UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

JOÃO TIAGO ASSUNÇÃO GOMES

Conjuntos maximizantes para sequências de funções e o Raio espectral conjunto

Campinas
2017

João Tiago Assunção Gomes

Conjuntos maximizantes para sequências de funções e o Raio espectral conjunto

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Eduardo Garibaldi

Este exemplar corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno João Tiago Assunção Gomes e orientada pelo Prof. Dr. Eduardo Garibaldi.

Campinas
2017

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES; CNPq, 140675/2014-0

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

G585c Gomes, João Tiago Assunção, 1986-
Conjuntos maximizantes para sequências de funções e o raio espectral conjunto / João Tiago Assunção Gomes. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Eduardo Garibaldi.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Otimização ergódica. 2. Teoria espectral (Matemática). 3. Teoria ergódica. I. Garibaldi, Eduardo,1977-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Maximizing sets for sequence of functions and the joint spectral radius
Palavras-chave em inglês:
Ergodic optimization
Spectral theory (Mathematics)
Ergodic theory
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Eduardo Garibaldi [Orientador]
Ali Messauodi
Daniel Smania Brandão
Diego Sebastian Ledesma
Paulo Regis Caron Ruffino
Data de defesa: 22-09-2017
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 22 de setembro de 2017 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). EDUARDO GARIBALDI

Prof(a). Dr(a). DIEGO SEBASTIAN LEDESMA

Prof(a). Dr(a). PAULO REGIS CARON RUFFINO

Prof(a). Dr(a). ALI MESSAOUDI

Prof(a). Dr(a). DANIEL SMANIA BRANDÃO

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

Dedico este trabalho à minha família, a qual me incentivou em todos os momentos desta longa caminhada.

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Dr. Eduardo Garibaldi por seus ensinamentos e por sua dedicação e paciência durante todos estes anos de orientação. Ao Prof. Dr. Samuel Petite e ao Prof. Dr. Philippe Thieullen pelas indicações esclarecedoras e oportunidade de trabalho em conjunto em Amiens (Julho de 2015) e em Bordeaux (Novembro de 2015) sob os apoios financeiros dos programas BREUDS e do programa VRERI 55.

Aos Prof. Dr. Gabriel Ponce, Prof. Dr. Paulo Ruffino, Prof. Dr. Pedro Catuogno e Prof. Dr. Régis Varão pelos ensinamentos em áreas de pesquisa correlatas no decorrer dos seminários de grupos e de tópicos da pós graduação.

Agradeço à Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) e ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) pela formação acadêmica de excelência e acolhimento ao longo destes onze anos em Campinas. Às Biblioteca Central César Lattes, Biblioteca do IEL, Biblioteca da FEA, Biblioteca do IB e Biblioteca do CLE por disponibilizar ótimos espaços para estudos. Agradeço a CAPES[1] e ao CNPq[2] pelo incentivo a pesquisa e apoio financeiro durante o período de doutorado.

Aos colegas de cursos pela parceria e aprendizado em conjunto. Aos amigos que tive o prazer de conhecer e conviver durante todo este tempo de estadia em Campinas.

À minha família pelo apoio, carinho e incentivo, sempre. Principalmente, aos meus pais Joanésio e Diva e ao meu irmão Jonas que são os principais responsáveis pelo meu desenvolvimento e detentores de todo mérito por aquilo que conquistei até hoje.

[1]Suporte financeiro: *Bolsa de Doutorado* CAPES (03/2012 – 02/2014).
[2]Suporte financeiro: *Bolsa de Doutorado* CNPq (03/2014 – 02/2016).

"Change is the essential process of all existence."

Star Trek: The Original Series
Mr. Spock

Resumo

Em uma generalização da teoria de otimização ergódica para sequências de funções, desenvolvemos novas perspectivas no que concerne à caracterização das probabilidades maximizantes. Para isto obter, determinam-se condições suficientes que permitem destacar o suporte de tais medidas por meio de versões generalizadas do local de maximização e do conjunto de Aubry. Além de aprimorar resultados conhecidos na literatura da teoria de otimização ergódica sobre tais conjuntos maximizantes, também sugerimos extensões do teorema de Atkinson e da noção de subação para o contexto das sequências de funções. Ao final, estudamos condições necessárias e suficientes que fornecem norma extremal de politopo e uma nova formulação para a propriedade da finitude do raio espectral conjunto.

MSC: 15A18, 15A60, 26A15, 26A45, 34D08, 37A05, 37A50, 37B10, 37D35, 47A30.

Palavras-chave: conjectura da finitude. conjunto de Aubry. conjunto de maximizante. formalismo termodinâmico. local de maximização. norma extremal. norma de Barabanov. norma de politopo. otimização ergódica. probabilidade maximizante. propriedade da finitude. teorema de Atkinson. raio espectral conjunto. subação.

Abstract

In a generalized version of ergodic optimization theory for sequences of functions, we develop new perspectives concerning the characterization of maximizing probabilities. For this purpose, we provide sufficient conditions that allow us to detach the support of these measures by means of generalizations of the maximizing locus and the Aubry set. Besides the fact that we improve known results in the ergodic optimization theory literature on these maximizing sets, we also suggest extensions to Atkinson's theorem and to the notion of sub-action for the context of sequences of functions. At the end, we study necessary and sufficient conditions which provide an extremal polytope norm and a new formulation for the finiteness property of the joint spectral radius.

MSC: 15A18, 15A60, 26A15, 26A45, 34D08, 37A05, 37A50, 37B10, 37D35, 47A30.

Keywords: Atkinson's theorem. Aubry set. Barabanov norm. extremal norm. ergodic optimization. finiteness conjecture. finiteness property. joint spectral radius. maximizing locus. maximizing probabilities. maximizing set. polytope norm. subaction. thermodynamic formalism.

Notação

$\Sigma^{\mathbb{N}}$	*Full-shift*
$\Sigma_F^{\mathbb{N}}$	*Subshift* de tipo finito
$R_{\mathcal{F}}$	Constante não defectiva
$\hat{f}$, $\hat{\mathcal{F}}$	Função média temporal
$\beta(f)$, $\beta[\mathcal{F}]$	Valor ergódico maximizante
$\mathcal{M}_{\max}(f)$, $\mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}]$	Conjunto das medidas maximizantes
$\Omega(f)$, $\Omega[\mathcal{F}]$	Conjunto de Aubry
$\Omega\left(\mathcal{J}_{\Sigma}, [\vec{v}]\right)$	Conjunto de Aubry vetorial
$\mathbb{F}^{d\times d}$	Conjunto de matrizes $d \times d$ com entradas no corpo $\mathbb{F}$
$r(M)$	Raio espectral
$\rho(\Sigma)$	Raio espectral conjunto
$\varrho(\Sigma)$	Raio espectral generalizado

Convenções:

- $f_0 \equiv 0$ e $T^0 \equiv Id$;
- Toda função contínua será denominada de **potencial**;
- A sigla **s.c.s.** representa a propriedade semicontínua superior.

Sumário

Introdução

Nesta tese, consideramos sequências de funções $\mathcal{F} := \Big\{f_k : X \to \mathbb{R}\Big\}_{k\geq 1}$ definidas sobre sistemas dinâmicos topológicos $\Big(X, T\Big)$, as quais obedecem propriedades subaditivas. O propósito principal é obter novas informações sobre o *valor ergódico maximal*

$$\max\left\{\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\int f_k\, d\mu \;:\; \mu \text{ é uma probabilidade } T\text{-invariante}\right\}.$$

O problema de otimização em questão vem a ser uma versão generalizada da teoria de otimização ergódica, a qual tem-se desenvolvido de forma consistente nas últimas décadas [Jen06, Gar17]. Um dos principais questionamentos deste tópico de pesquisa consiste na descrição das *medidas maximizantes*, isto é, das probabilidades que atingem o valor máximo acima. Uma estratégia de solução resume-se em exibir uma coletânea que caracteriza os suportes de tais probabilidades. Isto dá lugar a noção de *conjunto maximizante*, ou melhor, conjunto fechado $\mathsf{K}_{\mathcal{F}}$ tal que

$$\mu \text{ é uma medida maximizante para } \mathcal{F} \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{supp}\mu \subset \mathsf{K}_{\mathcal{F}}.$$

A existência de um tal conjunto é assegurada para uma classe representativa de sequências de funções (consulte [Mor07, CZ13]). Por outro lado, antes do presente trabalho, as principais coletâneas que cumprem tal equivalência, o *local de maximização* e o *conjunto de Aubry*, são sabidamente maximizantes apenas em cenários específicos de sequências aditivas [CLT01, Gar17] ou no caso particular de sequências subaditivas renormalizadas [Mor13].

Tendo como ponto de partida a *propriedade não defectiva*, a qual no caso quase subaditivo se reduz a

$$\sup_{k\geq 1}\sup_{x\in X}\Big[f_k(x) - k\beta[\mathcal{F}]\Big] < \infty,$$

estendemos os conceitos de local de maximização e de conjunto de Aubry. No contexto geral de sequências quase subaditivas de funções semicontínuas superiores fomos capazes de demonstrar que tais coletâneas são, de fato, conjuntos maximizantes. Para isto realizar, desenvolvemos técnicas originais de renormalização das sequências de funções consideradas a partir de *processos de ajuste/correção* e da noção de *corretores* propostos nesta tese. Vale ressaltar que parte deste conteúdo já foi disponibilizado à comunidade científica através da publicação [GG16].

Um das principais motivações para tal área de pesquisa é o *raio espectral conjunto* associado a uma coletânea Σ de matrizes $d \times d$, descrito pela fórmula

$$\rho(\Sigma) \coloneqq \lim_{k\to\infty} \sup \left\{ \left\| M_{k-1} \dots M_0 \right\|^{1/k} \ : \ M_i \in \Sigma \right\}$$

e cujas aplicações abrangem tópicos como, por exemplo, *wavelets*, sistemas de inclusões lineares (ou *switched linear systems*), teoria dos números, teoria de códigos, etc (veja as referências [The05, Jun09, Koz17, Cic15]). Dentre os aspectos computacionais e propriedades teóricas que têm desafiado a comunidade científica, destacamos abaixo a seguinte condição, a qual foi motivada por algoritmo proposto em [DL92, DL01] e cuja validade foi conjecturada na referência [LW95].

Propriedade da finitude. *Existe um produto matricial $M_{i_{n-1}} \dots M_{i_1} M_{i_0}$, com $M_{i_k} \in \Sigma$, verificando $\rho(\Sigma) = r(M_{i_{n-1}} \dots M_{i_1} M_{i_0})^{1/n}$.*

Ainda que tal propriedade não seja válida em geral, diversas condições asseguram-na para classes restritivas de matrizes. Uma com maior destaque diz respeito à existência *norma extremal de politopo*, isto é, normas que atingem o valor ínfimo da seguinte fórmula

$$\rho(\Sigma) \ = \inf_{\|\cdot\| \in \mathcal{N}_{\mathcal{P}}} \sup_{M \in \Sigma} \|M\|,$$

onde $\mathcal{N}_{\mathcal{P}}$ é o conjunto das normas de operador induzidas de normas cuja bola unitária é um politopo d-dimensional. Embora se registrem vários métodos iterativos e/ou algoritmos desenvolvidos para encontrar tais normas [GWZ05, GZ08, GZ09, GP13, GZ15], em geral são de difícil verificação condições que determinam tempo de parada finito para tais processos.

Concebida na década de 1990, abordagem dinamicista/ergódica para o raio espectral conjunto considera o espaço métrico compacto $\Sigma^{\mathbb{N}}$, munido do mapa *shift* unilateral $\sigma : (M_0, M_1, M_2, \dots) \longmapsto (M_1, M_2, M_3, \dots)$, e a sequência de funções $\{f_k : \Sigma^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}\}_{k\geq 1}$ definidas por $f_k(M_0, M_1, M_2, \dots) \coloneqq \log \|M_{k-1} \cdots M_0\|$, de modo que, o teorema de Schreiber [Sch98] garante que $\log \rho(\Sigma)$ coincide com o valor maximal dado pelo problema de otimização

$$\max\left\{\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\int f_k\,d\mu\ :\ \mu \text{ é uma probabilidade } \sigma\text{-invariante}\right\}.$$

Com base nesta representação, podem ser discutidos aspectos da teoria de otimização ergódica associados ao raio espectral conjunto e, desta maneira, é proveitoso questionar como a propriedade de finitude e a noção de norma extremal de politopo podem ser traduzidas/interpretadas de acordo com esta abordagem dinamicista/ergódica.

O principal objetivo desta tese é analisar com atenção uma extensão da teoria de otimização ergódica para sequências de funções, a qual será discutida durante o capítulo 1. Apresentaremos no capítulo 2 contribuições originais com respeito à caracterização das probabilidades maximizantes. Sugerimos generalizações do conceito de subação – por meio das técnicas de correções (descritas na definição 2.3) e da noção de corretor (dada na definição 2.31) – além de extensão do teorema de Atkinson (demonstrada no teorema 2.28). A partir disto estabelecemos versões generalizadas para o local de maximização e para o conjunto de Aubry (introduzidos, respectivamente, nas definições 2.9 e 2.19) e demonstramos que tais conjuntos são maximizantes no contexto de sequência de funções (*vide* teoremas 2.8 e 2.22). No capítulo 3, estudamos a abordagem dinamicista/ergódica do raio espectral conjunto com o intuito de compreender a propriedade da finitude. Para isto realizar, investigamos condições suficientes e necessárias para obter normas extremais de politopo via método iterativo (demonstrado na proposição 3.6) e encerramos a tese com uma reformulação da propriedade da finitude em termos do conjunto maximizante associado ao raio espectral conjunto (desenvolvida na proposição 3.10).

Capítulo 1

Teoria de otimização ergódica

Iniciamos este capítulo introduzindo os aspectos topológicos e mensuráveis relevantes para estabelecer a teoria de otimização ergódica desde sua abordagem clássica até uma generalização para sequências de funções. Neste trabalho, toda vez que fizermos alusão a um sistema dinâmico $\big(X, T\big)$, estará subentendido que levamos em conta um espaço métrico compacto (X, d) e um mapa contínuo e sobrejetivo $T : X \to X$. Considere a σ-álgebra de Borel $\mathscr{B}$ gerada pelas bolas abertas de X. A coleção das medidas de probabilidades T-invariantes, denotada por $\mathcal{M}_T$, é um conjunto não vazio, convexo (cujos elementos extremais são as probabilidades ergódica), compacto metrizável (com respeito à topologia fraca*) e será fundamental para formulação do problema de otimização discutido na introdução. (Para mais informações sobre dinâmica topológica e teoria ergódica, veja [Wal82, VO14].)

Entre as dinâmicas topológicas que serão abordadas neste trabalho, destacamos os espaços de *Shift* e estabelecemos desde já as notações utilizadas neste contexto. Seja $\mathsf{\Sigma}$ um espaço métrico compacto munido com a métrica $\mathsf{d}_\mathsf{\Sigma}$. Define-se o *full-shift* unilateral como o sistema dinâmico $\big(\mathsf{\Sigma}^{\mathbb{N}}, \sigma\big)$ composto por todas as sequência infinitas $(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ com entradas no alfabeto $\mathsf{\Sigma}$, munido do mapa sobrejetivo $\sigma : \mathsf{\Sigma}^{\mathbb{N}} \to \mathsf{\Sigma}^{\mathbb{N}}$ cuja ação é dada por $(x_0, x_1, x_2, \ldots) \longmapsto (x_1, x_2, x_3, \ldots)$. Com respeito a métrica

$$\mathsf{d}\Big((x_0, x_1, \ldots),\ (y_0, y_1, \ldots)\Big) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\mathsf{d}_\mathsf{\Sigma}(x_i, y_i)}{1 + \mathsf{d}_\mathsf{\Sigma}(x_i, y_i)},$$

o espaço $\mathsf{\Sigma}^{\mathbb{N}}$ é compacto (já que d induz a topologia produto) e o mapa σ é contínuo. Atente que $\mathsf{d}\Big((x_0, x_1, \ldots),\ (y_0, y_1, \ldots)\Big) = 2^{-\min\{i \in \mathbb{N} \,:\, x_i \neq y_i\}}$ sempre que $\mathsf{\Sigma}$ for um conjunto finito com métrica $\mathsf{d}_\mathsf{\Sigma}$ discreta.

Todo subconjunto compacto e σ-invariante do *full-shift* $\mathsf{\Sigma}^{\mathbb{N}}$ é caracterizado por $\mathsf{\Sigma}_F^{\mathbb{N}} := \Big\{(x_0, x_1, \ldots) \in \mathsf{\Sigma}^{\mathbb{N}} \,:\, (x_i, \ldots, x_{i+n}) \notin F,\ \forall\, i \in \mathbb{N} \text{ e } \forall\, n \geq 1\Big\}$, para algum conjunto de palavras proibidas $F \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma^n$, dando origem ao sistema dinâmico simbólico $\left(\Sigma_F^{\mathbb{N}}, \sigma|_{\Sigma_F^{\mathbb{N}}}\right)$, também denominado de *subshift*. No caso em que o conjunto de palavras proibidas é finito, dizemos que $\left(\Sigma_F^{\mathbb{N}}, \sigma|_{\Sigma_F^{\mathbb{N}}}\right)$ é um *subshift* de tipo finito. (Indicamos a referência [LM95] para uma exposição detalhada sobre dinâmica simbólica.)

Observação. Com o propósito de estudar o raio espectral conjunto no capítulo 3, o alfabeto Σ estará associado a um conjunto compacto de matrizes $d \times d$ munido com a métrica induzida da norma euclidiana em $\mathbb{F}^{d\times d}$ (onde $\mathbb{F}$ representa $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Especificamente para análise da propriedade da finitude, nós restringiremos a um alfabeto finito de matrizes reais $d \times d$.

Apresentaremos neste capítulo a teoria de otimização ergódica e sua generalização com base na seguinte formulação geral para problema de otimização discutido na introdução desta tese: *Dados sistema dinâmico (X, T) e uma sequência $\mathcal{F} = \left\{f_k\right\}_{k\geq 1}$ – onde cada função $f_k : X \to \mathbb{R}$ é integrável com respeito às probabilidade T-invariantes – pretende-se descrever o valor ergódico maximizante*

$$\beta[\mathcal{F}] := \sup\left\{ \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int f_k \, d\mu \ : \ \mu \in \mathcal{M}_T \right\} \in [-\infty, +\infty]$$

e caracterizar o conjunto

$$\mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}] := \left\{ \mu \in \mathcal{M}_T \ : \ \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int f_k \, d\mu = \beta[\mathcal{F}] \right\}$$

das medidas probabilidades T-invariantes que atingem o valor supremo acima, também conhecidas por medidas maximizantes para $\mathcal{F}$.

Note que a sequência de funções $\mathcal{F} = \left\{f_k : X \to \mathbb{R}\right\}_{k\geq 1}$ constitui outro conceito essencial em tal problema. A condição de integrabilidade exigida acima é facilmente verificada, por exemplo, se as funções f_k são contínuas (aqui denominadas de potenciais) ou quando cada f_k é uma função mensurável e limitada. Ademais, os teoremas de convergência da teoria ergódica – teorema ergódico de Birkhoff e teorema ergódico de Kingman – garantem que os limites supremos em questão são de fato limites para sequências de funções integráveis em contexto aditivo ou subaditivo.

Estudaremos dois tipos de sequências de funções que apresentam tais aspectos topológicos e mensuráveis extrínsecos ao problema de otimização enunciado acima. O primeiro caso é formado pelas sequências aditivas de potenciais que serão tratadas na seção 1.1 e cuja análise do problema de otimização acima coincide com a teoria de otimização ergódica. Na seção 1.2, investiga-se a generalização de tal teoria que contempla sequências que obedecem propriedades subaditivas. Em ambas seções, apresentamos uma revisão bibliográfica sobre o tópico que reflete o estado da arte do problema em questão.

1.1 Prólogo: Caso aditivo

A propriedade aditiva para uma sequência de potenciais $\mathcal{F} = \left\{f_k : X \to \mathbb{R}\right\}_{k\geq 1}$ é definida pela relação $f_{m+n}(x) = f_n(x) + f_m \circ T^n(x)$ para todo $x \in X$ e para quaisquer $m, n \geq 1$. É fácil perceber que repetidas aplicações desta propriedade fornecem a seguinte reescritura para cada $f_k(x) = f_{k-1}(x) + f_1 \circ T^{k-1}(x) = f_{k-2}(x) + f_1 \circ T^{k-2}(x) + f_1 \circ T^{k-1}(x) = \cdots = \sum_{i=0}^{k-1} f_1 \circ T^i(x)$, donde se conclui que os potenciais de uma sequência aditiva são determinados unicamente pela dinâmica T, pelo índice k e pelo potencial f_1.

Sem perda de generalidade, a partir de uma função integrável $f : X \to \mathbb{R}$, considere a sequência $\{S_k f\}_{k\geq 1}$ composta pelas somas de Birkhoff

$$S_k f(x) := \sum_{i=0}^{k-1} f \circ T^i(x) = f(x) + f \circ T(x) + \cdots + f \circ T^{k-1}(x),$$

para todo $x \in X$ e para todo $k \geq 1$. O teorema ergódico de Birkhoff aplicado à f garante que, para toda medida de probabilidade T-invariante μ,

$$\hat{f}(x) := \lim_{k\to\infty} \frac{S_k f(x)}{k} \text{ existe } \mu\text{-q.t.p. } x \in X \qquad \text{e} \qquad \int \hat{f}\, d\mu = \int f\, d\mu.$$

Para μ ergódica, também segue que $\hat{f}$ é μ-q.t.p. constante e igual a $\int f\, d\mu$. (Consulte [Wal82, Teorema 1.14] e [VO14, Teorema 3.2.3] para mais informações sobre tal teorema.) Em particular, o funcional linear $\mu \in \mathcal{M}_T \longmapsto \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int S_k f\, d\mu = \int f\, d\mu \in \mathbb{R}$ está bem definido.

Observação. A média temporal associada à f é representada pela função T-invariante $\hat{f}$ que está bem definida para um subconjunto $\hat{X} \subset X$ de medida total (isto é, $\mu(\hat{X}) = 1$ para toda $\mu \in \mathcal{M}_T$). Tal fato é uma consequência do teorema da decomposição ergódica [Mañ12, Teorema 6.4] que estabelece o conjunto $\hat{X}$ e a existência de uma coletânea de probabilidades T-invariantes e ergódicas $\{\nu_y\}_{y\in\hat{X}}$ verificando, para toda função integrável f e para toda $\mu \in \mathcal{M}_T$,

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_{\hat{X}} \int_X f(x)\, d\nu_y(x)\, d\mu(y),$$

de modo que $\hat{f}(y) = \int f\, d\nu_y$ para todo $y \in \hat{X}$ e para toda função mensurável limitada f.

Com base nestas informações, resume-se o problema de otimização descrito previamente à maximização do funcional linear $\mu \in \mathcal{M}_T \mapsto \int f\, d\mu \in \mathbb{R}$. No caso específico em que $f : X \to \mathbb{R}$ é um potencial, o funcional acima é contínuo (para topologia fraca*) no espaço compacto $\mathcal{M}_T$ e, portanto, existe probabilidade T-invariante que maximiza a integral deste potencial. Deste modo, o principal problema da teoria de otimização ergódica possui a seguinte formulação: *dados sistema dinâmico (X, T) e potencial $f : X \to \mathbb{R}$, associado à sequência aditiva de potenciais $\{S_k f\}_{k\geq 1}$, pretende-se descrever o valor ergódico maximizante*

$$\beta(f) := \beta\Big[\{S_k f\}\Big] = \max\left\{ \int f\, d\mu \ : \ \mu \in \mathcal{M}_T \right\}$$

e caracterizar o conjunto (não vazio, compacto e convexo) das medidas maximizantes

$$\mathcal{M}_{\max}(f) := \mathcal{M}_{\max}\Big[\{S_k f\}\Big] = \left\{ \mu \in \mathcal{M}_T \ : \ \int f\, d\mu = \beta(f) \right\}.$$

Notação. Atente para a distinção entre a notação do caso aditivo (a qual adota parênteses) e a notação para o caso geral (que emprega colchetes). Tal diferença tem o intuito de evidenciar os resultados desta abordagem clássica da teoria de otimização ergódica que serão utilizados no decorrer desta tese.

Desenvolvida por G. Contreras, A. O. Lopes e Ph. Thieullen em [CLT01], uma abordagem para a teoria de otimização ergódica propõe solucionar as questões acima por meio de reformulações de noções e técnicas da teoria KAM-fraca e da teoria de Aubry-Mather. Nesta seção, faremos uma breve exposição de tal teoria, enunciando os principais resultados já estabelecidos em sua vasta literatura [CG93, Thi97, CLT01, LT03, Jen06, JMU06, GL08, GLT09, BLL13, GG13, Gar17].

O primeiro questionamento proposto anteriormente refere-se ao valor ergódico maximizante para o qual são conhecidas as seguintes formulações

$$\beta(f) = \lim_{k\to\infty} \max_{x\in X} \frac{1}{k} S_k f(x) = \sup_{x\in X} \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} S_k f(x) = \sup_{x\in \mathsf{Reg}\,(f)} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} S_k f(x), \tag{1.1}$$

onde $\mathsf{Reg}\,(f)$ é o conjunto dos pontos $x \in X$ tais que o limite $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} S_k f(x)$ existe. Observe que o conceito de probabilidade T-invariante está presente de forma implícita nas reescrituras acima, já que o teorema ergódico de Birkhoff garante que a integral de f com respeito a alguma medida ergódica é igual a limite de suas médias temporais em quase toda parte.

Outra caracterização para $\beta(f)$ que também dispensa a noção de probabilidade é dada pela fórmula de representação dual

$$\beta(f) = \inf_{u\in \mathsf{C}(X)} \max_{x\in X} \Big[f(x) + u(x) - u\circ T(x) \Big],$$

onde $\mathsf{C}(X)$ denota o espaço das funções contínuas de X em $\mathbb{R}$. Atente que as funções em evidência na identidade acima satisfazem $\int f\, d\mu = \int (f + u - u \circ T)\, d\mu$ para toda μ probabilidade T-invariante. Decorrem deste fato as relações $\beta(f) = \beta(f + u - u \circ T)$ e $\mathcal{M}_{\max}(f) = \mathcal{M}_{\max}(f + u - u \circ T)$. Isto significa que os potenciais da forma $f + u - u \circ T$ são equivalentes ao potencial f ao descrever o mesmo problema de otimização, embora permitam correções pontuais especificadas pelas funções contínuas $u : X \to \mathbb{R}$. Dentre tais funções se destacam as subações $v : X \to \mathbb{R}$, isto é, as funções que verificam $f(x) + v(x) - v \circ T(x) \leq \beta(f)$ para todo $x \in X$ ou, equivalentemente, que atinge o ínfimo na fórmula de representação dual. Como tal ínfimo não pode ser alcançado em geral (devido a [Mor07, Proposição 2]), diversos artigos na literatura deste tópico investigam a existência de subações em casos específicos. Um exemplo disto é dado pela subação minimal [CLT01, Proposição 11]

$$\upsilon(x) = \sup_{\ell \geq 0} \sup_{T^\ell z = x} \Big(S_\ell f(z) - \ell\beta(f) \Big) \tag{1.2}$$

(com $S_0 f \equiv 0$ e $T^0 \equiv Id_X$), introduzida no contexto de sistemas dinâmicos hiperbólicos topologicamente transitivo onde f é um potencial Hölder.

Observação. A noção de subação manifesta-se em diversos outros contextos por meio de (sub-)soluções da equação co-homológica (para uma discussão completa, consulte [Lyu12]). Em particular, a subação minimal também está presente no contexto de otimização de médias sobre grafos orientados (veja a referência [GG13]).

A existência de uma subação v para um potencial f fornece a seguinte caracterização do conjunto das medidas de probabilidades maximizantes

$$\mathcal{M}_{\max}(f) = \Big\{ \mu \in \mathcal{M}_T \,:\, \operatorname{supp} \mu \subset (f + v - v \circ T)^{-1}\Big(\beta(f)\Big) \Big\},$$

onde $\operatorname{supp} \mu$ denota o suporte de μ. De modo um tanto grosseiro, a razão de tal caracterização reside no fato que a definição de subação obriga o argumento máximo de $f + v - v \circ T$ a conter os suportes de todas as probabilidades cuja respectiva integral é igual a $\beta(f)$, as quais também são maximizantes para f.

A partir da coletânea compacta não vazia $(f + v - v \circ T)^{-1}\Big(\beta(f)\Big)$, evidenciamos o seguinte subconjunto T-invariante.

Definição 1.1. O *local de maximização* para o potencial f (com respeito à subação v) é dado pelo conjunto

$$\bigcap_{k \geq 1} \Big[S_k(f + v - v \circ T) \Big]^{-1} \Big(k\beta(f) \Big).$$

Tal conjunto pode substituir $(f+v-v\circ T)^{-1}\big(\beta(f)\big)$ na caracterização prévia. De fato, como o suporte de uma probabilidade $\mu \in \mathcal{M}_{\max}(f)$ é um conjunto T-invariante, obtemos que $x \in \operatorname{supp}\mu$ implica $\{x, T(x), T^2(x), \dots\} \subset (f+v-v\circ T)^{-1}\big(\beta(f)\big)$, donde concluímos que $S_k(f+v-v\circ T)(x) = k\beta(f)$ para todo $k \geq 1$. Reciprocamente, temos que $\operatorname{supp}\mu \subset \bigcap_{k\geq 1} \Big[S_k(f+v-v\circ T)\Big]^{-1}\Big(k\beta(f)\Big) \subset (f+v-v\circ T)^{-1}\big(\beta(f)\big)$ implica $\mu \in \mathcal{M}_{\max}(f)$.

Outra maneira de evidenciar o suporte das probabilidades maximizantes de f consiste em identificar os elementos de X que obedecem ao mesmo tempo propriedade de recorrência e controle das somas de Birkhoff de $f-\beta(f)$, dando origem ao seguinte conjunto não vazio, compacto e T-invariante.

Definição 1.2. Dizemos que $x \in X$ é um ponto de Aubry para o potencial f se, para todo $\varepsilon > 0$ e para todo inteiro $L \geq 1$, existem $y \in B_\varepsilon(x)$ e inteiro $r \geq L$ tais que

$$T^r y \in B_\varepsilon(x) \qquad \text{e} \qquad \Big|S_r f(y) - r\beta(f)\Big| < \varepsilon.$$

O coletânea $\Omega(f)$ composta por tais pontos é denominada de *conjunto de Aubry*.

Tal conjunto provê outra caracterização para as medidas maximizantes associadas a um potencial f. Devido ao teorema de Atkinson [Atk76] (cujo enunciado é dado no teorema 2.27), pode-se estabelecer: $\mu \in \mathcal{M}_{\max}(f) \Rightarrow \operatorname{supp}\mu \subset \Omega(f)$. Para obter a recíproca desta implicação, basta enfatizar que o conjunto Aubry sempre está contido no local de maximização quando existe uma subação associada ao potencial f.

Observação. O conjunto de Aubry descrito na definição 1.2 consiste em um refinamento da definição original, a qual fixa o inteiro $L = 1$ (*vide* [Gar17, Definição 4.A e Corolário 4.5]).

Duas ferramentas essenciais para compreender o comportamento de subações sobre o conjunto de Aubry são o *potencial de Mãné* e a *barreira de Peierls*, que possuem as respectivas formulações na teoria de otimização ergódica

$$\begin{aligned} \phi_f(x,y) &:= \lim_{\varepsilon\to 0} \mathsf{h}_1^\varepsilon(x,y) \quad \text{e} \\ \mathsf{h}_f(x,y) &:= \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{k\geq 1} \mathsf{h}_k^\varepsilon(x,y), \end{aligned} \qquad \text{onde} \quad \mathsf{h}_k^\varepsilon(x,y) := \sup_{\ell\geq k} \sup_{\substack{z\in B_\varepsilon(x)\\ T^\ell z\in B_\varepsilon(y)}} \Big(S_\ell f(z) - \ell\beta(f)\Big). \tag{1.3}$$

Em particular, tais funções também determinam novas descrições para o conjunto de Aubry e o local de maximização, uma vez que $x \in \Omega(f)$ se, e somente se, $\phi_f(x,x) = \mathsf{h}_f(x,x) = 0$, bem como $x \in \bigcap_{k\geq 1}\Big[S_k(f+v-v\circ T)\Big]^{-1}\Big(k\beta(f)\Big)$ equivale à $\phi_f(x, T^k x) = v\circ T(x) - v(x)$ para todo $k \geq 1$ e para alguma subação v associada ao potencial f (para detalhes, *vide* [Gar17, Proposições 5.2 e 5.3]).

Um último item a ser pontuado concerne à existência de medida maximizante suportada em órbita periódica, isto é, de probabilidade T-invariante e ergódica $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{T^i x} \in \mathcal{M}_{\max}(f)$ (onde δ_z denota a medida de Dirac que atribui massa total para o ponto $z \in X$) induzida pelo ponto periódico $x \in X$ (tal que $T^n x = x$, para algum $n \geq 1$). Perceba que este fato decorre imediatamente da presença de órbita periódica no local de maximização ou no conjunto de Aubry. Retratamos abaixo um caso simples no qual é garantido a existência de tais órbitas.

Exemplo 1.3 (Potencial localmente constante)**.** No *full-shift* unilateral $\Sigma^{\mathbb{N}}$ associado a um alfabeto finito Σ, um potencial $f : \Sigma^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ é dito localmente constante quando existe inteiro $n \geq 1$ para o qual $f(x_0, x_1, x_2, \ldots) = f(x_0, \ldots, x_n)$ para todo $(x_0, x_1, x_2, \ldots) \in \Sigma^{\mathbb{N}}$. Interpretando tais potenciais como uma função custo sobre um grafo de *De Bruijn* – formado pelas arestas $\Big((x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}), (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)\Big) \in \Sigma^n \times \Sigma^n$ sobre o conjunto de vértices Σ^n – não é difícil exibir subação $v : \Sigma^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ localmente constante tal que $v(x_0, x_1, x_2, \ldots) = v(x_0, \ldots, x_{n-1})$ para todo $(x_0, x_1, x_2, \ldots) \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ (uma prova deste fato pode ser encontrada, por exemplo, em [GG13, Proposição 2.14]). Um resultado clássico sobre os potenciais localmente constantes concerne a caracterização de $\Omega(f)$ como *subshift* de tipo finito $\Sigma_F^{\mathbb{N}}$ para o conjunto de palavra proibidas $F = \Big\{(x_0, \ldots, x_n) \in \Sigma^{n+1} : f(x_0, \ldots, x_n) - v(x_1, \ldots, x_n) + v(x_0, \ldots, x_{n-1}) < \beta(f)\Big\}$ (consulte [Gar17, Teorema 4.3] para uma demostração desta afirmação e a seção 2.3 desta tese para um prova simples do caso $n = 0$). Em particular, como o subconjunto das órbitas periódicas de todo *subshift* de tipo finito é não vazio, obtemos a existência de órbita periódica no conjunto de Aubry.

O comportamento descrito no exemplo acima também é atestado pela seguinte versão da conjectura de Mañé para teoria da otimização ergódica, cuja prova foi apresentada recentemente por Contreras [Con16]: *genericamente nas funções Lipschitz existe única medida maximizante suportada em órbita periódica.*

1.2 Generalização para sequência de funções

Analisaremos nesta seção uma versão generalizada da teoria de otimização ergódica para sequências de funções mensuráveis $\mathcal{F} = \Big\{f_k\Big\}_{k\geq 1}$ que verificam as condições:

$(P1)$ para μ medida de probabilidade T-invariante,

$$\hat{\mathcal{F}}(x) := \lim_{k\to\infty} \frac{f_k(x)}{k} \;\text{ existe } \mu\text{-q.t.p. } x \in X \qquad \text{e} \qquad \int \hat{\mathcal{F}}\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int f_k\, d\mu.$$

Ademais, se μ é ergódica, então $\hat{\mathcal{F}}$ é μ-q.t.p. constante e igual a $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int f_k \, d\mu$;

$(P2)$ o funcional linear $\mu \in \mathcal{M}_T \longmapsto \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int f_k \, d\mu$ é semicontínuo superiormente.

É fácil constatar que a condição $(P1)$ retrata o enunciado de um teorema de ergódico pontual enquanto a condição $(P2)$ fornece a existência de máximo para o funcional linear em questão. Tais requisitos são essenciais para apresentar o problema de otimização discutido na introdução desta tese: *dados sistema dinâmico (X,T) e uma sequência de funções mensuráveis $\mathcal{F} = \left\{f_k\right\}_{k\geq 1}$ satisfazendo $(P1)$ e $(P2)$, pretende-se descrever o valor ergódico maximizante*

$$\beta[\mathcal{F}] = \max\left\{ \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int f_k \, d\mu \ : \ \mu \in \mathcal{M}_T \right\} = \max\left\{ \int \hat{\mathcal{F}} \, d\mu \ : \ \mu \in \mathcal{M}_T \right\}$$

e caracterizar o conjunto das medidas maximizantes para $\mathcal{F}$

$$\mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}] = \left\{ \mu \in \mathcal{M}_T \ : \ \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int f_k \, d\mu = \beta[\mathcal{F}] \right\},$$

o qual é não vazio, convexo e compacto (segundo a topologia fraca*).

