Ev}^*(\Phi) := (\text{Ev}_n^*(\Phi))_{n \geq n_0(\Phi)} \quad \text{para todo } \Phi \in \mathcal{B}_{\Theta,\infty}.$$

Seja  $(\mu, \Phi) \in \mathcal{M}(\Omega) \times \mathcal{B}_{\Theta,\infty}$ . Para cada  $n \geq n_0(\Phi)$ , observamos que  $f_\Phi = \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_n}} f_\Phi^{n,\omega} \chi_{n,\omega}$ , donde segue que

$$\text{Ev}_n^*(\Phi)(\text{Ev}_n(\mu)) = \text{Ev}_n^*(\Phi) \left( \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_n}} \mu(C_{n,\omega}) C_{n,\omega} \right) = \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_n}} \mu(C_{n,\omega}) f_\Phi^{n,\omega} = \langle \mu, \Phi \rangle.$$

# Capítulo 4

## *Shifts* de Tipo Finito e Noções de Ladrilhamentos

Neste capítulo, fornecemos outra caracterização para entropia topológica e introduzimos o conceito de *shift* de tipo finito. Mostramos que qualquer *shift* de tipo finito unicamente ergódico completo tem entropia topológica nula. Além disso, definimos ladrilhamento e enunciamos algumas de suas propriedades.

### 4.1 *Shifts* de Tipo Finito

**Definição 4.1** Dizemos que um conjunto fechado e invariante por translação  $X$  em  $\Omega$  é um *shift de tipo finito (STF)* se existe um conjunto  $F \in \mathcal{F}$  e um subconjunto  $P \subset \mathcal{S}^F$  tal que

$$X = \Sigma(F, P) := \{\omega \in \Omega : (\omega + \bar{m})_F \in P, \forall \bar{m} \in \mathbb{Z}^d\}.$$

**Exemplo 4.1** Seja  $\mathcal{S} = \{1, \dots, k\}$ . Podemos interpretar  $\mathcal{S}$  como um conjunto de cores e considerar  $X = X^k \subset \mathcal{S}^{\mathbb{Z}^d}$  consistindo de todas as configurações em que pontos adjacentes do reticulado têm cores diferentes. Claramente,  $X$  é um STF, sendo conhecido por “tabuleiro de xadrez” quando  $d = 2$ , ver [19] para mais detalhes.

Ladrilhamentos também fornecem exemplos de STF’s, ver, neste sentido, o Teorema 4.3.

Tomando  $\mathcal{S} = \{1, \dots, k\}$ , recordamos que no caso unidimensional  $X \subset \mathcal{S}^{\mathbb{Z}}$  é um STF se existe uma matriz de transição quadrada  $A$  de ordem  $k$  com entradas 0 ou 1 tal que

$$X = X_A := \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{Z}} : A(x_n, x_{n+1}) = 1, n \in \mathbb{Z}\}.$$

**Proposição 4.1** *Seja  $\{\Delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência crescente de cubos cuja união é  $\mathbb{Z}^d$ . Para qualquer STF  $X$  não-vazio e propriamente contido em  $\Omega$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que*

$$\text{Ev}_n(\mathcal{P}_\Theta(X)) \subset \partial C_d^{+,1}(\Delta_n; \mathbb{R}) \text{ para todo } n \geq n_0.$$

*Reciprocamente, para qualquer medida  $\mu \in \mathcal{P}_\Theta(\Omega)$  tal que  $\text{Ev}_n(\mu) \in \partial C_d^{+,1}(\Delta_n; \mathbb{R})$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $X_\mu$  um STF não-vazio e propriamente contido em  $\Omega$  tal que  $\mu \in \mathcal{P}_\Theta(X_\mu)$ .*

*Prova.* Consideremos um STF  $X$ , um conjunto  $F \in \mathcal{F}$  e um subconjunto  $P \subset \mathcal{S}^F$  tais que  $X = \Sigma(F, P)$ . Fixemos  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $F \subset \Delta_{n_0}$ . Para cada  $n \geq n_0$ , definimos o subconjunto  $P_n := \{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_n} : \omega_F \in P\}$ , o qual claramente verifica  $\Sigma(F, P) = \Sigma(\Delta_n, P_n)$ . Dado  $\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_n}$ , observemos que se  $C_{n,\omega} \cap X \neq \emptyset$ , então  $\omega \in P_n$ . Para cada medida  $\mu \in \mathcal{P}_\Theta(X)$ , temos que

$$\text{Ev}_n(\mu) = \sum_{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_n}} \mu(C_{n,\omega} \cap X) C_{n,\omega} = \sum_{\omega \in P_n} \mu(C_{n,\omega} \cap X) C_{n,\omega}.$$

Como  $X$  está contido propriamente em  $\Omega$ , existe  $\omega' \in \Omega$  tal que  $\omega'_{\Delta_n} \notin P_n$ , o que implica que  $\text{Ev}_n(\mu)$  pertence à face  $F_n^{\omega'_{\Delta_n}} \subset \partial C_d^{+,1}(\Delta_n; \mathbb{R})$ .

Reciprocamente, consideremos uma medida  $\mu \in \mathcal{P}_\Theta(\Omega)$  tal que  $\text{Ev}_n(\mu) \in \partial C_d^{+,1}(\Delta_n; \mathbb{R})$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ . Definimos  $P_n := \{\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_n}, \text{ onde } \mu(C_{n,\omega}) > 0\}$  e tomamos  $X_\mu = \Sigma(\Delta_n, P_n)$ . De  $\text{Ev}_n(\mu) \in \partial C_d^{+,1}(\Delta_n; \mathbb{R})$ , existe  $\omega' \in \mathcal{S}^{\Delta_n}$  tal que  $\text{Ev}_n(\mu) \in F_n^{\omega'}$ , o que implica  $\mu(C_{n,\omega'}) = 0$ . Daí segue que  $X_\mu$  está contido propriamente em  $\Omega$ . Para mostrarmos que  $X_\mu \neq \emptyset$  e que  $\mu \in \mathcal{P}_\Theta(X_\mu)$ , observe que  $\text{supp}(\mu) \subset \Omega$  é um conjunto invariante por translação. Assim, se  $\omega \in \text{supp}(\mu)$ , então  $\omega + \bar{m} \in \text{supp}(\mu)$  para todo  $\bar{m} \in \mathbb{Z}^d$ , donde segue que  $(\omega + \bar{m})_{\Delta_n} \in P_n$  para todo  $\bar{m} \in \mathbb{Z}^d$ . Portanto, mostramos que  $X_\mu \neq \emptyset$  e que  $\text{supp}(\mu) \subset X_\mu$ , o que implica que  $\mu \in \mathcal{P}_\Theta(X_\mu)$ .  $\square$

**Definição 4.2** *Seja  $X$  um STF. Dizemos que  $X$  é um STF unicamente ergódico se  $X$  é um conjunto unicamente ergódico.*

Sejam  $\{\Delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência crescente de cubos cuja a união é  $\mathbb{Z}^d$  e  $X = \Sigma(F, P)$  um STF. Denotamos por  $n_0(F, P)$  o menor inteiro positivo  $n$  tal que  $F \subset \Delta_n$ . Assim, para cada  $n \geq n_0(F, P)$ , definimos

$$N_n(X) = \inf \{ |P_n| : P_n \subset \mathcal{S}^{\Delta_n} \text{ e } X = \Sigma(\Delta_n, P_n) \}.$$

**Proposição 4.2** *Sejam  $\{\Delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência crescente de cubos centrados em zero tal que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n = \mathbb{Z}^d$  e  $X = \Sigma(F, P)$  um STF unicamente ergódico. Supondo que cada cubo  $\Delta_n$  possui tamanho  $l_n$ , então*

$$h_{top}((X, \Theta)) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2l_n + 1)^d} \log N_n(X).$$

*Prova.* Tomemos  $n_0 = n_0(F, P)$  e consideremos  $\alpha = \{C_{\Delta_{n_0}, \omega} \in \mathcal{C}_{n_0} : \omega \in P_{n_0}\}$  cobertura aberta de  $X = \Sigma(\Delta_{n_0}, P_{n_0})$  com  $|P_{n_0}| = N_{n_0}(X)$ . Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $m_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\sum_{\bar{m} \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda_m} 2^{-\|\bar{m}\|} < \epsilon \quad \text{para todo } m \geq m_0, \quad (4.1)$$

onde  $\Lambda_m = \mathbb{Z}^d \cap \prod_{i=1}^d [-m, m]$ . O refinamento comum  $\alpha^{\Lambda_{m_0}}$  é constituído por cilindros  $C_{\Lambda_{l_{n_0}+m_0}, \omega}$ , onde  $\omega \in \mathcal{S}^{\Lambda_{l_{n_0}+m_0}}$ . Segue de (4.1) que  $\sup\{\text{diam}(A) : A \in \alpha^{\Lambda_{m_0}}\} < \epsilon$ . Para cada  $n > n_0$ , existe  $m_n \in \mathbb{N}$  tal que  $l_{n_0} + m_n = l_n$ , o que permite considerar o refinamento comum  $\alpha^{\Lambda_{m_n}}$  como sendo uma família de cilindros  $C_{\Delta_n, \omega}$ , onde  $\omega \in \mathcal{S}^{\Delta_n}$ . Fixado  $n > n_0$ , tomamos  $P_n \subset \mathcal{S}^{\Delta_n}$  tal que  $|P_n| = N_n(X)$  com  $X = \Sigma(\Delta_n, P_n)$ . Considerando  $\beta = \{C_{\Delta_n, \omega} \in \mathcal{C}_n : \omega \in P_n\}$  cobertura aberta de  $X$  e  $\beta' = \{C_{\Delta_n, \omega_1}, \dots, C_{\Delta_n, \omega_k}\} \subset \alpha^{\Lambda_{m_n}}$  uma subcobertura com cardinalidade mínima  $k = N(\alpha^{\Lambda_{m_n}})$ , temos que  $\beta = \beta'$ , pois tanto  $\beta$  quanto  $\beta'$  cobrem  $X$ ,  $C_{\Delta_n, \omega} \cap X \neq \emptyset$  para todo  $\omega \in P_n$ ,  $C_{\Delta_n, \omega_i} \cap X \neq \emptyset$  para todo  $i = 1, \dots, k$  e dois cilindros sobre o mesmo cubo ou são disjuntos ou são iguais. Daí segue que  $N(\alpha^{\Lambda_{m_n}}) = |\beta'| = |\beta| = N_n(X)$ . Pela Proposição 1.8, concluímos que

$$\begin{aligned} h_{top}((X, \Theta)) &= \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_m} \log N(\alpha^{\Lambda_m}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_{m_n}} \log N(\alpha^{\Lambda_{m_n}}) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2l_n + 1)^d} \log N_n(X). \end{aligned}$$