Observação. A dificuldade em aplicar os resultados do caso aditivo da teoria de otimização ergódica para a função mensurável $\hat{\mathcal{F}}$ (definida μ-q.t.p. X) reside no fato que não é possível assegurar a existência de medida maximizante para o problema de otimização $\sup\left\{ \int \hat{\mathcal{F}} \, d\mu \ : \ \mu \in \mathcal{M}_T \right\}$, de forma que é então natural impor a condição $(P2)$. Ainda assim, para toda $\mu \in \mathcal{M}_T$, o teorema da decomposição ergódica estabelece

$$\int_X \hat{\mathcal{F}}(x) \, d\mu(x) = \int_{\hat{X}} \left(\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int_X f_k(x) \, d\nu_y(x) \right) d\mu(y), \tag{1.4}$$

onde $\{\nu_y\}_{y\in\hat{X}}$ é uma coletânea de probabilidades ergódicas – verificando $\hat{f}(y) = \int f \, d\nu_y$ para todo $y \in \hat{X}$ – que é indexada por conjunto de medida total $\hat{X}$.

O problema de otimização anterior foi investigado recentemente por I. Morris em [Mor13] (para sequências de funções semicontínuas superiormente) e por Y. Y. Chen, Y. Zhao em [CZ13] (para sequências de potenciais), com o objetivo de introduzir uma generalização da teoria de otimização ergódica no contexto das sequências de funções que obedecem propriedades subaditivas. Abaixo listamos algumas destas propriedades, seguidas de exemplos, para as quais $(P1)$ e $(P2)$ caracterizam condições necessárias.

Caso subaditivo: Seja $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ sequência de potenciais verificando a propriedade subaditiva, isto é, $f_{m+n}(x) \leq f_n(x) + f_m \circ T^n(x)$ para todo $x \in X$ e para quaisquer $m, n \geq 1$.

Neste contexto, vale o teorema ergódico subaditivo de Kingman (consulte as referências [Wal82, Teorema 10.1] e [VO14, Teorema 3.3.3]), o qual fornece a condição $(P1)$ e a informação adicional de que, para toda $\mu \in \mathcal{M}_T$,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int f_k \, d\mu = \inf_{k\geq 1} \frac{1}{k} \int f_k \, d\mu \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Desta igualdade segue que o funcional linear $\mu \in \mathcal{M}_T \longmapsto \inf_{k\geq 1} \frac{1}{k} \int f_k \, d\mu$ é um ínfimo de funcionais contínuos, portanto vale a condição $(P2)$. Ademais, toda medida maximizante verifica $\inf_{k\geq 1} \frac{1}{k} \int f_k \, d\mu = \beta[\mathcal{F}]$, donde

$$\mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}] = \bigcap_{k\geq 1} \left\{ \mu \in \mathcal{M}_T \,:\, k\beta[\mathcal{F}] \leq \int f_k \, d\mu \right\}.$$

Observação. No cenário subaditivo, é suficiente considerar $\mathcal{F} = \left\{ f_k : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \right\}_{k\geq 1}$ uma sequência de funções semicontínuas superiormente (esta condição passará a ser denotada neste trabalho pela sigla s.c.s.). Sob tal hipótese, as condição $(P1)$ e $(P2)$ continuam válidas, uma vez que o teorema ergódico subaditivo de Kingman somente exige a integrabilidade da parte positiva de f_1 e devido ao fato que os funcionais lineares $\mu \in \mathcal{M}_T \mapsto \frac{1}{k} \int f_k \, d\mu$ são semicontínuos superiormente.

Exemplo 1.4 (Indicadora de *subshift*)**.** Sejam Σ alfabeto finito, $\Sigma^{\mathbb{N}}$ *full-shift* unilateral e $\Sigma_F^{\mathbb{N}} \subset \Sigma^{\mathbb{N}}$ *subshift* associado a conjunto de palavras proibidas $F \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma^n$. Para cada $k \geq 1$, definimos as coletâneas (de palavras proibidas de tamanho k)

$$F(k) := \left\{ (x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}) \in \Sigma^k \;:\; \begin{array}{c} \exists\, 0 \leq i \leq k-1 \text{ e } 1 \leq n \leq k-1-i \\ \text{tais que } (x_i, \ldots, x_{i+n}) \in F \end{array} \right\}$$

e os potenciais localmente constantes $\chi_k^F : \Sigma^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, dados por

$$\chi_k^F(x_0, x_1, x_2, \ldots) = \begin{cases} -k, & \text{se } (x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}) \in F(k) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para todo $(x_0, x_1, x_2, \ldots) \in \Sigma^{\mathbb{N}}$. Em particular, atente para o fato de que $(x_0, x_1, \ldots) \in \Sigma_F^{\mathbb{N}}$ se, e somente se, $\chi_k^F(x_0, x_1, \ldots) = 0$ para todo $k \geq 1$.

A partir das noções anteriores, introduzimos a sequência $\mathcal{I}_F := \left\{ \chi_k^F \right\}_{k\geq 1}$. Para o caso em que $(x_0, x_1, \ldots, x_{m+n-1}) \notin F(m+n)$, temos $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \notin F(n)$ e

$(x_0, x_1, \ldots, x_m)$, $(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{m+n-1}) \notin F(m)$, donde segue

$$\chi^F_{m+n}(x_0, x_1, \ldots) = 0 = \begin{cases} \chi^F_n(x_0, x_1, \ldots) + \chi^F_m \circ \sigma^n(x_0, x_1, \ldots) \\ \chi^F_n(x_0, x_1, \ldots) + \chi^F_m(x_0, x_1, \ldots) \end{cases}.$$

Por outro lado, sempre que $(x_0, x_1, \ldots, x_{m+n}) \in F(m+n)$,

$$\chi^F_{m+n}(x_0, x_1, \ldots) = -m - n \leq \begin{cases} \chi^F_n(x_0, x_1, \ldots) + \chi^F_m \circ \sigma^n(x_0, x_1, \ldots) \\ \chi^F_n(x_0, x_1, \ldots) + \chi^F_m(x_0, x_1, \ldots) \end{cases}.$$

Tais argumentos estabelecem a propriedade subaditiva da sequência de potenciais $\mathcal{I}_F$ e da sequência numérica $\left\{\chi^F_{m+n}(x_0, x_1, \ldots)\right\}_{k\geq 1}$ para cada $(x_0, x_1, \ldots) \in \Sigma^{\mathbb{N}}$. Deste último fato, concluímos que $\hat{\mathcal{I}}_F(\cdot) = \inf_{k\geq 1} \frac{1}{k}\, \chi^F_k(\cdot) = \mathbb{1}_{\Sigma^{\mathbb{N}}_F}(\cdot) - 1$ está bem definida sobre $\Sigma^{\mathbb{N}}$.

Exemplo 1.5 (Máximo de sequências aditivas)**.** A partir dos potenciais $g : X \to \mathbb{R}$ e $h : X \to \mathbb{R}$, considere a sequência $\mathcal{S}_{(g,h)} := \{f_k : X \to \mathbb{R}\}_{k\geq 1}$ definida pelos potenciais $f_k(x) := \max\left\{S_k g(x),\, S_k h(x)\right\}$ para todo $k \geq 1$, a qual é subaditiva, pois

$$f_{m+n}(x) \leq \max\left\{S_n g(x),\, S_n h(x)\right\} + \max\left\{S_m g(T^n x),\, S_m h(T^n x)\right\} = f_n(x) + f_m \circ T^n(x),$$

para todo $x \in X$ e para quaisquer $m, n \geq 1$. (Este exemplo pode ser facilmente estendido ao considerar o máximo de uma quantidade finita de sequências subaditivas.)

Caso quase subaditivo: Uma sequência de funções s.c.s. $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ é dita ser quase subaditiva se existe constante $C_{\mathcal{F}} \geq 0$ tal que $f_{m+n}(x) \leq f_n(x) + f_m \circ T^n(x) + C_{\mathcal{F}}$ para todo $x \in X$ e para quaisquer $m, n \geq 1$. (Convencionamos que $C_{\mathcal{F}}$ é a menor constante não negativa verificando a propriedade anterior.) É imediato desta definição que a sequência de funções s.c.s. $\mathcal{F} + C_{\mathcal{F}} := \{f_k + C_{\mathcal{F}}\}_{k\geq 1}$ é subaditiva. Como para toda $\mu \in \mathcal{M}_T$ vale $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int f_k\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int (f_k + C_{\mathcal{F}})\, d\mu = \inf_{k\geq 1} \frac{1}{k} \int (f_k + C_{\mathcal{F}})\, d\mu$, temos que as condições $(P1)$ e $(P2)$ são herdadas pela sequência quase subaditiva $\mathcal{F}$. Também resultam que $\beta[\mathcal{F}] = \beta[\mathcal{F} + C_{\mathcal{F}}]$ e

$$\mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}] = \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F} + C_{\mathcal{F}}] = \bigcap_{k\geq 1} \left\{\mu \in \mathcal{M}_T \,:\, k\beta[\mathcal{F}] - C_{\mathcal{F}} \leq \int f_k\, d\mu\right\}. \tag{1.5}$$

Neste trabalho, daremos atenção especial às sequências de potenciais que caracterizam o raio espectral conjunto (*vide* capítulo 3).

Exemplo 1.6 (Logaritmo da norma)**.** Considere o *full-shift* unilateral $\Sigma^{\mathbb{N}}$ gerado a partir do alfabeto compacto de matrizes $\Sigma \subset \mathbb{F}^{d\times d}$ (onde $\mathbb{F}$ é igual a $\mathbb{R}$ ou a $\mathbb{C}$). Para cada norma

$\|\cdot\|$ em $\mathbb{F}^{d\times d}$, define-se a sequência $\mathcal{J}_{(\Sigma,\,\|\cdot\|)} := \left\{f_k : \Sigma^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}\right\}_{k\geq 1}$ formada pelos potenciais localmente constantes $f_k(M_0, M_1, M_2, \ldots) := \log \|M_{k-1}\cdots M_0\|$ para todo $k \geq 1$. Para o caso em que a norma $\|\cdot\|_S$ é sub-multiplicativa, ou seja, $\|A.B\|_S \leq \|A\|_S\|B\|_S$ para quaisquer matrizes A e $B \in \mathbb{F}^{d\times d}$, vale que

$$\begin{aligned} f_{m+n}(M_0, M_1, M_2, \ldots) &\leq \log \|M_{m+n-1}\cdots M_n\|_S + \log \|M_{n-1}\cdots M_0\|_S \\ &= f_n(M_0, M_1, M_2, \ldots) + f_m \circ \sigma^n(M_0, M_1, M_2, \ldots), \end{aligned}$$

para todo $(M_0, M_1, M_2, \ldots) \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ e para quaisquer $m, n \geq 1$. Portanto, a sequência de potenciais $\mathcal{J}_{(\Sigma,\,\|\cdot\|_S)}$ é subaditiva. A equivalência entre normas de um espaço vetorial de dimensão finita assegura que uma norma arbitrária $\|\cdot\|$ e uma norma sub-multiplicativa $\|\cdot\|_S$ sempre estão associadas por meio da relação $\Gamma^{-1}\|M\|_S \leq \|M\| \leq \Gamma\|M\|_S$, para todo $M \in \mathbb{F}^{d\times d}$ e para algum $\Gamma \geq 1$. Desta forma, a subaditividade de $\mathcal{J}_{(\Sigma,\,\|\cdot\|_S)}$ implica a propriedade quase subaditiva (com constante $C_{\mathcal{J}} = 3\log\Gamma \geq 0$) para a sequência de potenciais $\mathcal{J}_{(\Sigma,\,\|\cdot\|)}$.

As seguintes propriedades para as sequências também são comuns na literatura.

Caso quase aditivo: Uma sequência quase aditiva de funções $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ retrata um tipo específico de sequência quase subaditiva ao exigir que $-\mathcal{F} := \{-f_k\}_{k\geq 1}$ também seja quase subaditiva. Mais especificamente, descrevemos tal sequência a partir das relações $f_n(x) + f_m \circ T^n(x) - C_{\mathcal{F}} \leq f_{m+n}(x) \leq f_n(x) + f_m \circ T^n(x) + C_{\mathcal{F}}$ para todo $x \in X$, para quaisquer $m, n \geq 1$ e para alguma constante $C_{\mathcal{F}} \geq 0$.

Caso assintoticamente aditivo: A sequência de potenciais $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ possui a propriedade assintoticamente aditiva se, para todo $\xi > 0$, existe um potencial ψ^ξ tal que

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \left\| f_k - S_k\psi^\xi \right\|_\infty \leq \xi,$$

com relação a norma uniforme $\|\cdot\|_\infty$ em $\mathsf{C}(X)$.

Se atentarmos exclusivamente para o caso contínuo, todos as situações discutidas previamente podem ser agrupadas na seguinte classe de sequências de potenciais.

Caso assintoticamente subaditivo: Uma sequência de potenciais $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ é dita assintoticamente subaditiva se, para todo $\xi > 0$, existe uma sequência subaditiva de potenciais $\Psi^\xi := \left\{\psi_k^\xi\right\}_{k\geq 1}$ tal que

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \left\| f_k - \psi_k^\xi \right\|_\infty \leq \xi,$$

onde $\|\cdot\|_\infty$ é a norma uniforme em $\mathsf{C}(X)$. Neste cenário, as condições $(P1)$ e $(P2)$ foram demonstradas em [FH10, Proposição A.1] a partir da seguinte reformulação para tal propriedade: dado $\xi > 0$, existe $N_\xi \geq 1$ tal que

$$\psi_k^\xi(x) - k\xi \leq f_k(x) \leq \psi_k^\xi(x) + k\xi$$

para todo $x \in X$ e para todo $k \geq N_\xi$. Além disso, trata-se da mais abrangente coletânea de sequências de potenciais conhecida na literatura que satisfaz tais condições.

A segunda formulação para sequências assintoticamente subaditivas viabiliza associações com problema de otimização próprio das sequências subaditivas Ψ^ξ. Um exemplo disto é a igualdade $\beta[\mathcal{F}] = \lim_{\xi\to 0} \beta[\Psi^\xi]$ estabelecida em [CZ13, Proposição 2.1]. Ademais, dadas probabilidades $\mu^\xi \in \mathcal{M}_{\max}[\Psi^\xi]$, para cada $\xi > 0$, também se conclui que os pontos de acumulação (para topologia fraca*) da família $\left\{\mu^\xi\right\}_{\xi>0}$ quando ξ tende a 0 são probabilidades maximizantes para $\mathcal{F}$.

Em analogia aos casos anteriores, destacamos um tipo particular de desigualdade subaditiva cujas sequências assintoticamente subaditivas obedecem. Defina as constantes $M^\xi := 0 \vee \max_{n<N^\xi} \{\sup_{x\in X} f_n(x) - \inf_{x\in X} \psi_n^\xi(x)\} \geq 0$ e $m^\xi := 0 \wedge \min_{n<N^\xi} \{\inf_{x\in X} f_n(x) - \sup_{x\in X} \psi_n^\xi(x)\} \leq 0$, as quais satisfazem $\psi_k^\xi(x) + m^\xi - k\xi \leq f_k(x) \leq \psi_k^\xi(x) + M^\xi + k\xi$ para todo $x \in X$ e para todo $k \geq 1$. Decorre disto que, dado $\xi > 0$, existe $C_\mathcal{F}^\xi := 3\max\{M^\xi, -m^\xi\} \geq 0$ tal que

$$f_{m+n}(x) \leq f_n(x) + f_m \circ T^n(x) + 2(m+n)\xi + C_\mathcal{F}^\xi \tag{1.6}$$

para todo $x \in X$ e para quaisquer $m, n \geq 1$. Tal desigualdade – embora seja simples e prática – não é suficiente para demonstrar alguns resultados desta tese (isto porque não existe, em geral, controle uniforme para as constantes $C_\mathcal{F}^\xi$).

Para ilustrar casos anteriores, destacamos um exemplo dentre as diversas aplicações que possuem tais propriedades na literatura do formalismo termodinâmico para sequências de potenciais [FH10, Bar11, ZZC11, CFH08, VZ15, IY17].

Exemplo 1.7 (Logaritmo de medida de Gibbs fraca sobre cilindros)**.** Dada uma sequência de potenciais $\mathcal{G} := \left\{g_k : \Sigma^\mathbb{N} \to \mathbb{R}\right\}_{k\geq 1}$, definidos sobre *full-shift* unilateral $\Sigma^\mathbb{N}$ com alfabeto finito, dizemos que uma probabilidade $\nu_\mathcal{G}$ é uma medida de Gibbs fraca para $\mathcal{G}$ se existe uma família de números reais positivos $\{\Gamma_k\}_{k\geq 1}$, com $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \Gamma_k = 0$, verificando para todo $(x_0, x_1, x_2, \ldots) \in \Sigma^\mathbb{N}$ e para todo $k \geq 1$

$$\frac{1}{\Gamma_k} \leq \frac{\nu_\mathcal{G}\Big([x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]\Big)}{e^{g_k(x_0,x_1,\ldots) - kP(\mathcal{G})}} \leq \Gamma_k,$$

onde, como de costume, o conjunto $[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]$ indica correspondente cilindro e $P(\mathcal{G})$ denota a pressão topológica de $\mathcal{G}$. Em particular, $\nu_{\mathcal{G}}$ será chamada de medida de Gibbs sempre que a família $\{\Gamma_k\}_{k\geq 1}$ for constante.

Assuma a existência de uma medida de Gibbs fraca $\nu_{\mathcal{G}}$ associada à sequência $\mathcal{G}$. Definimos os potenciais localmente constantes $f_k(x_0, x_1, \ldots) := \log \nu_{\mathcal{G}}\Big([x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]\Big)$, para todo $(x_0, x_1, \ldots) \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ e para todo $k \geq 1$, e a sequência $\mathcal{E}_{\nu_{\mathcal{G}}} := \Big\{f_k : \Sigma^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}\Big\}_{k\geq 1}$. Um estudo detalhado de tal sequência foi realizada em [IY17] com o intuito de descrever as medidas de Gibbs fracas $\nu_{\mathcal{G}}$ como medidas de Gibbs para $\mathcal{E}_{\nu_{\mathcal{G}}}$. Atente também que as sequências $\mathcal{G}$ e $\mathcal{E}_{\nu_{\mathcal{G}}}$ estão relacionadas pela identidade que define a medida de Gibbs fraca, a qual pode ser reformulada como $-\log \Gamma_k \leq f_k - g_k + kP(\mathcal{G}) \leq \log \Gamma_k$ para todo $k \geq 1$. A partir desta relação identificamos dois cenários:

1. A sequência $\mathcal{E}_{\nu_{\mathcal{G}}}$ herda a propriedade assintoticamente aditiva/subaditiva da sequência $\mathcal{G}$. Para isto verificar, basta considerar a sequência subaditiva $\Psi^\xi - P(\mathcal{G}) := \Big\{\psi_k^\xi - kP(\mathcal{G})\Big\}_{k\geq 1}$, para todo $\xi > 0$, de modo que

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \left\| f_k - \Big(\psi_k^\xi - kP(\mathcal{G})\Big) \right\|_\infty &\leq \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \Big[\left\| f_k - g_k + kP(\mathcal{G}) \right\|_\infty + \left\| g_k - \psi_k^\xi \right\|_\infty \Big] \\ &\leq \limsup_{k\to\infty} \frac{\log \Gamma_k}{k} + \xi \leq \xi,\end{aligned}$$

onde $\Psi^\xi = \Big\{\psi_k^\xi\Big\}_{k\geq 1}$ é dada pela propriedade assintoticamente subaditiva $\mathcal{G}$. Note que, quando todas as sequências ψ_k^ξ são aditivas, este argumento também vale para a propriedade assintoticamente aditiva.

2. A sequência aditiva $\mathcal{G} = \{g_k = S_k g\}_{k\geq 1}$ produz sequência $\mathcal{E}_{\nu_{\mathcal{G}}} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ quase aditiva. De fato, $f_{m+n} - f_n - f_m = \Big(f_{m+n} - S_{m+n}g + (m+n)P(\mathcal{G})\Big) - \Big(f_n - S_n g + nP(\mathcal{G})\Big) - \Big(f_m \circ \sigma^n - S_m g \circ \sigma^n + mP(\mathcal{G})\Big)$ para quaisquer $m, n \geq 1$. Segue disto que a sequência $\mathcal{E}_{\nu_{\mathcal{G}}}$ obedece a propriedade quase aditiva, com $C_{\mathcal{E}_{\nu_{\mathcal{G}}}} = 3 \log \Gamma \geq 0$. Além disso, não é difícil perceber que $\mathcal{E}_{\nu_{\mathcal{G}}}$ é aditiva se, e somente se, $\nu_{\mathcal{G}}$ é uma medida de Bernoulli, ou seja, $\nu_{\mathcal{G}}\Big([x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]\Big) = \prod_{i=0}^{k-1} \nu_{\mathcal{G}}\Big([x_i]\Big)$ para todo $k \geq 1$.

O problema de otimização ergódica para sequências de funções consiste em um tópico de estudo recente, cujos questionamentos básicos possuem soluções em alguns dos contextos subaditivos apresentados anteriormente. Tratamos inicialmente de descrever o valor ergódico maximizante. Para evitar o caso trivial em que $\beta[\mathcal{F}] = -\infty$, o que implica $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int f_k \, d\mu = -\infty$ para toda $\mu \in \mathcal{M}_T$, somente serão investigadas neste trabalho as sequências de funções que verificam $\beta[\mathcal{F}] \in \mathbb{R}$. Exibimos abaixo reescrituras para tal constante, as quais generalizam a equação (1.1).

Proposição 1.8. *Seja $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ uma sequência assintoticamente subaditiva de potenciais. Então,*

$$\beta[\mathcal{F}] = \lim_{k\to\infty} \beta\left(\frac{1}{k}f_k\right) = \lim_{k\to\infty} \max_{x\in X} \frac{1}{k}f_k(x) = \sup_{x\in X} \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k}f_k(x) = \sup_{x\in \mathsf{Reg}\,[\mathcal{F}]} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}f_k(x),$$

onde $\mathsf{Reg}\,[\mathcal{F}]$ *é o conjunto dos pontos $x \in X$ tais que o limite $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}f_k(x)$ existe. Ademais, não só estas igualdades são válidas também para o caso em que $\mathcal{F}$ é uma sequência subaditiva de funções s.c.s., como aí os limites das duas primeiras equações e o limite superior da terceira podem ser substituídos por ínfimos.*

O enunciado da proposição acima é uma compilação dos seguintes resultados: [Sch98, Teorema 1], [Mor13, Teorema A.3] e [CZ13, Corolário 2]. No caso assintoticamente subaditivo, prova-se em [CZ13] que

$$\beta[\mathcal{F}] = \lim_{k\to\infty} \max_{x\in X} \frac{1}{k}f_k(x) = \sup_{x\in X} \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k}f_k(x) = \sup_{x\in \mathsf{Reg}\,[\mathcal{F}]} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}f_k(x).$$

Já para o caso subaditivo, [Sch98, Mor13] forneceram as seguintes relações

$$\beta[\mathcal{F}] = \inf_{k\geq 1} \beta\left(\frac{1}{k}f_k\right) = \inf_{k\geq 1} \max_{x\in X} \frac{1}{k}f_k(x) = \max_{x\in X} \inf_{k\geq 1} \frac{1}{k}f_k(x).$$

Para que a primeira reescritura de $\beta[\mathcal{F}]$ se estenda ao caso assintoticamente subaditivo, basta substituir o ínfimo pelo limite em [Mor13, Equações A.2 e A.3].

Observação. Existem outras quatro formas de expressar o valor ergódico maximizante, a partir da primeira igualdade da proposição 1.8 e das reescrituras para $\beta\left(\frac{1}{k}f_k\right)$ no cenário aditivo descritas na equação (1.1).

Exemplo 1.9 (Raio espectral conjunto)**.** Para um conjunto compacto de matrizes Σ e uma norma arbitrária $\|\cdot\|$ em $\mathbb{F}^{d\times d}$, definimos o raio espectral conjunto associado como

$$\rho(\Sigma) := \lim_{k\to\infty} \max\left\{\left\|M_{k-1}\dots M_0\right\|^{1/k} : M_i \in \Sigma\right\}.$$

Considere a sequência quase subaditiva de potenciais $\mathcal{J}_{(\Sigma,\,\|\cdot\|)} := \left\{f_k : \Sigma^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}\right\}_{k\geq 1}$ dados por $f_k(M_0, M_1, \dots) := \log\|M_{k-1}\cdots M_0\|$ para todo $(M_0, M_1, \dots) \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ e para todo $k \geq 1$. Devido às reescrituras para o valor ergódico maximizante dadas na proposição 1.8, obtemos para esta sequência que

$$\beta\left[\mathcal{J}_{(\Sigma,\,\|\cdot\|)}\right] = \lim_{k\to\infty} \max_{(M_0,M_1,\dots)\in\Sigma^{\mathbb{N}}} \frac{1}{k}\log\|M_{k-1}\cdots M_0\| = \log\rho(\Sigma).$$

Portanto, o problema de otimização associado a $\mathcal{J}_{(\Sigma,\,\|\cdot\|)}$ caracteriza a abordagem dinamicista/ergódica para o raio espectral conjunto $\rho(\Sigma)$. Ademais, a igualdade acima independe da norma a ser considerada.

Com o intuito de caracterizar o conjunto das medidas maximizantes para uma sequência de funções mensuráveis $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$, identificamos o célebre princípio de subordinação: *se ν for uma medida probabilidade T-invariante e μ for uma medida maximizante para $\mathcal{F}$, as quais verificam* $\operatorname{supp}\nu \subset \operatorname{supp}\mu$*, então ν também é uma medida maximizante para $\mathcal{F}$.* Assumindo que as condições $(P1)$ e $(P2)$ são válidas, obtemos que este princípio revela-se equivalente à existência de conjunto fechado $\mathsf{K}_{\mathcal{F}}$ que cumpre

$$\mu \in \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}] \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{supp}\mu \subset \mathsf{K}_{\mathcal{F}},$$

o qual recebe a denominação de conjunto maximizante para $\mathcal{F}$. Estabelecemos tal equivalência a partir da análise do seguinte candidato natural a conjunto maximizante.

Definição 1.10. Para $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ sequência de funções mensuráveis obedecendo as condições $(P1)$ e $(P2)$, o conjunto de Mather associado é definido por

$$\bigcup_{\mu\in\mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}]} \operatorname{supp}\mu.$$

É fácil ver que se o conjunto de Mather é maximizante para $\mathcal{F}$, então vale o princípio de subordinação. A recíproca deste fato consiste no resultado abaixo, cuja prova é obtida com adaptação natural dos argumentos apresentados em [CZ13, Teorema 3.2] e [Mor13, Teorema 2.3].

Proposição 1.11. *Seja $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ sequência de funções mensuráveis cumprindo as condições $(P1)$ e $(P2)$. Suponha que vale o princípio de subordinação. Então, existe probabilidade $\hat{\mu} \in \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}]$ cujo* $\operatorname{supp}\hat{\mu} = \bigcup_{\mu\in\mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}]} \operatorname{supp}\mu$*. Em particular, o conjunto de Mather é um compacto, não vazio, T-invariante e descreve o menor conjunto maximizante para $\mathcal{F}$.*

Demonstração. Segue de $(P2)$ a existência de medidas maximizantes para $\mathcal{F}$, logo o conjunto de Mather é não vazio. Mais ainda, $\mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}]$ é fechado e, portanto, subconjunto compacto do espaço metrizável $\mathcal{M}_T$. Considere uma coletânea enumerável de medidas maximizantes $\{\mu_\ell\}_{\ell\geq 1}$ densa em $\mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}]$. Defina a probabilidade T-invariante $\hat{\mu} := \sum_{\ell=1}^{\infty} 2^{-\ell}\mu_\ell$. Devido à convexidade de $\mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}]$, verifica-se facilmente que $\hat{\mu}$ é maximizante e, portanto, $\operatorname{supp}\hat{\mu}$ está contido em $\bigcup_{\mu\in\mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}]} \operatorname{supp}\mu$. Por outro lado, temos que o aberto

$U := (\operatorname{supp}\hat{\mu})^{\mathsf{c}}$ cumpre $0 = \hat{\mu}(U) \geq 2^{-\ell}\mu_\ell(U)$, ou seja, $\mu_\ell(U) = 0$ para todo $\ell \geq 1$, donde por densidade o mesmo vale para toda medida maximizante. Desta forma, o $\operatorname{supp}\hat{\mu}$ é um conjunto fechado que contêm o suporte de toda $\mu \in \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}]$ e assim coincide com o conjunto de Mather. Por fim, se vale o princípio de subordinação, então, para toda probabilidade T-invariante ν tal que $\operatorname{supp}\nu \subset \bigcup_{\mu\in\mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}]}\operatorname{supp}\mu = \operatorname{supp}\hat{\mu}$, temos $\nu \in \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}]$, donde concluímos que o conjunto de Mather é maximizante para $\mathcal{F}$. ■

É sabido que, para uma função contínua genérica, definida sobre sistema dinâmico $\big(X, T\big)$ uniformemente hiperbólico topologicamente transitivo com estrutura de produto local, existe única medida maximizante completamente suportada no espaço X (para a demonstração desta afirmação, consulte [BJ02, Teorema C] e [Jen06, Corolário 4.3]). A partir deste fato é fácil perceber que o princípio de subordinação não vale em geral. Isto porque, exemplos significativos de tais sistemas contam com pelo menos duas probabilidades T-invariantes, donde genericamente o conjunto de Mather coincide com X, mas nem toda medida em $\mathcal{M}_T$ é maximizante.

Compilamos os casos presentes na literatura para os quais é assegurado o princípio de subordinação e, consequentemente, a existência de conjunto maximizante. Para uma sequência aditiva de potenciais $\{S_k f\}_{k\geq 1}$, basta exigir a condição suficiente

$$\sup_{k\geq 1}\sup_{x\in X}\Big[S_k f(x) - k\beta(f)\Big] < \infty \tag{1.7}$$

que foi originalmente estabelecida em [Mor07, Teorema 1]. Atente também para o fato que a hipótese (1.7) é imediatamente satisfeita quando existe subação v para um potencial f, dado que $\sup_{k\geq 1}\sup_{x\in X}\Big[S_k f(x) - k\beta(f)\Big] \leq \sup_{k\geq 1}\sup_{x\in X}\Big[v\circ T^k(x) - v(x)\Big] \leq 2\|v\|_\infty$. (A recíproca deste fato não é válida, como foi demonstrado em [Mor07, Proposição 2].) No caso subaditivo, em [CZ13, Teorema 3.1], obteve-se o princípio de subordinação a partir da seguinte generalização da hipótese anterior

$$\sup_{k\geq 1}\sup_{x\in X}\Big[f_k(x) - k\beta[\mathcal{F}]\Big] < \infty. \tag{1.8}$$

Estendemos facilmente este resultado para uma sequência $\mathcal{F}$ quase subaditiva, considerando a condição (1.8) em termos da sequência subaditiva $\mathcal{F} + C_{\mathcal{F}} = \{f_k + C_{\mathcal{F}}\}_{k\geq 1}$.

A noção de conjunto maximizante desponta como peça-chave para descrever as medidas de probabilidade maximizantes. Exemplos de um tal conjunto foram exibidos na teoria de otimização ergódica pelo local de maximização (dado na definição 1.1) e pelo conjunto de Aubry (descrito na definição 1.2). A proposição abaixo, originalmente enunciada em [Mor13, Lema A.9], descreve conjunto maximizante no contexto das sequências de funções verificando hipótese mais restritiva que a condição (1.8).

Proposição 1.12. *Considere* $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ *uma sequência subaditiva de funções s.c.s. que satisfazem* $\sup_{x\in X} f_k(x) = k\beta[\mathcal{F}]$ *para todo* $k \geq 1$*. Então, o compacto não vazio e* T*-invariante*

$$\bigcap_{k\geq 1} f_k^{-1}\Big(k\beta[\mathcal{F}]\Big)$$

é um conjunto maximizante para $\mathcal{F}$*.*

Detalhamos abaixo que o local de maximização do caso aditivo (*vide* definição 1.1) coincide com o conjunto acima enunciado.

Exemplo 1.13 (Caso aditivo com subação)**.** Suponha que exista uma subação v associada a um potencial f e considere a sequência aditiva de potenciais $\Big\{S_k(f + v - v \circ T)\Big\}_{k\geq 1}$ associada ao potencial equivalente $f + v - v \circ T$. Atente que tal sequência satisfaz $k\beta(f) = \beta\Big(S_k(f + v - v \circ T)\Big) \leq \sup_{x\in X} S_k(f + v - v \circ T)(x) = k\beta(f)$ para todo $k \geq 1$, donde determinamos conjunto maximizante $\bigcap_{k\geq 1} \Big[S_k(f + v - v \circ T)\Big]^{-1}\Big(k\beta(f)\Big)$.

Apresentar caracterizações explícitas de conjuntos maximizantes é uma questão que carece de uma resposta satisfatória na teoria de otimização ergódica. Destacamos a seguir duas situações inerentes a esta problemática.

- Para o caso aditivo, demonstra-se em [Mor07, Proposição 2] que a condição (1.7) – a qual assegura a existência de conjunto maximizante – retrata uma hipótese mais forte que a existência de subação (contínua). Entretanto, a continuidade das subações é usualmente uma condição suficiente para que o local de maximização e o conjunto de Aubry sejam maximizantes neste cenário, como vimos na seção 1.1.

- O conjunto maximizante que generaliza o local de maximização foi apresentado na proposição 1.12 apenas para uma classe específica de sequências subaditivas e, até onde sabemos, previamente ao conteúdo desta tese, nenhuma versão do conjunto de Aubry foi proposta para o contexto das sequências de funções.

Analisaremos tais questões no capítulo 2 desta tese, apresentando resultados originais. Motivações para esta investigação serão detalhadas na seção 2.3 e no capítulo 3 por meio de alguns exemplos exibidos previamente.

Capítulo 2

Conjuntos maximizantes

Neste capítulo, caracterizam-se as medidas de probabilidades maximizantes para sequências de funções com propriedades subaditivas. Conforme a discussão realizada no capítulo anterior, isto se obtém ao exibir conjunto maximizante associado a $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$, isto é, um conjunto fechado $\mathsf{K}_{\mathcal{F}}$ verificando a equivalência

$$\mu \in \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}] \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{supp}\mu \subset \mathsf{K}_{\mathcal{F}}.$$

Para descrever explicitamente um tal conjunto, estabelecemos a seguinte condição.

Definição 2.1. Uma sequência de funções $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ é dita não defectiva se

$$R_{\mathcal{F}} := \sup_{p>q\geq 0} \sup_{x\in X} \Big[f_p(x) - f_q(x) - (p-q)\beta[\mathcal{F}]\Big] < \infty,$$

onde será convencionado que $f_0 \equiv 0$.

Assinalamos algumas informações sobre a constante não defectiva $R_{\mathcal{F}}$.

Lema 2.2. *Seja $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ sequência de funções s.c.s. com a condição não defectiva.*

(i) Se $\mathcal{F}$ é subaditiva, então $R_{\mathcal{F}} = \sup_{k\geq 1} \sup_{x\in X} \Big[f_k(x) - k\beta[\mathcal{F}]\Big] \geq 0$;

(ii) Para $\mathcal{F}$ quase subaditiva, obtemos $R_{\mathcal{F}+C_{\mathcal{F}}} - C_{\mathcal{F}} = \sup_{k\geq 1} \sup_{x\in X} \Big[f_k(x) - k\beta[\mathcal{F}]\Big]$, de modo que $R_{\mathcal{F}+C_{\mathcal{F}}} - C_{\mathcal{F}} \leq R_{\mathcal{F}} \leq R_{\mathcal{F}+C_{\mathcal{F}}}$ e $R_{\mathcal{F}} + C_{\mathcal{F}} \geq 0$.

Em vista deste resultado, a propriedade não defectiva estende a condição (1.7) do caso aditivo e a condição (1.8) do caso subaditivo. Para sequências quase subaditivas, é suficiente majorar o termo $R_{\mathcal{F}+C_{\mathcal{F}}} - C_{\mathcal{F}}$ para caracterizar tal propriedade.

Demonstração. A partir da propriedade subaditiva, pode-se estabelecer a desigualdade $f_p(x) - f_q(x) - (p-q)\beta[\mathcal{F}] \leq f_{p-q} \circ T^q(x) - (p-q)\beta[\mathcal{F}] \leq \sup_{k\geq 1} \sup_{x\in X} \Big[f_k(x) - k\beta[\mathcal{F}]\Big]$, para todo $x \in X$ e para todo $p > q \geq 0$, que é suficiente para obter a igualdade proposta no item (i). Para toda $\nu \in \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}]$, a subaditividade de $\mathcal{F}$ assegura que $\beta[\mathcal{F}] = \inf_{k\geq 1} \frac{1}{k} \int f_k \, d\nu$. Desta maneira, $k\beta[\mathcal{F}] \leq \int f_k \, d\nu \leq \sup_{x\in X}[f_k(x)]$ para todo $k \geq 1$, donde $R_{\mathcal{F}} \geq 0$.

Recorde que a sequência $\mathcal{F} + C_{\mathcal{F}}$ é subaditiva, sempre que $\mathcal{F}$ for quase subaditiva. Devido ao item (i), obtemos $R_{\mathcal{F}+C_{\mathcal{F}}} = \sup_{k\geq 1} \sup_{x\in X} \Big[f_k(x) - k\beta[\mathcal{F}]\Big] + C_{\mathcal{F}}$ e $R_{\mathcal{F}+C_{\mathcal{F}}} \geq 0$, donde segue a identidade do enunciado. A desigualdade $R_{\mathcal{F}+C_{\mathcal{F}}} - C_{\mathcal{F}} \leq R_{\mathcal{F}}$ é imediata desta igualdade e da definição da constante não defectiva. Para todo $x \in X$ e para quaisquer $p > q \geq 0$, temos que a propriedade quase subaditiva (com $C_{\mathcal{F}} \geq 0$) assegura $f_p(x) - f_q(x) - (p-q)\beta[\mathcal{F}] \leq f_{p-q} \circ T^q(x) + C_{\mathcal{F}} - (p-q)\beta[\mathcal{F}] \leq \sup\limits_{k\geq 1} \sup\limits_{x\in X} \Big[(f_k(x) + C_{\mathcal{F}}) - k\beta[\mathcal{F}]\Big]$ e, portanto, $R_{\mathcal{F}} \leq R_{\mathcal{F}+C_{\mathcal{F}}}$. A última relação decorre de $R_{\mathcal{F}} + C_{\mathcal{F}} \geq R_{\mathcal{F}+C_{\mathcal{F}}} \geq 0$. ■

Observação. A denominação dada à propriedade anterior é uma tradução livre do termo em inglês *nondefectiveness*. Trata-se de uma terminologia usual da teoria do raio espectral conjunto, a qual também é conhecida como produto limitada ou estabilidade absoluta (veja a seção 3.1).

Para sequências de funções quase subaditivas com a condição não defectiva, descrevemos neste capítulo candidatos a conjuntos maximizantes, os quais generalizam o local de maximização e o conjunto de Aubry. Com o intuito de provar que tais conjuntos são maximizantes, veremos como algumas das ideias essenciais aos argumentos apresentados na teoria de otimização ergódica são adaptadas para contextos mais gerais. Ressaltamos também que os resultados demonstrados nas próximas seções são originais para esta teoria, em particular, parte do conteúdo da seção 2.2 encontra-se publicado na referência [GG16].

2.1 Local de maximização

Propomos três técnicas de ajuste/correção pontual de funções em uma dada sequência, dentre as quais sugerimos generalização da noção de subação minimal.

Definição 2.3. A partir de uma sequência quase subaditiva de funções s.c.s. $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ com a condição não defectiva, produzimos as sequências $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} = \{g_k\}_{k\geq 1}$, $\mathcal{H}_{\mathcal{F}} = \{h_k\}_{k\geq 1}$ e $\underset{\sim}{\mathcal{H}}_{\mathcal{F}} = \Big\{\underset{\sim}{h_k}\Big\}_{k\geq 1}$ de funções descritas de acordo com a seguinte cadeia de processos, para todo $x \in X$ e para todo $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\text{(Renormalização)}\quad g_k(x) &:= \sup_{\ell \geq 0} \sup_{T^\ell z = x} \Big(f_{k+\ell}(z) - \ell\beta[\mathcal{F}] \Big) - \sup_{\ell \geq 0} \sup_{T^\ell z = T^k x} \Big(f_\ell(z) - \ell\beta[\mathcal{F}] \Big), \\
\text{(Redução subaditiva)}\quad h_k(x) &:= \sup_{\ell \geq 0} \Big(g_{k+\ell}(x) - g_\ell \circ T^k(x) \Big) \qquad \text{e} \\
\text{(Regularização)}\quad \underset{\sim}{h_k}(x) &:= \inf_{\varepsilon > 0} \sup_{y \in B_\varepsilon(x)} h_k(y)
\end{aligned}$$

(por convenção, $f_0 \equiv 0$, $g_0 \equiv 0$ e $T^0 \equiv Id_X$).

Abaixo, são retratados alguns cenários que evidenciam a ação de cada uma das etapas de ajuste/correção introduzidas na definição acima.

Exemplo 2.4 (Caso aditivo com subação minimal)**.** Seja $\{S_k f\}_{k \geq 1}$ uma sequência aditiva obtida a partir de um potencial Hölder f definido em um sistema dinâmico hiperbólico topologicamente transitivo. Com tais hipóteses, na prova de [CLT01, Proposição 11], obtém-se que $\{S_k f\}_{k \geq 1}$ cumpre a condição não defectiva, dada neste cenário por (1.7).

Aplicando a técnica de renormalização, obtemos a sequência $\mathcal{G}_{\{S_k f\}}$ formada pelas funções

$$\begin{aligned}
g_k(x) &= \sup_{\ell \geq 0} \sup_{T^\ell z = x} \Big(S_\ell f(z) + S_k f(T^\ell z) - \ell\beta(f) \Big) - \sup_{\ell \geq 0} \sup_{T^\ell z = T^k x} \Big(S_\ell f(z) - \ell\beta(f) \Big) \\
&= S_k f(x) + \upsilon(x) - \upsilon \circ T^k(x) = S_k\Big(f + \upsilon - \upsilon \circ T \Big)(x),
\end{aligned}$$

para todo $x \in X$ e para todo $k \geq 1$, onde υ é subação minimal definida na equação (1.2). Em particular, a definição de subação garante que $\sup_{x \in X} g_k(x) = k\beta(f)$ para todo $k \geq 1$.

Recordando que a subação minimal é contínua, atente que $\mathcal{G}_{\{S_k f\}}$ é uma sequência aditiva de potenciais. Por esta razão, os processos de redução subaditiva e regularização não têm nenhum efeito sobre tal sequência, isto é,

$$\begin{aligned}
& h_k(x) = \sup_{\ell \geq 0} \Big(S_{k+\ell}\Big(f + \upsilon - \upsilon \circ T \Big)(x) - S_\ell\Big(f + \upsilon - \upsilon \circ T \Big)(T^k x) \Big) = g_k(x) \\
\text{e} \qquad & \underset{\sim}{h_k}(x) = \inf_{\varepsilon > 0} \sup_{y \in B_\varepsilon(x)} S_k\Big(f + \upsilon - \upsilon \circ T \Big)(y) = g_k(x)
\end{aligned}$$

para todo $x \in X$ e para todo $k \geq 1$, donde $\mathcal{G}_{\{S_k f\}} = \mathcal{H}_{\{S_k f\}} = \underset{\sim}{\mathcal{H}_{\{S_k f\}}}$.

Exemplo 2.5 (Caso aditivo sem subação contínua)**.** Para o *full-shift* unilateral $\Sigma^{\mathbb{N}}$ gerado a partir do alfabeto $\Sigma = \{1,2,3\}$, considere o potencial

$$f(x_0, x_1, \ldots) := \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{\ell=0}^{k^2-1} \mathbb{1}_{\sigma^\ell A_k}(x_0, x_1, \ldots) \right) - \mathbb{1}_{[3]}(x_0, x_1, \ldots),$$

$$\text{onde} \qquad A_k := [\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{2k^2}] \cap \sigma^{-2k^2}([\underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{k}]) \cap \sigma^{-2k^2-k}([3]),$$

o qual foi originalmente introduzido em [Mor07, Proposição 2] com o intuito de descrever um exemplo de potencial que obedece a condição não defectiva (em virtude de $R_{\mathcal{F}} \leq 1$), porém não possui subação (contínua).

Repetindo a argumentação do exemplo anterior, determinamos que

$$g_k(x) = S_k\Big(f + \upsilon - \upsilon \circ T\Big)(x) \qquad \text{e} \qquad h_k(x) = g_k(x)$$

para todo $x \in X$ e para todo $k \geq 1$, donde $\mathcal{G}_{\{S_k f\}} = \mathcal{H}_{\{S_k f\}}$. Observamos que a função υ (cuja definição coincide com a subação minimal da equação (1.2)) não pode ser contínua. Consequentemente, o processo de regularização modifica a sequência aditiva $\mathcal{H}_{\{S_k f\}}$ produzindo sequência de funções s.c.s. $\underset{\sim}{\mathcal{H}_{\{S_k f\}}} = \Big\{ \inf_{\varepsilon > 0} \sup_{y \in B_\varepsilon(\cdot)} S_k\Big(f + \upsilon - \upsilon \circ T\Big)(y) \Big\}_{k \geq 1}$, a qual satisfaz a propriedade subaditiva. A fim disto verificar, considere um ponto $x \in X$ e inteiros $m, n \geq 1$. A partir da continuidade de T^n temos que dado $\bar{\bar{\varepsilon}} > 0$ existe $\bar{\bar{\delta}} > 0$ cumprindo $T^n\Big(B_{\bar{\bar{\delta}}}(x)\Big) \subset B_{\bar{\bar{\varepsilon}}}\Big(T^n x\Big)$. Para $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\bar{\varepsilon}} > 0$ (e $\bar{\bar{\delta}} > 0$), decorre da monotonicidade com respeito ao raio que

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{h_{m+n}}(x) &= \inf_{\varepsilon > 0} \sup_{y \in B_\varepsilon(x)} \Big(S_n\Big(f + \upsilon - \upsilon \circ T\Big)(y) + S_m\Big(f + \upsilon - \upsilon \circ T\Big)(T^n y) \Big) \\
&\leq \sup_{y \in B_{\bar{\varepsilon}}(x)} S_n\Big(f + \upsilon - \upsilon \circ T\Big)(y) + \sup_{y \in B_{\bar{\bar{\delta}}}(x)} S_n\Big(f + \upsilon - \upsilon \circ T\Big)(T^n y) \\
&\leq \sup_{y \in B_{\bar{\varepsilon}}(x)} S_n\Big(f + \upsilon - \upsilon \circ T\Big)(y) + \sup_{z \in B_{\bar{\bar{\varepsilon}}}(T^n x)} S_n\Big(f + \upsilon - \upsilon \circ T\Big)(z).
\end{aligned}$$

Como $\bar{\varepsilon}$ e $\bar{\bar{\varepsilon}}$ são arbitrários, concluímos que $\underset{\sim}{h_{m+n}}(x) \leq \underset{\sim}{h_n}(x) + \underset{\sim}{h_m} \circ T^n(x)$.

Observação. Atente que a função υ surge naturalmente do processo de renormalização no cenário aditivo. Ainda nesta seção veremos que a função mensurável υ é limitada, devido à condição não defectiva – veja (1.2). Como esta função (independente da regularidade) obedece $f + \upsilon - \upsilon \circ T \leq \beta(f)$ sobre X, assumindo por ora que υ é limitada, obtemos $\sup_{k \geq 1} \sup_{x \in X} \Big[S_k f(x) - k\beta(f) \Big] \leq \sup_{k \geq 1} \sup_{x \in X} \Big[\upsilon \circ T^k(x) - \upsilon(x) \Big] \leq 2 \sup_{x \in X} |\upsilon(x)|$. Concluiremos então que a condição não defectiva do caso aditivo (dada pela equação (1.7)) é equivalente à existência de uma subação mensurável e limitada para f.

Exemplo 2.6 (Caso subaditivo renormalizado)**.** Dada sequência subaditiva de funções s.c.s. $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$, assuma que $\sup_{x\in X} f_k(x) = k\beta[\mathcal{F}]$ para todo $k \geq 1$ (donde é imediato a condição não defectiva com $R_{\mathcal{F}} = 0$). Decorre desta suposição que as técnicas de correção descritas na definição 2.3 não alteram a sequência original, ou seja, $\mathcal{F} = \mathcal{G}_{\mathcal{F}} = \mathcal{H}_{\mathcal{F}} = \underset{\sim}{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}$. Com efeito, observamos primeiramente que $\sup_{\ell\geq 0} \sup_{T^\ell z = T^k x} \Big(f_\ell(z) - \ell\beta[\mathcal{F}]\Big) \equiv 0$. A propriedade subaditiva assegura que

$$\begin{aligned}
f_k(x) \leq g_k(x) &= \sup_{\ell\geq 0} \sup_{T^\ell z = x} \Big(f_{k+\ell}(z) - \ell\beta[\mathcal{F}]\Big) \\
&\leq \sup_{\ell\geq 0} \sup_{T^\ell z = x} \Big(f_\ell(z) + f_k(T^\ell z) - \ell\beta[\mathcal{F}]\Big) = f_k(x), \\
\text{e} \qquad f_k(x) \leq h_k(x) &= \sup_{\ell\geq 0} \Big(f_{k+\ell}(x) - f_\ell(T^k x)\Big) \leq f_k(x)
\end{aligned}$$

para todo $x \in X$ e para todo $k \geq 1$. Com isto, segue por semicontinuidade que $\underset{\sim}{h_k} = f_k$.

Exemplo 2.7 (Sequência subaditiva não renormalizada)**.** A sequência subaditiva de números reais (ou potenciais constantes) $\mathcal{F} = \{f_k \equiv 1/k\}_{k\geq 1}$ possui $\beta[\mathcal{F}] = 0$ e $R_{\mathcal{F}} = 1$, donde satisfaz a condição não defectiva. Neste cenário, o cálculo dos processos de renormalização e de redução subaditiva são triviais: para todo $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
g_k &= \sup_{\ell\geq 0} \Big(f_{k+\ell} - \ell\beta[\mathcal{F}]\Big) - \sup_{\ell\geq 0} \Big(f_\ell - \ell\beta[\mathcal{F}]\Big) = \sup_{\ell\geq 0} \frac{1}{k+\ell} - \left(0 \vee \sup_{\ell\geq 1} \frac{1}{\ell}\right) = \frac{1}{k} - 1 \\
\text{e} \qquad h_k &= \sup_{\ell\geq 0} \Big(g_{k+\ell} - g_\ell\Big) = \left(\frac{1}{k} - 1\right) \vee \sup_{\ell\geq 1} \left(\frac{1}{k+\ell} - \frac{1}{\ell}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Ademais, a técnica de regularização não tem nenhum efeito em potenciais constantes. Obtemos a sequência quase subaditiva $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} = \{1/k - 1\}_{k\geq 1}$, onde $C_{\mathcal{G}} = 1$, e a sequência constante $\mathcal{H}_{\mathcal{F}} = \underset{\sim}{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}} = \{0\}_{k\geq 1}$.

A partir das etapas estipuladas na definição 2.3, decorre naturalmente a seguinte caracterização das probabilidades maximizantes.

Teorema 2.8. *Sejam $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ sequência quase subaditiva de funções s.c.s. com a condição não defectiva, $\mathcal{H}_{\mathcal{F}} = \{h_k\}_{k\geq 1}$ e $\underset{\sim}{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}} = \{\underset{\sim}{h_k}\}_{k\geq 1}$ sequências introduzidas na definição 2.3. Então, o compacto não vazio e T-invariante*

$$\bigcap_{k\geq 1} \underset{\sim}{h_k}^{-1}\Big(k\beta[\mathcal{F}]\Big) = \bigcap_{k\geq 1} \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{h_k^{-1}\Big(\Big[k\beta[\mathcal{F}] - \varepsilon, k\beta[\mathcal{F}]\Big]\Big)}$$

é um conjunto maximizante para $\mathcal{F}$. Além disso, se cada h_k for s.c.s, então a coletânea acima vem a ser simplesmente $\bigcap_{k\geq 1} h_k^{-1}\Big(k\beta[\mathcal{F}]\Big)$.

Perceba que o enunciado deste resultado para o exemplo 2.6 coincide com a proposição 1.12. O teorema anterior generaliza os resultados conhecidos na literatura da teoria de otimização ergódica que introduzem o local de maximização como um conjunto maximizante. Por este motivo introduzimos o seguinte conceito.

Definição 2.9. O local de maximização para uma sequência quase subaditiva de funções s.c.s. $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ com a condição não defectiva é dado pelo conjunto

$$\bigcap_{k\geq 1} \underset{\sim}{h_k}^{-1}\Big(k\beta[\mathcal{F}]\Big),$$

onde $\underset{\sim}{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}} = \{\underset{\sim}{h_k}\}_{k\geq 1}$ é a sequência regularizada descrita na definição 2.3.

Com respeito à estrutura da demonstração do teorema 2.8, veremos que as técnicas desenvolvidas na definição 2.3 reduzem a sequência $\mathcal{F}$ – sem alterar o problema de otimização original – à sequência $\underset{\sim}{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}$ que satisfaz as hipótese da proposição 1.12. Detalharemos individualmente cada um dos processos destacando as propriedades essenciais a cada etapa nos lemas 2.11, 2.15 e 2.17.

Especificamente para o caso aditivo, exibimos uma versão do teorema 2.8 que contempla simultaneamente os exemplos 2.4 e 2.5 e dispensa regularidade da função que descreve a subação minimal.

Corolário 2.10. *Dado um potencial f que verifica* $\sup_{k\geq 1} \sup_{x\in X} \Big[S_k f(x) - k\beta(f)\Big] < \infty$, *considere a função* $\upsilon(x) = \sup_{\ell\geq 0} \sup_{T^\ell z = x} \Big(S_\ell f(z) - \ell\beta(f)\Big)$ *definida para todo* $x \in X$. *Então o compacto não vazio e T-invariante*

$$\bigcap_{k\geq 1} \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\Big[S_k(f + \upsilon - \upsilon\circ T)\Big]^{-1}\Big(\Big[k\beta(f) - \varepsilon, k\beta(f)\Big]\Big)}$$

é maximizante para f. Em particular, se a função υ é contínua, então o conjunto acima coincide com o local de maximização $\bigcap_{k\geq 1} \Big[S_k(f + \upsilon - \upsilon\circ T)\Big]^{-1}\Big(k\beta(f)\Big)$.

Demonstração. A sequência aditiva $\{S_k f\}_{k\geq 1}$ relativa a f satisfaz a condição não defectiva. Procedendo de maneira similar aos exemplos 2.4 e 2.5, asseguramos então as igualdades $\mathcal{H}_{\{S_k f\}} = \mathcal{G}_{\{S_k f\}} = \Big\{S_k(f+\upsilon-\upsilon\circ T)\Big\}_{k\geq 1}$. Também obtemos $\underset{\sim}{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}} = \Big\{S_k(f+\upsilon-\upsilon\circ T)\Big\}_{k\geq 1}$ sempre que a função υ for contínua. Concluímos o resultado a partir do teorema 2.8 ao considerar tais sequências associadas à $\{S_k f\}_{k\geq 1}$. ∎

Reconhecemos que os processos da definição 2.3 ocultam a sequência original $\mathcal{F}$, dificultando aplicações práticas do teorema 2.8. Na realidade, o corolário 2.10 e a proposição 1.12 despontam como principais resultados na análise de exemplos concretos. Com o intuito de caracterizar as medidas maximizantes diretamente em termos das funções que formam a sequência $\mathcal{F}$, apresentamos ao final desta seção uma alternativa teórica para o local de maximização.

2.1.1 Renormalização

Estudaremos a primeira técnica de correção da definição 2.3, a qual determina a sequência renormalizada $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} = \{g_k\}_{k\geq 1}$ dada por

$$g_k(x) = \upsilon_k(x) - \upsilon_0 \circ T^k(x) \quad \text{onde} \quad \upsilon_n(x) \coloneqq \sup_{\ell\geq 0} \sup_{T^\ell z = x} \Big(f_{n+\ell}(z) - \ell\beta[\mathcal{F}]\Big)$$

(com $f_0 \equiv 0$ e $T^0 \equiv Id_X$) para todo $x \in X$, para todo $k \geq 1$ e para todo $n \geq 0$. (Para o caso aditivo, υ_0 é a subação minimal associada a um potencial descrita por (1.2).) A partir de uma sequência quase subaditiva de funções s.c.s. $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ verificando a condição não defectiva, obtemos que as funções $\upsilon_n : X \to \mathbb{R}$ estão bem definidas, pois

$$0 \leq \upsilon_0(x) = \sup_{\ell\geq 0} \sup_{T^\ell z = x} \Big(f_\ell(z) - \ell\beta[\mathcal{F}]\Big) \leq \max\{0, R_{\mathcal{F}}\} \leq R_{\mathcal{F}} + C_{\mathcal{F}} \qquad \text{e} \tag{2.1}$$

$$f_k(x) \leq \upsilon_k(x) \leq \sup_{\ell\geq 0} \sup_{T^\ell z = x} \Big(f_\ell(z) + f_k(T^\ell z) + C_{\mathcal{F}} - \ell\beta[\mathcal{F}]\Big) \leq f_k(x) + R_{\mathcal{F}} + C_{\mathcal{F}} \tag{2.2}$$

para todo $x \in X$ e para todo $k \geq 1$. Além disso, tais funções estão relacionadas, como, por exemplo, na seguinte desigualdade

$$\upsilon_{m+n}(x) \leq \sup_{\ell+n\geq n} \sup_{T^{\ell+n} z = T^n x} \Big(f_{m+(\ell+n)}(z) - (\ell+n)\beta[\mathcal{F}]\Big) + n\beta[\mathcal{F}] \leq \upsilon_m(T^n x) + n\beta[\mathcal{F}] \tag{2.3}$$

válida para todo $x \in X$ e para todos $m, n \geq 0$.

A sequência renormalizada $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ é composta por funções integráveis (mensuráveis e limitadas) cujas principais propriedades são destacadas abaixo.

Lema 2.11. *Sejam $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ sequência quase subaditiva de funções s.c.s. com a condição não defectiva e $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} = \{g_k\}_{k\geq 1}$ sua respectiva sequência renormalizada. Então:*

(i) $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ é quase subaditiva (com constante $C_{\mathcal{G}} \leq \max\{C_{\mathcal{F}}, R_{\mathcal{F}} + C_{\mathcal{F}}\}$);

(ii) Para todo $k \geq 1$, vale $\sup_{x\in X} g_k(x) \leq k\beta[\mathcal{F}]$;

(*iii*) *As sequências* $\mathcal{F}$ *e* $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ *verificam* $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\int g_k\,d\mu = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\int f_k\,d\mu$ *para toda medida de probabilidade* T*-invariante* μ*. Em particular,* $\beta[\mathcal{F}] = \beta\Big[\mathcal{G}_{\mathcal{F}}\Big] = \beta\Big[\mathcal{G}_{\mathcal{F}}+C_{\mathcal{G}}\Big]$ *e*

$$\mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}] = \mathcal{M}_{\max}\Big[\mathcal{G}_{\mathcal{F}}\Big] = \bigcap_{k\geq 1}\left\{\mu\in\mathcal{M}_T\,:\,k\beta[\mathcal{F}]-C_{\mathcal{G}}\leq\int g_k\,d\mu\leq\,k\beta[\mathcal{F}]\right\}.$$

A principal ação do processo de renormalização sobre sequências de funções é descrita pelo item (*ii*) acima, que consiste em uma reformulação da definição de subação.

Demonstração. Para todo $x\in X$ e para todo $m,n\geq 0$,

$$\begin{aligned} \upsilon_{m+n}(x) &\leq \sup_{\ell\geq 0}\ \sup_{T^\ell z=x}\Big(f_{n+\ell}(z)+f_m\circ T^n(T^\ell z)+C_{\mathcal{F}}-\ell\beta[\mathcal{F}]\Big)\\ &= \upsilon_n(x)+f_m\circ T^n(x)+C_{\mathcal{F}}\ \leq\ \upsilon_n(x)+\upsilon_m\circ T^n(x)+C_{\mathcal{F}}, \end{aligned}$$

onde as desigualdades decorrem da propriedade quase subaditiva de $\mathcal{F}$ e de (2.2). Logo, a sequência de funções $\{\upsilon_n\}_{n\geq 0}$ é quase subaditiva. Este fato em parceria com (2.1) fornece o item (*i*), visto que

$$\begin{aligned} g_{m+n} &= \upsilon_{m+n}-\upsilon_0\circ T^{m+n}\\ &\leq \upsilon_n+\upsilon_m\circ T^n+C_{\mathcal{F}}-\upsilon_0\circ T^m\circ T^n+\Big(\max\{0,R_{\mathcal{F}}\}-\upsilon_0\circ T^n\Big)\\ &= (\upsilon_n-\upsilon_0\circ T^n)+(\upsilon_m-\upsilon_0\circ T^m)\circ T^n+\max\{C_{\mathcal{F}},R_{\mathcal{F}}+C_{\mathcal{F}}\}\\ &= g_n+g_m\circ T^n+\max\{C_{\mathcal{F}},R_{\mathcal{F}}+C_{\mathcal{F}}\}, \end{aligned}$$

para todo $m,n\geq 0$.

O item (*ii*) do enunciado é imediato da desigualdade (2.3) para $m=0$ e $n=k$.

Para todo $k\geq 1$, decorre de (2.1) e (2.2) que

$$f_k-R_{\mathcal{F}}-C_{\mathcal{F}}\leq g_k\leq f_k+R_{\mathcal{F}}+C_{\mathcal{F}}. \tag{2.4}$$

Sendo assim, a sequência quase subaditiva $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ é formada por funções integráveis. A relação anterior também garante a existência do limite $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\int g_k\,d\mu$ e determina que

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\int g_k\,d\mu = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\int f_k\,d\mu$$

para toda medida de probabilidade T-invariante μ. Além disso, a definição de medida maximizante para a sequência quase subaditiva $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ é dada por $\beta[\mathcal{F}]=\beta[\mathcal{G}_{\mathcal{F}}]=\beta[\mathcal{G}_{\mathcal{F}}+C_{\mathcal{G}}]=\inf_{k\geq 1}\frac{1}{k}\int(g_k+C_{\mathcal{G}})\,d\mu$, onde a última igualdade decorre do teorema ergódico de Kingman já que $g_1 + C_{\mathcal{G}} \leq \sup f_1 + R_{\mathcal{F}} + C_{\mathcal{F}} + C_{\mathcal{G}}$. Temos então

$$k\beta[\mathcal{F}] - C_{\mathcal{G}} \leq \int g_k \, d\mu \leq \sup_{x \in X} g_k(x) \leq k\beta[\mathcal{F}]$$

para todo $k \geq 1$, donde concluímos o item (iii). ■

As estimativas (dadas no lema acima) para a constante de quase subaditividade $C_{\mathcal{G}}$ são atingidas para o seguinte cenário elementar.

Exemplo 2.12. Vimos que a sequência subaditiva (de potenciais constantes) $\mathcal{F} = \{1/k\}_{k\geq 1}$ (analisada no exemplo 2.7) possui $R_{\mathcal{F}} = 1$ e $C_{\mathcal{F}} = 0$. Ademais, a respectiva sequência renormalizada $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} = \{1/k - 1\}_{k\geq 1}$ é quase subaditiva com $C_{\mathcal{G}} = 1 = \max\{C_{\mathcal{F}}, R_{\mathcal{F}} + C_{\mathcal{F}}\}$.

Por outro lado, nem sempre é possível obter igualdade para tal estimativa.

Exemplo 2.13. Considere a sequência $\mathcal{F} = \{S_k f - \Gamma\}_{k\geq 1}$ para qualquer $\Gamma \geq 0$ e $R_{\mathcal{F}} > 0$. Para $\Gamma = 0$, a sequência $\mathcal{F}$ é obviamente aditiva e $C_{\mathcal{F}} = 0$. Caso contrário, $\mathcal{F}$ é uma sequência quase subaditiva com $C_{\mathcal{F}} = \Gamma > 0$. Independente destas situações, obtemos que a sequência renormalizada $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} = \left\{S_k f + \upsilon_0 - \upsilon_0 \circ T^k\right\}_{k\geq 1}$ é aditiva, logo $C_{\mathcal{G}} = 0$.

As técnicas de redução subaditiva e de regularização também possuem resultados similares ao lema 2.11, para os quais os itens (ii) e (iii) são substancialmente aprimorados. Em particular, uma motivação para tais processos é dada pela seguinte situação teórica em que a etapa de renormalização é suficiente para estabelecer uma caracterização das probabilidades maximizantes.

Exemplo 2.14 (Local de maximização para renormalização subaditiva e regular)**.** Para alguma sequência quase subaditiva e não defectiva de funções s.c.s. $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$, assuma que a respectiva sequência renormalizada $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} = \{g_k\}_{k\geq 1}$ possui a propriedade subaditiva (isto é, $C_{\mathcal{G}} = 0$). É imediato do item (iii) do lema 2.11 que

$$\mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}] = \bigcap_{k\geq 1} \left\{\mu \in \mathcal{M}_T \,:\, \int g_k \, d\mu = k\beta[\mathcal{F}]\right\}.$$

Ademais, ao supor que as funções g_k são s.c.s., obtemos a equivalência

$$\int g_k \, d\mu = k\beta[\mathcal{F}] \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{supp} \mu \subset g_k^{-1}\big(k\beta[\mathcal{F}]\big).$$

Sendo assim, $\bigcap_{k\geq 1} g_k^{-1}\big(k\beta[\mathcal{F}]\big)$ descreve um o conjunto maximizante para $\mathcal{F}$ e para $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$.

Atente que os exemplos 2.4 e 2.6 verificam naturalmente as condições estipuladas no exemplo anterior e seus respectivos locais de maximização – dados na definição 1.1 e pela proposição 1.12 – coincidem com a coletânea $\bigcap_{k\geq 1} g_k^{-1}\Big(k\beta[\mathcal{F}]\Big)$. Isto nos indica que as versões do local de maximização introduzidas no capítulo 1 não reconhecem os processos de redução subaditiva e de regularização. Até onde sabemos, não são conhecidos precedentes para estas técnicas na literatura.

2.1.2 Redução subaditiva

Na segunda etapa de ajuste introduzida na definição 2.3, estabelecemos a redução subaditiva $\mathcal{H}_{\mathcal{F}} = \{h_k\}_{k\geq 1}$ descrita por

$$h_k(x) := \sup_{\ell\geq 0} \Big(g_{k+\ell}(x) - g_\ell \circ T^k(x)\Big) = \sup_{\ell\geq 0} \Big(v_{k+\ell}(x) - v_\ell \circ T^k(x)\Big)$$

(com $g_0 \equiv 0$ e $T^0 \equiv Id_X$) para todo $x \in X$ e para todo $k \geq 1$. Tais funções são integráveis (mensuráveis e limitadas) por causa do item (i) do lema 2.11 que assegura

$$g_k(x) \leq h_k(x) = \sup_{\ell\geq 0} \Big(g_{k+\ell}(x) - g_\ell \circ T^k(x)\Big) \leq g_k(x) + C_{\mathcal{G}} \tag{2.5}$$

para todo $x \in X$ e para todo $k \geq 1$.

Observação. Note que a majoração para h_k em (2.5) não pode ser estabelecida para as sequências assintoticamente subaditivas a partir da desigualdade (1.6).

A redução subaditiva $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$ foi idealizada para verificar a seguintes particularidades.

Lema 2.15. *Sejam $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ sequência quase subaditiva de funções s.c.s. com a condição não defectiva e $\mathcal{H}_{\mathcal{F}} = \{h_k\}_{k\geq 1}$ a respectiva redução subaditiva. Então:*

(i) *$\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$ é subaditiva;*

(ii) *Para todo $k \geq 1$, verifica-se $\sup_{x\in X} h_k(x) = k\beta[\mathcal{F}]$;*

(iii) *As sequências $\mathcal{F}$ e $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$ cumprem $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\int h_k\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\int f_k\, d\mu$ para toda probabilidade T-invariante μ. Em particular, $\beta[\mathcal{F}] = \beta\Big[\mathcal{H}_{\mathcal{F}}\Big]$ e*

$$\mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}] = \mathcal{M}_{\max}\Big[\mathcal{H}_{\mathcal{F}}\Big] = \bigcap_{k\geq 1} \left\{\mu \in \mathcal{M}_T \,:\, \int h_k\, d\mu = k\beta[\mathcal{F}]\right\}.$$

Demonstração. Para obter o item (i), basta observar que

$$\begin{aligned} h_{m+n}(x) &= \sup_{\ell \geq 0} \Big(g_{m+n+\ell}(x) - g_{m+\ell} \circ T^n(x) + g_{m+\ell} \circ T^n(x) - g_\ell \circ T^{m+n}(x) \Big) \\ &\leq \sup_{\ell+m \geq m} \Big(g_{n+(\ell+m)}(x) - g_{\ell+m} \circ T^n(x) \Big) + h_m \circ T^n(x) \\ &\leq h_n(x) + h_m \circ T^n(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in X$ e para todos $m, n \geq 0$.

Note que (2.5) garante a existência do limite $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int h_k \, d\mu$, valendo para toda medida de probabilidade T-invariante μ

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int h_k \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int g_k \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int f_k \, d\mu,$$

onde a última igualdade segue do item (iii) do lema 2.11. Obtemos destas identidades que $\beta[\mathcal{F}] = \beta\big[\mathcal{G}_{\mathcal{F}}\big] = \beta\big[\mathcal{H}_{\mathcal{F}}\big]$ e $\mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}] = \mathcal{M}_{\max}\big[\mathcal{G}_{\mathcal{F}}\big] = \mathcal{M}_{\max}\big[\mathcal{H}_{\mathcal{F}}\big]$.

Resta provar o item (ii) e a caracterização de $\mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}]$ no enunciado do item (iii). Tais fatos são simultaneamente obtidos das desigualdades

$$k\beta[\mathcal{F}] \leq \int h_k \, d\mu \leq \sup_{x \in X} h_k(x) \leq k\beta[\mathcal{F}]$$

satisfeitas para qualquer $\mu \in \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}]$ e para todo $k \geq 1$. Com efeito, a primeira desigualdade decorre do teorema ergódico de Kingman, uma vez que $h_1 \leq g_1 + C_{\mathcal{G}} \leq \sup f_1 + R_{\mathcal{F}} + C_{\mathcal{F}} + C_{\mathcal{G}}$, enquanto a última desigualdade é um consequência imediata de (2.3), que fornece $h_k(x) = \sup_{\ell \geq 0} \Big(\upsilon_{k+\ell}(x) - \upsilon_\ell \circ T^k(x) \Big) \leq k\beta[\mathcal{F}]$ para todo $x \in X$ e para todo $k \geq 1$. ■

2.1.3 Regularização (s.c.s.)

O último procedimento de ajuste proposto na definição 2.3 remete ao seguinte resultado clássico de topologia geral, encontrado nas referências [Cho66, Cap. II, §9] e [Bou66, Cap. IV, §6.2, Proposição 4].

Lema 2.16. *A menor função s.c.s.* $\underset{\sim}{f} : X \to \mathbb{R}$ *que majora uma função limitada* $f : X \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$\underset{\sim}{f}(x) := \inf_{\varepsilon > 0} \sup_{y \in B_\varepsilon(x)} f(y) = \inf \left\{ \vartheta(x) \; : \; \begin{array}{c} \vartheta : X \to \mathbb{R} \text{ é s.c.s. e} \\ f(x) \leq \vartheta(x) \text{ para todo } x \in X \end{array} \right\}$$

para todo $x \in X$. *Em particular,* $\underset{\sim}{f} \equiv f$ *sempre que* f *for s.c.s.*

Destacamos duas propriedades das regularizações (s.c.s.) do lema acima: $f \leq \underset{\sim}{f}$ e $\max_{x\in X} \underset{\sim}{f}(x) = \sup_{x\in X} f(x)$. O primeiro fato é imediato da definição e o segundo decorre de $f(x) \leq \underset{\sim}{f}(x) = \inf_{\varepsilon>0} \sup_{y\in B_\varepsilon(x)} f(y) \leq \sup_{y\in X} f(y)$ para todo $x \in X$.

Aplicando o processo de regularização (s.c.s.) a cada função h_k que compõem a redução subaditiva $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$ produzimos a sequência de funções s.c.s. $\underset{\sim}{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}} = \left\{\underset{\sim}{h_k} : X \to \mathbb{R}\right\}_{k\geq 1}$, cujas propriedades são pontuadas abaixo.

Lema 2.17. *Sejam* $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ *sequência quase subaditiva de funções s.c.s. com a condição não defectiva e* $\underset{\sim}{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}} = \left\{\underset{\sim}{h_k}\right\}_{k\geq 1}$ *a respectiva sequência regularizada. Então:*

- (i) $\underset{\sim}{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}} = \left\{\underset{\sim}{h_k}\right\}_{k\geq 1}$ *é subaditiva;*
- (ii) *Para todo* $k \geq 1$*, vale* $\max\limits_{x\in X} \underset{\sim}{h_k}(x) = k\beta[\mathcal{F}]$*;*
- (iii) *As sequências* $\mathcal{F}$ *e* $\underset{\sim}{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}$ *obedecem* $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int \underset{\sim}{h_k}\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int f_k\, d\mu$ *para toda medida de probabilidade* T*-invariante* μ*. Em particular,*

$$\beta[\mathcal{F}] = \beta\left[\underset{\sim}{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}\right] \qquad e \qquad \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}] = \mathcal{M}_{\max}\left[\underset{\sim}{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}\right].$$

Demonstração. O item (i) decorre do fato de que $\underset{\sim}{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}$ herda a propriedade subaditiva de $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$. Para isto obter, perceba que as funções s.c.s. $\underset{\sim}{h_n} + \underset{\sim}{h_m} \circ T^n$ satisfazem $h_{m+n} \leq \underset{\sim}{h_n} + \underset{\sim}{h_m} \circ T^n$ para todo $m, n \geq 1$. Vimos no lema 2.16 que $\underset{\sim}{h_{m+n}}$ é a menor função s.c.s. que majora h_{m+n}. Consequentemente, $\underset{\sim}{h_{m+n}} \leq \underset{\sim}{h_n} + \underset{\sim}{h_m} \circ T^n$ para todo $m, n \geq 1$.