□

**Definição 4.3** *Sejam  $X$  um STF unicamente ergódico e  $\mu \in \mathcal{P}_\Theta(\Omega)$  a medida cujo suporte está em  $X$ . Dizemos que  $X$  é um STF unicamente ergódico completo se  $\text{supp}(\mu) = X$ .*

**Teorema 4.1** *Sejam  $\{\Delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência crescente de cubos centrados em zero tal que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n = \mathbb{Z}^d$  e  $X = \Sigma(F, P)$  um STF unicamente ergódico completo. Supondo que cada cubo  $\Delta_n$  possui tamanho  $l_n$ , então*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_n(X)}{|\mathcal{S}|^{2^{2d+1} d l_{n_0} l_n^{d-1}}} \leq 1,$$

onde  $n_0 = n_0(F, P)$ . Em particular,  $X$  tem entropia topológica nula.

*Prova.* Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , lembremos que  $\Delta_n = \mathbb{Z}^d \cap \prod_{i=1}^d [-l_n, l_n]$ . Para qualquer  $n > n_0$  tal que  $l_n > 2l_{n_0} + 1$ , definimos

$$\partial^{n_0} \Delta_n := \mathbb{Z}^d \cap \left( \prod_{i=1}^d [-l_n, l_n] \setminus \prod_{i=1}^d [-l_n + 2l_{n_0} + 1, l_n - 2l_{n_0} - 1] \right). \quad (4.2)$$

Se assumirmos que  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_n(X)}{|\mathcal{S}|^{2^{2d+1} d l_{n_0} l_n^{d-1}}} > 1$ , existe  $n_1 > n_0$  tal que  $N_{n_1}(X) > |\mathcal{S}|^{2^{2d+1} d l_{n_0} l_{n_1}^{d-1}}$ .

Observamos que

$$\begin{aligned} |\partial^{n_0} \Delta_{n_1}| &\leq 2d(2l_{n_0} + 1)(2l_{n_1} + 1)^{d-1} \leq 2^d(2l_{n_0} + 1) \left( \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} (2l_{n_1})^{d-1-i} \right) \\ &\leq 2^d(2l_{n_0} + 1) d! (2l_{n_1})^{d-1} \\ &\leq 2^{2d+1} d! l_{n_0} l_{n_1}^{d-1}. \end{aligned}$$

Então, temos

$$|\mathcal{S}^{\partial^{n_0} \Delta_{n_1}}| \leq |\mathcal{S}|^{2^{2d+1} d l_{n_0} l_{n_1}^{d-1}} < N_{n_1}(X).$$

Tomando  $P_{n_1} \subset \mathcal{S}^{\Delta_{n_1}}$  tal que  $X = \Sigma(\Delta_{n_1}, P_{n_1})$  e  $|P_{n_1}| = N_{n_1}(X)$ , existem ao menos duas configurações  $\bar{\omega}, \bar{\omega}' \in P_{n_1}$  que coincidem quando restritas a  $\partial^{n_0} \Delta_{n_1}$ . Além disso, com relação à medida  $\mu \in \mathcal{P}_\Theta(\Omega)$  cujo suporte está em  $X$ , possuem medida estritamente positiva os cilindros  $C_{n_1, \bar{\omega}} = C_{\Delta_{n_1}, \bar{\omega}}, C_{n_1, \bar{\omega}'} = C_{\Delta_{n_1}, \bar{\omega}'} \in \mathcal{C}_{n_1}$ . Considerando a função indicadora  $\chi_{n_1, \bar{\omega}} \in \mathcal{C}(X)$ , o Lema 1.3 garante que a sequência de funções  $(A_j \chi_{n_1, \bar{\omega}}(\omega))_{j \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente para a função constante  $\mu(C_{n_1, \bar{\omega}} \cap X) = \mu(C_{n_1, \bar{\omega}})$ . Dado  $0 < \epsilon < \mu(C_{n_1, \bar{\omega}})$ , pelo Teorema de Birkhoff, existe  $j_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{1}{\lambda_j} \sum_{\bar{n} \in \Lambda_j} \chi_{n_1, \bar{\omega}}(\omega + \bar{n}) > \mu(C_{n_1, \bar{\omega}}) - \epsilon > 0 \quad \text{para todo } j \geq j_0, \omega \in X. \quad (4.3)$$

Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , consideramos

$$\tilde{\Delta}_k = \mathbb{Z}^d \cap \prod_{i=1}^d [-l_{n_1} - k(2l_{n_1} + 1), l_{n_1} + k(2l_{n_1} + 1)].$$

Tomando  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\Lambda_{j_0} \subset \tilde{\Delta}_{k_0}$ , de (4.3) temos que

$$\forall \omega \in X, \exists \bar{n} \in \tilde{\Delta}_{k_0} \mid \omega + \bar{n} \in C_{n_1, \bar{\omega}}. \quad (4.4)$$

Tomando  $K_0 = l_{n_1} + (k_0 + 1)(2l_{n_1} + 1)$ , para cada  $l \in \mathbb{N}$ , consideramos

$$\hat{\Delta}_l = \mathbb{Z}^d \cap \prod_{i=1}^d [-K_0 - l(2K_0 + 1), K_0 + l(2K_0 + 1)].$$

Fixado  $l \in \mathbb{N}$ , observe que  $|\hat{\Delta}_l| = (2l + 1)^d [2l_{n_1} + 2(k_0 + 1)(2l_{n_1} + 1) + 1]^d = (2l + 1)^d |\tilde{\Delta}_{k_0+1}|$ , ou seja,  $\hat{\Delta}_l$  pode ser escrito como a união de  $(2l + 1)^d$  cópias transladadas disjuntas de  $\tilde{\Delta}_{k_0+1}$ . Sejam  $\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_{(2l+1)^d} \in \hat{\Delta}_l$  os respectivos centros de tais cópias transladadas. Fixada uma configuração  $\omega \in X$ , segue de (4.4) que existem  $\bar{n}^1(\omega) - \bar{m}_1, \dots, \bar{n}^{(2l+1)^d}(\omega) - \bar{m}_{(2l+1)^d} \in \tilde{\Delta}_{k_0}$  tais que

$$(\omega + \bar{m}_i) + (\bar{n}^i(\omega) - \bar{m}_i) = \omega + \bar{n}^i(\omega) \in C_{n_1, \bar{\omega}} \quad \text{para todo } i = 1, \dots, (2l + 1)^d. \quad (4.5)$$

Note que a diferença entre os lados dos cubos  $\tilde{\Delta}_{k_0+1}$  e  $\tilde{\Delta}_{k_0}$  é dada por  $K_0 - l_{n_1} - k_0(2l_{n_1} + 1) = 2l_{n_1} + 1$ , a qual é maior que o lado de  $\Delta_{n_1}$ . Daí segue que  $\Delta_{n_1}^i(\omega) := \Delta_{n_1} + \bar{n}^i(\omega) \subset \tilde{\Delta}_{k_0+1} + \bar{m}_i$ , onde  $i = 1, \dots, (2l + 1)^d$ . Finalmente, definimos

$$\eta = \begin{cases} \eta_{\bar{n}} = \bar{\omega}'(\bar{n} - \bar{n}^i(\omega)) & \text{se } \bar{n} \in \Delta_{n_1}^i(\omega), \text{ onde } i = 1, \dots, (2l + 1)^d, \\ \eta_{\bar{n}} = \omega_{\bar{n}} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Na Figura 4.1, os quadrados cinzas representam cópias transladadas de  $\tilde{\Delta}_{k_0+1}$ , os quadrados azuis, cópias transladadas de  $\tilde{\Delta}_{k_0}$ , os quadrados pretos, cópias transladadas de  $\Delta_{n_1}$  e os retângulos vermelhos, cópias transladadas de  $\mathbb{Z}^d \cap \prod_{i=1}^d [-l_{n_1} + 2l_{n_0} + 1, l_{n_1} - 2l_{n_0} - 1]$ . Efetivamente, a configuração  $\eta$  difere da configuração  $\omega$  apenas nos retângulos vermelhos. Seja  $P_{n_0} \subset \mathcal{S}^{\Delta_{n_0}}$  tal que  $X = \Sigma(\Delta_{n_0}, P_{n_0})$ . Mostraremos que  $\eta \in X = \Sigma(\Delta_{n_0}, P_{n_0})$ . Como  $\bar{\omega}, \bar{\omega}' \in P_{n_1}$  coincidem quando restritas a  $\partial^{n_0} \Delta_{n_1}$ , segue de (4.5) que  $\eta$  e  $\omega$  coincidem quando

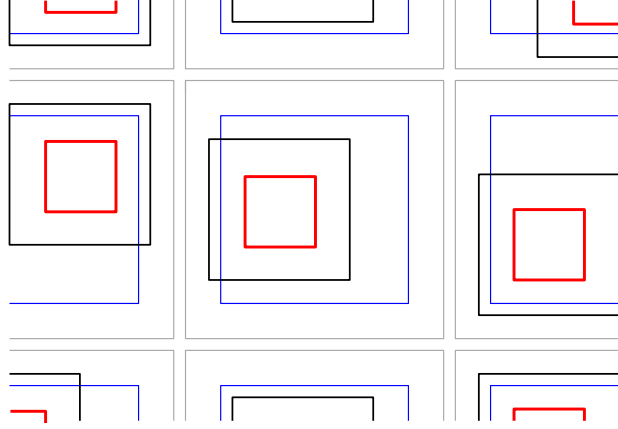


Figura 4.1: Representação da configuração  $\eta$  com  $d = 2$

restritas a  $\partial^{n_0} \Delta_{n_1} + \bar{n}^i(\omega)$ , com  $i = 1, \dots, (2l+1)^d$ . Assim, temos que  $\eta$  e  $\omega$  coincidem quando restritas a

$$\mathbb{Z}^d \setminus \bigcup_{i=1}^{(2l+1)^d} \left( \mathbb{Z}^d \cap \prod_{j=1}^d [-l_{n_1} + 2l_{n_0} + 1, l_{n_1} - 2l_{n_0} - 1] \right) + \bar{n}^i(\omega).$$