Pelo item (ii) do lema 2.15, temos que $\max_{x\in X} \underset{\sim}{h_k}(x) = \sup_{x\in X} h_k(x) = k\beta[\mathcal{F}]$, para todo $k \geq 1$, donde segue o item (ii) do enunciado.

Empregando as relações (2.4) e (2.5), determinamos as seguintes desigualdades $f_k - R_{\mathcal{F}} - C_{\mathcal{F}} \leq g_k \leq h_k \leq g_k + C_{\mathcal{G}} \leq f_k + R_{\mathcal{F}} + C_{\mathcal{F}} + C_{\mathcal{G}}$ para todo $k \geq 1$. Segue imediatamente da minimalidade na definição de $\underset{\sim}{h_k}$ e da semicontinuidade da função $f_k + R_{\mathcal{F}} + C_{\mathcal{F}} + C_{\mathcal{G}}$ que $f_k - R_{\mathcal{F}} - C_{\mathcal{F}} \leq h_k \leq \underset{\sim}{h_k} \leq f_k + R_{\mathcal{F}} + C_{\mathcal{F}} + C_{\mathcal{G}}$ para todo $k \geq 1$. Sendo assim, o limite $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int \underset{\sim}{h_k}\, d\mu$ existe e valem as igualdades

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int \underset{\sim}{h_k}\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int h_k\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int f_k\, d\mu$$

para toda $\mu \in \mathcal{M}_T$. Por causa do item (iii) do lema 2.15, concluímos este resultado verificando que $\beta[\mathcal{F}] = \beta\left[\mathcal{H}_{\mathcal{F}}\right] = \beta\left[\underset{\sim}{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}\right]$ e $\mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}] = \mathcal{M}_{\max}\left[\mathcal{H}_{\mathcal{F}}\right] = \mathcal{M}_{\max}\left[\underset{\sim}{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}\right]$. ■

A análise detalhada das três de técnicas propostas na definição 2.3 simplifica a prova do principal resultado desta seção.

Demonstração do teorema 2.8. Os itens (i) e (ii) do lema 2.17 determina que a sequência regularizada $\underset{\sim}{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}} = \{\underset{\sim}{h_k}\}_{k\geq 1}$ verifica as hipóteses da proposição 1.12. Desta forma, o compacto não vazio e T-invariante $\bigcap_{k\geq 1} \underset{\sim}{h_k}^{-1}\Big(k\beta[\mathcal{F}]\Big)$ é um conjunto maximizante para $\underset{\sim}{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}$. Devido ao item (iii) do lema 2.17, esta coletânea também é maximizante para $\mathcal{F}$. Para obter a igualdade entre os conjuntos enunciados no teorema 2.8, basta observar que

$$\underset{\sim}{h_k}^{-1}\Big(k\beta[\mathcal{F}]\Big) = \Big\{x \in X \,:\, \inf_{\varepsilon>0} \sup_{y\in B_\varepsilon(x)} h_k(y) = k\beta[\mathcal{F}]\Big\} = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{h_k^{-1}\Big(\Big[k\beta[\mathcal{F}]-\varepsilon, k\beta[\mathcal{F}]\Big]\Big)}.$$

Por fim, o lema 2.16 estabelece a igualdade $\underset{\sim}{h_k} = h_k$ sempre que as funções h_k da redução subaditiva $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$ forem s.c.s., donde o conjunto $\bigcap_{k\geq 1} h_k^{-1}\Big(k\beta[\mathcal{F}]\Big)$ é maximizante neste caso específico. ■

Alternativa para o local de maximização

Para finalizar esta seção, desenvolvemos mais um resultado de caraterização das probabilidades maximizantes que apresenta uma alternativa teórica para local de maximização, a qual dispensa qualquer processo de ajuste/correção pontual de funções em uma dada sequência.

Proposição 2.18. *Todo conjunto maximizante e T-invariante para uma sequência quase subaditiva de funções s.c.s. $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ está contido na coletânea*

$$\bigcap_{k\geq 1} \left(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n\, f_k}{n}\right)^{-1} \Big(\Big[k\beta[\mathcal{F}] - C_{\mathcal{F}}, +\infty\Big)\Big).$$

Além disso, se vale o princípio de subordinação, então

$$\mu \in \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}] \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{supp}\mu \subset \bigcap_{k\geq 1} \left(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n\, f_k}{n}\right)^{-1} \Big(\Big[k\beta[\mathcal{F}] - C_{\mathcal{F}}, +\infty\Big)\Big).$$

Demonstração. Seja $\mathsf{K}_{\mathcal{F}}$ conjunto T-invariante e maximizante para $\mathcal{F}$. Dados um ponto $x \in \mathsf{K}_{\mathcal{F}}$ e uma função f_k de $\mathcal{F}$, tome subsequência $\Big\{\frac{1}{n_\ell} S_{n_\ell}\, f_k(x)\Big\}_{\ell\geq 1}$ cujo limite coincide com o $\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n\, f_k(x)}{n}$. Considere a família de medidas de probabilidades $\Big\{\frac{1}{n_\ell} \sum_{i=0}^{n_\ell-1} \delta_{T^i x}\Big\}_{\ell\geq 1}$. Por compacidade, a família anterior possui ponto de acumulação (na topologia fraca*), denotado por $\nu_{f_k,x}$, o qual é T-invariante e obedece $\int f_k\, d\nu_{f_k,x} = \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n\, f_k(x)}{n}$. Em particular, $\operatorname{supp} \nu_{f_k,x}$ está contido no fecho da órbita de x, já que

$$\nu_{f_k,x}\Big(\overline{\{x, Tx, T^2x, \dots\}}\Big) \geq \limsup_{j\to\infty} \frac{1}{n_{\ell_j}} \sum_{i=0}^{n_{\ell_j}-1} \delta_{T^i x}\Big(\overline{\{x, Tx, T^2x, \dots\}}\Big) = 1.$$

Das propriedades de $\mathsf{K}_{\mathcal{F}}$, temos que $\operatorname{supp} \nu_{f_k,x} \subset \overline{\{x, Tx, T^2x, \dots\}} \subset \mathsf{K}_{\mathcal{F}}$ e, consequentemente, $\nu_{f_k,x} \in \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}]$. Decorrem então da identidade (1.5) que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n\, f_k(x)}{n} = \int f_k \, d\nu_{f_k,x} \geq k\beta[\mathcal{F}] - C_{\mathcal{F}}.$$

Como o argumento acima permanece válido para todo $k \geq 1$, uma vez que $x \in \mathsf{K}_{\mathcal{F}}$ é arbitrário, asseguramos que $\mathsf{K}_{\mathcal{F}} \subset \bigcap_{k\geq 1} \Big(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n\, f_k}{n}\Big)^{-1}\Big(\big[k\beta[\mathcal{F}] - C_{\mathcal{F}}, +\infty\big)\Big)$.

Assumindo o princípio de subordinação, segue da proposição 1.11 que o conjunto de Mather é T-invariante e maximizante para $\mathcal{F}$. Pelo fato provado anteriormente, concluímos que

$$\bigcup_{\mu\in\mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}]} \operatorname{supp} \mu \subset \bigcap_{k\geq 1} \left(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n\, f_k}{n}\right)^{-1} \Big(\big[k\beta[\mathcal{F}] - C_{\mathcal{F}}, +\infty\big)\Big).$$

Reciprocamente, note que se $\operatorname{supp} \mu \subset \bigcap_{k\geq 1} \Big(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n\, f_k}{n}\Big)^{-1} \Big(\big[k\beta[\mathcal{F}] - C_{\mathcal{F}}, +\infty\big)\Big)$, então pelo teorema ergódico de Birkhoff

$$\int f_k \, d\mu = \int \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n\, f_k}{n} \, d\mu \geq k\beta[\mathcal{F}] - C_{\mathcal{F}} \quad \text{para todo } k \geq 1,$$

o que fornece imediatamente $\mu \in \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}]$. ■

Em oposição ao local de maximização, não sabemos se a coletânea introduzida pela proposição acima é de fato um conjunto maximizante, uma vez que *a priori* tal conjunto pode não ser fechado. Na próxima seção, daremos continuidade à proposta de apresentar conjunto maximizante cuja descrição depende do valor pontual das funções que compõem a sequência original.

2.2 Conjunto de Aubry

Propomos a seguinte generalização para o conjunto de Aubry o qual é o segundo candidato a conjunto maximizante no contexto de sequências de funções.

Definição 2.19. Dada uma sequência de funções mensuráveis $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$, dizemos que $x \in X$ é um ponto de Aubry se, para todo $\varepsilon > 0$ e para qualquer inteiro $L \geq 1$, existem $y \in B_\varepsilon(x)$ e inteiros $m > n \geq 0$, com $m - n \geq L$, tais que

$$T^n y \in B_\varepsilon(x), \qquad T^m y \in B_\varepsilon(x) \qquad \text{e} \qquad \Big|f_m(y) - f_n(y) - (m-n)\beta[\mathcal{F}]\Big| < \varepsilon,$$

onde convencionamos $f_0 \equiv 0$. O conjunto de Aubry, denotado por $\Omega[\mathcal{F}]$, é formado por tais pontos.

Retratamos o comportamento dos pontos de Aubry em dois casos específicos.

Exemplo 2.20 (Caso aditivo)**.** Dados potencial f e sua respectiva sequência aditiva de potenciais $\{S_k f\}_{k\geq 1}$, verifica-se seguinte igualdade

$$\Omega(f) = \Omega\Big[\{S_k f\}\Big].$$

Primeiramente, perceba que a definição 1.2 coincide com a definição acima ao se fixar o inteiro $n = 0$. Portanto $\Omega(f) \subset \Omega\Big[\{S_k f\}\Big]$. Por outro lado, se $x \in \Omega\Big[\{S_k f\}\Big]$, segue que, para todo $\varepsilon > 0$ e para qualquer inteiro $L \geq 1$, existem $T^n y \in B_\varepsilon(x)$ e inteiro $r = m - n \geq L$ tais que $T^r(T^n y) = T^m y \in B_\varepsilon(x)$ e

$$\Big|S_{m-n} f(T^n y) - (m-n)\beta(f)\Big| = \Big|S_m f(y) - S_n f(y) - (m-n)\beta[\mathcal{F}]\Big| < \varepsilon.$$

Diante disso, concluímos que a definição 2.19 é uma generalização do conjunto de Aubry do caso aditivo.

Notação. Apesar da igualdade estabelecida pelo resultado acima, as diferentes notações empregadas no conjunto de Aubry para sequência de funções $\Omega[\mathcal{F}]$ (denotado com colchetes) e no conjunto de Aubry do caso aditivo $\Omega(f)$ (denotado com parênteses) serão mantidas por uma questão didática.

Exemplo 2.21 (Caso subaditivo renormalizado)**.** Os pontos de Aubry associados a uma sequência subaditiva de funções s.c.s. $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ satisfazendo $\sup_{x\in X} f_k(x) = k\beta[\mathcal{F}]$, para todo $k \geq 1$, podem ser identificados de maneira semelhante ao caso aditivo: *para todo $\varepsilon > 0$ e para qualquer inteiro $L \geq 1$, existem $y \in B_\varepsilon(x)$ e inteiro $r \geq L$ tais que*

$$T^r y \in B_\varepsilon(x) \qquad e \qquad \Big|f_r(y) - r\beta[\mathcal{F}]\Big| < \varepsilon.$$

Um elemento verificando a condição enunciada acima é claramente um ponto de Aubry (basta considerar $n = 0$ e $m = r$). Por outro lado, sejam $x \in \Omega[\mathcal{F}]$, $\varepsilon > 0$ e $L \geq 1$. Sabemos que existem $y \in B_\varepsilon(x)$ e inteiros $m > n \geq 0$, com $m - n \geq L$, tais que $T^n y \in B_\varepsilon(x)$, $T^m y \in B_\varepsilon(x)$ e $\left| f_m(y) - f_n(y) - (m-n)\beta[\mathcal{F}] \right| < \varepsilon$. Pondo $z = T^n y$ e $r = m - n$, obtemos $z \in B_\varepsilon(x)$ e inteiro $r \geq L$ tais que $T^r z = T^m y \in B_\varepsilon(x)$. Como $\sup_{x \in X} f_r(x) = r\beta[\mathcal{F}]$, concluímos que $-\varepsilon < f_m(y) - f_n(y) - (m-n)\beta[\mathcal{F}] \leq f_r(z) - r\beta[\mathcal{F}] \leq 0$.

As descrições dadas para o conjunto de Aubry nos exemplos anteriores reúnem dois importantes atributos associados a outros conjuntos maximizantes: uma coletânea de pontos não errantes (como o conjunto de Mather) que verifica controle dos valores de $f_k - k\beta[\mathcal{F}]$ em pontos suficientemente próximos (de modo similar ao local de maximização). No contexto de sequência de funções, veremos que tais propriedades serão essenciais para determinar mais um resultado de caraterização das probabilidades maximizantes.

Teorema 2.22. *O conjunto de Aubry $\Omega[\mathcal{F}]$ associado a uma sequência quase subaditiva de funções s.c.s. $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k \geq 1}$ com a condição não defectiva é um conjunto maximizante para $\mathcal{F}$.*

Versão do resultado acima foi publicado na referência [GG16]. Com respeito à estrutura da demonstração do teorema 2.22, veremos no lema 2.24 que o conjunto de Aubry é fechado. A equivalência $\mu \in \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}] \Leftrightarrow \operatorname{supp} \mu \subset \Omega[\mathcal{F}]$ será estabelecida em duas etapas com o intuito de explicitar as hipóteses necessárias para cada implicação. Supondo apenas as condições $(P1)$ e $(P2)$, deduziremos a relação $\mu \in \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}] \Rightarrow \operatorname{supp} \mu \subset \Omega[\mathcal{F}]$ na proposição 2.29 – a partir de uma generalização do teorema de Atkinson no contexto das sequências de funções, discutida na subseção 2.2.1. A implicação recíproca, dada por $\operatorname{supp} \mu \subset \Omega[\mathcal{F}] \Rightarrow \mu \in \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}]$, será obtida na proposição 2.30 sob as hipóteses quase subaditiva e não defectiva – em virtude da noção de sequência de corretores, introduzida na subseção 2.2.2. A primeira implicação vale na categoria mensurável enquanto que a recíproca exige regularidade s.c.s.

A partir do exemplo 2.20, deduzimos a seguinte versão aditiva para tal teorema.

Corolário 2.23. *O conjunto de Aubry $\Omega(f)$ associado a um potencial f, que verifica $\sup_{k \geq 1} \sup_{x \in X} \left[S_k f(x) - k\beta(f) \right] < \infty$, é um conjunto maximizante.*

Até onde sabemos, o corolário acima estende os resultados conhecidos sobre o conjunto de Aubry na literatura da teoria de otimização ergódica. Isto deve-se ao fato já mencionado na seção 2.1 – e provado em [Mor07, Proposição 2] – de que a hipótese não defectiva é mais geral que a existência de uma subação (contínua), a qual é essencial na argumentação usual de que $\Omega(f)$ é um conjunto maximizante (consulte seção 1.1).

Propriedades do conjunto de Aubry

As condições $(P1)$ e $(P2)$ são suficiente para assegurar que o conjunto de Aubry é não vazio. Recorde que uma sequência de funções mensuráveis $\mathcal{F}$ satisfazendo tais hipóteses possui pelo menos uma medida de probabilidade $\mu \in \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}]$. Dito isto, basta considerar a implicação $\mu \in \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}] \Rightarrow \operatorname{supp}\mu \subset \Omega[\mathcal{F}]$ (a ser demonstrada na proposição 2.29 da subseção 2.2.1) para deduzir que $\Omega[\mathcal{F}]$ sempre contém os suportes de medidas maximizantes.

Abaixo, verifica-se o primeiro requisito na definição de conjunto maximizante.

Lema 2.24. *Para $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ sequência de funções mensuráveis, $\Omega[\mathcal{F}]$ é compacto.*

Demonstração. Como X é um espaço métrico compacto, basta provar que $\Omega(\mathcal{F})$ é fechado. Seja $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \Omega[\mathcal{F}]$ sequência convergente para o ponto $x \in X$. Para todo $\varepsilon > 0$, escolha ponto de Aubry $x_i \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Dado inteiro $L \geq 1$, existem $y \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i) \subset B_\varepsilon(x)$ e inteiros $m > n \geq 0$, com $m - n \geq L$, tais que

$$T^n y,\, T^m y \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i) \subset B_\varepsilon(x) \quad \text{e} \quad \Big|f_m(y) - f_n(y) - (m-n)\beta[\mathcal{F}]\Big| < \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Portanto, $x \in \Omega[\mathcal{F}]$, donde segue $\Omega[\mathcal{F}] = \overline{\Omega[\mathcal{F}]}$. ■

Um modo elementar de deduzir a propriedade T-invariante do conjunto de Aubry consiste em provar que $\Omega[\mathcal{F}] \subset \Omega\Big[\{f_k \circ T\}_{k\geq 1}\Big] \subset T^{-1}(\Omega[\mathcal{F}])$. Enquanto a última inclusão é uma consequência imediata da definição dos pontos de Aubry e da continuidade uniforme de T, para obter a primeira inclusão são necessárias hipóteses adicionais sobre $\mathcal{F}$, as quais permitem apresenta-lá como uma versão da invariância cohomológica para sequências de funções.

Lema 2.25. *Seja $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ um sequência de funções mensuráveis obedecendo $(P1)$ e $(P2)$. Considere uma família de potenciais $\{u_k : X \to \mathbb{R}\}_{k\geq 1}$ verificando a seguinte condição de regularidade conjunta: para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\mathsf{d}\Big(x, T^k x\Big) \leq \delta$, para algum $k \geq 1$, implica $\Big|u_k(x) - u_k \circ T(x)\Big| \leq \varepsilon$. Então, dada constante $\Gamma \in \mathbb{R}$, os conjuntos de Aubry associados às sequências $\mathcal{F}$ e $\{f_k + u_k - u_k \circ T + k\Gamma\}_{k\geq 1}$ cumprem*

$$\Omega[\mathcal{F}] \subset \Omega\left[\{f_k + u_k - u_k \circ T + k\Gamma\}_{k\geq 1}\right].$$

Ademais, se $\mathcal{F}$ é uma sequência de potenciais satisfazendo a condição de regularidade conjunta, então $\Omega[\mathcal{F}] \subset \Omega\Big[\{f_k \circ T\}_{k\geq 1}\Big]$.

Demonstração. Inicialmente, observe que $\beta\Big[\{f_k + u_k - u_k \circ T + k\Gamma\}_{k\geq 1}\Big] = \beta[\mathcal{F}] + \Gamma$. Sejam $\varepsilon > 0$ e $L \geq 1$. Sem perda de generalidade, assumimos que $\delta(\varepsilon) < \varepsilon$ na condição enunciada no lema acima. Desta forma, se $x \in \Omega[\mathcal{F}]$, sabemos que para $\frac{1}{2}\delta(\frac{\varepsilon}{3}) > 0$ e $L \geq 1$ existem y, $T^n y$, $T^m y \in B_{\frac{1}{2}\delta(\frac{\varepsilon}{3})}(x) \subset B_\varepsilon(x)$ (com $m > n \geq 0$ e $m - n \geq L$) tais que $\Big|f_m(y) - f_m(y) - (m-n)\beta[\mathcal{F}]\Big| \leq \frac{1}{2}\delta(\frac{\varepsilon}{3})$. Segue que $\mathsf{d}\Big(y, T^n y\Big) \leq \delta(\frac{\varepsilon}{3})$ e $\mathsf{d}\Big(y, T^m y\Big) \leq \delta(\frac{\varepsilon}{3})$. Devido à condição de regularidade conjunta, temos que

$$\begin{aligned}
&\Big|\Big[f_m + u_m - u_m \circ T + m\Gamma - f_n - u_n + u_n \circ T - n\Gamma\Big](y) - (m-n)(\beta[\mathcal{F}] + \Gamma)\Big| \leq \\
&\quad \leq \Big|f_m(y) - f_m(y) - (m-n)\beta[\mathcal{F}]\Big| + \Big|u_m(x) - u_m \circ T(x)\Big| + \Big|u_n(x) - u_n \circ T(x)\Big| \\
&\quad < \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) + 2\,\frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon
\end{aligned}$$

e, consequentemente, $x \in \Omega\left[\{f_k + u_k - u_k \circ T + k\Gamma\}_{k\geq 1}\right]$. Para obter a última afirmação, basta considerar $\Gamma = 0$ e $u_k = -f_k$ para todo $k \geq 1$. ■

Com base nas considerações anteriores, apresentamos um classe de sequências de potenciais que abrange as sequências aditivas e cujo conjunto de Aubry é T-invariante.

Exemplo 2.26 (Sequência aditiva perturbada)**.** Dados potencial $f : X \to \mathbb{R}$, uma sequência de potenciais $\{v_k\}_{k\geq 1}$ equicontínua e equilimitada e uma família de constantes $\{\Gamma_k\}_{k\geq 1}$ cujo limite $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\Gamma_k$ existe, temos que a sequência $\{S_k(f + v_k - v_k \circ T) + \Gamma_k\}_{k\geq 1}$ obedece as condições $(P1)$ e $(P2)$, pois as herda de $\{S_k f\}_{k\geq 1}$. Tal sequência também verifica a condição de regularidade conjunta, uma vez que

$$\begin{aligned}
&\Big|S_k(f + v_k - v_k \circ T) + \Gamma_k - (S_k(f + v_k - v_k \circ T) + \Gamma_k) \circ T\Big| \leq \\
&\qquad\qquad \leq |f - f \circ T^k| + |v_k - v_k \circ T^k| + |(v_k - v_k \circ T^k) \circ T|
\end{aligned}$$

para todo $k \geq 1$. Logo, $\Omega\Big[\{S_k(f + v_k - v_k \circ T) + \Gamma_k\}_{k\geq 1}\Big]$ é T-invariante.

Não é difícil exibir exemplos de sequências subaditivas de potenciais que não cumprem a condição de regularidade conjunta. De fato, considere $x \in X$ um ponto pertencente ao seu ω-limite (cuja existência é assegurada pelo teorema de recorrência de Birkhoff [PY98, Corolário 1.8.1]). Suponha que T é transitiva e x não é um ponto fixo. Considere uma função contínua não-negativa $g : X \to [0, +\infty)$ tal que $g(x) \neq g(Tx)$. Defina a sequência $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ pondo $f_k \equiv g$ para todo $k \geq 1$. É imediato verificar que $\mathcal{F}$ é subaditiva, $\beta[\mathcal{F}] = 0$ e o conjunto de Aubry cumpre $\Omega[\mathcal{F}] = X$. Por outro lado, atente que existe uma sequência $\{T^{k_\ell} x\}_{\ell\geq 1}$ tal que $\mathsf{d}\Big(x, T^{k_\ell} x\Big) \leq \frac{1}{\ell}$, porém $\Big|f_{k_\ell}(x) - f_{k_\ell} \circ T(x)\Big| =$

$\Big|g(x) - g \circ T(x)\Big|$ é uma constante positiva. Isto mostra que a condição de regularidade conjunta é suficiente mas não necessária para que o conjunto de Aubry seja T-invariante.

Embora a T-invariância do conjunto de Aubry continue sendo, em geral, um problema em aberto, nos exemplos investigados no decorrer deste trabalho sempre constamos que o conjunto de Aubry é T-invariante.

2.2.1 Teorema de Atkinson

Independente de sua contribuição para caracterização das medidas maximizantes (via conjunto de Aubry) no caso aditivo, o teorema de Atkinson consiste em um resultado clássico, originalmente demonstrado por G. Atkinson com o intuito de caracterizar o fenômeno de recorrência em passeios aleatórios associados a processos ergódicos estacionários (para mais informações, consulte [Atk76, Sch06]). Recordamos abaixo seu enunciado.

Teorema 2.27. **[Atk76]** *Considere* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *um espaço de probabilidade não atômico e* $T : X \to X$ *um automorfismo que preserva a medida ergódica* μ*. Se a função* $f : X \to \mathbb{R}$ *é integrável, então* $\displaystyle\int f \, d\mu = 0$ *se, e somente se, para qualquer conjunto mensurável* B *de medida positiva e para todo* $\varepsilon > 0$*, existe inteiro* $r \geq 1$ *tal que*

$$\mu\Big(B \cap T^{-r}(B) \cap \Big\{y \in X : |S_r f(y)| < \varepsilon\Big\}\Big) > 0.$$

Destacamos um exemplo que nos guia em direção a uma extensão do resultado acima para sequências de funções. Considere a sequência subaditiva de números reais não nulos $\mathcal{F} = \{f_k \equiv \sqrt{k}\}_{k\geq 1}$ cujo $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int f_k \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sqrt{k} = 0$. Note que $|f_r| = \Big|\sqrt{r}\Big| \geq 1$ para todo $r \geq 1$. Por outro lado, como $\lim_{k\to\infty}\left(\sqrt{k+L} - \sqrt{k}\right) = 0$, para todo $L \geq 1$, concluímos que, dados $\varepsilon > 0$ e $L \geq 1$, sempre existem $m > n \geq 0$, com $m - n \geq L$, tais que $|f_m - f_n| = |\sqrt{m} - \sqrt{n}| < \varepsilon$.

Apresentamos a seguir uma versão generalizada do teorema de Atkinson no contexto das sequências de funções que satisfazem teorema ergódico pontual (complementando o resultado [GG16, Teorema 2.2]).

Teorema 2.28. *Sejam* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *um espaço de probabilidade e* $T : X \to X$ *um mapa que preserva medida. Para uma sequência de funções mensuráveis* $\Big\{f_k : X \to \mathbb{R}\Big\}_{k\geq 1}$ *verificando a condição* $(P1)$*, são equivalentes as seguintes afirmações:*

$(A1)$ $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int f_k \, d\mu = 0;$

$(A2)$ *para qualquer conjunto mensurável B de medida positiva, para todo $\varepsilon > 0$ e para qualquer inteiro $L \geq 1$, existem inteiros $m > n \geq 0$, com $m - n \geq L$, tais que*

$$\mu\left(B \cap T^{-n}(B) \cap T^{-m}(B) \cap \left\{y \in X : \left|f_m(y) - f_n(y)\right| < \varepsilon\right\}\right) > 0.$$

Demonstração. As duas implicações que compõem este resultado são comprovadas por argumentação contrapositiva e dividas em etapas.

$(A1)$ *implica* $(A2)$. Por meio de adaptações naturais de prova do teorema 2.27 apresentada em [Thi97, Teorema C2], constatamos inicialmente o caso particular em que a medida μ é ergódica (etapa *4*) e estendemos então esta implicação para qualquer probabilidade T-invariante (etapa *5*).

1. Suponha que a afirmação $(A2)$ é falsa. Isto significa que existem conjunto mensurável B (com $\mu(B) > 0$), $\varepsilon > 0$ e inteiro $L \geq 1$ tais que, para todos $m > n \geq 0$, com $m - n \geq L$,

$$\mu\left(B \cap T^{-n}(B) \cap T^{-m}(B) \cap \left\{y \in X \ : \ \left|f_m(y) - f_n(y)\right| < \varepsilon\right\}\right) = 0.$$

Decorre do teorema de recorrência de Poincaré [Wal82, Teorema 1.4] que a diferença entre os conjuntos B e $\widehat{B} := \left\{x \in B \ : \ T^{\ell}x \in B \text{ para infinitos } \ell \geq 1\right\}$ tem medida nula com respeito à probabilidade μ. Desta forma, o mapa de k-ésimo retorno ao conjunto B está definido μ-q.t.p. $y \in B$ por $\tau_B(k, y) := \sum_{i=0}^{k-1} \tau_B\left(T_B^i\, y\right)$, a partir do mapa de primeiro retorno $\tau_B : B \to \mathbb{N}$ e da dinâmica induzida $T_B\, y := T^{\tau_B(y)}y$. Para simplificar a notação denotamos $f_B(k, y) := f_{\tau_B(k,y)}(y)$ μ-q.t.p. $y \in B$ e para todo $k \geq 1$. Atente para a inclusão

$$\left\{y \in \widehat{B} \ :\left|f_B(pL, y) - \ f_B(qL, y)\right| < \varepsilon \text{ para determinados } p > q \geq 0\right\} \subset$$
$$\subset \bigcup_{\substack{m>n\geq 0 \\ m-n\geq L}} \left\{y \in B \cap T^{-n}(B) \cap T^{-m}(B) \ : \ \left|f_m(y) - f_n(y)\right| < \varepsilon\right\}.$$

A partir da suposição inicial, obtemos que a medida do segundo conjunto é nula. Resulta disto que

$$\left|f_B(pL, y) - f_B(qL, y)\right| \geq \varepsilon \tag{2.6}$$

μ-q.t.p. $y \in B$ (ou μ-q.t.p. $y \in \widehat{B}$) e para quaisquer inteiros $p > q \geq 0$.

2. Com o auxílio de um simples argumento de contagem, para todo $y \in B$ verificando a equação (2.6), mostraremos que existem no máximo $N_r := \left\lceil \frac{2r}{\varepsilon} + 1\right\rceil$ valores distintos de $\left\{f_B(kL, y)\right\}_{k\geq 1}$ contidos no intervalo fechado $[-r, r] \subset \mathbb{R}$. Para isto obter, suponha que exista um subconjunto finito de J elementos em $\left\{f_B(kL, y)\right\}_{k\geq 1} \cap [-r, r]$, com $J > N_r$.

Enumerando tais valores em ordem crescente $-r \leq f_B(k_1L,y) < \ldots < f_B(k_JL,y) \leq r$, obtemos a seguinte contradição

$$2r \leq \Big(N_r - 1\Big)\varepsilon < \sum_{i=1}^{J-1} \Big|f_B(k_{i+1}L,y) - f_B(k_iL,y)\Big| = f_B(k_JL,y) - f_B(k_1L,y) \leq 2r.$$

3. Defina indutivamente as sequências de inteiros $\{p_j\}_{j\geq 0}$ e $\{r_j\}_{j\geq 0}$, com $r_0 = 1$, por

$$p_j = \min\Big\{k \,:\, \Big|f_B(kL,y)\Big| \geq r_j\Big\} \quad \text{e} \quad r_{j+1} = 1 + \max\Big\{\Big|f_B(kL,y)\Big| \,:\, k \leq N_{r_j}+1\Big\}.$$

Segue da etapa anterior que

$$\max\Big\{\Big|f_B(kL,y)\Big| \,:\, k \leq N_{r_j}+1\Big\} \geq r_j \quad \text{para todo } j \geq 1. \tag{2.7}$$

Em particular, a sequência $\{r_j\}_{j\geq 0}$ é crescente e positiva. O mesmo pode ser dito para sequência $\{p_j\}_{j\geq 0}$, já que $p_{j+1} > N_{r_j} + 1 \geq p_j$ para todo $j \geq 1$. De fato, a primeira desigualdade decorre do fato que $\Big|f_B(kL,y)\Big| < 1 + \max\Big\{\Big|f_B(kL,y)\Big| \,:\, k \leq N_{r_j}+1\Big\} = r_{j+1}$ para $k \leq N_{r_j}+1$ e a segunda segue de (2.7). Atente também para as seguintes desigualdades

$$r_j > \frac{(N_{r_j}-2)\varepsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad \frac{N_{r_j}-2}{p_j} \geq 1 - \frac{3}{p_j}.$$

A primeira relação é obtida a partir da definição de N_r, enquanto que a segunda é uma consequência imediata de $N_{r_j} + 1 \geq p_j$ para todo $j \geq 1$.

4. Suponha agora que μ ergódica. Aplicamos as desigualdades estabelecidas na etapa acima e obtemos μ-q.t.p. $y \in B$ que

$$\liminf_{j\to\infty} \frac{\Big|f_B(p_jL,y)\Big|}{p_jL} \geq \liminf_{j\to\infty} \frac{r_j}{p_jL} \geq \liminf_{j\to\infty} \frac{(N_{r_j}-2)\varepsilon}{2p_jL} \geq \frac{\varepsilon}{2L} - \lim_{j\to\infty} \frac{3\varepsilon}{2p_jL} = \frac{\varepsilon}{2L}.$$

Decorre da condição $(P1)$ e do teorema ergódico de Birkhoff para a função $\mathbb{1}_B$ que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu(B)}\left|\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\int f_k\,d\mu\right| &= \frac{1}{\mu(B)}\left|\lim_{k\to\infty}\frac{f_k(y)}{k}\right| = \Big(\int \mathbb{1}_B\,d\mu\Big)^{-1}\left|\lim_{k\to\infty}\frac{f_{\tau_B(k,y)}(y)}{\tau_B(k,y)}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{\tau_B(k,y)}{\sum_{j=0}^{\tau_B(k,y)-1}\mathbb{1}_B\circ T^jy}\left|\lim_{k\to\infty}\frac{f_B(k,y)}{\tau_B(k,y)}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{\Big|f_B(k,y)\Big|}{k} \geq \liminf_{j\to\infty}\frac{\Big|f_B(p_jL,y)\Big|}{p_jL} \geq \frac{\varepsilon}{2L}
\end{aligned}$$

μ-q.t.p. $y \in B$. Concluímos disto que $(A1)$ é falsa, pois $\left|\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\int f_k d\mu\right| \geq \frac{\varepsilon}{2L}\mu(B) > 0$.

5. Resta provar que a negação de $(A2)$ implica a negação de $(A1)$ para toda probabilidade T-invariante $\mu \in \mathcal{M}_T$. O teorema da decomposição ergódica [Mañ12, Teorema 6.4] fornece um conjunto de medida total $\hat{X}$ e uma coletânea de probabilidades ergódicas $\{\nu_y\}_{y\in\hat{X}}$ que decompõem a medida μ. É fácil perceber que, se μ não cumpre $(A2)$, então existem conjunto mensurável B (com $\nu_y(B) > 0$ para μ-q.t.p. $y \in \hat{X}$), $\varepsilon > 0$ e inteiro $L \geq 1$ tais que, para todos $m > n \geq 0$, com $m - n \geq L$,

$$\nu_y\Big(B \cap T^{-n}(B) \cap T^{-m}(B) \cap \Big\{y \in X \,:\, \Big|f_m(y) - f_n(y)\Big| < \varepsilon\Big\}\Big) = 0,$$

μ-q.t.p. $y \in \hat{X}$. Desta forma, pela etapa anterior, garantimos que

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\int f_k\,d\mu = \int_{\hat{X}}\Big(\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\int_X f_k(x)\,d\nu_y(x)\Big)\,d\mu(y) \geq \frac{\varepsilon}{2L}\int_{\hat{X}}\nu_y(B)\,d\mu(y) = \frac{\varepsilon}{2L}\mu(B) > 0.$$

$(A2)$ *implica* $(A1)$. Para prova desta implicação recíproca nos baseamos na demonstração original em [Atk76]. Atente que para esta versão não exigimos que a probabilidade μ seja não atômica e que T seja um automorfismo, uma vez que a argumentação realizada abaixo não necessita do lema de Kakutani-Rokhlin [Pet89, Lema 2.4.7].

1. Assuma que a afirmação $(A1)$ é falsa. Devido à condição $(P1)$, sabemos que $\Big|\hat{\mathcal{F}}(x)\Big| > 0$ μ-q.t.p. $x \in X$. Deduzimos deste fato que

$$\liminf_{k\to\infty}\frac{\Big|f_{q+k}(x) - f_q(x)\Big|}{k} \geq \lim_{k\to\infty}\frac{\Big|f_{q+k}(x)\Big|}{q+k} - \lim_{k\to\infty}\frac{\Big|f_q(x)\Big|}{k} = \Big|\hat{\mathcal{F}}(x)\Big| > 0,$$

vale μ-q.t.p. $x \in X$ e para todo $q \geq 0$. A definição de limite inferior assegura que existe de inteiro $K(x) \geq 1$ segundo o qual $\Big|f_{q+k}(x) - f_q(x)\Big| \geq k\Big|\hat{\mathcal{F}}(x)\Big|/2$ para todo $k \geq K(x)$. Mais precisamente, obtemos que μ-q.t.p. $x \in X$

$$\Big|f_p(x) - f_q(x)\Big| \geq 1, \tag{2.8}$$

para todos os inteiros $p > q \geq 0$, com $p - q \geq \bar{K}(x) \coloneqq \max\Big\{K(x), \Big\lceil 2/\Big|\hat{\mathcal{F}}(x)\Big|\Big\rceil\Big\}$.

2. Considere a cadeia crescente de conjuntos $\{B_\ell\}_{\ell\geq 1}$ definidos por

$$B_\ell \coloneqq \Big\{y \in X \,:\Big|f_p(y) - f_q(y)\Big| \geq 1,\ \forall\, p - q \geq \ell\Big\}.$$

É imediato que todo ponto $x \in X$ que cumpre (2.8) pertence ao conjunto $B_{\bar{K}(x)}$. Portanto, $\lim_{\ell\to\infty}\mu\Big(B_\ell\Big) = \mu\Big(\bigcup_{\ell=1}^{\infty} B_\ell\Big) = 1$. Decorre disto que existe conjunto $B \coloneqq B_L$, para algum inteiro $L \geq 1$, com medida positiva $\mu(B) > \frac{1}{2}$.