Portanto, se  $\bar{m} \in \mathbb{Z}^d$  é tal que

$$(\Delta_{n_0} + \bar{m}) \cap \left( \bigcup_{i=1}^{(2l+1)^d} \left( \mathbb{Z}^d \cap \prod_{j=1}^d [-l_{n_1} + 2l_{n_0} + 1, l_{n_1} - 2l_{n_0} - 1] \right) + \bar{n}^i(\omega) \right) = \emptyset,$$

então  $(\eta + \bar{m})_{\Delta_{n_0}} = (\omega + \bar{m})_{\Delta_{n_0}} \in P_{n_0}$ . Por outro lado, se a interseção acima é não-vazia, como a diferença entre os lados dos cubos em (4.2) é dada por  $l_{n_1} - (l_{n_1} - 2l_{n_0} - 1) = 2l_{n_0} + 1$ , segue que  $\Delta_{n_0} + \bar{m} \subset \Delta_{n_1}^i(\omega)$  para algum  $i = 1, \dots, (2l+1)^d$ . Logo, pela definição de  $P_{n_1} \subset \mathcal{S}^{\Delta_{n_1}}$ , existe  $\omega' \in X$  tal que  $(\omega' + \bar{n}^i(\omega))_{\Delta_{n_1}} = \bar{\omega}' = (\eta + \bar{n}^i(\omega))_{\Delta_{n_1}}$ , o que implica imediatamente que  $(\eta + \bar{m})_{\Delta_{n_0}} = (\omega' + \bar{m})_{\Delta_{n_0}} \in P_{n_0}$ . Como  $\bar{m} \in \mathbb{Z}^d$  é arbitrário, segue que  $\eta \in X$ . Por construção, temos que

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda_j} \sum_{\bar{n} \in \Lambda_j} \chi_{n_1, \bar{\omega}}(\eta + \bar{n}) \leq \mu(C_{n_1, \bar{\omega}}) - \frac{1}{(2K_0 + 1)^d},$$

o que é uma contradição. Portanto, devemos ter

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_n(X)}{|\mathcal{S}|^{2^{2d+1} d l_{n_0} l_n^{d-1}}} \leq 1.$$

Em particular, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$N_n(X) \leq 2|\mathcal{S}|^{2^{2d+1} d l_{n_0} l_n^{d-1}} \text{ para todo } n \geq N.$$

Pela Proposição 4.2, temos

$$0 \leq h_{top}((X, \Theta)) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2d+1} d! l_{n_0} l_n^{d-1} \log |\mathcal{S}| + \log 2}{(2l_n + 1)^d} = 0,$$

donde segue que  $h_{top}((X, \Theta)) = 0$ . □

**Definição 4.4** *Seja  $d = 2$ . Para  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ , consideremos  $\Delta_{n_1, n_2} := \mathbb{Z}^2 \cap [1, n_1] \times [1, n_2]$ . Para cada  $\omega \in \Omega$  e quaisquer  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ , definimos*

$$N(\omega, n_1, n_2) := \left| \{ (\omega + \bar{m})_{\Delta_{n_1, n_2}} \in \mathcal{S}^{\Delta_{n_1, n_2}} : \bar{m} \in \mathbb{Z}^2 \} \right|.$$

Em poucos termos,  $N(\omega, n_1, n_2)$  denota o número de configurações em  $\mathcal{S}^{\Delta_{n_1, n_2}}$  que visita a órbita de  $\omega$ . O próximo teorema é um resultado recente provado por A. Quas e L. Zamboni, uma demonstração do mesmo pode ser encontrada em [14].

**Teorema 4.2** *Seja  $d = 2$ . Se a órbita de  $\omega \in \Omega$  não é periódica, então*

$$N(\omega, n_1, n_2) > \frac{n_1 n_2}{16} \quad \text{para quaisquer } n_1, n_2 \in \mathbb{N}.$$

Para  $d = 2$ , a proposição a seguir fornece uma indicação sobre as dimensões dos subespaços contidos nas faces de  $\partial C_2^{+,1}(\Delta_n; \mathbb{R})$ , onde estão localizadas as medidas invariantes por translação de *shifts* de tipo finito unicamente ergódicos completos.

**Proposição 4.3** *Sejam  $d = 2$ ,  $\{\Delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência crescente de cubos centrados em zero tal que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n = \mathbb{Z}^2$  e  $X = \Sigma(F, P)$  um STF unicamente ergódico completo que não se reduz a uma órbita periódica. Supondo que cada cubo  $\Delta_n$  possui tamanho  $l_n$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que*

$$\frac{(2l_n + 1)^2}{16} < N_n(X) \leq 2|\mathcal{S}|^{2^6 l_{n_0} l_n} \quad \text{para todo } n \geq N,$$

onde  $n_0 = n_0(F, P)$ .

*Prova.* Pelo Teorema 4.1, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que a estimativa à direita se verifica. Para mostrarmos a estimativa à esquerda, para cada  $n \geq N$ , tomamos  $n_1 = n_2 = 2l_n + 1$  e consideramos uma configuração  $\omega \in X$  cuja órbita não é periódica. Como  $\Delta_{n_1, n_2} = \Delta_n + (l_n + 1, l_n + 1)$ , temos

$$N(\omega, n_1, n_2) = \left| \{ (\omega + (l_n + 1, l_n + 1) + \bar{m})_{\Delta_n} \in \mathcal{S}^{\Delta_n} : \bar{m} \in \mathbb{Z}^2 \} \right| \leq N_n(X). \quad (4.6)$$



Pelo Teorema 4.2 e de (4.6), temos

$$\frac{(2l_n + 1)^2}{16} < N_n(X) \quad \text{para todo } n \geq N,$$

o que prova o teorema. □

## 4.2 Noções de Ladrilhamentos

Seja  $\mathbb{R}^d$  o espaço euclidiano  $d$ -dimensional equipado com uma base ortonormal  $\mathcal{B}$ . Sejam  $p \subset \mathbb{R}^d$  um poliedro e  $s \in \mathcal{S}$  um símbolo. O par ordenado  $(p, s)$  denota o poliedro  $p$  marcado por  $s \in \mathcal{S}$ . Dizemos que  $s \in \mathcal{S}$  é a *marca* de  $(p, s)$ , o qual denotamos apenas por  $p$ .

**Definição 4.5** *Dizemos que um poliedro marcado por uma letra em  $\mathcal{S}$  é uma prototelha.*

**Definição 4.6** *Seja  $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$  um conjunto finito de prototelhas. Um conjunto de poliedros  $\{t_i : i \in \mathbb{Z}\}$  marcados com letras em  $\mathcal{S}$  é um ladrilhamento de  $\mathbb{R}^d$  através de  $\mathcal{P}$  se:*

- (i)  $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} t_i = \mathbb{R}^d$ ;
- (ii)  $\text{Int}(t_i) \cap \text{Int}(t_j) = \emptyset$  se, e somente se,  $i \neq j$ ;
- (iii) se  $t_i \cap t_j \neq \emptyset$  e  $i \neq j$ , então  $t_i$  e  $t_j$  compartilham uma face  $d - 1$ -dimensional;
- (iv) para todo  $i \in \mathbb{Z}$ , existem  $j(i) \in \{1, \dots, n\}$  e  $u_i \in \mathbb{R}^d$  tais que  $t_i = p_{j(i)} + u_i$  e a marca de  $t_i$  coincide com a marca de  $p_{j(i)}$ .

Os poliedros  $t_i$  são chamados *telhas*. Observe que  $\mathbb{R}^d$  não pode ser ladrilhado por um conjunto finito de telhas e que obstruções para realizar um ladrilhamento são devidas exclusivamente à geometria do poliedro, não de sua marca.

Seja  $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$  um conjunto finito de prototelhas do qual é possível construir um ladrilhamento de  $\mathbb{R}^d$ . Denotamos por  $\mathcal{T}(\mathcal{P})$  o conjunto de todos os ladrilhamentos de  $\mathbb{R}^d$  através de  $\mathcal{P}$ . O grupo  $\mathbb{R}^d$  opera naturalmente sobre  $\mathcal{T}(\mathcal{P})$  pela ação  $\bar{\Theta} = (\bar{\Theta}^u : u \in \mathbb{R}^d)$ , onde  $\bar{\Theta}^u : \mathcal{T}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{P})$  é a aplicação translação sobre  $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ , ou seja,  $\bar{\Theta}^u(T) = T'$  onde  $T'$  é obtido

pela translação de todos os poliedros em  $T$  pelo vetor  $u \in \mathbb{R}^d$ . Por conveniência, escrevemos  $T' = T + u$ .

Denotamos por  $B_\epsilon(0)$  a bola aberta com raio  $\epsilon > 0$  centrada em  $0 \in \mathbb{R}^d$ . Dados  $T, T' \in \mathcal{T}(\mathcal{P})$  e  $u \in \mathbb{R}^d$ ,  $(T + u) \cap B_{\frac{1}{\epsilon}}(0) = T' \cap B_{\frac{1}{\epsilon}}(0)$  significa que  $T + u$  e  $T'$  coincidem em  $B_{\frac{1}{\epsilon}}(0)$ .