3. Dado $\varepsilon \in (0, 1]$, para $m - n \geq L$, é fácil perceber que

$$B \cap T^{-n}(B) \cap T^{-m}(B) \cap \Big\{ y \in X \,:\, \big|f_m(y) - f_n(y)\big| < \varepsilon \Big\} \subset$$
$$\subset \Big\{ y \in X \,:\, \big|f_p(y) - f_q(y)\big| \geq 1,\ \forall\, p - q \geq L \Big\} \cap \Big\{ y \in X \,:\, \big|f_m(y) - f_n(y)\big| < 1 \Big\} = \varnothing.$$

Temos então um conjunto mensurável B (com $\mu(B) > 0$) e um inteiro $L \geq 1$ tais que, para todo $m > n \geq 0$, com $m - n \geq L$,

$$\mu\Big(B \cap T^{-n}(B) \cap T^{-m}(B) \cap \Big\{ y \in X \,:\, \big|f_m(y) - f_n(y)\big| < \varepsilon \Big\} \Big) = 0,$$

o que significa que $(A2)$ é falsa. ■

Não é difícil recuperar o enunciado do teorema de Atkison 2.27 a partir o teorema 2.28 no cenário aditivo. De fato, a afirmação $(A1)$ para a sequência $\{S_k f\}_{k \geq 1}$ consiste em $\int f \, d\mu = 0$. Se tal sequência verifica $(A2)$, então, para qualquer conjunto mensurável B de medida positiva e para todo $\varepsilon > 0$, fixado $L = 1$, temos inteiro $r \coloneqq m - n \geq L = 1$ tal que

$$\begin{aligned} 0 &< \mu\Big(B \cap T^{-n}(B) \cap T^{-m}(B) \cap \Big\{ y \in X : |S_m f(y) - S_n f(y)| < \varepsilon \Big\} \Big) \\ &\leq \mu\Big(T^{-n}(B) \cap T^{-m}(B) \cap \Big\{ y \in X \,:\, \big|S_{m-n} f(T^n y)\big| < \varepsilon \Big\} \Big) \\ &= \mu \circ T^{-n}\Big(B \cap T^{-r}(B) \cap \Big\{ y \in X \,:\, \big|S_r f(y)\big| < \varepsilon \Big\} \Big) \\ &= \mu\Big(B \cap T^{-r}(B) \cap \Big\{ y \in X \,:\, \big|S_r f(y)\big| < \varepsilon \Big\} \Big). \end{aligned}$$

Por outro lado, assuma que, para qualquer conjunto mensurável A de medida positiva e para todo $\varepsilon > 0$, existe inteiro $r \geq 1$ tal que $\mu\Big(A \cap T^{-r}(A) \cap \Big\{ y \in X : |S_r f(y)| < \varepsilon \Big\} \Big) > 0$. Para mostrar que $(A2)$ disto deriva, considere B conjunto mensurável de medida positiva e inteiro $L \geq 1$. A partir do mapa de primeiro retorno $\tau_B : B \to \mathbb{N}$ e da coletânea $\widehat{B} \coloneqq \Big\{ x \in B \,:\, T^\ell x \in B \text{ para infinitos } \ell \geq 1 \Big\}$, definimos para todo $\ell \geq 1$ os subconjuntos $\widehat{B}_\ell \coloneqq \Big\{ x \in \widehat{B} \,:\, \tau_B(x) \geq \ell \Big\}$. Como $\lim_{\ell \to \infty} \mu\big(\widehat{B}_\ell\big) = \mu\big(\bigcup_{\ell=1}^{\infty} \widehat{B}_\ell \big) = \mu(\widehat{B}) = \mu(B) > 0$, obtemos $K \geq L$ tal que o conjunto mensurável $\widehat{B}_K$ também possui medida positiva.

Consequentemente, para todo $\varepsilon > 0$, existe inteiro $r \geq K \geq L$ tal que

$$\mu\Big(B \cap T^{-r}(B) \cap \Big\{y \in X : |S_r f(y)| < \varepsilon\Big\}\Big) \geq$$
$$\geq \mu\Big(\widehat{B}_K \cap T^{-r}(\widehat{B}_K) \cap \Big\{y \in X : |S_r f(y)| < \varepsilon\Big\}\Big) > 0.$$

Estipulando $m = r$ e $n = 0$ segue a afirmação $(A2)$.

De modo semelhante à abordagem usual da teoria de otimização ergódica, pretendemos extrair do teorema 2.28 informações relevantes para a prova do teorema 2.22. Para tanto, note que o fato de um ponto $x \in X$ pertencer a $\Omega[\mathcal{F}]$ equivale a seguinte propriedade: para todo $\varepsilon > 0$ e para qualquer $L \geq 1$, existem inteiros $m > n \geq 0$, com $m - n \geq L$, tais que o conjunto

$$\Big\{y \in B_\varepsilon(x) \cap T^{-n}\Big(B_\varepsilon(x)\Big) \cap T^{-m}\Big(B_\varepsilon(x)\Big) : \Big|f_m(y) - f_n(y) - (m-n)\beta[\mathcal{F}]\Big| < \varepsilon\Big\}$$

é não vazio. Uma estratégia simples para isto determinar resume-se em mostrar que tal conjunto possui medida positiva.

Proposição 2.29. *Considere uma sequência de funções mensuráveis $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ satisfazendo as condições $(P1)$ e $(P2)$. Então, o conjunto Aubry contém o suporte de cada medida de probabilidade maximizante para $\mathcal{F}$, isto é,*

$$\mu \in \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}] \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{supp}\mu \subset \Omega[\mathcal{F}].$$

A argumentação abaixo segue as principais ideias do resultado análogo para o caso aditivo (cuja prova podem ser encontrada em [CLT01, LT03]). Enfatizamos que a hipótese $(P2)$ foi incluída acima apenas com o intuito de assegurar a existência de medida maximizante para $\mathcal{F}$, podendo esta ser substituída por qualquer outra condição suficiente para que $\mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}] \neq \varnothing$.

Demonstração. Por definição, $\mu \in \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}]$ sempre que $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\int (f_k - k\beta[\mathcal{F}])d\mu = 0$. Se $x \in \operatorname{supp}\mu$, temos $\mu\Big(B_\varepsilon(x)\Big) > 0$ para todo $\varepsilon > 0$. Aplicando o teorema 2.28 à sequência $\Big\{f_k - k\beta[\mathcal{F}]\Big\}_{k\geq 1}$, a qual obedece $(P1)$ e $(A1)$, obtemos a afirmação $(A2)$ para os conjuntos mensuráveis $B_\varepsilon(x)$ de medida positiva. Mais especificamente, para todo $\varepsilon > 0$ e para todo $L \geq 1$, existem inteiros $m > n \geq 0$, com $m - n \geq L$, tais que

$$\mu\Big(B_\varepsilon(x) \cap T^{-n}\Big(B_\varepsilon(x)\Big) \cap T^{-m}\Big(B_\varepsilon(x)\Big) \cap \Big\{y \in X : \Big|f_m(y) - f_n(y) - (m-n)\beta[\mathcal{F}]\Big| < \varepsilon\Big\}\Big) > 0.$$

Como foi discutido previamente, este fato garante que $x \in \Omega[\mathcal{F}]$. ■

2.2.2 Sequência de corretores

Para completar a prova do teorema 2.22, dedicaremos esta subseção à verificação da recíproca da proposição 2.29 sob hipóteses adicionais.

Proposição 2.30. *Seja $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ uma sequência quase-subaditiva de funções s.c.s. cumprindo a condição não defectiva. Então, toda probabilidade T-invariante cujo suporte está contido no conjunto de Aubry é uma medida maximizante para $\mathcal{F}$, ou seja,*

$$\operatorname{supp}\mu \subset \Omega[\mathcal{F}] \qquad \Rightarrow \qquad \mu \in \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}].$$

A seguinte ferramenta auxiliar será fundamental para demonstrar este resultado.

Definição 2.31. Seja $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis obedecendo $(P1)$ e $(P2)$. Dizemos que uma coletânea de funções mensuráveis $\mathcal{U} = \big\{u_k : X \to \mathbb{R}\big\}_{k\geq 1}$ é uma sequência de corretores para $\mathcal{F}$ caso verifique:

$(C1)$ $f_k(x) - u_k(x) \leq k\beta[\mathcal{F}]$ para todo $x \in X$ e para todo $k \geq 1$;

$(C2)$ $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k}\displaystyle\int u_k\, d\mu = 0$ para toda $\mu \in \mathcal{M}_T$ com $\operatorname{supp}\mu \subset \Omega[\mathcal{F}]$.

Além disso, denominaremos $\mathcal{F} - \mathcal{U} \coloneqq \{f_k - u_k\}_{k\geq 1}$ de sequência corrigida.

A princípio, repare que esta definição abrange conceitos já debatidos neste tese.

Exemplo 2.32 (Subação)**.** Seja $f : X \to \mathbb{R}$ um potencial munido de subação $v : X \to \mathbb{R}$. A sequência aditiva de corretores $\mathcal{U} = \{S_k(v \circ T - v)\}_{k\geq 1} = \{v \circ T^k - v\}_{k\geq 1}$ satisfaz:

$$S_k f - (v \circ T^k - v) \leq k\beta(f) \quad \text{para todo } k \geq 1 \quad \text{e}$$
$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\int (v \circ T^k - v)\, d\mu = 0 \qquad \text{para toda } \mu \in \mathcal{M}_T.$$

Exemplo 2.33 (Processos de correção/ajuste)**.** Dada sequência $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ de funções s.c.s. com a propriedade quase subaditiva e a condição não defectiva, considere a respectiva sequência renormalizada $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} = \{g_k\}_{k\geq 1}$. Os itens (ii) e (iii) do lema 2.11 garantem que $\mathcal{U} = \{f_k - g_k\}_{k\geq 1}$ é uma sequência de corretores. Da mesma forma, a partir da redução subaditiva $\mathcal{H}_{\mathcal{F}} = \{h_k\}_{k\geq 1}$ ou da sequência regularizada $\utilde{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}} = \{\utilde{h_k}\}_{k\geq 1}$, também asseguramos sequências de corretores $\mathcal{U}' = \{f_k - h_k\}_{k\geq 1}$ e $\mathcal{U}'' = \{f_k - \utilde{h_k}\}_{k\geq 1}$.

Pretendemos comparar os problemas de otimização para a sequência $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ e para a sequência corrigida $\mathcal{F}-\mathcal{U} = \{f_k - u_k\}_{k\geq 1}$. Note que tais sequências são equivalentes nos exemplos anteriores. Na realidade, isto decorre do $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\int u_k\, d\mu = 0$ para toda probabilidade $\mu \in \mathcal{M}_T$, independente de $\operatorname{supp}\mu \subset \Omega[\mathcal{F}]$. Ao considerar esta especificação da condição $(C2)$, o seguinte resultado reúne o que se pode assegurar para o caso geral.

Lema 2.34. *Seja uma sequência de corretores* $\mathcal{U} = \{u_k\}_{k\geq 1}$ *associada a uma sequência de funções mensuráveis* $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$*, a qual verifica as condições* $(P1)$ *e* $(P2)$*. Então, a sequência corrigida* $\mathcal{F} - \mathcal{U} = \{f_k - u_k\}_{k\geq 1}$ *cumpre:*

(i) $\beta[\mathcal{F}] = \beta\big[\mathcal{F} - \mathcal{U}\big]$ *e* $\mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}] \subset \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F} - \mathcal{U}]$*;*

(ii) se $\mu \in \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F} - \mathcal{U}]$ *e* $\operatorname{supp}\mu \subset \Omega[\mathcal{F}]$*, então* $\mu \in \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}]$*.*

Observação. Pela definição 2.31, cada função mensurável $f_k - u_k - k\beta[\mathcal{F}]$ é não positiva. Desta forma, o valor ergódico maximizante e o conjunto das probabilidades maximizantes da sequência corrigida $\mathcal{F} - \mathcal{U} = \{f_k - u_k\}_{k\geq 1}$ são dados em termos do problema de otimização generalizado discutido no início do capítulo 1, ou seja,

$$\beta[\mathcal{F} - \mathcal{U}] = \sup_{\mu\in\mathcal{M}_T} \Big\{ \limsup_{k\to\infty} \tfrac{1}{k} \textstyle\int (f_k - u_k)\, d\mu \Big\} \qquad \text{e}$$
$$\mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F} - \mathcal{U}] = \Big\{ \mu \in \mathcal{M}_T \,:\, \limsup_{k\to\infty} \tfrac{1}{k} \textstyle\int (f_k - u_k)\, d\mu = \beta[\mathcal{F} - \mathcal{U}] \Big\}.$$

Note que *a priori* o conjunto $\mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F} - \mathcal{U}]$ poderia ser vazio, contudo isto não ocorre devido ao item (i) do lema acima.

Demonstração. As seguintes propriedades são imediatas da definição 2.31:

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int (f_k - u_k)\, d\mu \leq \beta[\mathcal{F}], \quad \text{para toda } \mu \in \mathcal{M}_T \quad \text{e}$$
$$\operatorname{supp}\mu \subset \Omega[\mathcal{F}] \quad \Rightarrow \quad \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int (f_k - u_k)\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int f_k\, d\mu.$$

Segue da primeira desigualdade que $\beta\big[\mathcal{F} - \mathcal{U}\big] \leq \beta[\mathcal{F}]$. Por outro lado, para qualquer probabilidade $\mu \in \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}]$, a segunda relação acima (em razão da proposição 2.29) fornece $\beta[\mathcal{F}] = \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int (f_k - u_k)\, d\mu \leq \beta\big[\mathcal{F} - \mathcal{U}\big]$, donde $\beta[\mathcal{F}] = \beta\big[\mathcal{F} - \mathcal{U}\big]$. Tal argumentação também garante que $\mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}] \subset \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F} - \mathcal{U}]$ e, portanto, vale o item (i). Para obter o item (ii), basta perceber que $\mu \in \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F} - \mathcal{U}]$ e $\operatorname{supp}\mu \subset \Omega[\mathcal{F}]$ implicam $\beta\big[\mathcal{F}\big] = \beta\big[\mathcal{F} - \mathcal{U}\big] = \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int (f_k - u_k)\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int f_k\, d\mu$, logo $\mu \in \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}]$. ■

A generalidade da definição 2.31 (evidenciada pelo lema anterior) nos permite introduzir a seguinte sequência de corretores fundamental para a prova da proposição 2.30.

Lema 2.35. *Seja $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ uma sequência quase subaditiva de funções s.c.s. cumprindo a condição não defectiva. Então, a coletânea de funções mensuráveis limitadas $\mathcal{U} = \{u_k\}_{k\geq 1}$ definidas para $x \in X$ por*

$$u_k(x) := f_k(x) - k\beta[\mathcal{F}] + R_{\mathcal{F}} - \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\substack{p>q\geq 0 \\ p-q\geq k+1}} \sup_{T^q z \in B_\varepsilon(x)} \Big[f_p(z) - f_q(z) - (p-q)\beta[\mathcal{F}]\Big]$$

é uma sequência de corretores para $\mathcal{F}$.

Especificamente para o caso aditivo, descreve-se a sequência $\mathcal{U} = \{u_k\}_{k\geq 1}$ por

$$\begin{aligned} u_k(x) &= S_k f(x) - k\beta(f) + R_{\mathcal{F}} - \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\substack{p>q\geq 0 \\ p-q\geq k+1}} \sup_{T^q z\in B_\varepsilon(x)} \Big[S_{p-q} f(T^q z) - (p-q)\beta(f)\Big] \\ &= S_k f(x) - k\beta(f) + R_{\mathcal{F}} - \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{y\in X} \mathsf{h}^{\varepsilon}_{k+1}(x,y), \end{aligned}$$

onde as funções auxiliares $\mathsf{h}^{\varepsilon}_{k+1}$ foram definidas em (1.3) com intuito de introduzir o potencial de Mãné e a barreira de Peierls.

Demonstração. Dada uma sequência $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ com a condição não defectiva, considere as funções mensuráveis $\mathfrak{h}_k(x) := \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\substack{p>q\geq 0 \\ p-q\geq k}} \sup_{T^q z\in B_\varepsilon(x)} \Big[f_p(z) - f_q(z) - (p-q)\beta[\mathcal{F}]\Big]$ definidas para todo $x \in X$ e para todo $k \geq 1$. (Observe que a sobrejetividade de T garante o conjunto $T^{-q}\Big(B_\varepsilon(x)\Big)$ é não vazio. Note ainda que o limite em questão é um ínfimo.) Para cada função $\mathfrak{h}_k$, verificamos as seguintes desigualdades

$$f_k(x) - k\beta[\mathcal{F}] \leq \mathfrak{h}_k(x) \leq R_{\mathcal{F}} \quad \text{para todo } x \in X, \tag{2.9}$$

$$\text{e} \qquad 0 \leq \mathfrak{h}_k(x) \qquad \text{para todo } x \in \Omega[\mathcal{F}]. \tag{2.10}$$

Note que (2.9) decorre imediatamente da definição de $\mathfrak{h}_k$ e da condição não defectiva. Além disso, dados $x \in \Omega[\mathcal{F}]$, $\varepsilon > 0$ e $L = k \geq 1$, existem $y \in B_\varepsilon(x)$ e inteiros $m > n \geq 0$ (com $m - n \geq k$) tais que $T^n y,\, T^m y \in B_\varepsilon(x)$ e $\Big|f_m(y) - f_n(y) - (m-n)\beta[\mathcal{F}]\Big| < \varepsilon$, donde $\sup_{\substack{p>q\geq 0 \\ p-q\geq k}} \sup_{T^q z\in B_\varepsilon(x)} \Big[f_p(z) - f_q(z) - (p-q)\beta[\mathcal{F}]\Big] \geq f_m(y) - f_n(y) - (m-n)\beta[\mathcal{F}] > -\varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, obtemos (2.10).

A partir destas considerações, a condição $(C1)$ da definição 2.31 é imediata, pois $f_k - u_k = k\beta[\mathcal{F}] + \mathfrak{h}_{k+1} - R_{\mathcal{F}} \leq k\beta[\mathcal{F}]$ para todo $k \geq 1$. Para obter a condição $(C2)$, atente primeiro que $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int \mathfrak{h}_{k+1}\, d\mu = 0$, para qualquer $\mu \in \mathcal{M}_T$ com $\operatorname{supp}\mu \subset \Omega(\mathcal{F})$, logo

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int u_k\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int f_k\, d\mu - \beta[\mathcal{F}] \leq 0.$$

Supondo que $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ é uma sequência quase subaditiva de funções s.c.s., demonstraremos que $f_k - k\beta[\mathcal{F}] + R_{\mathcal{F}} \geq \mathfrak{h}_{k+1} - C_{\mathcal{F}} - 2$, para todo $k \geq 1$, donde concluímos que $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\int u_k\, d\mu \geq 0$ para toda probabilidade $\mu \in \mathcal{M}_T$. Inicialmente, fixe $x \in X$ e $k \geq 1$. Pela semicontinuidade superior de f_k em x, existe $\varepsilon = \varepsilon(x) \in (0,1)$ cumprindo $f_k(B_\varepsilon(x)) \in (-\infty, f_k(x)+1)$. Considere os inteiros $m > n \geq 0$, com $m - n \geq k+1$, e um ponto $y \in T^{-n}\Big(B_\varepsilon(x)\Big)$ tais que

$$f_m(y) - f_n(y) - (m-n)\beta[\mathcal{F}] > \sup_{\substack{p>q\geq 0\\ p-q\geq k+1}} \sup_{T^q z\in B_\varepsilon(x)} \Big[f_p(z) - f_q(z) - (p-q)\beta[\mathcal{F}]\Big] - 1.$$

Note também que $R_{\mathcal{F}} \geq f_m(y) - f_{k+n}(y) - (m-k-n)\beta[\mathcal{F}]$. Deste modo, obtemos

$$\begin{aligned} f_k(x) - k\beta[\mathcal{F}] + R_{\mathcal{F}} &\geq f_k(T^n y) - 1 - k\beta[\mathcal{F}] + R_{\mathcal{F}} \\ &\geq f_{k+n}(y) - f_n(y) - C_{\mathcal{F}} - 1 - k\beta[\mathcal{F}] + \\ &\quad + f_m(y) - f_{k+n}(y) - (m-k-n)\beta[\mathcal{F}] \\ &= f_m(y) - f_n(y) - (m-n)\beta[\mathcal{F}] - C_{\mathcal{F}} - 1 \\ &> \sup_{\substack{p>q\geq 0\\ p-q\geq k+1}} \sup_{T^q z\in B_\varepsilon(x)} \Big[f_p(z) - f_q(z) - (p-q)\beta[\mathcal{F}]\Big] - C_{\mathcal{F}} - 2 \\ &\geq \mathfrak{h}_{k+1}(x) - C_{\mathcal{F}} - 2, \end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade decorre da semicontinuidade de f_k e de $T^n y \in B_\varepsilon(x)$, a segunda segue da propriedade quase subaditiva e da desigualdade assinalada para $R_{\mathcal{F}}$, e a última retrata o fato que o supremo acima decresce para $\mathfrak{h}_{k+1}(x)$ quando ε tende a 0. ∎

Observação. A única etapa da prova do teorema 2.22 em que exigimos a propriedade quase subaditiva foi para assegurar que $f_k - k\beta[\mathcal{F}] + R_{\mathcal{F}} \geq \mathfrak{h}_{k+1} - C_{\mathcal{F}} - 2$ para todo $k \geq 1$ no final da demostração anterior. Note que esta relação não pode ser estabelecida para as sequências assintoticamente subaditivas a partir da desigualdade (1.6).

Reunindo todas as considerações anteriores, concluímos a prova do teorema 2.22.

Demonstração da proposição 2.30. Para obter a implicação recíproca desejada é suficiente argumentar que $\operatorname{supp}\mu \subset \Omega[\mathcal{F}] \Rightarrow \mu \in \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F} - \mathcal{U}]$, devido ao item (ii) do lema 2.34. Note então que, dadas uma sequência de corretores $\mathcal{U} = \{u_k\}_{k\geq 1}$ e uma constante $\Gamma > 0$, vale

$$\operatorname{supp}\mu \subset \bigcap_{k\geq 1} (f_k - u_k)^{-1}\Big(\Big[k\beta[\mathcal{F}] - \Gamma, k\beta[\mathcal{F}]\Big]\Big) \quad \Rightarrow \quad \mu \in \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F} - \mathcal{U}].$$

A partir disto, reduzimos a proposição 2.30 ao fato de garantir existência de uma sequência de corretores $\mathcal{U} = \{u_k\}_{k\geq 1}$ verificado $\Omega[\mathcal{F}] \subset \bigcap_{k\geq 1}(f_k - u_k)^{-1}\Big(\big[k\beta[\mathcal{F}] - \Gamma, k\beta[\mathcal{F}]\big]\Big)$. Por fim, tomando a sequência de corretores obtida no lema 2.35, segue de (2.10) que

$$k\beta[\mathcal{F}] - R_{\mathcal{F}} \leq k\beta[\mathcal{F}] + \mathfrak{h}_{k+1}(x) - R_{\mathcal{F}} = f_k(x) - u_k(x) \leq k\beta[\mathcal{F}]$$

para todo $x \in \Omega[\mathcal{F}]$ e para todo $k \geq 1$. ■

Conjunto de Aubry para sequências corrigidas

Uma questão natural a ser investigada consiste em encontrar condições suficientes para que o conjunto de Aubry associado à sequência corrigida seja um conjunto maximizante para a sequência original. Não é difícil responder tal questionamento no caso particular da sequência regularizada $\utilde{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}} = \{\utilde{h_k}\}_{k\geq 1}$ discutida no exemplo 2.33, a qual fornece, recordamos, a sequência de corretores $\mathcal{U}'' = \{f_k - \utilde{h_k}\}_{k\geq 1}$. Por causa do lema 2.17, é sabido que $\mathcal{F} - \mathcal{U}'' = \utilde{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}$ é uma sequência subaditiva de funções s.c.s. cumprindo $\max_{x\in X} \utilde{h_k}(x) = k\beta[\mathcal{F}]$ para todo $k \geq 1$ (logo, não defectiva) e $\mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}] = \mathcal{M}_{\max}[\utilde{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}]$. Aplicando o teorema 2.22 a tal sequência, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 2.36. *Dada uma sequência quase subaditiva de funções s.c.s. $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ com a condição não defectiva, considere a sequência regularizada $\utilde{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}} = \{\utilde{h_k}\}_{k\geq 1}$ introduzida na definição 2.3. Então, o conjunto de Aubry $\Omega\big[\utilde{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}\big]$ é um conjunto maximizante para $\mathcal{F}$.*

De modo mais geral, estabelecemos a seguinte relação entre os conjuntos de Aubry da sequência original e da sequência corrigida.

Proposição 2.37. *Seja $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\geq 1}$ uma sequência quase subaditiva de funções s.c.s. verificando a condição não defectiva. Dada uma sequência de corretores $\mathcal{U} = \{u_k\}_{k\geq 1}$ para $\mathcal{F}$, se a sequência corrigida $\mathcal{F} - \mathcal{U} = \{f_k - u_k\}_{k\geq 1}$ obedece a condição $(P1)$, então*

$$\operatorname{supp}\mu \subset \Omega[\mathcal{F}] \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{supp}\mu \subset \Omega[\mathcal{F} - \mathcal{U}].$$

Ademais, se $\mathcal{F} - \mathcal{U}$ é uma sequência quase subaditiva de funções s.c.s. satisfazendo a condição não defectiva e $\mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}] = \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F} - \mathcal{U}]$, então vale a recíproca

$$\operatorname{supp}\mu \subset \Omega[\mathcal{F} - \mathcal{U}] \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{supp}\mu \subset \Omega[\mathcal{F}].$$

Demonstração. Se o suporte de μ está contido no conjunto de Aubry de $\mathcal{F}$, então a proposição 2.30 e o item (i) do lema 2.34 fornecem $\mu \in \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}] \subset \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F} - \mathcal{U}]$.

Concluímos a primeira afirmação do enunciado a partir da proposição 2.29, relembrando que a hipótese $(P2)$ pode ser substituída por $\mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}-\mathcal{U}] \neq \varnothing$.

Com as hipóteses adicionais sobre $\mathcal{F}-\mathcal{U}$, podemos aplicar a proposição 2.30, assegurando que $\operatorname{supp}\mu \subset \Omega[\mathcal{F}-\mathcal{U}]$ implica $\mu \in \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}-\mathcal{U}] = \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}]$. Por fim, como $\mathcal{F}$ já satisfaz $(P1)$ e $(P2)$, decorre da proposição 2.29 que $\operatorname{supp}\mu \subset \Omega[\mathcal{F}]$. ■

2.3 Exemplos

Encerramos este capítulo, analisando o problema de otimização ergódica – sobretudo a caraterização das probabilidades maximizantes por intermédio dos conjuntos maximizantes discutidos anteriormente – para os exemplos 1.3, 1.4 e 1.5 exibidos nas seções 1.1 e 1.2. Com este intuito, destacamos alguns resultados que serão convenientes no decorrer desta seção e do capítulo 3.

Inicialmente, explicitamos as relações entre o local de maximização e o conjunto de Aubry para algumas situações específicas.

Lema 2.38.

(i) *Seja $\mathcal{F} = \{f_k : X \to \mathbb{R}\}_{k\geq 1}$ uma sequência subaditiva de funções s.c.s. satisfazendo $\sup_{x\in X} f_k(x) = k\beta[\mathcal{F}]$ para todo $k \geq 1$. Então,*

$$\Omega[\mathcal{F}] \;\subset\; \bigcap_{k\geq 1} f_k^{-1}\Big(k\beta[\mathcal{F}]\Big);$$

(ii) *Dada uma sequência de potenciais localmente constantes $\mathcal{F} = \{f_k : \Sigma^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}\}_{k\geq 1}$ verificando $(P1)$ e $(P2)$, suponha que $f_k(x_0, x_1, x_2, \ldots) = f_k(x_0, \ldots, x_{k-1})$ para todo $(x_0, x_1, x_2, \ldots) \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ e para todo $k \geq 1$. Então,*

$$\bigcap_{k\geq 1} f_k^{-1}\Big(k\beta[\mathcal{F}]\Big) \;\subset\; \Omega[\mathcal{F}].$$

Em particular, sempre que as hipóteses de ambos os itens no resultado acima se verificam o conjunto de Aubry é T-invariante já que coincide com o local de maximização.

Demonstração. Considere a formulação dos pontos de Aubry dada pelo exemplo 2.21. Dados $x \in \Omega[\mathcal{F}]$ e inteiro $L \geq 1$, sabemos que existem sequência de pontos $\{y_i\}_{i\geq 1}$ (convergente para o ponto x) e sequência de inteiros $\{r_i\}_{i\geq 1}$ (com $r_i \geq L$) tais que $-\frac{1}{i} < f_{r_i}(y_i) - r_i\beta[\mathcal{F}] \leq f_L(y_i) - L\beta[\mathcal{F}] + f_{r_i - L}(T^L y_i) - (r_i - L)\beta[\mathcal{F}] \leq f_L(y_i) - L\beta[\mathcal{F}] \leq 0$

para todo $i \geq 1$, onde as duas últimas desigualdades devem-se a $\sup_{x \in X} f_k(x) = k\beta[\mathcal{F}]$ para todo $k \geq 1$. Devido à semicontinuidade superior da função f_L, constatamos que $L\beta[\mathcal{F}] \geq f_L(x) \geq \limsup_{i\to\infty} f_L(y_i) \geq \lim_{i\to\infty} \left(L\beta[\mathcal{F}] - \frac{1}{i}\right) = L\beta[\mathcal{F}]$. Como tal argumento é válido para todo $L \geq 1$, decorre que $x \in \bigcap_{k\geq 1} f_k^{-1}\big(k\beta[\mathcal{F}]\big)$. Desta forma, obtemos o item (i) do enunciado.

Com o intuito de provar o item (ii), considere $\Big\{(x_0, \dots, x_{k-1}, x_0, \dots)\Big\}_{k\geq 1} \subset \Sigma^{\mathbb{N}}$ coletânea de pontos periódicos obtida a partir de $(x_0, x_1, x_2, \dots) \in \bigcap_{k\geq 1} f_k^{-1}\big(k\beta[\mathcal{F}]\big)$. Perceba que, dados $\varepsilon > 0$ e $L \geq 1$, existe inteiro $r := \max\Big\{\lceil -\log_2 \varepsilon \rceil, L\Big\}$ tal que

$$\begin{aligned} &(x_0, \dots, x_{r-1}, x_0, \dots) = \sigma^r(x_0, \dots, x_{r-1}, x_0, \dots) \in B_{2^{-r}}(x_0, x_1, x_2, \dots) \subset B_\varepsilon(x_0, x_1, x_2, \dots) \\ &\text{e} \qquad f_r(x_0, \dots, x_{r-1}, x_0, \dots) = f_r(x_0, \dots, x_{r-1}) = f_r(x_0, x_1, x_2, \dots) = r\beta[\mathcal{F}]. \end{aligned}$$

Concluímos destes fatos que $(x_0, x_1, x_2, \dots) \in \Omega[\mathcal{F}]$. ■

Na prova do item (ii) do lema acima, observamos a convergência de elementos periódicos dos conjuntos de nível $f_k^{-1}(k\beta[\mathcal{F}])$ para pontos de Aubry. Tal estratégia permite relacionar o conjunto de Aubry e suas respectivas pré-imagens com o local de maximização para o seguinte cenário.

Lema 2.39. *Considere um alfabeto finito Σ e uma sequência $\mathcal{F} = \{f_k : \Sigma^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}\}_{k\geq 1}$ subaditiva verificando $\sup_{(x_0,x_1,\dots)\in\Sigma^{\mathbb{N}}} f_k(x_0, x_1, \dots) = k\beta[\mathcal{F}]$. Assuma que existe $n \geq 0$ tal que $f_k(x_0, x_1, \dots) = f_k(x_0, \dots, x_{k+n-1})$ para todo $(x_0, x_1, \dots) \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ e para todo $k \geq 1$. Então,*

$$\bigcap_{k\geq 1} f_k^{-1}\big(k\beta[\mathcal{F}]\big) = \bigcup_{\ell\geq 0} \sigma^{-\ell}\big(\Omega[\mathcal{F}]\big).$$

Demonstração. É imediato do item (i) do lema 2.38 que $\Omega[\mathcal{F}] \subset \bigcap_{k\geq 1} f_k^{-1}(k\beta[\mathcal{F}])$. Devido à σ-invariância do local de maximização, vale a inclusão

$$\bigcup_{\ell\geq 0} \sigma^{-\ell}\big(\Omega[\mathcal{F}]\big) \subset \bigcup_{\ell\geq 0} \sigma^{-\ell}\Big[\bigcap_{k\geq 1} f_k^{-1}\big(k\beta[\mathcal{F}]\big)\Big] = \bigcap_{k\geq 1} f_k^{-1}\big(k\beta[\mathcal{F}]\big)$$

Por outro lado, observe que cada $(x_0, x_1, \dots) \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ possui ao menos uma palavra $(a_1, \dots a_n) \in \Sigma^n$ que aparece infinitas vezes nesta sequência. Mais precisamente, existe uma coletânea crescente de inteiros positivos $\{p_\ell\}_{\ell\geq 0}$ tais que $\sigma^{p_\ell}(x_0, x_1, \dots) \in [a_1, \dots a_n]$. Assumimos, sem perda de generalidade, $p_1 - p_0 > n$. Dado $(x_0, x_1, \dots) \in \bigcap_{k\geq 1} f_k^{-1}\big(k\beta[\mathcal{F}]\big)$, por invariância, também temos $\sigma^{p_\ell}(x_0, x_1, \dots) \in \bigcap_{k\geq 1} f_k^{-1}\big(k\beta[\mathcal{F}]\big)$. Para cada $\ell \geq 1$, definimos inteiro $r_\ell := p_\ell - p_0 > n$ e ponto periódico $(x_{p_0}, \ldots, x_{p_\ell - 1}, x_{p_0}, \ldots) \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ que cumprem

$$(x_{p_0}, \ldots, x_{p_\ell-1}, x_{p_0}, \ldots) = \sigma^{r_\ell}(x_{p_0}, \ldots, x_{p_\ell-1}, x_{p_0}, \ldots) \in B_{2^{-r_\ell}}\Big(\sigma^{p_0}(x_0, x_1, \ldots)\Big) \qquad \text{e}$$
$$f_{r_\ell}(x_{p_0}, \ldots, x_{p_\ell-1}, x_{p_0}, \ldots) = f_{r_\ell}(x_{p_0}, \ldots, x_{p_\ell-1}, a_1, \ldots, a_n) = f_{r_\ell}\Big(\sigma^{p_0}(x_0, x_1, \ldots)\Big) = r_\ell \beta[\mathcal{F}].$$

Concluímos que $(x_0, x_1, \ldots) \in \sigma^{-p_0}\Big(\Omega[\mathcal{F}]\Big)$, donde segue o resultado desejado. ■

Um último ponto a ser discutido, previamente à análise dos exemplos, concerne à unicidade de subconjunto minimal no local de maximização ou no conjunto de Aubry.

Lema 2.40. *Um conjunto maximizante $\mathsf{K}_{\mathcal{F}}$ para uma sequência subaditiva de funções s.c.s. $\mathcal{F} = \{f_k : X \to \mathbb{R}\}_{k \geq 1}$ possui único subconjunto minimal se, e somente se, vale a propriedade de concordância não limitada: para quaisquer x e $y \in X$, verificando*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{f_k(x)}{k} = \beta[\mathcal{F}] \qquad e \qquad \limsup_{k\to\infty} \frac{f_k(y)}{k} = \beta[\mathcal{F}],$$

os ω-limites de tais pontos obedecem $\omega(x) \cap \omega(y) \neq \varnothing$.

A prova deste resultado consiste em uma adaptação natural do argumento apresentado em [Mor13, Teorema 7.2] no contexto do raio espectral conjunto. Ademais, não é difícil verificar que este lema ainda é válido para as sequências assintoticamente subaditivas de potenciais ao se empregar a mesma argumentação abaixo.

Demonstração. Asseguramos as implicações que compõem este resultado por argumentação contrapositiva. Suponha que $\mathsf{K}_{\mathcal{F}}$ possui dois subconjuntos minimais distintos A e B, os quais são compactos T-invariantes e disjuntos. É imediato que $\omega(x) \cap \omega(y) \subset A \cap B = \varnothing$ para todo $x \in A$ e para todo $y \in B$. Por outro lado, o teorema de Krylov-Bogolioubov [Wal82, Corolário 6.9.1] garante a existência de probabilidades T-invariantes ν_A e ν_B, com $\operatorname{supp} \nu_A \subset A \subset \mathsf{K}_{\mathcal{F}}$ e $\operatorname{supp} \nu_B \subset B \subset \mathsf{K}_{\mathcal{F}}$. Segue disto que ν_A e ν_B são medidas maximizantes para $\mathcal{F}$. Devido ao teorema da decomposição ergódica, podemos supor sem perda de generalidade que tais medidas são ergódicas. Deste modo, $(P1)$ fornece

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f_k(x)}{k} = \beta[\mathcal{F}] \;\; \mu\text{-q.t.p. } x \in A \qquad \text{e} \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{f_k(y)}{k} = \beta[\mathcal{F}] \;\; \mu\text{-q.t.p. } y \in B.$$

Obtemos destes fatos que a propriedade de concordância não limitada não é válida quando $\mathsf{K}_{\mathcal{F}}$ admitir dois subconjuntos minimais distintos.

Reciprocamente assuma que a propriedade de concordância não limitada é falsa, isto é, existem pontos x e y pertencentes a X que cumprem $\limsup_{k\to\infty} \frac{f_k(x)}{k} = \beta[\mathcal{F}]$ e

$\limsup_{k\to\infty} \frac{f_k(y)}{k} = \beta[\mathcal{F}]$ e cujos respectivos ω-limites são disjuntos. Como $\omega(x)$ e $\omega(y)$ são conjuntos compactos T-invariantes, definimos sequências $\mathcal{F}|_{\omega(x)} = \{f_k|_{\omega(x)} : \omega(x) \to \mathbb{R}\}_{k\geq 1}$ e $\mathcal{F}|_{\omega(y)} = \{f_k|_{\omega(y)} : \omega(y) \to \mathbb{R}\}_{k\geq 1}$, as quais verificam $(P1)$ e $(P2)$, logo possuem medidas de probabilidades maximizantes $\nu_{\omega(x)} \in \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}|_{\omega(x)}]$ e $\nu_{\omega(y)} \in \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{F}|_{\omega(y)}]$. Atente para as seguintes relações

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int f_k|_{\omega(x)}\, d\nu_{\omega(x)} = \beta[\mathcal{F}|_{\omega(x)}] = \limsup_{k\to\infty} \sup_{z\in\omega(x)} \frac{f_k(z)}{k} \geq \limsup_{k\to\infty} \frac{f_k(x)}{k} = \beta[\mathcal{F}]$$

$$\text{e} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int f_k|_{\omega(y)}\, d\nu_{\omega(y)} = \beta[\mathcal{F}|_{\omega(y)}] = \limsup_{k\to\infty} \sup_{z\in\omega(y)} \frac{f_k(z)}{k} \geq \limsup_{k\to\infty} \frac{f_k(y)}{k} = \beta[\mathcal{F}]$$

onde a segunda igualdade em ambas as comparações acima segue da proposição 1.8 para as sequências $\mathcal{F}|_{\omega(x)}$ e $\mathcal{F}|_{\omega(y)}$. Note que $\nu_{\omega(x)}$ e $\nu_{\omega(y)}$ satisfazem $\operatorname{supp} \nu_{\omega(x)} \subset \omega(x)$ e $\operatorname{supp} \nu_{\omega(y)} \subset \omega(y)$. Em particular, tais medidas também são maximizantes para $\mathcal{F}$, por causa das seguintes desigualdades

$$\beta[\mathcal{F}] \geq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int f_k\, d\nu_\omega = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int_{\operatorname{supp} \nu_\omega} f_k d\nu_\omega = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int f_k|_\omega\, d\nu_\omega \geq \beta[\mathcal{F}].$$

válidas para $\omega = \omega(x)$ ou $\omega = \omega(y)$. Decorre da definição de conjunto maximizante e da compacidade e T-invariância de $\operatorname{supp} \nu_{\omega(x)}$ e $\operatorname{supp} \nu_{\omega(y)}$ que existem subconjuntos minimais $A \subset \operatorname{supp} \nu_{\omega(x)} \subset \mathsf{K}_{\mathcal{F}}$ e $B \subset \operatorname{supp} \nu_{\omega(x)} \subset \mathsf{K}_{\mathcal{F}}$. Em particular, $A \cap B \subset \operatorname{supp} \nu_{\omega(x)} \cap \operatorname{supp} \nu_{\omega(y)} \subset \omega(x) \cap \omega(y) = \varnothing$. Concluímos disto que existem pelo menos dois subconjuntos minimais distintos em $\mathsf{K}_{\mathcal{F}}$. ■

Observação. A propriedade de concordância não limitada, introduzida em [Mor13, §7], considera em sua versão original as seguintes hipóteses sobre os pontos x e y:

$$\limsup_{k\to\infty} \Big(f_k(x) - k\beta[\mathcal{F}]\Big) > -\infty \qquad \text{e} \qquad \limsup_{k\to\infty} \Big(f_k(y) - k\beta[\mathcal{F}]\Big) > -\infty.$$

Como o lema 2.40 é demonstrado para um contexto mais geral que o do raio espectral conjunto, buscamos por uma alternativa viável às imposições acima.

Potencial localmente constante

A classe dos potenciais localmente constantes, discutida no exemplo 1.3, produz sequências aditivas $\{S_k f\}_{k\geq 1}$ que verificam, para algum inteiro $n \geq 1$, a propriedade $S_k f(x_0, x_1, x_2, \ldots) = S_k f(x_0, \ldots, x_{n+k-1})$ para todo $(x_0, x_1, x_2, \ldots) \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ e para todo $k \geq 1$. Apenas para ilustrar como o lema 2.38 atua no cenário aditivo, mostraremos que o caso $n = 0$ de tal propriedade é uma condição suficiente para que o conjunto de Aubry seja um *subshift* de tipo finito (uma prova deste resultado clássico, para $n \geq 0$, foi apresentada em [Gar17, Teorema 4.3]). Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\sup_{(x_0,x_1,\ldots)\in\Sigma^{\mathbb{N}}} S_k f(x_0, x_1, \ldots) = k\beta(f)$ para todo $k \geq 1$. Segue destas hipóteses que

$$\Omega(f) \;=\; \bigcap_{k\geq 1} S_k f^{-1}\Big(k\beta(f)\Big) \;=\; \bigcap_{k\geq 1} \Big(f \circ \sigma^k\Big)^{-1}\Big(\beta(f)\Big),$$

onde a primeira igualdade é imediata do lema 2.38 (tendo em mente o exemplo 2.20) e a segunda identidade é uma consequência trivial da propriedade aditiva. Por fim, atente que o último termo coincide com a definição de *subshift* $\Sigma_F^{\mathbb{N}}$ com conjunto finito de palavras proibidas $F = f^{-1}\Big(-\infty, \beta(f)\Big) = \Big\{x_0 \in \Sigma \;:\; f(x_0) < \beta(f)\Big\}$.

Indicadora de *Subshift*

Nesta subseção, argumentamos que todo *subshift* (para um conjunto possivelmente infinito de palavras proibidas) pode ser caracterizado como o local de maximização ou o conjunto de Aubry associados uma sequência de potenciais localmente constantes construída a partir das palavras proibidas de tal *subshift*. Em particular, isto diverge do comportamento observado anteriormente para sequências aditivas de potenciais localmente constantes.

Recorde a sequência subaditiva $\mathcal{I}_F := \Big\{\chi_k^F\Big\}_{k\geq 1}$ (introduzida no exemplo 1.4) composta pelos potenciais $\chi_k^F : \Sigma^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ definidos, para todo $(x_0, x_1, x_2, \ldots) \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ e para todo $k \geq 1$, por

$$\chi_k^F(x_0, x_1, x_2, \ldots) = \begin{cases} -k, & \text{se } (x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}) \in F(k) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

onde as coletâneas (de palavras proibidas de tamanho k)

$$F(k) := \left\{ (x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}) \in \Sigma^k \;:\; \begin{array}{c} \exists\, 0 \leq i \leq k-1 \text{ e } 1 \leq n \leq k-1-i \\ \text{tais que } (x_i, \ldots, x_{i+n}) \in F \end{array} \right\}$$

são determinadas a partir do conjunto de palavras proibidas $F \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma^n$ associado a um *subshift* $\Sigma_F^{\mathbb{N}} \subset \Sigma^{\mathbb{N}}$. Em particular, os potenciais localmente constantes χ_k^F satisfazem $\chi_k^F(x_0, x_1, \ldots) = \chi_k^F(x_0, \ldots, x_{k-1})$ para todo $k \geq 1$. Segue imediatamente da proposição 1.8

que

$$\beta[\mathcal{I}_F] = \inf_{k\geq 0} \max_{(x_0,x_1,\ldots)\in\Sigma^{\mathbb{N}}} \frac{1}{k}\,\chi_k^F(x_0,x_1,\ldots) = 0.$$

Note então que $\sup_{(x_0,x_1,\ldots)\in\Sigma^{\mathbb{N}}} \chi_k^F(x_0,x_1,\ldots) = 0 = k\beta[\mathcal{I}_F]$ para todo $k \geq 1$.

A caracterização das medidas maximizantes para $\mathcal{I}_F$ a partir dos conjuntos maximizantes introduzidos neste capítulo segue da identidade

$$\Sigma_F^{\mathbb{N}} \;=\; \bigcap_{k\geq 1} \left(\chi_k^F\right)^{-1}(0) \;=\; \Omega[\mathcal{I}_F]. \tag{2.11}$$

De fato, a primeira igualdade consiste na equivalência mencionada no exemplo 1.4 – $(x_0,x_1,x_2,\ldots)\in\Sigma_F^{\mathbb{N}}$ se, e somente se, $\chi_k^F(x_0,x_1,x_2,\ldots)=0$ para todo $k\geq 1$ – enquanto que a segunda é assegurada pelo lema 2.38.

Para determinar eventual unicidade de subconjunto minimal em qualquer *subshift* $\Sigma_F^{\mathbb{N}}$, aplicamos o lema 2.40 aos conjuntos maximizantes da sequência indicadora de *subshift* $\mathcal{I}_F$. Neste cenário, a propriedade de concordância não limitada vem a ser: para quaisquer $(x_0,x_1,\ldots)$ e $(y_0,y_1,\ldots)\in\Sigma^{\mathbb{N}}$ verificando

$$\begin{aligned}
&0 = \beta[\mathcal{I}_F] = \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k}\,\chi_k^F(x_0,x_1,\ldots) = \hat{\mathcal{I}}_F(x_0,x_1,\ldots) = \mathbb{1}_{\Sigma_F^{\mathbb{N}}}(x_0,x_1,\ldots) - 1 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\Big(\text{ou equivalentemente } \; (x_0,x_1,\ldots)\in\Sigma_F^{\mathbb{N}}\Big) \\
\text{e}\quad &0 = \beta[\mathcal{I}_F] = \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k}\,\chi_k^F(y_0,y_1,\ldots) = \hat{\mathcal{I}}_F(y_0,y_1,\ldots) = \mathbb{1}_{\Sigma_F^{\mathbb{N}}}(y_0,y_1,\ldots) - 1 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\Big(\text{ou equivalentemente } \; (y_0,y_1,\ldots)\in\Sigma_F^{\mathbb{N}}\Big),
\end{aligned}$$

os ω-limites de tais pontos obedecem $\omega(x_0,x_1,\ldots)\cap\omega(y_0,y_1,\ldots)\neq\varnothing$. Em resumo, obtemos que um *subshift* possui único subconjunto minimal se, e somente se, para quaisquer dois elementos deste *subshift* os respectivos ω-limites se intersectam.

Máximo de sequências subaditivas

Para um contexto que generaliza o exemplo 1.5, exibiremos descrições para os conjuntos maximizantes estudados neste capítulo. Dadas sequências subaditivas de potenciais $\mathcal{G} = \{g_k : X\to\mathbb{R}\}_{k\geq 1}$ e $\mathcal{H} := \{h_k : X\to\mathbb{R}\}_{k\geq 1}$, considere a sequência subaditiva de potenciais $\mathcal{S}_{(\mathcal{G},\mathcal{H})} := \{f_k : X\to\mathbb{R}\}_{k\geq 1}$ pondo $f_k(x) := \max\Big\{g_k(x),\, h_k(x)\Big\}$ para todo $k\geq 1$. Trataremos especificamente do caso em que tais sequências são renormalizadas, isto é, assumimos $\sup_{x\in X} g_k = k\beta[\mathcal{G}]$ e $\sup_{x\in X} h_k = k\beta[\mathcal{H}]$ para todo $k\geq 1$. Decorre destas suposições e da proposição 1.8 que

$$\beta\Big[\mathcal{S}_{(\mathcal{G},\mathcal{H})}\Big] = \lim_{k\to\infty} \max_{x\in X} \frac{1}{k} \max\Big\{g_k(x),\, h_k(x)\Big\} = \max\Big\{\beta[\mathcal{G}],\, \beta[\mathcal{H}]\Big\}.$$

Com isto, $\sup_{x\in X} f_k(x) = \max\Big\{\sup_{x\in X} g_k(x),\, \sup_{x\in X} h_k(x)\Big\} = k\beta\Big[\mathcal{S}_{(\mathcal{G},\mathcal{H})}\Big]$ para $k \geq 1$, ou seja, $\mathcal{S}_{(\mathcal{G},\mathcal{H})}$ também é renormalizada.

Para relacionar os conjuntos maximizantes de $\mathcal{S}_{(\mathcal{G},\mathcal{H})}$, $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$, devemos considerar as seguintes possibilidades: $\beta\Big[\mathcal{S}_{(\mathcal{G},\mathcal{H})}\Big] = \beta[\mathcal{G}] > \beta[\mathcal{H}]$, $\beta\Big[\mathcal{S}_{(\mathcal{G},\mathcal{H})}\Big] = \beta[\mathcal{G}] = \beta[\mathcal{H}]$ e $\beta\Big[\mathcal{S}_{(\mathcal{G},\mathcal{H})}\Big] = \beta[\mathcal{H}] > \beta[\mathcal{G}]$. Analisando o conjunto $\Big(\max\{g_k,\, h_k\}\Big)^{-1}\Big(k\beta\Big[\mathcal{S}_{(\mathcal{G},\mathcal{H})}\Big]\Big)$ em cada um destes casos, obtemos que o local de maximização $\bigcap_{k\geq 1} \Big(\max\{g_k,\, h_k\}\Big)^{-1}\Big(k\beta\Big[\mathcal{S}_{(\mathcal{G},\mathcal{H})}\Big]\Big)$ pode ser representado por

$$\begin{array}{ll}
\bigcap_{k\geq 1} g_k^{-1}\Big(k\beta[\mathcal{G}]\Big), & \text{se } \beta[\mathcal{G}] > \beta[\mathcal{H}];\\
\bigcap_{k\geq 1} g_k^{-1}\Big(k\beta[\mathcal{G}]\Big) \cup \bigcap_{k\geq 1} h_k^{-1}\Big(k\beta[\mathcal{H}]\Big), & \text{se } \beta[\mathcal{G}] = \beta[\mathcal{H}];\\
\bigcap_{k\geq 1} h_k^{-1}\Big(k\beta[\mathcal{H}]\Big), & \text{se } \beta[\mathcal{G}] < \beta[\mathcal{H}].
\end{array}$$

Com respeito ao conjunto de Aubry, demonstraremos a seguinte identidade

$$\Omega\Big[\mathcal{S}_{(\mathcal{G},\mathcal{H})}\Big] = \begin{cases} \Omega[\mathcal{G}], & \text{se } \beta[\mathcal{G}] > \beta[\mathcal{H}] \\ \Omega[\mathcal{G}] \cup \Omega[\mathcal{H}], & \text{se } \beta[\mathcal{G}] = \beta[\mathcal{H}] \\ \Omega[\mathcal{H}], & \text{se } \beta[\mathcal{G}] < \beta[\mathcal{H}] \end{cases}. \tag{2.12}$$

Como as sequências em questão são renormalizadas, recorde que os respectivos pontos de Aubry são formulados como no exemplo 2.21.

Primeiramente provaremos que ou $\Omega[\mathcal{G}]$ ou $\Omega[\mathcal{G}] \cup \Omega[\mathcal{H}]$ ou $\Omega[\mathcal{H}]$ estão contidos em $\Omega\Big[\mathcal{S}_{(\mathcal{G},\mathcal{H})}\Big]$. Caso $\beta[\mathcal{G}] \geq \beta[\mathcal{H}]$, sabemos que $x \in \Omega[\mathcal{G}]$ sempre que, dados $\varepsilon > 0$ e inteiro $L \geq 1$, existem $y \in B_\varepsilon(x)$ e $r \geq L$ tais que $T^r y \in B_\varepsilon(x)$ e $-\varepsilon < g_r(y) - r\beta[\mathcal{G}] \leq \max\Big\{g_r(y),\, h_r(y)\Big\} - r\beta\Big[\mathcal{S}_{(\mathcal{G},\mathcal{H})}\Big] \leq 0$. Segue disto que $x \in \Omega\Big[\mathcal{S}_{(\mathcal{G},\mathcal{H})}\Big]$, logo $\Omega[\mathcal{G}] \subset \Omega\Big[\mathcal{S}_{(\mathcal{G},\mathcal{H})}\Big]$. Por simetria no argumento, também obtemos que $\beta[\mathcal{H}] \geq \beta[\mathcal{G}]$ implica $\Omega[\mathcal{H}] \subset \Omega\Big[\mathcal{S}_{(\mathcal{G},\mathcal{H})}\Big]$, donde valem as respectivas inclusões desejadas.

Argumentaremos agora que $\Omega\Big[\mathcal{S}_{(\mathcal{G},\mathcal{H})}\Big] \subset \Omega[\mathcal{G}]$, quando $\beta[\mathcal{G}] > \beta[\mathcal{H}]$. Dados $\varepsilon \in \Big(0, \beta[\mathcal{G}] - \beta[\mathcal{H}]\Big)$ e inteiro $L \geq 1$, para $x \in \Omega\Big[\mathcal{S}_{(\mathcal{G},\mathcal{H})}\Big]$ há $y \in B_\varepsilon(x)$ e $r \geq L$ tais que $T^r y \in B_\varepsilon(x)$ e $\Big|\max\Big\{g_r(y),\, h_r(y)\Big\} - r\beta\Big[\mathcal{S}_{(\mathcal{G},\mathcal{H})}\Big]\Big| < \varepsilon$. Como $\beta\Big[\mathcal{S}_{(\mathcal{G},\mathcal{H})}\Big] = \beta[\mathcal{G}]$, atente para o fato que a escolha de ε impõe $\max\Big\{g_k(y),\, h_k(y)\Big\} = g_k(y)$. Caso contrário, obteríamos

$-\varepsilon < \max\Big\{g_r(y),\, h_r(y)\Big\} - r\beta\Big[\mathcal{S}_{(\mathcal{G},\mathcal{H})}\Big] = h_r(y) - r\beta[\mathcal{G}] \le r\Big(\beta[\mathcal{H}] - \beta[\mathcal{G}]\Big) \le -\varepsilon r$, o que é uma contradição. Desta forma, $x \in \Omega[\mathcal{G}]$. De maneira análoga, $\Omega\Big[\mathcal{S}_{(\mathcal{G},\mathcal{H})}\Big] \subset \Omega[\mathcal{H}]$ sempre que $\beta[\mathcal{H}] > \beta[\mathcal{G}]$.

Para mostrar a inclusão $\Omega\Big[\mathcal{S}_{(\mathcal{G},\mathcal{H})}\Big] \subset \Omega[\mathcal{G}] \cup \Omega[\mathcal{H}]$, assumimos $\beta\Big[\mathcal{S}_{(\mathcal{G},\mathcal{H})}\Big] = \beta[\mathcal{G}] = \beta[\mathcal{H}] = 0$ com o intuito de simplificar os cálculos. Considere x um ponto de Aubry da sequência $\mathcal{S}_{(\mathcal{G},\mathcal{H})}$. Para cada par de inteiros positivos (k,ℓ), existem $y_{k,\ell} \in B_{\frac{1}{k}}(x)$ e inteiro $r(k,\ell) \ge \ell$, tais que $T^{r(k,\ell)} y_{k,\ell} \in B_{\frac{1}{k}}(x)$ e $\Big|\max\Big\{g_{r(k,\ell)}(y_{k,\ell}),\, h_{r(k,\ell)}(y_{k,\ell})\Big\}\Big| < \frac{1}{k}$. Perceba que ao menos uma das coletâneas abaixo

$$\Big\{ (k,\ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,:\, g_{r(k,\ell)}(y_{k,\ell}) \;=\; \max\Big\{g_{r(k,\ell)}(y_{k,\ell}),\, h_{r(k,\ell)}(y_{k,\ell})\Big\} \Big\}$$
$$\Big\{ (k,\ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,:\, h_{r(k,\ell)}(y_{k,\ell}) \;=\; \max\Big\{g_{r(k,\ell)}(y_{k,\ell}),\, h_{r(k,\ell)}(y_{k,\ell})\Big\} \Big\}$$

consiste em um conjunto infinito de pares de índices cuja projeção em cada coordenada não é limitada em $\mathbb{N}$. Suponha que a primeira coletânea – que está associada à sequência $\mathcal{G}$ – verifica tal condição. Consequentemente, para todo $\varepsilon > 0$ e para qualquer inteiro $L \ge 1$, existe algum par (k,ℓ) com $\varepsilon \ge \frac{1}{k}$ e $\ell \ge L$. Isto significa que existem $r(k,\ell) \ge L$ e $y_{k,\ell} \in B_\varepsilon(x)$ tais que

$$T^{r(k,\ell)} y_{k,\ell} \in B_\varepsilon(x) \qquad \text{e} \qquad \Big|g_{r(k,\ell)}(y_{k,\ell})\Big| = \Big|\max\Big\{g_{r(k,\ell)}(y_{k,\ell}),\, h_{r(k,\ell)}(y_{k,\ell})\Big\}\Big| < \varepsilon,$$

logo $x \in \Omega[\mathcal{G}]$. Repetindo este argumento no caso da segunda coletânea (associada à sequência $\mathcal{H}$), concluímos $\Omega\Big[\mathcal{S}_{(\mathcal{G},\mathcal{H})}\Big] = \Omega[\mathcal{G}] \cup \Omega[\mathcal{H}]$, o que encerra a prova da identidade (2.12).

No caso específico do máximo de sequências aditivas (descrito no exemplo 1.5), temos que

$$\Omega\Big[\mathcal{S}_{(g,h)}\Big] = \begin{cases} \Omega\Big[\{S_k g\}\Big] = \Omega(g), & \text{se } \beta(g) > \beta(h) \\ \Omega\Big[\{S_k g\}\Big] \cup \Omega\Big[\{S_k g\}\Big] = \Omega(g) \cup \Omega(h), & \text{se } \beta(g) = \beta(h) \\ \Omega\Big[\{S_k h\}\Big] = \Omega(h), & \text{se } \beta(h) < \beta(h) \end{cases},$$

donde concluímos que o conjunto de Aubry associado à sequência $\mathcal{S}_{(g,h)}$ é T-invariante.

Os argumentos desenvolvidos previamente estendem-se de modo natural para o máximo de qualquer quantidade finita de sequências subaditivas. Além disso, para a sequência subaditiva $\mathcal{S}_{\{\mathcal{G}_\gamma\}} := \{f_k : X \to \mathbb{R}\}_{k\ge1}$ dada pelas funções $f_k(\cdot) := \sup_{\gamma\in I}\Big\{g_k^\gamma(\cdot)\Big\}$, que são definidas a partir de uma família arbitrária de sequências subaditivas renormalizadas de potenciais $\mathcal{G}^\gamma = \{g_k^\gamma : X \to \mathbb{R}\}_{k\geq 1}$, com $\beta[\mathcal{G}^\gamma] = 0$ para $\gamma \in I$, obtemos que

$$\bigcup_{\gamma\in I}\bigcap_{k\geq 1}(g_k^\gamma)^{-1}(0) \subset \bigcap_{k\geq 1}\left(\sup_{\gamma\in I}\left\{g_k^\gamma\right\}\right)^{-1}(0) \qquad \text{e} \qquad \bigcup_{\gamma\in I}\Omega[\mathcal{G}^\gamma] \subset \Omega\Big[\mathcal{S}_{\{\mathcal{G}_\gamma\}}\Big]. \tag{2.13}$$

Observação. Para o conjunto de Aubry associado ao raio espectral conjunto – o qual será estudado separadamente no capítulo 3 – estabeleceremos uma descrição similar à que foi discutida nesta subseção em função de sequências aditivas que definem os cociclos (lineares) de matrizes.

Aplicação: Formalismo termodinâmico em temperatura zero

Dadas temperatura $\mathsf{T} = \frac{1}{t} > 0$ e sequência assintoticamente subaditiva de potenciais $\mathcal{G} := \left\{g_k : \Sigma^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}\right\}_{k\geq 1}$, identificamos [Bar11, Teorema 7.21] as *medidas de equilíbrio* associadas à sequência $t\mathcal{G} = \{t\, g_k\}_{k\geq 1}$ como as probabilidades σ-invariantes que atingem o máximo no princípio variacional para pressão topológica

$$P(t\mathcal{G}) = \max\left\{h_\sigma(\mu) + t\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\int g_k\, d\mu \;:\; \mu\in\mathcal{M}_\sigma\right\},$$

onde denotamos, como de costume, a entropia de Kolmogorov-Sinai por $h_\sigma(\mu)$. Dentre tais probabilidades, destacam-se as *medidas de Gibbs* σ-invariantes para $t\mathcal{G}$, isto é, aquelas que cumprem

$$\frac{1}{\Gamma} \leq \frac{\nu_{t\mathcal{G}}\Big([x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]\Big)}{e^{t g_k(x_0,x_1,\ldots) - kP(t\mathcal{G})}} \leq \Gamma,$$

para todo $(x_0, x_1, \ldots) \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, para todo $k \geq 1$ e para alguma constante $\Gamma > 0$. De fato, o teorema de Shannon-McMillan-Breiman [PY98, Teorema 12.11] e a condição $(P1)$ fornecem

$$h_\sigma(\nu_{t\mathcal{G}}) = \int -\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\nu_{t\mathcal{G}}\Big([x_0,\ldots,x_{k-1}]\Big)\, d\nu_{t\mathcal{G}}(x_0,x_1,\ldots) = P(t\mathcal{G}) - t\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\int g_k\, d\nu_{t\mathcal{G}},$$

donde se verifica que a medida de Gibbs $\nu_{t\mathcal{G}}$ é uma medida de equilíbrio.

A compacidade (na topologia fraca*) de $\mathcal{M}_\sigma$ assegura a existência de pontos de acumulação da família de medidas de equilíbrios $\left\{\nu_{t\mathcal{G}}\right\}_{t>0}$ para t tendendo a ∞ (ou seja, quando a temperatura T tende a 0). Tais probabilidades, denominadas de estados congelados associados a sequência $\mathcal{G}$, possuem a seguinte descrição em termos da teoria de otimização ergódica.

Proposição 2.41. *Todo estado congelado de uma sequência quase subaditiva de potenciais* $\mathcal{G} = \{g_k\}_{k\geq 1}$ *com a condição não defectiva é uma probabilidade maximizante para* $\mathcal{G}$ *cuja* *entropia de Kolmogorov-Sinai é igual a*

$$\lim_{t\to\infty} h_\sigma(\nu_{t\mathcal{G}}) = \lim_{t\to\infty}\Big(P(t\mathcal{G}) - t\beta[\mathcal{G}]\Big) = \max\Big\{h_\sigma(\mu) \,:\, \mu \in \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{G}]\Big\} = h_{top}(\sigma|_{\mathsf{K}_\mathcal{G}}),$$

para qualquer conjunto maximizante σ-invariante $\mathsf{K}_\mathcal{G}$.

Uma versão desta proposição para sequências quase aditivas definidas sobre subshifts de tipo finito para um alfabeto enumerável foi discutida em [IY14]. A demonstração deste resultado consiste em uma adaptação dos argumentos desenvolvidos em [CLT01, Proposição 29], [Mor06] e [Gar17, Proposição 9.1] no caso aditivo. Note que as hipóteses sobre a sequência $\mathcal{G}$ fornecem o princípio variacional para pressão topológica e a existência de conjunto maximizante σ-invariante como, por exemplo, o conjunto Mather (veja proposição 1.11) ou local de maximização (consulte a proposição 2.8).

Demonstração. É sabido que $0 \leq h_\sigma(\mu) \leq h_{\mathrm{top}}(\sigma)$ para toda $\mu \in \mathcal{M}_\sigma$. Pela definição do valor ergódico maximizante, temos que

$$t \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int g_n \, d\nu_{t\mathcal{G}} \leq t\beta[\mathcal{G}] \leq h_{\mathrm{top}}(\sigma) + t\beta[\mathcal{G}].$$

Ademais, para $\mu \in \mathcal{M}_{\max}[\mathcal{G}]$, decorre do princípio variacional que

$$t\beta[\mathcal{G}] \leq h_\sigma(\mu) + t\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int g_n \, d\mu \leq P(t\mathcal{G}) \leq h_{\mathrm{top}}(\sigma) + t\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int g_n \, d\nu_{t\mathcal{G}}.$$

Segue destas considerações que $\Big|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int g_n \, d\nu_{t\mathcal{G}} - \beta[\mathcal{G}]\Big| \leq \frac{1}{t} h_{\mathrm{top}}(\sigma)$ para todo $t > 0$, donde concluímos que, quando $t \to \infty$, qualquer ponto de acumulação $\nu_\mathcal{G}^\infty$ da família $\big\{\nu_{t\mathcal{G}}\big\}_{t>0}$ é uma probabilidade maximizante para $\mathcal{G}$.

Para mostrar as identidades do enunciado, atente que

$$\begin{aligned}
\max\Big\{h_\sigma(\mu) \,:\, \mu \in \mathcal{M}_{\max}(\mathcal{G})\Big\} &\leq \liminf_{t\to\infty}\Big(P(t\mathcal{G}) - t\beta[\mathcal{G}]\Big) \leq \limsup_{t\to\infty}\Big(P(t\mathcal{G}) - t\beta[\mathcal{G}]\Big) \\
&\leq \liminf_{t\to\infty} h_\sigma(\nu_{t\mathcal{G}}) \leq \limsup_{t\to\infty} h_\sigma(\nu_{t\mathcal{G}}) = h_\sigma(\nu_\mathcal{G}^\infty) \\
&\leq \max\Big\{h_\sigma(\mu) \,:\, \mu \in \mathcal{M}_{\max}(\mathcal{G})\Big\},
\end{aligned}$$

onde as desigualdades iniciais decorrem da relação $h_\sigma(\mu) + t\beta[\mathcal{G}] \leq P(t\mathcal{G}) \leq h_\sigma(\nu_{t\mathcal{G}}) + t\beta[\mathcal{G}]$, a igualdade deve-se ao fato de que a entropia de Kolmogorov-Sinai é uma aplicação semicontínua superior e a última desigualdade segue do fato que os pontos de acumulação $\nu_\mathcal{G}^\infty$ são probabilidades maximizantes para $\mathcal{G}$. Por fim, o princípio variacional para entropia topológica fornece $h_{\mathrm{top}}(\sigma|_{\mathsf{K}_\mathcal{G}}) = \max\Big\{h_\sigma(\mu) \,:\, \mu \in \mathcal{M}_{\max}(\mathcal{G})\Big\}$. ■

O formalismo termodinâmico em temperatura zero investiga a convergência das medidas de equilíbrio $\nu_{t\mathcal{G}}$ para um único estado congelado $\mathring{\nu}_{\mathcal{G}}$ quando t tende a ∞. No cenário aditivo, este fenômeno se verifica para qualquer potencial localmente constante [Bre03, Lep05, CGU11, GT12] e genericamente para as funções Lipschitz [CLT01]. Em contrapartida, [CH10, CR15, BGT16] determinaram exemplos explícitos onde não ocorre tal convergência.

No contexto das sequências de potenciais, a proposição 2.41 e a caracterização das medidas de probabilidade maximizantes fornecem critérios de seleção dos principais candidatos a estados congelados. Para a sequência indicadora do *subshift* $\mathcal{I}_F$, os prováveis estados congelados são as medidas suportadas no local de maximização/conjunto de Aubry dado pelo próprio *subshift* $\Sigma_F^{\mathbb{N}}$ que atingem o valor da entropia topológica para este *subshift*. Já o máximo de sequências aditivas $\mathcal{S}_{(g,h)}$ possui como candidatos a estados congelados as probabilidades maximizantes de g ou de h cuja entropia de Kolmogorov-Sinai é dada pela entropia topológica de $\Omega(g)$, $\Omega(h)$ ou $\Omega(g) \cup \Omega(h)$, conforme o caso.

Capítulo 3

Raio espectral conjunto

Finalizamos este trabalho analisando abordagens dinamicistas/ergódicas para o estudo do raio espectral conjunto com o intuito fornecer novas informações sobre a propriedade da finitude, isto é, para a questão de existência de produto matricial $M_{n-1} \dots M_1 M_0 \in \Sigma^n$ cumprindo

$$\rho(\Sigma) = r(M_{n-1} \dots M_1 M_0)^{1/n}.$$

Preliminarmente, apresenta-se uma breve introdução ao raio espectral conjunto (para mais informações, indicamos as referências [Jun09, The05, Koz17, Cic15], as quais resumem o estado atual deste tópico).

O raio espectral associado a uma matriz quadrada M é caracterizado por

$$r(M) \coloneqq \max\left\{|\lambda| \,:\, \lambda \text{ autovalor de } M\right\} = \lim_{k\to\infty} \left\|M^k\right\|^{1/k},$$

onde a última expressão recebe a denominação de fórmula de Gelfand [Gel41]. Esta identidade foi generalizada por G.-C. Rota e G. Strang [RS60] com o intuito de ampliar tal conceito algébrico clássico para uma coletânea de matrizes $d \times d$ com entradas no corpo $\mathbb{F}$ (onde $\mathbb{F}$ denota $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Mais especificamente, define-se o raio espectral conjunto associado a um conjunto limitado $\Sigma \subset \mathbb{F}^{d\times d}$ e a alguma norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{F}^{d\times d}$ como o limite dos valores $\rho_k(\Sigma) \coloneqq \sup\left\{\|M\|^{1/k} \,:\, M \in \Sigma^k\right\}$ (onde $k \geq 1$), ou seja,

$$\rho(\Sigma) \coloneqq \lim_{k\to\infty} \rho_k(\Sigma) = \lim_{k\to\infty} \sup\left\{\left\|M_{k-1} \dots M_0\right\|^{1/k} \,:\, M_i \in \Sigma\right\}.$$

I. Daubechies e J. Lagarias introduziram em [DL92, DL01] uma segunda generalização para o raio espectral designada de raio espectral generalizado e descrita por

$$\varrho(\Sigma) \coloneqq \limsup_{k\to\infty} \varrho_k(\Sigma) = \limsup_{k\to\infty} \sup\left\{r\Big(M_{k-1} \cdots M_0\Big)^{1/k} \,:\, M_i \in \Sigma\right\},$$

para a qual são considerados os valores $\varrho_k(\Sigma) \coloneqq \sup\left\{r(M)^{1/k} \,:\, M \in \Sigma^k\right\}$ com $k \geq 1$.

Com o intuito de relacionar as noções anteriores, prova-se em [DL92, Lema 3.1] a desigualdade dos quatro termos dada por $\varrho_k(\Sigma) \leq \varrho(\Sigma) \leq \rho(\Sigma) \leq \rho_k(\Sigma)$ para todo $k \geq 1$. No mesmo ano, M. Berger e Y. Wang [BW92, Teorema IV] unificam os conceitos que generalizam o raio espectral ao estabelecer a igualdade $\rho(\Sigma) = \varrho(\Sigma)$, intitulada de fórmula de Berger-Wang (outras demonstrações para tal identidade são encontradas em [Els95] e [Boc03, Corolário 1]).

Ressaltamos algumas simplificações que são cruciais no decorrer deste capítulo. Primeiramente, perceba que assumimos Σ limitado em $\mathbb{F}^{d\times d}$ nas definições anteriores. Por causa da relação $\rho(\Sigma) = \rho\Big(\mathsf{Convex}\,(\Sigma)\Big) = \rho\Big(\,\overline{\Sigma}\,\Big)$, onde $\mathsf{Convex}\,(\Sigma)$ e $\overline{\Sigma}$ são respectivamente o fecho convexo e o fecho topológico de Σ, podemos supor, sem perda de generalidade, que o conjunto Σ é compacto e convexo. Ademais, como as matrizes em $\mathbb{C}^{d\times d}$ possuem conjunto completo de autovalores e autovetores, decidimos trabalhar com o corpo $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Observamos que não existe uma uniformidade na literatura deste tópico com respeito a tal escolha, já que $\mathbb{R}^{d\times d} \subset \mathbb{C}^{d\times d}$ e as ações das matrizes de $\mathbb{C}^{d\times d}$ em $\mathbb{C}^d$ estão intrinsecamente associadas aos operadores lineares em $\mathbb{R}^{2d\times 2d}$. Por fim, o caso específico em que o raio espectral conjunto é nulo não será analisado neste trabalho, devido aos argumentos apresentados em [LW95, Teorema A.2] e [Jun09, §2.3.1], os quais estabelecem que um conjunto compacto Σ possui $\rho(\Sigma) = 0$ se, e somente se, $\Sigma^d = \{0\}$. Por este motivo, quando for necessário, podemos investigar a coletânea de matrizes $\frac{1}{\rho(\Sigma)}\Sigma$ que possui comportamento similar ao do conjunto original Σ e cujo raio espectral conjunto $\rho\Big(\frac{1}{\rho(\Sigma)}\Sigma\Big) = 1$.