**Lema 4.1** *Para  $T, T' \in \mathcal{T}(\mathcal{P})$ , definimos*

$$\varrho(T, T') := \inf \left\{ \{1\} \cup \left\{ \epsilon \in (0, 1) : \text{existe } u \in B_\epsilon(0) \text{ com } (T + u) \cap B_{\frac{1}{\epsilon}}(0) = T' \cap B_{\frac{1}{\epsilon}}(0) \right\} \right\}.$$

*Então  $\varrho$  define uma métrica.*

*Prova.* Provaremos somente a desigualdade triangular. Sem perda de generalidade, suponhamos que  $0 < \varrho(T, T') = a' \leq b' = \varrho(T', T'')$  com  $a' + b' < 1$ . Para  $0 < \epsilon < 1 - (a' + b')$ , existem  $a, b \in (0, 1)$ ,  $u \in B_a(0)$  e  $v \in B_b(0)$  tais que

$$a' + \frac{\epsilon}{2} > a \quad \text{com} \quad (T + u) \cap B_{\frac{1}{a}}(0) = T' \cap B_{\frac{1}{a}}(0) \quad (4.7)$$

e

$$b' + \frac{\epsilon}{2} > b \quad \text{com} \quad T' \cap B_{\frac{1}{b}}(0) = (T'' - v) \cap B_{\frac{1}{b}}(0). \quad (4.8)$$

Tomando  $c = a + b$ , temos que  $0 < c < 1$  com  $B_{\frac{1}{c}}(0) \subset (B_{\frac{1}{a}}(0) \cap B_{\frac{1}{b}}(0))$ . Como caso particular de (4.7) e (4.8), temos que  $w = u + v \in B_c(0)$  com  $(T + w) \cap B_{\frac{1}{c}}(0) = T'' \cap B_{\frac{1}{c}}(0)$ . Daí segue que  $\varrho(T, T'') \leq c = \varrho(T, T') + \varrho(T', T'') + \epsilon$ . Como  $\epsilon$  é arbitrariamente pequeno, concluímos a demonstração.  $\square$

Munido com a topologia induzida pela métrica  $\varrho$ , segue que  $\mathcal{T}(\mathcal{P})$  é um espaço topológico compacto e as ações  $\bar{\Theta}^u$  são contínuas, ver [15] para mais detalhes.

Denotamos por  $\mathcal{T}_0(\mathcal{P})$  o conjunto de todos os ladrilhamentos  $T = \{t_i : i \in \mathbb{Z}\} \in \mathcal{T}(\mathcal{P})$  tal que  $0 \in \mathbb{R}^d$  é o baricentro de alguma telha  $t_i \in T$ . Frequentemente,  $\mathcal{T}_0(\mathcal{P})$  é chamado de *transversal canônica* do espaço dos ladrilhamentos, sendo um conjunto totalmente desconexo, ver [15]. Observamos que se  $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}$  é uma coleção de cubos unitários marcados por letras em  $\mathcal{S}$  com  $|\mathcal{P}_{\mathcal{S}}| = |\mathcal{S}|$ , de forma que as faces são paralelas aos vetores da base ortonormal  $\mathcal{B}$ , então  $\mathcal{T}_0(\mathcal{P})$  claramente é homeomorfo a  $\Omega = \mathcal{S}^{\mathbb{Z}^d}$ .

**Definição 4.7** *Uma prototelha de Wang é um quadrado unitário cuja as arestas são coloridas e paralelas aos vetores da base canônica em  $\mathbb{R}^2$ . O conjunto de cores que colore as arestas do quadrado unitário pode ser vista como sendo sua marca. Com isto,  $\mathcal{S}$  é o conjunto de quádruplas de cores, ficando subentendida uma certa ordem de coloração.*

Seja  $\mathcal{W}$  uma coleção finita de prototelhas de Wang distintas. Denotamos por  $\mathcal{T}_{\mathcal{W}} \subset \mathcal{T}(\mathcal{W})$  o subconjunto dos ladrilhamentos de  $\mathbb{R}^2$  através de  $\mathcal{W}$  tal que qualquer par de arestas adjacentes tem mesma cor. Chamamos  $\mathcal{T}_{\mathcal{W}}$  de *espaço dos ladrilhamentos de Wang*. Todo ladrilhamento  $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{W}}$  pode ser transladado por um vetor  $u_T \in \mathbb{R}^2$  de forma que cada prototelha de Wang esteja centrada sobre um ponto do reticulado  $\mathbb{Z}^2$ , permitindo assim associar ao ladrilhamento  $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{W}}$  um elemento em  $\mathcal{W}^{\mathbb{Z}^2}$ .

**Definição 4.8** *Dado  $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{W}}$ , consideramos  $X_{\mathcal{W},T} \subset \mathcal{W}^{\mathbb{Z}^2}$  como sendo a órbita do ladrilhamento  $T + u_T \in \mathcal{W}^{\mathbb{Z}^2}$ .*

O próximo resultado é uma útil observação feita por K. Schmidt. Uma demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em [19].

**Teorema 4.3** *Para qualquer coleção finita  $\mathcal{W}$  de prototelhas de Wang distintas e qualquer ladrilhamento  $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{W}}$ , temos que  $X_{\mathcal{W},T}$  é um shift de tipo finito em  $\mathcal{W}^{\mathbb{Z}^2}$ .*

Concluimos o capítulo descrevendo *ladrilhamentos de Penrose com regras locais*, o qual é um ladrilhamento construído com um conjunto de quarenta triângulos distintos (prototelhas de Penrose distintas). Para formar este conjunto, consideramos apenas dois triângulos que são decorados com setas sobre suas arestas e são rotacionados por todas as rotações com ângulo múltiplo de  $\frac{\pi}{5}$ . Estes triângulos fundamentais são mostrados na Figura 4.2.

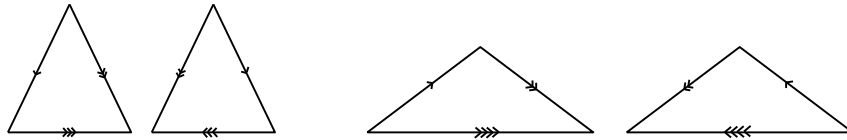


Figura 4.2: Prototelhas de Penrose

O próximo teorema é um resultado útil, uma demonstração do mesmo podendo ser encontrada, por exemplo, em [16].

**Teorema 4.4** *Tomando  $\mathcal{T}(\text{Penrose})$  como sendo o espaço de todos os ladrilhamentos de Penrose, temos que o sistema dinâmico  $(\mathcal{T}(\text{Penrose}), \mathbb{R}^2)$  é minimal e unicamente ergódico. Além disso,  $(\mathcal{T}(\text{Penrose}), \mathbb{R}^2)$  tem entropia nula.*

O teorema enunciado acima indica que um ladrilhamento de Penrose, ver Figura 4.3, apresenta as propriedades fundamentais de um quase-cristal.

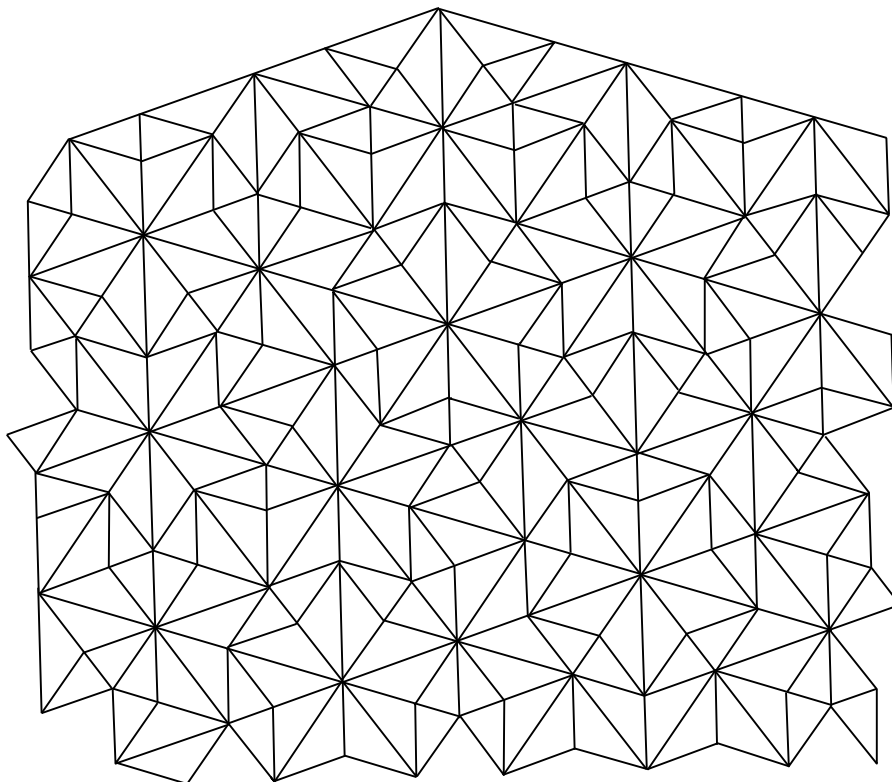


Figura 4.3: Ladrilhamento de Penrose

# Apêndice A

## Prova do Teorema Ergódico de Birkhoff para $\mathbb{Z}^d$ -ações

Nesse apêndice, para conveniência do leitor, apresentamos uma demonstração do Teorema Ergódico de Birkhoff para  $\mathbb{Z}^d$ -ações. Ressaltamos que este resultado se encontra registrado na literatura, como, por exemplo, em [11].

**Definição A.1** *Um sistema dinâmico preservando medida é uma quádrupla  $(X, \mathcal{A}, \mu, \mathcal{T})$ , onde  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  é um espaço de probabilidade e a ação  $\mathcal{T} = (T^g : g \in G)$  do semigrupo  $G = \mathbb{Z}_+^d$  ou do grupo  $G = \mathbb{Z}^d$  satisfaz:*

- (i)  $T^g : X \rightarrow X$  é  $\mathcal{A}$ -mensurável e  $\mu(T^{-g}A) = \mu(A)$  para quaisquer  $A \in \mathcal{A}, g \in G$ ;
- (ii)  $T^0 = Id_X$  e  $T^{g+g'} = T^g \circ T^{g'}$  para todos  $g, g' \in G$ .

Uma função  $\mathcal{A}$ -mensurável  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é  $\mathcal{T}$ -invariante mod  $\mu$  se, para cada  $g \in G$ , temos que  $f \circ T^g = f$  em  $\mu$ -q.t.p. Definimos

$$\mathcal{I}_\mu(\mathcal{T}) := \{A \in \mathcal{A} : \mu(T^{-g}A \Delta A) = 0 \text{ para todo } g \in G\}$$

e

$$\mathcal{I}(\mathcal{T}) := \{A \in \mathcal{A} : T^{-g}A = A \text{ para todo } g \in G\}.$$

Então  $\mathcal{I}_\mu(\mathcal{T}) = \mathcal{I}(\mathcal{T}) \pmod{\mu}$ , pois para cada  $A \in \mathcal{I}_\mu(\mathcal{T})$ , temos que  $A' = \bigcup_{g \in G} (\bigcap_{h \in G} T^{-(g+h)} A)$  pertence a  $\mathcal{I}(\mathcal{T})$  e  $\mu(A \Delta A') = 0$ .

Dizemos que  $\mathcal{A}'$  é uma *sub- $\sigma$ -álgebra* de  $\mathcal{A}$  se  $\mathcal{A}'$  é uma  $\sigma$ -álgebra e está contida em  $\mathcal{A}$ . É fácil verificar que  $\mathcal{I}(\mathcal{T})$  e  $\mathcal{I}_\mu(\mathcal{T})$  são sub- $\sigma$ -álgebras de  $\mathcal{A}$  e que qualquer função  $\mathcal{A}$ -mensurável  $f$  é  $\mathcal{T}$ -invariante  $\pmod{\mu}$  se, e somente se,  $f$  é uma função  $\mathcal{I}_\mu(\mathcal{T})$ -mensurável.

Seja  $\{e_1, \dots, e_d\}$  a base canônica do reticulado  $G$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definimos

$$\Lambda_n := \left\{ g = \sum_{i=1}^d g_i e_i \in G : |g_i| < n \text{ para todo } i = 1, \dots, d \right\} \text{ e } \lambda_n := |\Lambda_n|.$$

**Teorema A.1 (Teorema Ergódico de Birkhoff)** *Seja  $(X, \mathcal{A}, \mu, \mathcal{T})$  um sistema dinâmico preservando medida. Para cada função  $f \in L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$ , o limite*

$$\bar{f}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{g \in \Lambda_n} f(T^g x) \quad (\text{A.1})$$

*existe em  $\mu$ -q.t.p.  $x \in X$ . Além disso, a função  $\bar{f}$  é  $\mathcal{T}$ -invariante  $\pmod{\mu}$  e*

$$\int_A \bar{f} d\mu = \int_A f d\mu \text{ para todo } A \in \mathcal{I}_\mu(\mathcal{T}). \quad (\text{A.2})$$

Observamos que (A.2) define  $\bar{f}$  em  $\mu$ -q.t.p. no sentido abaixo descrito.

**Definição A.2** *Seja  $\mathcal{A}'$  uma sub- $\sigma$ -álgebra de  $\mathcal{A}$ . Para cada  $f \in L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$ , existe uma função  $\mathcal{A}'$ -mensurável  $\tilde{f}$  que é unicamente determinada  $\pmod{\mu}$  pela seguinte propriedade:*

$$\int_A f d\mu = \int_A \tilde{f} d\mu \text{ para todo } A \in \mathcal{A}'. \quad (\text{A.3})$$

*A classe de equivalência  $\pmod{\mu}$  da função  $\tilde{f}$  é chamada esperança condicional e denotada por  $\mathbb{E}_\mu[f \mid \mathcal{A}']$ .*

Faremos a demonstração do Teorema Ergódico de Birkhoff tomando  $G = \mathbb{Z}_+^d$ , pois o caso em que  $G = \mathbb{Z}^d$  se reduz ao caso  $G = \mathbb{Z}_+^d$ . Com efeito, para cada  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_d) \in \{-1, 1\}^d$ , consideramos a ação  $\mathcal{T}_\sigma = (T_\sigma^g : g = \sum_{i=1}^d g_i e_i \in \mathbb{Z}_+^d)$ , onde  $T_\sigma^g := T^{\sigma * g}$  com  $\sigma * g := \sum_{i=1}^d \sigma_i g_i e_i$ .

Mostraremos que todas as  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{I}_\mu(\mathcal{T}_\sigma)$  são idênticas e coincidem com  $\mathcal{I}_\mu(\mathcal{T})$ . De fato, para  $A \in \mathcal{A}$  e  $g \in \mathbb{Z}^d$ , observamos que

$$\mu(T^{-g}A \triangle A) = \mu(T^gA \triangle A). \quad (\text{A.4})$$

Trivialmente temos que  $\mathcal{I}_\mu(\mathcal{T}) \subset \bigcap_\sigma \mathcal{I}_\mu(\mathcal{T}_\sigma)$ . Para cada  $g \in \mathbb{Z}^d$ , existem  $\sigma_g \in \{-1, 1\}^d$  e  $\tilde{g} \in \mathbb{Z}_+^d$  tais que  $g = \sigma_g * \tilde{g}$ . Dado  $A \in \bigcap_\sigma \mathcal{I}_\mu(\mathcal{T}_\sigma)$ , temos que

$$\mu(T^{-g}A \triangle A) = \mu(T^{-\sigma_g * \tilde{g}}A \triangle A) = 0,$$

donde segue que  $A \in \mathcal{I}_\mu(\mathcal{T})$ . Logo, mostramos que  $\mathcal{I}_\mu(\mathcal{T}) = \bigcap_\sigma \mathcal{I}_\mu(\mathcal{T}_\sigma)$ . Dados  $\sigma, \sigma' \in \{-1, 1\}^d$ , mostraremos agora que  $\mathcal{I}_\mu(\mathcal{T}_\sigma) = \mathcal{I}_\mu(\mathcal{T}_{\sigma'})$ . Dados  $A \in \mathcal{I}_\mu(\mathcal{T}_\sigma)$  e  $g = \sum_{i=1}^d g_i e_i \in \mathbb{Z}_+^d$ , observamos que

$$\sigma' * g = \sum_{i=1}^d \sigma'_i g_i e_i = \sum_{i=1}^d \sigma'_i \sigma_i \sigma_i g_i e_i = \sum_{i=1}^d (\sigma'_i \sigma_i) \sigma * g_i e_i.$$

Como  $\sigma'_i \sigma_i \in \{-1, 1\}$  para todo  $i \in \{1, \dots, d\}$ , consideramos

$$g^+ = \sum_{i : \sigma'_i \sigma_i = 1} g_i e_i \quad \text{e} \quad g^- = \sum_{i : \sigma'_i \sigma_i = -1} g_i e_i.$$

Então  $\sigma' * g = \sigma * g^+ - \sigma * g^-$ , donde

$$\mu(T^{-\sigma' * g}A \triangle A) = \mu(T^{-\sigma * g^+ + \sigma * g^-}A \triangle A) = \mu(T^{\sigma * g^-}A \triangle T^{\sigma * g^+}A). \quad (\text{A.5})$$

Segue de (A.4) que

$$\mu(T^{\sigma * g^+}A \triangle A) = 0 = \mu(T^{\sigma * g^-}A \triangle A). \quad (\text{A.6})$$

Usando propriedade da diferença simétrica, temos que

$$\mu(T^{\sigma * g^-}A \triangle T^{\sigma * g^+}A) \leq \mu(T^{\sigma * g^-}A \triangle A) + \mu(T^{\sigma * g^+}A \triangle A) = 0,$$

o que por (A.5) implica  $A \in \mathcal{I}_\mu(\mathcal{T}_{\sigma'})$ . Por simetria, temos que  $\mathcal{I}_\mu(\mathcal{T}_{\sigma'}) \subset \mathcal{I}_\mu(\mathcal{T}_\sigma)$ , donde segue que  $\mathcal{I}_\mu(\mathcal{T}_\sigma) = \mathcal{I}_\mu(\mathcal{T}_{\sigma'})$ . O fato que  $\mathcal{I}_\mu(\mathcal{T}) = \bigcap_\sigma \mathcal{I}_\mu(\mathcal{T}_\sigma)$  implica, enfim,  $\mathcal{I}_\mu(\mathcal{T}) = \mathcal{I}_\mu(\mathcal{T}_\sigma)$ .

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , consideramos  $\Lambda_n^+ := \mathbb{Z}_+^d \cap \Lambda_n$  e  $\lambda_n^+ := |\Lambda_n^+|$ . Supondo válido o Teorema Ergódico de Birkhoff para a ação  $\mathcal{T}_\sigma$  com  $\sigma \in \{-1, 1\}^d$ , então para cada  $f \in L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$ , o limite

$$\bar{f}_\sigma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda_n^+} \sum_{g \in \Lambda_n^+} f(T_\sigma^g x)$$

existe em  $\mu$ -q.t.p.  $x \in X$ . Se fosse verdade que  $\sum_{g \in \Lambda_n} f \circ T^g = \sum_{\sigma} \sum_{g \in \Lambda_n^+} f \circ T_{\sigma}^g$ , imediatamente teríamos  $\bar{f} = 2^{-d} \sum_{\sigma} \bar{f}_{\sigma} = \mathbb{E}_{\mu}[f \mid \mathcal{I}_{\mu}(\mathcal{T})]$   $\mu$ -q.t.p. Essa decomposição de  $\Lambda_n$ , porém, contém elementos que são contados mais de uma vez. Com efeito, os elementos  $g = \sum_{i=1}^d g_i e_i \in \Lambda_n$  com exatamente  $k$  índices  $i$  para os quais  $g_i = 0$  são contados  $2^k$  vezes. Sendo assim, para cada  $k \in \{1, \dots, d\}$ , tomamos

$$\mathcal{I}_k := \{(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, d\}^k : i_j \neq i_{\ell} \text{ se } j \neq \ell\}.$$

Para cada  $I_k = (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}_k$ , consideramos

$$\Lambda_{n, I_k} := \left\{ g = \sum_{i=1}^d g_i e_i \in \Lambda_n^+ : g_{i_j} = 0 \text{ para todo } j = 1, \dots, k \right\}.$$