3.1 Abordagens dinamicistas/ergódicas

Dentre os diversos tratamentos para o raio espectral conjunto, destacam-se as incursões realizadas por [Sch98, DHX11 a, DHX11 b, DHX13] que analisam comportamento assintótico da sequência quase subaditiva $\mathcal{J}_{(\Sigma,\,\|\cdot\|)} \coloneqq \left\{f_k : \Sigma^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}\right\}_{k\geq 1}$, onde $\Sigma \subset \mathbb{C}^{d\times d}$ é um alfabeto compacto de matrizes e $\|\cdot\|$ é uma norma arbitrária em $\mathbb{C}^{d\times d}$, dada pelos potenciais localmente constantes $f_k(M_0, M_1, M_2, \ldots) \coloneqq \log\|M_{k-1}\cdots M_0\|$ para todo $k \geq 1$. Tal ponto de vista foi formalizado em [Mor13, CZ13] como uma generalização da teoria de otimização ergódica em que o problema de otimização para a sequência de potenciais anterior possui o seguinte valor ergódico maximizante

$$\beta\Big[\mathcal{J}_{(\Sigma,\,\|\cdot\|)}\Big] \;=\; \lim_{k\to\infty}\; \max_{(M_0,M_1,\ldots)\in\Sigma^{\mathbb{N}}} \frac{1}{k}\log\|M_{k-1}\cdots M_0\| \;=\; \log\rho(\Sigma)$$

(veja o exemplo 1.9 do raio espectral conjunto da seção 1.2). Segue da equivalência entre normas de um espaço vetorial de dimensão finita que todas as sequências de potenciais $\mathcal{J}_{(\Sigma,\,\|\cdot\|)}$ tais que $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathbb{C}^{d\times d}$ também descrevem o mesmo conjunto de probabilidades maximizantes $\mathcal{M}_{\max}[\mathcal{J}_{(\Sigma,\,\|\cdot\|)}]$, já que tais sequências são equivalentes.

Derivamos outra maneira para retratar o raio espectral conjunto a partir do seguinte formalismo aditivo para o estudo dos expoentes de Lyapunov.

Exemplo 3.1 (Expoentes de Lyapunov)**.** Sejam $\Sigma \subset \mathbb{C}^{d\times d}$ alfabeto compacto de matrizes e $|\cdot|$ uma norma em $\mathbb{C}^d$. Considere o espaço métrico compacto $\Sigma^{\mathbb{N}} \times \mathbb{CP}^{d-1}$ sob a ação do mapa contínuo $T\Big((M_0, M_1, \ldots), [\vec{v}]\Big) = \Big(\sigma(M_0, M_1, \ldots), [M_0\vec{v}]\Big)$. Defina o potencial $\varphi_{|\cdot|}\Big((M_0, M_1, \ldots), [\vec{v}]\Big) := \log|M_0\vec{v}| - \log|\vec{v}|$ e sua respectiva sequência aditiva

$$S_k\varphi_{|\cdot|}\Big((M_0, M_1, \ldots), [\vec{v}]\Big) = \sum_{i=0}^{k-1} \log|M_i \cdots M_0\vec{v}| - \log|M_{i-1}\cdots M_0\vec{v}| = \log\frac{|M_{k-1}\cdots M_0\vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

para todo $\Big((M_0, M_1, \ldots), [\vec{v}]\Big) \in \Sigma^{\mathbb{N}} \times \mathbb{CP}^{d-1}$ e para todo $k \geq 1$. Tais noções são essenciais para introduzir o expoente de Lyapunov de $(M_0, M_1, \ldots) \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ na direção $[\vec{v}] \in \mathbb{CP}^{d-1}$ como o limite $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\log S_k\varphi\Big((M_0, M_1, \ldots), [\vec{v}]\Big)$, quando este existir. (Indicamos os artigos [BDV05, ABY08, BG09, BR16, Via14, BK16] para uma exposição rigorosa sobre este ponto de vista.)

No contexto do exemplo acima, atente que o problema de otimização ergódica para o potencial $\varphi_{|\cdot|} : \Sigma^{\mathbb{N}} \times \mathbb{CP}^{d-1} \to \mathbb{R}$ dado por $\varphi_{|\cdot|}\Big((M_0, M_1, \ldots), [\vec{v}]\Big) = \log|M_0\vec{v}| - \log|\vec{v}|$ possui valor ergódico maximizante

$$\beta(\varphi_{|\cdot|}) = \lim_{k\to\infty} \max_{(M_0, M_1, \ldots)\in\Sigma^{\mathbb{N}}} \frac{1}{k}\log \max_{[\vec{v}]\in\mathbb{CP}^{d-1}} \frac{|M_{k-1}\cdots M_0\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \log\rho(\Sigma),$$

o qual determina, sob um ponto de vista aditivo, outra abordagem dinamicista/ergódica para o raio espectral conjunto. Devido à equivalência entre normas de um espaço vetorial de dimensão finita sabemos que todos os potenciais $\varphi_{|\cdot|}$, para os quais $|\cdot|$ é uma norma em $\mathbb{C}^d$, descrevem o mesmo problema de otimização. Em particular, para uma norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{C}^{d\times d}$ induzida de uma norma $|\cdot|$ em $\mathbb{C}^d$, é fácil perceber que a sequência aditiva $\{S_k\varphi_{|\cdot|}\}_{k\geq1}$ e sequência quase subaditiva $\mathcal{J}_{(\Sigma,\,\|\cdot\|)} := \{f_k\}_{k\geq1}$ estão intrinsecamente relacionadas pela seguinte identidade

$$f_k(M_0, M_1, M_2, \ldots) = \log \sup_{\vec{v}\in\mathbb{C}^d\setminus\{\vec{0}\}} \frac{|M_{k-1}\cdots M_0\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \sup_{[\vec{v}]\in\mathbb{CP}^{d-1}} S_k\varphi_{|\cdot|}\Big((M_0, M_1, M_2, \ldots), [\vec{v}]\Big)$$

para todo $(M_0, M_1, M_2, \ldots) \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ e para todo $k \geq 1$.

Em uma tentativa de apresentar uma abordagem dinamicista/ergódica para o raio espectral generalizado, pode-se introduzir a sequência $\mathcal{J}_{(\Sigma,\, r)} = \{g_k : \Sigma^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}\}_{k\geq 1}$ composta pelos potenciais localmente constantes $g_k(M_0, M_1, M_2, \ldots) \coloneqq \log\, r(M_{k-1} \cdots M_0)$ para todo $k \geq 1$. Demonstra-se em [Mor12] que tal sequência de potenciais possui um comportamento assintótico pontual que se assemelha ao da função $\hat{\mathcal{J}}(\cdot) \coloneqq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} f_k(\cdot)$ associada à sequência $\mathcal{J}_{(\Sigma,\, \|\cdot\|)}$ (e definida segundo a condição $(P1)$). Isto significa que, dada qualquer probabilidade σ-invariante μ,

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log\, r(M_{k-1} \cdots M_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log \|M_{k-1} \cdots M_0\|$$

μ-q.t.p. $(M_0, M_1, M_2, \ldots) \in \Sigma^{\mathbb{N}}$. Por outro lado, A. Avila e J. Bochi apresentaram em [AB02] exemplo explícito no qual $\int \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} g_k \, d\nu < \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int g_k \, d\nu$ com respeito a uma medida de Bernoulli ν. Isto implica que a sequência de potenciais $\mathcal{J}_{(\Sigma,\, r)}$ não obedece, em geral, a condição $(P1)$, o que dificulta a aplicação dos resultados da teoria de otimização ergódica para sequências de potenciais neste caso específico.

Durante este capítulo, estudaremos as sequências $\{S_k \varphi_{|\cdot|}\}_{k\geq 1}$ e $\mathcal{J}_{(\Sigma,\, \|\cdot\|)}$ com o intuito de apresentar as principais noções associadas ao raio espectral conjunto sob o ponto de vista da teoria de otimização ergódica.

Propriedade não defectiva

Um conjunto de matrizes Σ cumpre a propriedade não defectiva sempre que, para alguma norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{C}^{d\times d}$, existe constante $R_{(\Sigma,\, \|\cdot\|)} > 0$ tal que

$$\sup\left\{\|M\| \;:\; M \in \Sigma^k\right\} \leq R_{(\Sigma,\, \|\cdot\|)}\, \rho(\Sigma)^k$$

para todo $k \geq 1$. Um modo prático de verificar tal propriedade é garantir que $\left\{\vec{0}\right\}$ e $\mathbb{C}^d$ são os únicos subespaços vetoriais invariantes para todas as matrizes em Σ. Em particular, esta exigência é conhecida na literatura como irredutibilidade do conjunto Σ. No caso em que o conjunto Σ não satisfaz a propriedade não defectiva, sabe-se que existe uma transformação similar Θ tal que

$$\Theta\, M\, \Theta^{-1} = \begin{pmatrix} M^{(1,1)} & M^{(1,2)} & \cdots & M^{(1,r)} \\ 0 & M^{(2,2)} & \cdots & M^{(2,r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M^{(r,r)} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

para toda matriz $M \in \Sigma$. Esta técnica de triangularização (superior) simultânea nos permite, sem perda de generalidade, restringir ao caso em que a propriedade não defectiva é sempre satisfeita. Tal afirmação justifica-se por causa da relação

$$\rho(\Sigma) = \rho\left(\left\{\Theta\, M\, \Theta^{-1} \,:\, M \in \Sigma\right\}\right) = \max\left\{\rho(\Sigma_1), \rho(\Sigma_2), \cdots, \rho(\Sigma_r)\right\},$$

onde cada conjunto compacto de matrizes $\Sigma_\ell := \{M^{(\ell,\ell)} \,:\, M \in \Sigma\}$, para $1 \leq \ell \leq r$, ou é irredutível (logo, não defectivo) ou é igual a $\{0\}$. Por este motivo, o procedimento descrito acima receberá a denominação de decomposição irredutível de Σ.

Segundo as abordagens dinamicistas/ergódicas para o raio espectral conjunto, a condição não defectiva para as sequências $\{S_k\varphi_{|\cdot|}\}_{k\geq 1}$ e $\mathcal{J}_{(\Sigma,\, \|\cdot\|)}$ se expressa por meio da propriedade não defectiva para o conjunto de matrizes Σ. Para isto concluir, aplicando o item (ii) do lema 2.2, note que

$$R_{\mathcal{J}_{(\Sigma,\, \|\cdot\|)}+C_{\mathcal{J}_{(\Sigma,\, \|\cdot\|)}}} - C_{\mathcal{J}_{(\Sigma,\, \|\cdot\|)}} \;=\; \log \sup_{k\geq 1} \sup_{(M_0, M_1, \ldots)\in\Sigma^{\mathbb{N}}} \frac{1}{\rho(\Sigma)^k} \|M_{k-1}\cdots M_0\| \;\leq\; \log R_{(\Sigma,\, \|\cdot\|)}.$$

Segue desta relação e novamente do item (ii) do lema 2.2 que a propriedade não defectiva de Σ implica a condição não defectiva da sequência quase subaditiva $\mathcal{J}_{(\Sigma,\, \|\cdot\|)}$. Reciprocamente, o conjunto Σ satisfaz a propriedade não defectiva para a constante $R_{(\Sigma,\, \|\cdot\|)} \;=\; \exp\left[R_{\mathcal{J}_{(\Sigma,\, \|\cdot\|)}+C_{\mathcal{J}_{(\Sigma,\, \|\cdot\|)}}} - C_{\mathcal{J}_{(\Sigma,\, \|\cdot\|)}}\right] \;>\; 0$. Também deduzimos que a sequência aditiva $\{S_k\varphi_{|\cdot|}\}_{k\geq 1}$ associada a uma norma $|\cdot|$ em $\mathbb{C}^d$ que induz a norma $\|\cdot\|$ satisfaz a condição não defectiva, já que

$$\begin{aligned}
\sup_{k\geq 1} \sup_{((M_0,M_1,\ldots),[\vec{v}])\in\Sigma^{\mathbb{N}}\times\mathbb{CP}^{d-1}} & \Big[S_k\varphi\Big((M_0,M_1,\ldots),[\vec{v}]\Big)-k\beta(\varphi_{|\cdot|})\Big] = \\
&= \sup_{k\geq 1} \sup_{\substack{(M_0,M_1,\ldots)\in\Sigma^{\mathbb{N}}\\ [\vec{v}]\in\mathbb{CP}^{d-1}}} \left[\frac{|M_{k-1}\cdots M_0\vec{v}|}{|\vec{v}|}-k\log\rho(\Sigma)\right] \\
&= \sup_{k\geq 1} \sup_{(M_0,M_1,\ldots)\in\Sigma^{\mathbb{N}}} \Big[\log\|M_{k-1}\cdots M_0\|-k\log\rho(\Sigma)\Big] \\
&= \sup_{k\geq 1} \sup_{(M_0,M_1,\ldots)\in\Sigma^{\mathbb{N}}} \Big[f_k(M_0,M_1,\ldots)-k\beta\Big[\mathcal{J}_{(\Sigma,\,\|\cdot\|)}\Big]\Big].
\end{aligned}$$

Observação. Por causa da equivalência entre normas de um espaço vetorial de dimensão finita, a propriedade não defectiva para um conjunto de matrizes Σ independe da norma a ser considerada. Consequentemente, quando Σ for não defectivo, todas as sequências de potenciais $\{S_k\varphi_{|\cdot|}\}_{k\geq 1}$ e $\mathcal{J}_{(\Sigma,\,\|\cdot\|)}$ cumprem a condição não defectiva.

3.1.1 Normas extremais

Dentre os principais resultados que concernem a propriedade não defectiva, ressaltamos sua equivalência com a existência de norma extremal $\|\cdot\|_e$ associada a Σ, isto é, uma norma sub-multiplicativa em $\mathbb{C}^{d\times d}$ cumprindo $\sup\Big\{\|M\|_e \,:\, M\in\Sigma^k\Big\}=\rho(\Sigma)^k$ para todo $k\geq 1$. A partir de uma norma arbitrária $|\cdot|$ em $\mathbb{C}^d$, um exemplo explícito de norma extremal para o conjunto não defectivo Σ é dado por

$$\|M\|_e := \sup_{\vec{v}\in\mathbb{C}^d\setminus\{\vec{0}\}} \frac{|M\,\vec{v}|_e}{|\vec{v}|_e} \quad\text{tal que}\quad |\vec{v}|_e := \max\left\{|\vec{v}|,\, \sup_{k\geq 1}\max_{(M_0,M_1,\ldots)\in\Sigma^{\mathbb{N}}} \frac{1}{\rho(\Sigma)^k}|M_{k-1}\cdots M_0\,\vec{v}|\right\}$$

para todo $M\in\mathbb{C}^{d\times d}$ e para todo $\vec{v}\in\mathbb{C}^d$. Perceba que a propriedade extremal decorre do fato que a norma $|\cdot|_e$ em $\mathbb{C}^d$ obedece $|M\vec{v}|_e\leq\rho(\Sigma)|\vec{v}|_e$ para qualquer $M\in\Sigma$ e para todo $\vec{v}\in\mathbb{C}^d$. (Em particular, até onde sabemos, as normas extremais conhecidas na literatura [Bar88, PW08, Jun09, GZ15] são induzidas por normas em $\mathbb{C}^d$.)

Para as abordagens dinamicistas/ergódicas do raio espectral conjunto, o conceito de norma extremal desponta como peça-chave para determinar um processo de renormalização (diferente da técnica que foi desenvolvida na seção 2.1). De fato, a sequência subaditiva $\mathcal{J}_{(\Sigma,\,\|\cdot\|_e)}$ e a sequência aditiva $\{S_k\varphi_{|\cdot|_e}\}_{k\geq 1}$, com respeito a uma norma extremal $\|\cdot\|_e$ em $\mathbb{C}^{d\times d}$ induzida de uma norma $|\cdot|_e$ em $\mathbb{C}^d$, verificam respectivamente

$$\sup_{(M_0,M_1,M_2,\ldots)\in\Sigma^{\mathbb{N}}} f_k(M_0,M_1,M_2,\ldots) = k\log\rho(\Sigma) = k\beta[\mathcal{J}_\Sigma] \tag{3.2}$$

e
$$\sup_{((M_0,M_1,\ldots),[\vec{v}])\in\Sigma^{\mathbb{N}}\times\mathbb{CP}^{d-1}} S_k\varphi\Big((M_0,M_1,\ldots),[\vec{v}]\Big) = k\log\rho(\Sigma) = k\beta(\varphi) \tag{3.3}$$

para todo $k\geq 1$.

Assumindo a irredutibilidade do conjunto de matrizes Σ, produzimos normas extremais com propriedades adicionais relevantes. Um dos principais exemplos é dado por uma norma de Barabanov [Bar88], que vem a ser uma norma de operador $\|\cdot\|_b$ em $\mathbb{C}^{d\times d}$ associada a uma norma $|\cdot|_b$ em $\mathbb{C}^d$ verificando, para todo $\vec{v}\in\mathbb{C}^d$,

$$\max\Big\{|M\,\vec{v}|_b \;:\; M\in\Sigma\Big\} = \rho(\Sigma)\,|\vec{v}|_b.$$

Também se registram normas de Protasov [Pro96], ou melhor, norma $\|\cdot\|_p$ em $\mathbb{C}^{d\times d}$ induzida de uma norma $|\cdot|_p$ em $\mathbb{C}^d$ que satisfaz

$$\mathsf{AbsConvex}\bigg(\Big\{M\vec{v} \;:\; M\in\Sigma \text{ e } |\vec{v}|_p\leq 1\Big\}\bigg) = \Big\{\rho(\Sigma)\,\vec{v} \;:\; |\vec{v}|_p\leq 1\Big\},$$

onde $\mathsf{AbsConvex}\,(\Xi)$ denota o fecho absolutamente convexo de um conjunto Ξ. Convém assinalar que uma norma é de Barabanov se, e somente se, a respectiva norma dual é uma norma de Protasov (para mais detalhes, veja [PW08, Teorema 17]).

Outra classe em evidência é composta pelas normas extremais de politopo [GZ07], ou seja, normas (de operador) extremais $\|\cdot\|_{\mathcal{P}}$ em $\mathbb{C}^{d\times d}$ obtidas a partir de uma norma de politopo $|\cdot|_{\mathcal{P}}$ em $\mathbb{C}^d$. Mais especificamente, uma norma de politopo é caracterizada via funcional de Minkowski $|\vec{v}|_{\mathcal{P}} := \inf\{\lambda>0 \;:\; \vec{v}\in\lambda\mathcal{P}\}$, para todo $\vec{v}\in\mathbb{C}^d$, associado a um politopo balanceado complexo $\mathcal{P} := \Big\{\sum_{i=1}^n \alpha_i\vec{v}_i \;:\; \sum_{i=1}^s|\alpha_i|\leq 1 \text{ com } \alpha_i\in\mathbb{C}\Big\}$ definido a partir de um conjunto finito de vértices $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n\}\subset\mathbb{C}^d$. Um exemplo típico de tal norma, o qual não descreve o caso geral, é dado a partir do produto interno usual $\langle\cdot,\cdot\rangle$ em $\mathbb{C}^d$ e de uma coletânea finita $\{\vec{w}_1,\ldots,\vec{w}_n\}\subset\mathbb{C}^d$ como

$$|\vec{v}|_{\mathcal{P}} := \max_{1\leq j\leq n}|\langle\vec{w}_j,\vec{v}\rangle| \tag{3.4}$$

para todo $\vec{v}\in\mathbb{C}^d$. Para uma caracterização das normas de politopo que seja válida em geral, consulte [GZ15, Teorema 5.5].

Destacamos que as normas extremais introduzidas previamente atingem o valor ínfimo das seguintes caracterizações duais do raio espectral conjunto

$$\rho(\Sigma) = \inf_{\|\cdot\| \in \mathcal{N}} \sup_{M \in \Sigma} \|M\| = \inf_{\|\cdot\| \in \mathcal{N}_{op}} \sup_{M \in \Sigma} \|M\| = \inf_{\|\cdot\| \in \mathcal{N}_{\mathcal{P}}} \sup_{M \in \Sigma} \|M\|, \tag{3.5}$$

onde $\mathcal{N}$ denota o conjunto de todas as normas em $\mathbb{C}^{d\times d}$, $\mathcal{N}_{op}$ a coletânea de todas as normas de operadores sobre $\mathbb{C}^d$ e $\mathcal{N}_{\mathcal{P}}$ o conjunto das normas induzidas de normas de politopo de $\mathbb{C}^d$. Provas de tais identidades são encontradas em [Els95, Lema 1] e [GWZ05, Teorema 5.1]. Além disso, a existência de norma extremal de politopo é uma condição suficiente para a propriedade da finitude, como foi demonstrado em [LW95, Teorema 4.1], para o caso real, e em [GWZ05, Teorema 5.7], no caso complexo. Por outro lado, a recíproca desta afirmação, também conhecida como conjectura de politopo complexo extremal, é falsa devido aos contraexemplos exibidos em [JP09].

Para estudar estes tipos específicos de normas extremais segundo a abordagem dinamicista/ergódica do raio espectral conjunto, desenvolvemos um método algorítmico de aproximação de norma extremal por normas de politopo. Dentre as principais motivações, destacamos o operador de Lax-Oleinik (veja [Gar17, Capítulo 3]), as construções algorítmicas de norma extremal de politopo (*vide* [GZ08, GZ09, GP13, GZ15]) e os métodos iterativos de aproximação da norma de Barabanov (consulte [Koz10 a, Koz10 b, Koz11]). Para simplificar esta argumentação, investigamos o conjunto finito $\Sigma = \{M_1, \ldots, M_s\}$ com a propriedade irredutível e supomos $\rho(\Sigma) = 1$.

A partir do conjunto das normas em $\mathbb{C}^d$ – interpretadas como funções de $\mathbb{C}^d$ a valores em $\mathbb{R}$ – definimos, para todo $\vec{v} \in \mathbb{C}^d$, o operador

$$\mathsf{L}\,(|\cdot|)\,(\vec{v}) := \max_{1\le i\le s} |M_i\vec{v}|.$$

Em particular, decorre da irredutibilidade de Σ que $\mathsf{L}\,(|\cdot|)$ também é uma norma em $\mathbb{C}^d$. Investigamos as principais propriedades do operador L nos próximos lemas.

Lema 3.2. *Seja* $\left\{|\cdot|_\lambda\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ *uma família arbitrária de normas em* $\mathbb{C}^d$ *tal que* $\sup_{\lambda\in\Lambda}|\cdot|_\lambda$ *define uma norma. Então,* $\sup_{\lambda\in\Lambda}\mathsf{L}(|\cdot|_\lambda)$ *também é uma norma em* $\mathbb{C}^d$ *e vale*

$$\mathsf{L}\Big(\sup_{\lambda\in\Lambda}|\cdot|_\lambda\Big) = \sup_{\lambda\in\Lambda}\mathsf{L}(|\cdot|_\lambda).$$

Demonstração. Para cada vetor $\vec{v} \in \mathbb{C}^d$, segue imediatamente da definição que

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\mathsf{L}(|\cdot|_\lambda)(\vec{v}) = \sup_{\lambda\in\Lambda}\max_{1\le i\le s}|M_i\vec{v}|_\lambda = \max_{1\le i\le s}\sup_{\lambda\in\Lambda}|M_i\vec{v}|_\lambda.$$

Tal relação mostra que $\sup_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{L}(|\cdot|_\lambda)$ está bem definido. Ademais, a segunda igualdade anterior garante que tal operador comuta com o supremo: $\mathsf{L}\left(\sup_{\lambda\in\Lambda}|\cdot|_\lambda\right) = \sup_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{L}(|\cdot|_\lambda)$. Por fim, $\sup_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{L}(|\cdot|_\lambda)$ herda de $\mathsf{L}(|\cdot|_\lambda)$ as propriedades que definem uma norma em $\mathbb{C}^d$. ■

Lema 3.3. *Considere uma norma $|\cdot|$ em $\mathbb{C}^d$ que define uma norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{C}^{d\times d}$. Então,*

(i) $\|\cdot\|$ é uma norma de Barabanov se, e somente se, $\mathsf{L}(|\cdot|) = |\cdot|$;

(ii) $\|\cdot\|$ é uma norma extremal se, e somente se, $\mathsf{L}(|\cdot|) \leq |\cdot|$.

O lema acima estabelece que o conjunto das normas de Barabanov é formado pelos pontos fixos de L e o conjunto das normas extremais é formado pelos pontos pré-fixos do operador L.

Demonstração. O item (i) é imediato das definições de norma de Barabanov e do operador L e da suposição $\rho(\Sigma) = 1$:

1. se $|\cdot|$ induz norma de Barabanov $\|\cdot\|$, então $\mathsf{L}\left(|\cdot|\right) = \max_{1\leq i\leq s}|M_i\cdot| = \rho(\Sigma)|\cdot| = |\cdot|$;

2. se $|\cdot|$ é um ponto fixo de L, então $\max_{1\leq i\leq s}|M_i\cdot| = \mathsf{L}\left(|\cdot|\right) = |\cdot| = \rho(\Sigma)|\cdot|$.

A partir de uma argumentação similar, obtemos o item (ii) do enunciado:

1. se $|\cdot|$ induz norma extremal $\|\cdot\|$, então $\mathsf{L}\left(|\cdot|\right) = \max_{1\leq i\leq s}|M_i\cdot| \leq \rho(\Sigma)|\cdot| = |\cdot|$;

2. se $\mathsf{L}(|\cdot|) \leq |\cdot|$, então $\max_{1\leq i\leq s}|M_i\cdot| = \mathsf{L}\left(|\cdot|\right) \leq |\cdot| = \rho(\Sigma)|\cdot|$ e, pela desigualdade dos quatro termos, segue que $\max_{1\leq i\leq s}\|M_i\| \leq \rho(\Sigma) \leq \rho_1(\Sigma) = \sup\left\{\|M\| \,:\, M\in\Sigma\right\}$. ■

Lema 3.4. *O conjunto das normas de politopo do tipo* (3.4) *é invariante por L.*

Demonstração. Uma norma $|\cdot|_{\mathcal{P}} = \max_{1\leq j\leq n}|\langle\vec{w}_j,\cdot\rangle|$ satisfaz, para todo $\vec{v}\in\mathbb{C}^d$,

$$\mathsf{L}\Big(|\cdot|_{\mathcal{P}}\Big)(\vec{v}) = \max_{1\leq i\leq s}\max_{1\leq j\leq n}\left|\langle\vec{w}_j, M_i\vec{v}\rangle\right| = \max_{\substack{1\leq i\leq s\\ 1\leq j\leq n}}\left|\langle M_i^*\vec{w}_j,\vec{v}\rangle\right|,$$

donde concluímos que $\mathsf{L}\Big(|\cdot|_{\mathcal{P}}\Big)$ também pode ser representado como máximo de finitos termos $|\langle M_i^*\vec{w}_j,\cdot\rangle|$. ■

Com base nestas informações, analisamos a família do máximo das repetidas iteradas do operador em questão, isto é,

$$
\begin{aligned}
|\cdot|_0 &:= |\cdot| \\
|\cdot|_1 &:= \max\Big\{|\cdot|, \mathsf{L}(|\cdot|)\Big\} \\
|\cdot|_2 &:= \max\Big\{|\cdot|, \mathsf{L}(|\cdot|), \mathsf{L}^2(|\cdot|)\Big\} \\
&\vdots \\
|\cdot|_N &:= \max\Big\{|\cdot|, \mathsf{L}(|\cdot|), \dots, \mathsf{L}^N(|\cdot|)\Big\}
\end{aligned}
$$

para inteiro $N \geq 1$, com o objetivo de estabelecer critérios para que uma das normas desta família seja extremal de politopo. Primeiramente, note que esta sequência de normas em $\mathbb{C}^d$ é crescente

$$|\cdot|_0 \leq |\cdot|_1 \leq \dots \leq |\cdot|_N \leq \dots$$

o que significa, sob um ponto de vista geométrico, que

$$B_1\Big(|\cdot|_0\Big) \supset B_1\Big(|\cdot|_1\Big) \supset \dots \supset B_1\Big(|\cdot|_N\Big) \supset \dots,$$

onde $B_1\Big(|\cdot|\Big)$ denota a bola unitária associada a uma norma $|\cdot|$. Ademais, se $|\cdot|_0$ é uma norma de politopo do tipo (3.4), decorre do lema 3.4, que todas as normas $|\cdot|_N$ geradas neste processo iterativo também são de politopo do tipo (3.4). Deste modo, precisamos somente concentrar em como asseguram a propriedade extremal.

Proposição 3.5. *A sequência de normas* $\Big\{|\cdot|_N\Big\}_{N\geq 1}$ *converge pontualmente para uma norma* $|\cdot|_{\lim} := \sup_{N\geq 0} |\cdot|_N$*, a qual induz norma extremal.*

Demonstração. Verificamos inicialmente que a sequência de normas $\Big\{|\cdot|_N\Big\}_{N\geq 1}$ converge pontualmente para uma norma $|\cdot|_{\lim}$. De fato, tal sequência é monótona crescente $|\cdot|_0 \leq |\cdot|_1 \leq \dots \leq |\cdot|_N \leq \dots$ e limitada pela constante não defectiva $R_{(\Sigma,\, \|\cdot\|_0)}$, uma vez que, para qualquer $\vec{v} \in \mathbb{C}^d$, vale

$$|\vec{v}|_N = \max_{0\leq k\leq N} |M_{i_k} \dots M_{i_1}\vec{v}|_0 \leq \Big(R_{(\Sigma,\, \|\cdot\|_0)} + 1\Big)|\vec{v}|_0,$$

onde $k = 0$ fornece convencionalmente a contribuição de $|\cdot|_0$. Desta forma, determina-se que $\lim_{N\to\infty} |\vec{v}|_N = \sup_{N\geq 0} |\vec{v}|_N$ para cada $\vec{v} \in \mathbb{C}^d$. Como $\sup_{N\geq 0} |\cdot|_N$ herda as propriedades das normas $|\cdot|_N$, definimos a norma limite $|\cdot|_{\lim} := \lim_{N\to\infty} |\cdot|_N = \sup_{N\geq 0} |\cdot|_N$ em $\mathbb{C}^d$.

Além disso, obtemos do lema 3.2 a norma

$$\mathsf{L}(|\cdot|_{\lim}) = \mathsf{L}\Big(\sup_{N\geq 0} |\cdot|_N\Big) = \sup_{N\geq 0} \mathsf{L}(|\cdot|_N).$$

Seguem destas considerações que

$$\begin{aligned}
\mathsf{L}(|\cdot|_{\lim}) &= \sup_{N\geq 0} \mathsf{L}(|\cdot|_N) = \sup_{N\geq 0} \max\Big\{\mathsf{L}(|\cdot|), \mathsf{L}^2(|\cdot|), \ldots, \mathsf{L}^{N+1}(|\cdot|)\Big\} \\
&\leq \sup_{N\geq 0} \max\Big\{|\cdot|, \mathsf{L}(|\cdot|), \mathsf{L}^2(|\cdot|), \ldots, \mathsf{L}^{N+1}(|\cdot|)\Big\} \\
&= \sup_{N\geq 0} |\cdot|_{N+1} = \lim_{N\to\infty} |\cdot|_{N+1} = |\cdot|_{\lim},
\end{aligned}$$

donde o resultado desejado decorre do item (ii) do lema 3.3. ∎

Para o caso particular em que as normas da sequência $\Big\{|\cdot|_N\Big\}_{N\geq 1}$ são de politopo do tipo (3.4), note que a norma $|\cdot|_{\lim}$ do resultado anterior não precisa ser necessariamente de politopo. Por este motivo, encerramos esta seção, buscando compreender sobre quais condições o processo iterativo desenvolvido previamente fornece norma extremal após um número finito de etapas e, consequentemente, norma extremal de politopo, quando $|\cdot|_0$ é uma norma de politopo do tipo (3.4).

Proposição 3.6. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *A norma* $|\cdot|_N$ *define uma norma extremal* $\|\cdot\|_N$ *em* $\mathbb{C}^{d\times d}$;

(ii) $\mathsf{L}^k(|\cdot|) \leq |\cdot|_N$ *para todo* $k \geq 0$;

(iii) $\mathsf{L}^k(|\cdot|) \leq |\cdot|_N$ *para todo* $k \geq N$;

(iv) $|\cdot|_N = |\cdot|_{N+k}$ *para todo* $k \geq 0$;

(v) $B_1\Big(|\cdot|_N\Big) = B_1\Big(|\cdot|_{N+k}\Big)$ *para todo* $k \geq 0$.

Observe que as condições acima fornecem uma sequência de normas $\Big\{|\cdot|_N\Big\}_{N\geq 1}$ eventualmente constante e cuja $|\cdot|_{\lim} = |\cdot|_N$.

Demonstração. As equivalências $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ e $(iv) \Leftrightarrow (v)$ são trivialmente verificadas. Para obter $(iii) \Leftrightarrow (iv)$, atente que:

1. o item (iii) implica $|\cdot|_N \leq |\cdot|_{N+k} = \max\Big\{|\cdot|, \mathsf{L}(|\cdot|), \ldots, \mathsf{L}^N(|\cdot|), \ldots, \mathsf{L}^{N+k}(|\cdot|)\Big\} \leq |\cdot|_N$;

2. o item (iv) implica $\mathsf{L}^k(|\cdot|) \leq \max\Big\{|\cdot|, \mathsf{L}(|\cdot|), \ldots, \mathsf{L}^{N+k}(|\cdot|)\Big\} = |\cdot|_{N+k} = |\cdot|_N$.

Por fim, provamos a equivalência $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Inicialmente, perceba que o lema 3.2 fornece

$$L^k(|\cdot|_N) = L^k\Big(\max\Big\{|\cdot|, \ldots, L^N(|\cdot|)\Big\}\Big) = \max\Big\{L^k(|\cdot|), \ldots, L^{N+k}(|\cdot|)\Big\}.$$

Se $\|\cdot\|_N$ é uma norma extremal, pelo lema 3.3, resulta $L(|\cdot|_N) \leq |\cdot|_N$ e, por monotonicidade do operador, $L^k(|\cdot|_N) \leq |\cdot|_N$ para todo $k \geq 1$. Decorre disto

$$L^k(|\cdot|) \leq \max\Big\{L^k(|\cdot|), L^{k+1}(|\cdot|), \ldots, L^{k+N}(|\cdot|)\Big\} = L^k(|\cdot|_N) \leq |\cdot|_N$$

para todo $k \geq 1$. Reciprocamente, sempre que $L^k(|\cdot|) \leq |\cdot|_N$ temos

$$L(|\cdot|_N) = \max\Big\{L(|\cdot|), L^2(|\cdot|), \ldots, L^{N+1}(|\cdot|)\Big\} \leq |\cdot|_N,$$

donde, pelo lema 3.3, concluímos que a norma $\|\cdot\|_N$ é extremal. ■

Com respeito à existência de normas extremais, dentre as diversas técnicas presentes na literatura, destacamos, por exemplo, a caracterização de normas de Barabanov por meio de semigrupo limite de matrizes em [Wir02, Wir05] ou as normas de Barabanov obtidas como pontos de acumulação em [Koz10 a, Koz10 b, Koz11]. Ademais, condições suficientes e necessárias para que uma norma seja extremal de politopo foram investigadas em [GZ15, Teoremas 4.1 e 4.2] e o algoritmo proposto em [GP13] assegura a existência de norma extremal de politopo sob uma hipótese de dominação para um produto matricial específico (o qual cumpre a propriedade da finitude).

3.2 Conjuntos maximizantes

Tendo em vista que já sabemos traduzir a condição não defectiva e já compreendemos o processo de renormalização via norma extremal, estamos aptos a investigar os conjuntos maximizantes associados às sequências que descrevem o raio espectral conjunto. Para simplificar os argumentos, dado um conjunto de matrizes não defectivo Σ e uma norma extremal $\|\cdot\|_e$ em $\mathbb{C}^{d\times d}$ induzida de uma norma $|\cdot|_e$ em $\mathbb{C}^d$, considere o potencial aditivo $\varphi := \varphi_{|\cdot|_e} : \Sigma^{\mathbb{N}} \times \mathbb{CP}^{d-1} \to \mathbb{R}$ e a sequência subaditiva $\mathcal{J}_\Sigma := \mathcal{J}_{(\Sigma, \|\cdot\|_e)} = \Big\{f_k : \Sigma^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}\Big\}_{k\geq 1}$, os quais são renormalizados devido às equações (3.3) e (3.2). Recorde a relação fundamental entre estes potenciais dada por

$$f_k(M_0, M_1, M_2, \ldots) = \sup_{[\vec{v}]\in\mathbb{CP}^{d-1}} S_k\varphi\Big((M_0, M_1, M_2, \ldots), [\vec{v}]\Big)$$

para todo $(M_0, M_1, M_2, \ldots) \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ e para todo $k \geq 1$, que remete o máximo de sequência aditiva/subaditiva estudado no exemplo 1.5 e no final da seção 2.3. Em analogia a este caso, apresentamos decomposições específicas para o local de maximização e para o conjunto de Aubry. Como os potenciais em questão estão definidos sobre espaços distintos, faz-se necessário considerar o mapa de projeção $\pi_{\Sigma^{\mathbb{N}}} : \Sigma^{\mathbb{N}} \times \mathbb{CP}^{d-1} \to \Sigma^{\mathbb{N}}$. Ao final desta seção, utilizaremos tais conjunto para traduzir a propriedade da finitude segundo a abordagem dinamicista/ergódica.

Local de maximização

A partir do potencial $\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} \times \mathbb{CP}^{d-1} \to \mathbb{R}$, obtemos que o local de maximização

$$\bigcap_{k\geq 1} (S_k\varphi)^{-1}\Big(k \log \rho(\Sigma)\Big)$$

é um conjunto maximizante (em $\Sigma^{\mathbb{N}} \times \mathbb{CP}^{d-1}$) para o raio espectral conjunto. Isto é uma consequência da proposição 1.12, a qual também garante que o local de maximização da sequência subaditiva $\mathcal{J}_\Sigma = \Big\{f_k : \Sigma^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}\Big\}_{k\geq 1}$, dado por

$$\bigcap_{k\geq 1} f_k^{-1}\Big(k \log \rho(\Sigma)\Big),$$

é um conjunto maximizante (em $\Sigma^{\mathbb{N}}$) associado ao raio espectral conjunto. Estabelecemos a seguinte relação entre estes locais de maximização.