Daí segue que

$$\sum_{g \in \Lambda_n} f \circ T^g = \sum_{\sigma} \left( \sum_{g \in \Lambda_n^+} f \circ T_{\sigma}^g \right) - \sum_{k=1}^d (2^k - 1) \left( \sum_{\sigma} \left( \sum_{I_k \in \mathcal{I}_k} \left( \sum_{g \in \Lambda_{n, I_k}} f \circ T_{\sigma}^g \right) \right) \right),$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{g \in \Lambda_n} f \circ T^g &= \left( \frac{n}{2n-1} \right)^d \sum_{\sigma} \left( \frac{1}{n^d} \sum_{g \in \Lambda_n^+} f \circ T_{\sigma}^g \right) \\ &\quad - \sum_{k=1}^d (2^k - 1) \left( \sum_{\sigma} \left( \sum_{I_k \in \mathcal{I}_k} \frac{n^{d-k}}{(2n-1)^d} \left( \frac{1}{n^{d-k}} \sum_{g \in \Lambda_{n, I_k}} f \circ T_{\sigma}^g \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Para quaisquer  $k \in \{1, \dots, d\}$ ,  $I_k \in \mathcal{I}_k$  e  $\sigma \in \{-1, 1\}^d$ , supondo válido o Teorema de Birkhoff para  $\mathbb{Z}^{d-k}$ -ações, o limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{d-k}} \sum_{g \in \Lambda_{n, I_k}} f \circ T_{\sigma}^g$$

existe  $\mu$ -q.t.p. Enfim, temos que

$$\bar{f} = 2^{-d} \sum_{\sigma} \bar{f}_{\sigma} = \mathbb{E}_{\mu}[f \mid \mathcal{I}_{\mu}(\mathcal{T})] \quad \mu\text{-q.t.p.},$$

pois  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{d-k}}{(2n+1)^d} = 0$  para todo  $k \in \{1, \dots, d\}$ .

*Prova do Teorema Ergódico.* Faremos a prova por indução na dimensão do reticulado  $G = \mathbb{Z}_+^d$ . Para  $G = \mathbb{Z}_+$ , admitimos o teorema, o qual pode ser encontrado provado na maioria



dos livros sobre teoria ergódica. Por hipótese de indução, suponhamos o teorema válido para  $G = \mathbb{Z}_+^{d-1}$  com  $d > 1$ . Para uma função  $f \in L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$ , definimos

$$S_n f := \sum_{g \in \Lambda_n^+} f \circ T^g, \quad A_n f := \frac{1}{\lambda_n^+} S_n f,$$

$$A^- f := \liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n f, \quad A^+ f := \limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n f.$$

Como  $f = f^+ - f^-$ , podemos supor sem perda de generalidade  $f \geq 0$ .

*Passo 1:* Para cada  $i \in \{1, \dots, d\}$ , temos que

$$\begin{aligned} A_n f \circ T^{e_i} &= \frac{1}{\lambda_n^+} \sum_{g \in \Lambda_n^+ + e_i} f \circ T^g = A_n f - \frac{1}{n^d} \sum_{g \in \Lambda_n^+ \setminus (\Lambda_n^+ + e_i)} f \circ T^g + \frac{1}{n^d} \sum_{g \in (\Lambda_n^+ + e_i) \setminus \Lambda_n^+} f \circ T^g \\ &\geq A_n f - \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n^{d-1}} \sum_{g \in \Lambda_n^+ \setminus (\Lambda_n^+ + e_i)} f \circ T^g \right). \end{aligned}$$

Se  $d = 1$ , o termo dentro dos parênteses é igual a  $f$ . Caso  $d > 1$ , podemos aplicar nesse termo o teorema ergódico com  $G = \mathbb{Z}_+^{d-1}$ . Em qualquer caso, temos

$$A^+ f \circ T^{e_i} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n f \circ T^{e_i} \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n f = A^+ f \quad \mu\text{-q.t.p.}$$

Por outro lado, temos que

$$S_n f \circ T^{e_i} = \sum_{g \in \Lambda_n^+ + e_i} f \circ T^g = \sum_{g \in \Lambda_{n+1}^+} f \circ T^g - \sum_{g \in \Lambda_{n+1}^+ \setminus (\Lambda_n^+ + e_i)} f \circ T^g \leq S_{n+1} f.$$

Então

$$\begin{aligned} A^+ f \circ T^{e_i} &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^d} S_{n+1} f = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^d A_{n+1} f \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^d \cdot \limsup_{n \rightarrow +\infty} A_{n+1} f = A^+ f. \end{aligned}$$

Daí segue que  $A^+ f \circ T^{e_i} = A^+ f$   $\mu$ -q.t.p. Como  $e_i$  é arbitrário, para cada  $g \in \mathbb{Z}_+^d$ , concluímos que  $A^+ f \circ T^g = A^+ f$   $\mu$ -q.t.p.

*Passo 2:* Queremos mostrar que

$$\int A^+ f d\mu \leq \gamma_d \int f d\mu,$$

onde  $\gamma_1 = 1$  e  $\gamma_d = 2^d$  para  $d > 1$ . Para  $r > 1$  e  $0 < \epsilon < 1$ , definimos  $H_{r,\epsilon} := (1 - \epsilon)(A^+ f \wedge r)$ . Note que  $0 \leq H_{r,\epsilon} \leq (1 - \epsilon)r < r$ . Pelo Passo 1, temos que  $H_{r,\epsilon} \circ T^g = H_{r,\epsilon}$   $\mu$ -q.t.p. para todo

$g \in \mathbb{Z}_+^d$ . Definimos  $\tau : X \rightarrow \mathbb{N}$  pondo  $\tau(x) = \min\{n \in \mathbb{N} : S_n f(x) \geq \lambda_n^+ H_{r,\epsilon}(x)\}$ . Observamos que  $\tau(x) < +\infty$  para todo  $x \in X$ , pois

- se  $A^+ f(x) = 0$ , então  $H_{r,\epsilon}(x) = 0 \leq f(x) = \frac{1}{\lambda_1^+} S_1 f(x)$ , de modo que  $\tau(x) = 1$ ;
- se  $0 < A^+ f(x) < +\infty$ , então  $H_{r,\epsilon}(x) \leq (1 - \epsilon)A^+ f(x) < A^+ f(x)$ , donde  $\tau(x) < +\infty$ ;
- se  $A^+ f(x) = +\infty$ , então  $H_{r,\epsilon}(x) = (1 - \epsilon)r < +\infty$ , o que garante  $\tau(x) < +\infty$ .

Para  $M \in \mathbb{N}$ , consideramos  $\tilde{f} := f + H_{r,\epsilon} \cdot \chi_{[\tau > M]}$  e  $\tilde{\tau}(x) := \min\{n \in \mathbb{N} : S_n \tilde{f}(x) \geq \lambda_n^+ H_{r,\epsilon}(x)\}$ , onde  $[\tau > M] = \{x \in X : \tau(x) > M\}$ . Observamos que  $\tilde{\tau}(x) \leq M$  para todo  $x \in X$ , pois

- se  $\tau(x) > M$ , então  $\frac{1}{\lambda_1^+} S_1 \tilde{f}(x) = f(x) + H_{r,\epsilon}(x) \geq H_{r,\epsilon}(x)$ , o que assegura  $\tilde{\tau}(x) = 1 \leq M$ ;
- se  $\tau(x) \leq M$ , então  $S_{\tau(x)} \tilde{f}(x) = S_{\tau(x)} f(x) \geq \lambda_{\tau(x)}^+ H_{r,\epsilon}(x)$ , donde  $\tilde{\tau}(x) \leq \tau(x) \leq M$ .

Para cada  $x \in X$ , desejamos obter  $\Lambda'_n(x) \subset \Lambda_n^+$  tal que  $\{\Lambda_{\tilde{\tau}(T^g x)}^+ + g \subset \Lambda_n^+ : g \in \Lambda'_n(x)\}$  seja uma família de cubos dois a dois disjuntos em  $\Lambda_n^+$  com

$$\sum_{g \in \Lambda'_n(x)} |\Lambda_{\tilde{\tau}(T^g x)}^+| \geq \gamma_d^{-1} (n - M)^d. \quad (\text{A.7})$$

Para  $d = 1$ , tomamos

$$\Lambda'_n(x) := \{\varphi_k(x) : \varphi_k(x) \in \Lambda_{n-M}^+\},$$

onde  $\varphi_0(x) = 0$  e  $\varphi_{k+1}(x) = \varphi_k(x) + \tilde{\tau}(T^{\varphi_k(x)} x)$  para todo  $k \geq 0$ . Seja  $k_0 \geq 0$  o maior inteiro tal que  $\varphi_{k_0}(x) \in \Lambda_{n-M}^+$ . Então, temos

$$\sum_{g \in \Lambda'_n(x)} |\Lambda_{\tilde{\tau}(T^g x)}^+| = \sum_{i=0}^{k_0} \tilde{\tau}(T^{\varphi_i(x)} x) = \sum_{i=0}^{k_0} [\varphi_{i+1}(x) - \varphi_i(x)] = \varphi_{k_0+1}(x) > n - M.$$

Se  $y \in \Lambda_{\tilde{\tau}(T^{\varphi_k(x)} x)}^+ + \varphi_k(x)$ , então  $\varphi_k(x) \leq y < \varphi_{k+1}(x)$ , o que implica que

$$\left\{ \Lambda_{\tilde{\tau}(T^{\varphi_k(x)} x)}^+ + \varphi_k(x) : \varphi_k(x) \in \Lambda'_n(x) \right\}$$

é uma família constituída por cubos em  $\Lambda_n^+$ , os quais são dois a dois disjuntos. Para  $d > 1$ , temos o seguinte lema aplicado a  $l(g) = \tilde{\tau}(T^g x)$ .

**Lema A.1** *Dados inteiros positivos  $n > M$  e uma função  $l : \Lambda_n^+ \rightarrow \{1, \dots, M\}$ , existe um conjunto  $\Lambda'_n \subset \Lambda_n^+$  tal que  $\{\Lambda_{l(g)}^+ + g : g \in \Lambda'_n\}$  é uma família de cubos em  $\Lambda_n^+$  dois a dois disjuntos e  $\sum_{g \in \Lambda'_n} |\Lambda_{l(g)}^+| > 2^{-d}(n - M)^d$ .*

*Prova.* Seja  $D_M$  uma coleção maximal de conjuntos disjuntos da forma  $\Lambda_M^+ + g$  com  $l(g) = M$  e  $g \in \Lambda_{n-M}^+$ . Supondo construídas as coleções  $D_M, \dots, D_i$  para algum  $1 < i \leq M$ , definimos  $D_{i-1}$  como sendo uma coleção maximal de conjuntos disjuntos da forma  $\Lambda_{i-1}^+ + g$  com  $l(g) = i - 1$  e  $g \in \Lambda_{n-M}^+$ , para qual quaisquer dois conjuntos distintos em  $D_M \cup D_{M-1} \cup \dots \cup D_{i-1}$  são disjuntos. Definimos

$$\Lambda'_n := \left\{ g \in \Lambda_{n-M}^+ : \Lambda_{l(g)}^+ + g \in \bigcup_{i=1}^M D_i \right\}.$$

É claro que  $\{\Lambda_{l(g)}^+ + g : g \in \Lambda'_n\} = \bigcup_{i=1}^M D_i$ , uma coleção de cubos em  $\Lambda_n^+$ , os quais são dois a dois disjuntos. Dado  $h \in \Lambda_{n-M}^+$ , existe  $g \in \Lambda'_n$  tal que  $l(g) \geq l(h)$  e  $(\Lambda_{l(g)}^+ + g) \cap (\Lambda_{l(h)}^+ + h) \neq \emptyset$ . Tomando  $B_g = \{h \in \Lambda_{n-M}^+ : \Lambda_{l(h)}^+ \cap (\Lambda_{l(g)}^+ + g - h) \neq \emptyset \text{ e } l(g) \geq l(h)\}$ , temos  $\Lambda_{n-M}^+ \subset \bigcup_{g \in \Lambda'_n} B_g$ , donde seque que

$$|\Lambda_{n-M}^+| = (n - M)^d \leq \sum_{g \in \Lambda'_n} |B_g| < \sum_{g \in \Lambda'_n} (2l(g))^d.$$

A figura abaixo ilustra o argumento por trás da última desigualdade (para  $d = 2$ ).

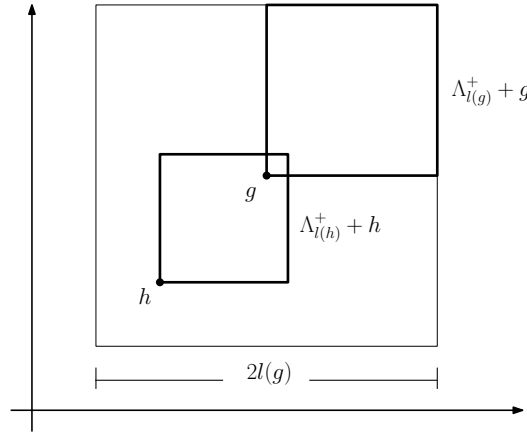


Figura A.1: Representação da majoração de  $|B_g|$

Assim, concluímos que  $\sum_{g \in \Lambda'_n} |\Lambda_{l(g)}^+| > 2^{-d}(n - M)^d$ . □

Da definição de  $\tilde{\tau}$ , do fato de  $H_{r,\epsilon}$  ser  $\mathcal{T}$ -invariante mod  $\mu$  e de (A.7), podemos estimar

$$\begin{aligned}
S_n \tilde{f}(x) &= \sum_{g \in \Lambda_n^+} (\tilde{f} \circ T^g)(x) \geq \sum_{h \in \Lambda'_n(x)} \sum_{g \in \Lambda_{\tilde{\tau}(T^h x)}^+ + h} (\tilde{f} \circ T^g)(x) = \sum_{h \in \Lambda'_n(x)} \sum_{g \in \Lambda_{\tilde{\tau}(T^h x)}^+} (\tilde{f} \circ T^g)(T^h x) \\
&= \sum_{h \in \Lambda'_n(x)} S_{\tilde{\tau}(T^h x)} \tilde{f}(T^h x) \geq \sum_{h \in \Lambda'_n(x)} \lambda_{\tilde{\tau}(T^h x)} H_{r,\epsilon}(T^h x) \\
&= \sum_{h \in \Lambda'_n(x)} |\Lambda_{\tilde{\tau}(T^h x)}^+| \cdot H_{r,\epsilon}(x) \geq \gamma_d^{-1} (n - M)^d \cdot H_{r,\epsilon}(x) \quad \mu\text{-q.t.p.}
\end{aligned}$$

Como  $H_{r,\epsilon} < r$ , temos

$$\begin{aligned}
S_n f &= S_n(\tilde{f} - H_{r,\epsilon} \cdot \chi_{[\tau > M]}) \geq S_n \tilde{f} - r \cdot S_n \chi_{[\tau > M]} \\
&\geq \gamma_d^{-1} (n - M)^d \cdot H_{r,\epsilon} - r \cdot S_n \chi_{[\tau > M]} \quad \mu\text{-q.t.p.}
\end{aligned}$$

Como  $\int \psi \circ T^g d\mu = \int \psi d\mu$  para todo  $g \in G$  e qualquer  $\psi \in L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$ , temos que

$$\begin{aligned}
\int f d\mu &= \frac{1}{n^d} \int S_n f d\mu \geq \gamma_d^{-1} \left( \frac{n - M}{n} \right)^d \int H_{r,\epsilon} d\mu - r \cdot \frac{1}{n^d} \int S_n \chi_{[\tau > M]} d\mu \\
&= \gamma_d^{-1} \left( \frac{n - M}{n} \right)^d \int H_{r,\epsilon} d\mu - r \mu([\tau > M]).
\end{aligned}$$

Então, temos

$$\int f d\mu \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \gamma_d^{-1} \left( \frac{n - M}{n} \right)^d \int H_{r,\epsilon} d\mu - r \mu([\tau > M]) \right] = \gamma_d^{-1} \int H_{r,\epsilon} d\mu - r \mu([\tau > M]).$$

Note que  $\lim_{M \rightarrow +\infty} r \mu([\tau > M]) = 0$ , donde

$$\int f d\mu \geq \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[ \gamma_d^{-1} \int H_{r,\epsilon} d\mu - r \mu([\tau > M]) \right] = \gamma_d^{-1} \int H_{r,\epsilon} d\mu.$$

Fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$ , temos

$$\int f d\mu \geq \gamma_d^{-1} \int (A^+ f \wedge r) d\mu.$$

Como  $\lim_{r \rightarrow +\infty} (A^+ f \wedge r)(x) = A^+ f(x)$ , concluímos pelo Teorema da Convergência Monótona que  $\int A^+ f d\mu \leq \gamma_d \int f d\mu$ .

*Passo 3:* Queremos mostrar que  $\bar{f} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda_n^+} \sum_{g \in \Lambda_n^+} f \circ T^g$  existe  $\mu$ -q.t.p. Para  $d = 1$ , a observação que  $A^- \phi = -A^+(-\phi) = M - A^+(M - \phi)$  para todo  $0 \leq \phi \leq M$  implica

$$\int A^- \phi d\mu = M - \int A^+(M - \phi) d\mu \geq M - \int (M - \phi) d\mu = \int \phi d\mu$$

através do Passo 2. Então, para  $M > 0$

$$\int A^- f d\mu \geq \int A^-(f \wedge M) d\mu \geq \int (f \wedge M) d\mu$$

implica que

$$\int A^- f d\mu \geq \lim_{M \rightarrow +\infty} \int (f \wedge M) d\mu = \int f d\mu \geq \int A^+ f d\mu.$$

Como  $A^+ f - A^- f \geq 0$ , concluímos que  $A^+ f = A^- f$   $\mu$ -q.t.p. Para  $d > 1$ , consideramos o seguinte lema.

**Lema A.2** *Sejam  $\mathcal{T} = (T^g : g \in G)$ ,  $F := \{f \in L_2(X, \mathcal{A}, \mu) : f \circ T^g = f \text{ } \mu\text{-q.t.p. } \forall g \in G\}$  e  $N := \{h - h \circ T^g : h \in L_2(X, \mathcal{A}, \mu) \text{ e } g \in G\}$ . Então  $F = N^\perp$ .*

*Prova.* Recordamos que para um subespaço vetorial  $N \subset L_2(X, \mathcal{A}, \mu)$ , define-se

$$N^\perp := \{h \in L_2(X, \mathcal{A}, \mu) : \langle f, h \rangle = 0 \quad \forall f \in N\}.$$

Dados  $f \in F$  e  $h \in N$ , temos que

$$\langle f, h - h \circ T^g \rangle = \langle f, h \rangle - \langle f, h \circ T^g \rangle = \langle f, h \rangle - \langle f \circ T^g, h \circ T^g \rangle = \langle f, h \rangle - \langle f, h \rangle = 0,$$

ou seja,  $f \in N^\perp$ . Por outro lado, dados  $f \in N^\perp$  e  $g \in G$ , então  $\langle f, f - f \circ T^g \rangle = 0$ , donde  $\langle f, f \rangle = \langle f, f \circ T^g \rangle$ . Daí segue que  $\|f - f \circ T^g\|_2^2 = 0$ , ou seja,  $f \in F$ .  $\square$

Como  $L_2(X, \mathcal{A}, \mu)$  é denso em  $L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$  com relação a norma  $\|\cdot\|_1$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe  $v_1 \in L_2(X, \mathcal{A}, \mu)$  tal que

$$\|f - v_1\|_1 = \int |f - v_1| d\mu < \epsilon.$$

Tomamos  $r_0 = f - v_1$ . Como  $\overline{N} \oplus N^\perp = L_2(X, \mathcal{A}, \mu)$ , pelo Lema acima, podemos escrever  $v_1 = f_1 + v_2 + \dots + v_k + r_1$ , onde  $f_1 \in F$ ,  $v_j = h_j - h_j \circ T^{g_j} \in N$  com  $g_j \in G$  ( $j = 2, \dots, k$ ) e  $\int |r_1| d\mu \leq \|r_1\|_2 < \epsilon$ . Note que podemos tomar  $h_j = f_j + r_j$ , onde cada  $f_j$  é limitada e  $\int |r_j| d\mu < \frac{\epsilon}{2k}$  ( $j = 2, \dots, k$ ). Por exemplo, para  $M > 0$ , temos que  $h_j = h_j \cdot \chi_{[|h_j| \leq M]} + h_j \cdot \chi_{[|h_j| > M]}$  com  $\lim_{M \rightarrow +\infty} \int |h_j \cdot \chi_{[|h_j| > M]}| d\mu = 0$ . Da escritura de cada  $v_j$  ( $j = 2, \dots, k$ ), temos

$$f = f_1 + \sum_{j=2}^k (f_j - f_j \circ T^{g_j}) + R, \quad \text{onde } R = r_0 + r_1 + \sum_{j=2}^k (r_j - r_j \circ T^{g_j}).$$

Por construção, segue que  $\int |R|d\mu < 3\epsilon$ . Observamos que

$$\begin{cases} A^+f \leq A^+f_1 + \sum_{j=2}^k A^+(f_j - f_j \circ T^{g_j}) + A^+R, \\ A^-f \geq A^-f_1 + \sum_{j=2}^k A^-(f_j - f_j \circ T^{g_j}) + A^-R. \end{cases}$$

Assim, tomando  $\Delta := A^+ - A^-$ , temos que  $\Delta f \leq \Delta f_1 + \sum_{j=2}^k \Delta(f_j - f_j \circ T^{g_j}) + \Delta R$ . Como  $f_1 \in F$ , segue que  $A_n f_1 = f_1$   $\mu$ -q.t.p., donde  $A^+ f_1 = f_1 = A^- f_1$   $\mu$ -q.t.p. Logo, concluímos que  $\Delta f_1 = 0$   $\mu$ -q.t.p. Para  $j = 2, \dots, k$ , temos

$$\begin{aligned} |A_n(f_j - f_j \circ T^{g_j})| &= \left| \frac{1}{\lambda_n^+} \sum_{g \in \Lambda_n^+} (f_j - f_j \circ T^{g_j}) \circ T^g \right| \\ &= \left| \frac{1}{\lambda_n^+} \sum_{g \in \Lambda_n^+} f_j \circ T^g - \frac{1}{\lambda_n^+} \sum_{g \in \Lambda_n^+ + g_j} f_j \circ T^g \right| \\ &\leq \frac{1}{\lambda_n^+} \sum_{g \in \Lambda_n^+ \Delta (\Lambda_n^+ + g_j)} |f_j \circ T^g| \\ &\leq \frac{1}{\lambda_n^+} \sum_{g \in \Lambda_n^+ \Delta (\Lambda_n^+ + g_j)} \|f_j\|_\infty \\ &\leq \frac{2n^{d-1}d}{n^d} \cdot \|g_j\| \cdot \|f_j\|_\infty = \frac{2d}{n} \cdot \|g_j\| \cdot \|f_j\|_\infty. \end{aligned}$$

Assim, temos

$$A^+(f_j - f_j \circ T^{g_j}) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2d}{n} \cdot \|g_j\| \cdot \|f_j\|_\infty = 0$$

e

$$A^-(f_j - f_j \circ T^{g_j}) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( -\frac{2d}{n} \right) \cdot \|g_j\| \cdot \|f_j\|_\infty = 0.$$

Daí resulta que  $\Delta(f_j - f_j \circ T^{g_j}) = 0$  para cada  $j = 2, \dots, k$ . Pelo Passo 2, observamos que

$$0 \leq \int \Delta f d\mu \leq 2 \int A^+ |R| d\mu \leq 2\gamma_d \int |R| d\mu \leq 2\gamma_d 3\epsilon.$$

Sendo  $\epsilon > 0$  arbitrário, o Passo 3 está provado.

**Definição A.3** *Uma família  $\mathcal{F}$  de funções  $\mathcal{A}$ -mensuráveis é dita ser uniformemente integrável quando*

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{\{|f| > M\}} |f| d\mu = 0$$

ou, equivalentemente [7],

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \int (|f| - r)^+ d\mu = 0.$$

**Lema A.3** *Seja  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência de funções em  $L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$ . Se assumirmos que  $\mathcal{F} = \{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$  é uma família de funções uniformemente integrável e que  $\phi_n \rightarrow \phi$   $\mu$ -q.t.p., então  $\phi_n \rightarrow \phi$  em  $L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$ .*

*Prova.* Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $M > 0$  tal que

$$\int_{\{|\phi_n| > M\}} |\phi_n| d\mu < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Então, para cada  $n \in \mathbb{N}$  e  $A \in \mathcal{A}$ , temos

$$\int_A |\phi_n| d\mu = \int_{A \cap \{|\phi_n| \leq M\}} |\phi_n| d\mu + \int_{A \cap \{|\phi_n| > M\}} |\phi_n| d\mu < M\mu(A) + \frac{\epsilon}{2},$$

donde, pelo Lema de Fatou, obtemos

$$\int_A |\phi| d\mu \leq M\mu(A) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Em particular, segue que  $\phi \in L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$ . Pelo Teorema de Egoroff, existe  $A \in \mathcal{A}$  com  $\mu(A) < \epsilon(2M)^{-1}$  tal que a convergência de  $\phi_n$  a  $\phi$  sobre  $X \setminus A$  é uniforme. Seja  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\sup_{X \setminus A} |\phi_n - \phi| \leq \epsilon$  para todo  $n \geq N$ . Então

$$\int_X |\phi_n - \phi| d\mu \leq \epsilon + \int_A |\phi_n| d\mu + \int_A |\phi| d\mu \leq 3\epsilon \quad \text{para todo } n \geq N,$$

donde  $\phi_n \rightarrow \phi$  em  $L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$ . Em particular, temos que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int \phi_n d\mu = \int \phi d\mu$ .  $\square$

*Passo 4:* Finalmente, queremos mostrar que  $\bar{f}$  é  $\mathcal{T}$ -invariante mod  $\mu$  e

$$\int_A \bar{f} d\mu = \int_A f d\mu \quad \text{para todo } A \in \mathcal{I}_\mu(\mathcal{T}).$$

Para  $r > 0$ , note que  $A_n f - r = A_n(f - r) \leq A_n((f - r)^+)$ , donde  $(A_n f - r)^+ \leq A_n((f - r)^+)$ .

Então, temos

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int (A_n f - r)^+ d\mu \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int A_n((f - r)^+) d\mu = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int (f - r)^+ d\mu = 0,$$

ou seja,  $\{A_n f\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma família de funções uniformemente integrável. Então, pelo Lema acima, para cada  $A \in \mathcal{I}_\mu(\mathcal{T})$ , segue que

$$\int_A f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A A_n f d\mu = \int_A \bar{f} d\mu.$$

Sabemos que  $A^+ f \circ T^g = A^+ f$   $\mu$ -q.t.p. para todo  $g \in \mathbb{Z}_+^d$ , donde claramente  $\bar{f} \circ T^g = \bar{f}$   $\mu$ -q.t.p. para todo  $g \in \mathbb{Z}_+^d$ .  $\square$



# Referências Bibliográficas

- [1] Bauer, H., *Maß - und Integrationstheorie*, de Gruyter Lehrbuch, 1990.
- [2] Birkhoff, G., *Lattice Theory*, American Mathematical Society, Colloquium Publications Vol. XXV, 1948.
- [3] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.
- [4] Chazottes, J.; Gambaudo, J.; Ugalde, E., *On the Geometry of Ground States and Quasicrystals in Lattice Systems*, arXiv:0802.3661v2, 2009.
- [5] Chazottes, J.; Gambaudo, J.; Hochman, M.; Ugalde, E., *On the Finite-dimensional Marginals of Shift-invariant Measures*, arXiv:1011.2442v1, 2010.
- [6] Cortez, M. I.,  $\mathbb{Z}^d$  *Toeplitz Arrays*, Discrete and Continuous Dynamical Systems **15**, no. 3, 2006, 859-881.
- [7] Gänszler, P.; Stute, W., *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer Verlag, 1977.
- [8] Gottschalk, W. H., *Orbit - Closure Decompositions and Almost Periodic Properties*, American Mathematical Society **50**, 1944, 915-919.
- [9] Janotk, C., *Quasicrystals*, Clarendon Press, Oxford, 1994.
- [10] Katok, A.; Hasselblatt, B. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **54**, Cambridge University Press, 1995.
- [11] Keller, G., *Equilibrium States in Ergodic Theory*, London Mathematical Society, Student Texts **42**, 1998.

- [12] Petersen, K., *Ergodic Theory*, Cambridge University Press, 1983.
- [13] Pollicott, M.; Yuri, M., *Dynamical Systems and Ergodic Theory*, London Mathematical Society, Student Texts **40**, 1998.
- [14] Quas, A.; Zamboni, L., *Periodicity and Local Complexity*, Theoret. Comput. Sci. 319, 2004.
- [15] Robinson, E. A. Jr., *Symbolic Dynamics and Tilings of  $\mathbb{R}^d$* , American Mathematical Society, Symbolic Dynamics and its Applications, Proc. Sympos. Appl. Math. **60**, Providence, RI, 2004, 81-119.
- [16] Robinson, E. A. Jr., *The Dynamical Properties of Penrose Tilings*, American Mathematical Society 348, no. 11, 1996, 4447-4464.
- [17] Rudin, W., *Functional Analysis*, McGraw-Hill, Inc., 1991.
- [18] Ruelle, D., *Thermodynamic Formalism*, The mathematical structures of equilibrium statistical mechanics, Cambridge University Press, 2004.
- [19] Schmidt, K., *Multi-dimensional Symbolic Dynamical Systems*, in *Codes, Systems and Graphical Models*, IMA Vol. Math. Appl., 123, Springer, 2001, 67-82.
- [20] Schrader, R., *Ground States in Classical Lattice Systems with Hard Core*, Comm. Math. Phys. 16, 1970, 247-264.
- [21] Shannon, C. E., *A Mathematical Theory of Communication*, Bell System Tech. J., 27:379-423, 1948, 623-656.