Lema 3.7. *Todo conjunto de matrizes Σ não defectivo verifica*

$$\pi_{\Sigma^{\mathbb{N}}}\left(\bigcap_{k\geq 1} (S_k\varphi)^{-1}\Big(k \log \rho(\Sigma)\Big)\right) = \bigcap_{k\geq 1} f_k^{-1}\Big(k \log \rho(\Sigma)\Big).$$

Demonstração. Reescrevendo o primeiro termo, reduzimos o enunciado à identidade

$$\bigcup_{[\vec{v}]\in\mathbb{CP}^{d-1}} \bigcap_{k\geq 1} S_k\varphi\Big(\,\cdot\,, [\vec{v}]\Big)^{-1}\Big(k \log \rho(\Sigma)\Big) = \bigcap_{k\geq 1} f_k^{-1}\Big(k \log \rho(\Sigma)\Big).$$

Note que uma das inclusões que determinam esta igualdade é imediata de (2.13). Por outro lado, para cada $(M_0, M_1, \ldots) \in \bigcap_{k\geq 1} f_k^{-1}\Big(k \log \rho(\Sigma)\Big)$, existe família $\Big\{[\vec{v}_k]\Big\}_{k\geq 1} \subset \mathbb{CP}^{d-1}$ para a qual $S_k\varphi\Big((M_0, M_1, \ldots), [\vec{v}_k]\Big) = f_k(M_0, M_1, \ldots) = k \log \rho(\Sigma)$ para todo $k \geq 1$. Na realidade, sabemos que $S_r\varphi\Big((M_0, M_1, \ldots), [\vec{v}_k]\Big) = r \log \rho(\Sigma)$ para qualquer $k \geq r \geq 1$, tendo em vista que a sequência $\mathcal{J}_\Sigma$ é renormalizada. Por causa da compacidade de $\mathbb{CP}^{d-1}$, a família de vetores projetivos $\Big\{[\vec{v}_k]\Big\}_{k\geq 1}$ possui ao menos um ponto de acumulação $[\vec{v}]$, o qual obedece $S_r\varphi\Big((M_0, M_1, \ldots), [\vec{v}]\Big) = \lim_{\ell\to\infty} S_r\varphi\Big((M_0, M_1, \ldots), [\vec{v}_{k_\ell}]\Big) = r\log\rho(\Sigma)$ para todo $r \geq 1$. Concluímos disto que $(M_0, M_1, \ldots) \in \bigcap_{k\geq 1} S_k\varphi\Big(\,\cdot\,, [\vec{v}]\Big)^{-1}\Big(k\log\rho(\Sigma)\Big)$, donde vale a identidade. ■

Conjuntos de Aubry

Primeiramente, recapitulamos as formulações para os pontos de Aubry, dados na definição 1.2 e no exemplo 2.21, para os casos específicos do potencial $\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} \times \mathbb{CP}^{d-1} \to \mathbb{R}$ e da sequência subaditiva $\mathcal{J}_\Sigma = \Big\{f_k : \Sigma^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}\Big\}_{k\geq 1}$:

1. $\Big((M_0, M_1, M_2, \ldots), [\vec{v}]\Big) \in \Omega(\varphi) \subset \Sigma^{\mathbb{N}} \times \mathbb{CP}^{d-1}$ se, para todo $\varepsilon > 0$ e para qualquer inteiro $L \geq 1$, existem $(M_0', M_1', \ldots) \in B_\varepsilon(M_0, M_1, M_2, \ldots)$, vetor projetivo $[\vec{v}_{\varepsilon,L}] \in B_\varepsilon([\vec{v}])$ e inteiro $r \geq L$ tais que

$$\begin{array}{c} \sigma^r(M_0', M_1', \ldots) \in B_\varepsilon(M_0, M_1, M_2, \ldots), \\ [M_{r-1}' \ldots M_1' M_0' \vec{v}_{\varepsilon,L}] \in B_\varepsilon([\vec{v}]) \end{array} \quad \text{e} \quad \Big|S_r\varphi\Big((M_0', M_1', \ldots), [\vec{v}_{\varepsilon,L}]\Big) - r\log\rho(\Sigma)\Big|_e < \varepsilon;$$

2. $(M_0, M_1, M_2, \ldots) \in \Omega[\mathcal{J}_\Sigma] \subset \Sigma^{\mathbb{N}}$ se, para todo $\varepsilon > 0$ e para qualquer inteiro $L \geq 1$, existem $(M_0', M_1', \ldots) \in B_\varepsilon(M_0, M_1, M_2, \ldots)$ e inteiro $r \geq L$ tais que

$$\sigma^r(M_0', M_1', \ldots) \in B_\varepsilon(M_0, M_1, M_2, \ldots) \quad \text{e} \quad \Big|f_r(M_0', M_1', \ldots) - r\log\rho(\Sigma)\Big|_e < \varepsilon.$$

Decorrem do corolário 2.23 e do teorema 2.22 que os conjuntos de Aubry descritos acima, $\Omega(\varphi)$ e $\Omega[\mathcal{J}_\Sigma]$, são maximizante em seus respectivos contextos. Com o intuito de relacionar tais coletâneas, propomos uma versão vetorial para o conjunto de Aubry.

Definição 3.8. O conjunto de Aubry vetorial $\Omega\left(\mathcal{J}_\Sigma, [\vec{v}]\right)$ associado à sequência $\mathcal{J}_\Sigma$ e ao vetor projetivo $[\vec{v}] \in \mathbb{CP}^{d-1}$ é formado pelos pontos $(M_0, M_1, M_2, \ldots) \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ que verificam, dados $\varepsilon > 0$ e inteiro $L \geq 1$, a existência de $(M_0', M_1', \ldots) \in B_\varepsilon(M_0, M_1, M_2, \ldots)$ e inteiro $r \geq L$ tais que

$$\sigma^r(M_0', M_1', \ldots) \in B_\varepsilon(M_0, M_1, M_2, \ldots) \quad \text{e} \quad \Big|S_r\varphi\Big((M_0', M_1', \ldots), [\vec{v}]\Big) - r\log\rho(\Sigma)\Big|_e < \varepsilon.$$

Com base nas considerações anteriores, provamos o seguinte resultado sobre os conjuntos de Aubry associados ao raio espectral conjunto.

Lema 3.9. *Todo conjunto de matrizes Σ não defectivo satisfaz*

$$\Omega[\mathcal{J}_\Sigma] = \bigcap_{k\geq 1} f_k^{-1}\Big(k\log\rho(\Sigma)\Big) \qquad e \qquad \pi_{\Sigma^{\mathbb{N}}}\Big(\Omega(\varphi)\Big) \subset \bigcup_{[\vec{v}]\in\mathbb{CP}^{d-1}} \Omega\left(\mathcal{J}_\Sigma, [\vec{v}]\right) = \Omega[\mathcal{J}_\Sigma].$$

A primeira identidade no resultado acima assegura a T-invariância de $\Omega[\mathcal{J}_\Sigma]$. Por outro lado, também estabelece que os pontos do local de maximização possuem propriedades não errantes implícitas. Já a igualdade entre o conjunto de Aubry e a união dos conjuntos de Aubry vetoriais descreve uma decomposição semelhante à (2.12). Ademais, conjecturamos que $\pi_{\Sigma^{\mathbb{N}}}\Big(\Omega(\varphi)\Big)$ coincide com $\Omega[\mathcal{J}_\Sigma]$.

Demonstração. Perceba que a sequência subaditiva $\mathcal{J}_\Sigma$ verifica as hipóteses do lema 2.38, donde segue que $\Omega[\mathcal{J}_\Sigma] = \bigcap_{k\geq 1} f_k^{-1}\Big(k\log\rho(\Sigma)\Big)$. Como a sequência aditiva $\{S_k\varphi\}_{k\geq 1}$ obedece a condição (3.3), decorre do item (i) do lema 2.38 e do lema 3.7 que

$$\pi_{\Sigma^{\mathbb{N}}}\Big(\Omega(\varphi)\Big) \subset \pi_{\Sigma^{\mathbb{N}}}\left(\bigcap_{k\geq 1} (S_k\varphi)^{-1}\Big(k\log\rho(\Sigma)\Big)\right) = \bigcap_{k\geq 1} f_k^{-1}\Big(k\log\rho(\Sigma)\Big).$$

Para concluir o resultado, é suficiente mostrar que

$$\bigcup_{[\vec{v}]\in\mathbb{CP}^{d-1}} \Omega\left(\mathcal{J}_\Sigma, [\vec{v}]\right) = \bigcup_{[\vec{v}]\in\mathbb{CP}^{d-1}} \bigcap_{k\geq 1} S_k\varphi\Big(\,\cdot\,, [\vec{v}]\Big)^{-1}\Big(k\log\rho(\Sigma)\Big) = \bigcap_{k\geq 1} f_k^{-1}\Big(k\log\rho(\Sigma)\Big)$$

De fato, a última igualdade foi obtida no lema 3.7, enquanto que a primeira é imediata da identidade $\bigcap_{k\geq 1} S_k\varphi\Big(\,\cdot\,, [\vec{v}]\Big)^{-1}\Big(k\log\rho(\Sigma)\Big) = \Omega\left(\mathcal{J}_\Sigma, [\vec{v}]\right)$, cuja prova é uma simples adaptação do argumento realizado na demonstração do lema 2.38. ■

3.2.1 Propriedade da finitude

Um conjunto de matrizes $\Sigma = \{M_1, \ldots, M_s\}$ obedece a propriedade da finitude se existe um produto matricial $M_{i_{n-1}} \ldots M_{i_1} M_{i_0}$ (com $M_{i_k} \in \Sigma$) tal que

$$\rho(\Sigma) = r(M_{i_{n-1}} \ldots M_{i_1} M_{i_0})^{1/n}.$$

Originalmente introduzida como uma suposição teórica que viabiliza algoritmos para o cálculo do raio espectral conjunto, tal propriedade pode ser constatada, por exemplo, quando existe norma extremal de politopo, quando o conjunto Σ é formado por matrizes que comutam ou ainda quando as matrizes de Σ (exceto talvez por uma) tem posto 1. Para mais detalhes, consulte as referências [LW95, GWZ05, Jun09, Mor11, DHLX12, Dai13].

Por outro lado, a propriedade da finitude adquiriu relevância devido aos contra-exemplos obtidos de maneira não construtiva para a seguinte questão.

Conjectura da finitude de Lagarias-Wang (1995). *Todo conjunto* $\Sigma = \{M_1, \ldots, M_s\}$ *(finito) de matrizes* $d \times d$ *com entradas reais satisfaz a propriedade da finitude.*

O primeiro contra-exemplo foi proposto por T. Bousch e J. Mairesse [BM02] com base na família a um parâmetro $\gamma \in \mathbb{R}$ dada por

$$\Sigma_\gamma = \left\{ \begin{pmatrix} e^{\kappa h_0} + 1 & 0 \\ e^{\kappa} & 1 \end{pmatrix},\ e^{\kappa\gamma} \begin{pmatrix} 1 & e^{\kappa} \\ 0 & e^{\kappa h_1} + 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \text{onde} \qquad \begin{matrix} \kappa > 0,\ h_1, h_2 > 0 \\ \text{e} \ \ h_1 + h_2 < 2, \end{matrix}$$

para a qual demonstra-se a existência de ao menos um parâmetro γ que não satisfaz a propriedade da finitude. Elaborando outro argumento, V. Kozyakin [Koz05, Koz07] garantiu que a família, com parâmetros $\alpha_1, \alpha_2 > 0$,

$$\Sigma_{(\alpha_1,\alpha_2)} = \left\{ \alpha_1 \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{tal que} \qquad \begin{matrix} bc \geq 1 > a, d > 0 \ \ \text{e} \\ bc > (1-a)(1-d), \end{matrix}$$

também possui pelo menos um contra-exemplo. Ademais, a existência de uma infinidade de contra-exemplos pertencentes a uma família a um parâmetro $\alpha > 0$ descrita por

$$\Sigma_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

foi assegurada por V. Blondel, J. Theys e A. Vladimirov [BTV03]. Um estudo detalhado desta última família foi desenvolvido em [HMST11, MS13] que forneceu uma estimativa para o parâmetro base $\alpha \simeq 0.749326546330367557943961948091344672091327370236064317 3\ldots$ com o objetivo de determinar um contra-exemplo explícito para conjectura. Recentemente, Jenkinson e Pollicott [JP17] apresentaram subconjunto de pares de matrizes reais 2×2 que não cumprem a propriedade da finitude e cuja dimensão de Hausdorff é no mínimo 7.

Perceba que nenhuma das considerações anteriores invalidam a conjectura da finitude restrita às matrizes com entradas racionais ou às matrizes com entradas racionais não negativas. Em particular, foi demonstrado em [JB08, Jun09] que estes casos são respectivamente equivalentes às afirmações abaixo.

Conjecturas da finitude de Blondel-Jungers-Protasov (2008).

(*i*) *Todo par* $\Sigma = \{M_1, M_2\}$ *de matrizes* $d \times d$ *com sinal – com entradas em* $\{-1, 0, 1\}$ *– satisfaz a propriedade da finitude.*

(*ii*) *Todo par* $\Sigma = \{M_1, M_2\}$ *de matrizes* $d \times d$ *binárias – com entradas em* $\{0,1\}$ *– satisfaz a propriedade da finitude;*

Os primeiros argumentos que validam tais conjecturas se limitam ao caso de matrizes 2×2 e empregam construções explícitas de normas extremais de politopo (veja [JB08, CGSZ10]). O caso geral ainda permanece em aberto.

Os conjuntos maximizantes associados ao raio espectral conjunto viabilizam um simples descrição da propriedade da finitude para abordagem dinamicista/ergódica. Para isto obter, encerramos este capítulo, reformulando caracterização da propriedade da finitude originalmente apresentada por X. Dai, Y. Huang e M. Xiao em [DHX13].

Proposição 3.10. *Um conjunto de matrizes* $\Sigma = \{M_1, \ldots, M_s\}$ *satisfaz a propriedade da finitude se, e somente se, existe ao menos um ponto periódico pertencente ao local de maximização/conjunto de Aubry associado a alguma coletânea (irredutível) de matrizes* $\Sigma_\ell = \left\{M_1^{(\ell,\ell)}, \ldots, M_s^{(\ell,\ell)}\right\}$ *que obedece* $\rho(\Sigma_\ell) = \rho(\Sigma)$.

Demonstração. Determina-se em [DHX11 a, Lema 3.5] que as sequências de potenciais $\mathcal{J}_{(\Sigma,\,\|\cdot\|)} := \left\{f_k : \Sigma^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}\right\}_{k\geq 1}$ e $\mathcal{J}_{(\Sigma_\ell,\,\|\cdot\|)} := \left\{f_k^\ell : \Sigma_\ell^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}\right\}_{k\geq 1}$, para $1 \leq \ell \leq r$, verificam

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int_{\Sigma^{\mathbb{N}}} f_k \, d\nu = \max\left\{\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int_{\Sigma_\ell^{\mathbb{N}}} f_k^\ell \, d\nu \ : \ 1 \leq \ell \leq r\right\},$$

para toda probabilidade ergódica ν (que denota medida σ-invariante tanto em $\Sigma^{\mathbb{N}}$ quanto em $\Sigma_\ell^{\mathbb{N}}$ para todo $1 \leq \ell \leq r$, devido a uma identificação entre os respectivos alfabetos). Em particular, a igualdade acima independe das normas consideradas em cada sequência. Além disso, podemos supor que Σ_ℓ é irredutível, já que desconsideramos o caso $\rho(\Sigma) = 0$. Seguem destes fatos que uma probabilidade ergódica $\nu \in \mathcal{M}_{\max}\left[\mathcal{J}_{(\Sigma,\,\|\cdot\|)}\right]$ se, e somente se, $\nu \in \mathcal{M}_{\max}\left[\mathcal{J}_{\Sigma_\ell}\right]$ para algum Σ_ℓ que satisfaz $\rho(\Sigma_\ell) = \max\left\{\rho(\Sigma_1), \cdots, \rho(\Sigma_r)\right\} = \rho(\Sigma)$.

O principal resultado de [DHX13] estabelece que um conjunto finito de matrizes Σ verifica a propriedade da finitude se, e somente se, existe ponto periódico $(M_{i_0}, M_{i_1}, \ldots, M_{i_{n-1}}, M_{i_0}, M_{i_1}, \ldots) \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ contido no suporte de alguma medida de probabilidade ergódica ν, a qual é maximizante para a sequência $\mathcal{J}_{(\Sigma,\,\|\cdot\|)}$. Este resultado, em conjunto com a discussão anterior, assegura que a propriedade da finitude também é equivalente à existência de ponto periódico $\left(M_{i_0}^{(\ell,\ell)}, M_{i_1}^{(\ell,\ell)}, \ldots, M_{i_{n-1}}^{(\ell,\ell)}, M_{i_0}^{(\ell,\ell)}, M_{i_1}^{(\ell,\ell)}, \ldots\right) \in \Sigma_\ell^{\mathbb{N}}$ contido no suporte de uma probabilidade ergódica $\nu \in \mathcal{M}_{\max}\left[\mathcal{J}_{\Sigma_\ell}\right]$ associada a alguma coletânea irredutível de matrizes Σ_ℓ tal que $\rho(\Sigma_\ell) = \rho(\Sigma)$.

Se tal propriedade de existência de ponto periódico é válida, como Σ_ℓ é não defectivo, sabemos que o local de maximização/conjunto de Aubry $\Omega[\mathcal{J}_{\Sigma_\ell}]$ é um conjunto maximizante, donde $\left(M_{i_0}^{(\ell,\ell)}, M_{i_1}^{(\ell,\ell)}, \ldots, M_{i_{n-1}}^{(\ell,\ell)}, M_{i_0}^{(\ell,\ell)}, M_{i_1}^{(\ell,\ell)}, \ldots\right) \in \operatorname{supp}\nu \subset \Omega[\mathcal{J}_{\Sigma_\ell}]$. Reciprocamente, a órbita $\left\{\sigma^j\left(M_{i_0}^{(\ell,\ell)}, M_{i_1}^{(\ell,\ell)}, \ldots, M_{i_{n-1}}^{(\ell,\ell)}, M_{i_0}^{(\ell,\ell)}, M_{i_1}^{(\ell,\ell)}, \ldots\right) : 0 \leq j \leq n-1\right\}$ está contida em $\Omega[\mathcal{J}_{\Sigma_\ell}]$, devido à σ-invariância resultante do lema 2.38. Concluímos disto que a probabilidade σ-invariante e ergódica

$$\nu = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{\sigma^j\left(M_{i_0}^{(\ell,\ell)}, M_{i_1}^{(\ell,\ell)}, \ldots, M_{i_{n-1}}^{(\ell,\ell)}, M_{i_0}^{(\ell,\ell)}, M_{i_1}^{(\ell,\ell)}, \ldots\right)}$$

é medida maximizante para $\mathcal{J}_{\Sigma_\ell}$ por possuir suporte coincidindo com a órbita do ponto periódico $\left(M_{i_0}^{(\ell,\ell)}, M_{i_1}^{(\ell,\ell)}, \ldots, M_{i_{n-1}}^{(\ell,\ell)}, M_{i_0}^{(\ell,\ell)}, M_{i_1}^{(\ell,\ell)}, \ldots\right)$. ■

Decorre deste resultado que o local de maximização/conjunto de Aubry dos pares de matrizes irredutíveis que determinam os contra-exemplos para conjectura de finitude (listados no início desta subseção) não possuem órbitas periódicas e, portanto, não são *subshifts* de tipo finito. Este fato sugere que novas ideias e argumentos devem ser desenvolvidos com o intuito de encontrar tais órbitas nos conjuntos maximizantes do raio espectral conjunto.

Referências bibliográficas

[Atk76] G. Atkinson, Recurrence of co-cycles and random walks, *Journal of the London Mathematical Society* (1976), 486-488.
(Citações nas páginas 20, 50 e 53.)

[AB02] A. Avila e J. Bochi, A formula with some applications to the theory of Lyapunov exponents, *Israel Journal of Mathematics* (2002), 125-137.
(Citação na página 75.)

[ABY08] A. Avila, J. Bochi e J.-C. Yoccoz, Uniformly hyperbolic finite-valued $SL(2,\mathbb{R})$-cocycles, *Commentarii Mathematici Helvetici* (2010), 813-884.
(Citação na página 74.)

[BK16] L. Backes e A. Kocsard, Cohomology of dominated diffeomorphism-valued cocycles over hyperbolic systems, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* (2016), 125-137.
(Citação na página 74.)

[Bar88] N. Barabanov, Lyapunov indicator of discrete inclusions I, II e III, *Automation and Remote Control (Avtomatika i Telemekhanika)* (1988), 152-157, 283-287 e 558-565.
(Citações nas páginas 77 e 78.)

[BLL13] A. Baraviera, R. Leplaideur e A. Lopes, *Ergodic optimization, zero temperature limits and the max-plus algebra*, Publicações matemáticas – 29º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 2013.
(Citação na página 18.)

[Bar11] L. Barreira, *Thermodynamic formalism and applications to dimension theory*, Progress in Mathematics, Birkhäuser, Basel, 2011.
(Citações nas páginas 26 e 69.)

[BW92] M. Berger e Y. Wang, Bounded semigroups of matrices, *Linear Algebra and its Applications* (1992), 21-27.
(Citação na página 73.)

[BGT16] R. Bissacot, E. Garibaldi e Ph. Thieullen, Zero-temperature phase diagram for double-well type potentials in the summable variation class, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* (2016), 1-23.
(Citação na página 71.)

[Boc03] J. Bochi, Inequalities for numerical invariants of sets of matrices, *Linear algebra and its applications* (2003), 71-81.
(Citação na página 73.)

[BG09] J. Bochi e N. Gourmelon, Some characterizations of domination, *Mathematische Zeitschrift* (2009), 221-231.
(Citação na página 74.)

[BR16] J. Bochi e M. Rams, The entropy of Lyapunov-optimizing measures of some matrix cocycles, *Journal of Modern Dynamics* (2016), 255-286.
(Citação na página 74.)

[BDV05] C. Bonatti, L. Díaz e M. Viana, *Dynamics beyond uniform hyperbolicity: A global geometric and probabilistic perspective*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer, Berlin, 2005.
(Citação na página 74.)

[Bou66] N. Bourbaki, *General Topology - Part 1*, Elements of mathematics, Hermann & Addison-Wesley, Paris, 1966.
(Citação na página 42.)

[BJ02] T. Bousch e O. Jenkinson, Cohomology classes of dynamically non-negative C^k functions, *Inventiones mathematicae* (2002), 207-217.
(Citação na página 30.)

[BM02] T. Bousch e J. Mairesse, Asymptotic height optimization for topical IFS, Tetris heaps, and the finiteness conjecture, *Journal of the American Mathematical Society* (2002), 77-111.
(Citação na página 87.)

[BTV03] V. Blondel, J. Theys e A. Vladimirov, An elementary counterexample to the finiteness conjecture, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* (2003), 963-970.
(Citação na página 87.)

[Bre03] J. Brémont, Gibbs measures at temperature zero, *Nonlinearity* (2003), 419-426.
(Citação na página 71.)

[CFH08] Y. Cao, D.-J. Feng e W. Huang, The thermodynamic formalism for sub-additive potentials, *Discrete and Continuous Dynamical Systems* (2008), 639-657.
(Citação na página 26.)

[CGU11] J. Chazottes, J.-M. Gambaudo, E. Ulgade, Zero-temperature limit of one dimensional Gibbs states via renormalization: The case of locally constant potentials, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* (2011), 1109-1161.
(Citação na página 71.)

[CH10] J. Chazottes e M. Hochman, On the zero-temperature limit of Gibbs states, *Communications in Mathematical Physics* (2010), 265-281.
(Citação na página 71.)

[CZ13] Y. Chen e Y. Zhao, Ergodic optimization for a sequence of continuous functions, *Chinese Journal of Contemporary Mathematics* (2013), 351-360.
(Citações nas páginas 12, 22, 26, 28, 29, 30 e 73.)

[Cho66] G. Choquet, *Topology*, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New York, 1966.
(Citação na página 42.)

[Cic15] A. Cicone, A note on the joint spectral radius, *Pré-publicação disponível em arXiv:1502.01506* (2015).
(Citações nas páginas 13 e 72.)

[CGSZ10] A. Cicone, N. Guglielmi, S. Serra-Capizzano e M. Zennaro, Finiteness property of pairs of 2×2 sign-matrices via real extremal polytope norms, *Linear Algebra and its Applications* (2010), 796-816.
(Citação na página 88.)

[Con16] G. Contreras, Ground states are generically a periodic orbit, *Inventiones mathematicae* (2016), 38-412.
(Citação na página 21.)

[CLT01] G. Contreras, A. Lopes e Ph. Thieullen, Lyapunov minimizing measures for expanding maps of the circle, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* (2001), 1379-1409.
(Citações nas páginas 12, 18, 19, 34, 55, 70 e 71.)

[CG93] J. Conze e Y. Guivarc'h, Croissance des sommes ergodiques et principe variationnel, *Manuscrito* (1993).
(Citação na página 18.)

[CR15] D. Coronel e J. Rivera-Letelier, Sensitive dependence of Gibbs measures at low temperatures, *Journal of Statistical Physics* (2015), 1658-1683.
(Citação na página 71.)

[Dai13] X. Dai, Some criteria for spectral finiteness of a finite subset of the real matrix space $\mathbb{R}^{d\times d}$, *Linear Algebra and its Applications* (2013), 2717-2727.
(Citação na página 86.)

[DHLX12] X. Dai, Y. Huang, J. Liu e M. Xiao, The finite-step realizability of the joint spectral radius of a pair of d×d matrices one of which being rank-one, *Linear Algebra and its Applications* (2012), 1548-1561.
(Citação na página 86.)

[DHX11 a] X. Dai, Y. Huang e M. Xiao, Periodically switched stability induces exponential stability of discrete-time linear switched systems in the sense of Markovian probabilities, *Automatica* (2011), 1512-1519.
(Citações nas páginas 73 e 88.)

[DHX11 b] X. Dai, Y. Huang e M. Xiao, Realization of joint spectral radius via ergodic theory, *Electronic Research Announcements in Mathematical Sciences* (2011), 22-30.
(Citação na página 73.)

[DHX13] X. Dai, Y. Huang e M. Xiao, Extremal ergodic measures and the finiteness property of matrix semigroups, *Proceedings of the American Mathematical Society* (2013), 393-401.
(Citações nas páginas 73 e 88.)

[DL92] I. Daubechies e J. Lagarias, Sets of matrices all infinite products of which converge, *Linear Algebra and its Applications* (1992), 227-263.
(Citações nas páginas 13, 72 e 73.)

[DL01] I. Daubechies e J. Lagarias, *Corrigendum/addendum to*: Sets of matrices all infinite products of which converge, *Linear Algebra and its Applications* (2001), 69-83.
(Citações nas páginas 13 e 72.)

[Els95] L. Elsner, The generalized spectral-radius theorem: an analytic-geometric proof, *Linear Algebra and its Applications* (1995), 151-159.
(Citações nas páginas 73 e 79.)

[FH10] D.-J. Feng e W. Huang, Lyapunov spectrum of asymptotically sub-additive potentials, *Communications in Mathematical Physics* (2010), 1-43.
(Citação na página 26.)

[Gar17] E. Garibaldi, *Ergodic optimization in the expanding case: concepts, tools and applications*, SpringerBriefs in Mathematics, Springer, Campinas, 2017.
(Citações nas páginas 12, 18, 20, 21, 65, 70 e 79.)

[GG13] E. Garibaldi e J. Gomes, *Otimização de médias sobre grafos orientados*, Publicações matemáticas – 29º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 2013.
(Citações nas páginas 18, 19 e 21.)

[GG16] E. Garibaldi e J. Gomes, Aubry set for asymptotically sub-additive potentials, *Stochastics and Dynamics* (2016), 1-13.
(Citações nas páginas 13, 33, 47 e 50.)

[GL08] E. Garibaldi e A. Lopes, On the Aubry-Mather theory for symbolic dynamics, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* (2008), 791-815.
(Citação na página 18.)

[GLT09] E. Garibaldi, A. Lopes e Ph. Thieullen, On calibrated and separating sub-actions, *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society* (2009), 577-602.
(Citação na página 18.)

[GT12] E. Garibaldi e Ph. Thieullen, Description of some ground states by Puiseux techniques, *Journal of Statistical Physics* (2012), 125-180.
(Citação na página 71.)

[Gel41] I. Gelfand, Normierte ringe, *Recueil mathématique de la société mathématique de Moscou (Matematicheskii Sbornik)* (1941), 3-24.
(Citação na página 72.)

[GP13] N. Guglielmi e V. Protasov, Exact computation of joint spectral characteristics of linear operators, *Foundations of Computational Mathematics* (2013), 37-97.
(Citações nas páginas 13, 79 e 83.)

[GWZ05] N. Guglielmi, F. Wirth e M. Zennaro, Complex polytope extremality results for families of matrices, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* (2005), 721-743.
(Citações nas páginas 13, 79 e 86.)

[GZ07] N. Guglielmi e M. Zennaro, Balanced complex polytopes and related vector and matrix norms, *Journal of Convex Analysis* (2007), 729-766.
(Citação na página 78.)

[GZ08] N. Guglielmi e M. Zennaro, An algorithm for finding extremal polytope norms of matrix families, *Linear Algebra and its Applications* (2008), 2265-2282.
(Citações nas páginas 13 e 79.)

[GZ09] N. Guglielmi e M. Zennaro, Finding extremal complex polytope norms for families of real matrices, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* (2009), 602-620.
(Citações nas páginas 13 e 79.)

[GZ15] N. Guglielmi e M. Zennaro, Canonical construction of polytope Barabanov norms and antinorms for sets of matrices, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* (2015), 634-655.
(Citações nas páginas 13, 77, 78, 79 e 83.)

[HMST11] K. Hare, I. Morris, N. Sidorov e J. Theys, An explicit counterexample to the Lagarias-Wang finiteness conjecture, *Advances in Mathematics* (2011), 4667-4701.
(Citação na página 87.)

[IY14] G. Iommi e Y. Yayama, Zero temperature limits of Gibbs states for almost-additive potentials, *Journal of Statistical Physics* (2014), 23-46.
(Citação na página 70.)

[IY17] G. Iommi e Y. Yayama, Weak Gibbs measures as Gibbs measures for asymptotically additive sequences, *Proceedings of the American Mathematical Society* (2017), 1599-1614.
(Citações nas páginas 26 e 27.)

[Jen06] O. Jenkinson, Ergodic optimization, *Discrete and Continuous Dynamical Systems* (2006), 197-224.
(Citações nas páginas 12, 18 e 30.)

[JMU06] O. Jenkinson, R. Mauldin e M. Urbanski, Ergodic optimization for countable alphabet subshifts of finite type, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* (2006), 1791-1803.
(Citação na página 18.)

[JP17] O. Jenkinson e M. Pollicott, Joint spectral radius, Sturmian measures and the finiteness conjecture, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* (2017), 1-39.
(Citação na página 87.)

[Jun09] R. Jungers, *The joint spectral radius: theory and applications*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, Berlin, 2009.
(Citações nas páginas 13, 72, 73, 77, 86 e 87.)

[JB08] R. Jungers e V. Blondel, On the finiteness property for rational matrices, *Linear Algebra and its Applications* (2008), 2283-2295.
(Citações nas páginas 87 e 88.)

[JP09] R. Jungers e V. Protasov, Counterexamples to the complex polytope extremality conjecture, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* (2009), 404-409.
(Citação na página 79.)

[Koz05] V. Kozyakin, A dynamical systems construction of a counterexample to the finiteness conjecture, *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control e European Control Conference (CDC-ECC'05)* (2005), 2338-2343.
(Citação na página 87.)

[Koz07] V. Kozyakin, Structure of extremal trajectories of discrete linear systems and the finiteness conjecture, *Automation and Remote Control* (2007), 174-209.
(Citação na página 87.)

[Koz10 a] V. Kozyakin, Iterative building of Barabanov norms and computation of the joint spectral radius for matrix sets, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B* (2010), 143-158.
(Citações nas páginas 79 e 83.)

[Koz10 b] V. Kozyakin, Max-Relaxation iteration procedure for building of Barabanov norms: convergence and examples, *Pré-publicação disponível em arXiv:1002.3251* (2010).
(Citações nas páginas 79 e 83.)

[Koz11] V. Kozyakin, A relaxation scheme for computation of the joint spectral radius of matrix sets, *Journal of Difference Equations and Applications* (2011), 185-201.
(Citações nas páginas 79 e 83.)

[Koz17] V. Kozyakin, An annotated bibliography on convergence of matrix products and the theory of joint/generalized spectral radius, *Manuscrito* (2017).
(Citações nas páginas 13 e 72.)

[LW95] J. Lagarias e Y. Wang, The finiteness conjecture for the generalized spectral radius of a set of matrices, *Linear Algebra and its Applications* (1995), 17-42.
(Citações nas páginas 13, 73, 79 e 86.)

[Lep05] R. Leplaideur, A dynamical proof for the convergence of Gibbs measures at temperature zero, *Nonlinearity* (2005), 2847-2880.
(Citação na página 71.)

[LM95] D. Lind e B. Marcus, *An introduction to symbolic dynamics and coding*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
(Citação na página 16.)

[Lyu12] Y. Lyubich, The cohomological equations in nonsmooth categories, *Pré-publicação disponível em arXiv:1211.0229* (2012).
(Citação na página 19.)

[LT03] A. Lopes e Ph. Thieullen, Sub-actions for Anosov diffeomorphisms, *Astérisques* (2003), 135-146.
(Citações nas páginas 18 e 55.)

[Mañ12] R. Mañé, *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*, Modern Surveys in Mathematics, Springer, Berlin, 1987.
(Citações nas páginas 17 e 53.)

[Mor06] I. Morris, Entropy for Zero-Temperature Limits of Gibbs-Equilibrium States for Countable-Alphabet Subshifts of Finite Type, *Journal of Statistical Physics* (2006), 315-324.
(Citação na página 70.)

[Mor07] I. Morris, A sufficient condition for the subordination principle in ergodic optimization, *Bulletin of London Mathematical Society* (2007), 214-220.
(Citações nas páginas 12, 19, 30, 31, 35 e 47.)

[Mor11] I. Morris, Rank one matrices do not contribute to the failure of the finiteness property, *Pré-publicação disponível em arXiv:1109.4648* (2011).
(Citação na página 86.)

[Mor12] I. Morris, The generalised Berger-Wang formula and the spectral radius of linear cocycles, *Journal of Functional Analysis* (2012), 811-824.
(Citação na página 75.)

[Mor13] I. Morris, Mather sets for sequences of matrices and applications to the study of joint spectral radii, *Proceedings of the London Mathematical Society* (2013), 121-150.
(Citações nas páginas 12, 22, 28, 29, 31, 63, 64 e 73.)

[MS13] I. Morris e N. Sidorov, On a devil's staircase associated to the joint spectral radii of a family of pairs of matrices, *Journal of the European Mathematical Society* (2013), 1747-1782.
(Citação na página 87.)

[Pet89] K. Petersen, *Ergodic Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
(Citação na página 53.)

[PW08] E. Plischke e F. Wirth, Duality results for the joint spectral radius and transient behavior, *Linear Algebra and its Applications* (2008), 2368-2384.
(Citações nas páginas 77 e 78.)

[PY98] M. Pollicott e M. Yuri, *Dynamical Systems and Ergodic Theory*, London mathematical society student texts, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
(Citações nas páginas 49 e 69.)

[Pro96] V. Protasov, The joint spectral radius and invariant sets of the several linear operators, *Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika* (1996), 205-231.
(Citação na página 78.)

[RS60] G. Rota e W. Strang, A note on the joint spectral radius, *Proceedings of the Netherlands Academy* (1960), 379-381.
(Citação na página 72.)

[Sch06] K. Schmidt, Recurrence of cocycles and stationary random walks, *IMS Lecture Notes - Monograph Series* (2006), 78-84.
(Citação na página 50.)

[Sch98] S. Schreiber, On growth rates of sub-additive functions for semi-flow, *Journal of Differential Equation* (1998), 334-350.
(Citações nas páginas 13, 28 e 73.)

[The05] J. Theys, *Joint spectral radius: theory and approximations*, Tese de Doutorado, Université Catholique de Louvain, 2005.
(Citações nas páginas 13 e 72.)

[Thi97] Ph. Thieullen, Ergodic reduction of random products of two-by-two matrices, *Journal d'Analyse Mathématique* (1997), 19-64.
(Citações nas páginas 18 e 51.)

[VZ15] P. Varandas e Y. Zhao, Weak specification properties and large deviations for non-additive potentials, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* (2015), 968-993.
(Citação na página 26.)

[Via14] M. Viana, *Lectures on Lyapunov exponents*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2014.
(Citação na página 74.)

[VO14] M. Viana e K. Oliveira, *Fundamentos da Teoria Ergódica*, Fronteiras da Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2014.
(Citações nas páginas 15, 17 e 23.)

[Wal82] P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 1982.
(Citações nas páginas 15, 17, 23, 51 e 63.)

[Wir02] F. Wirth, The generalized spectral radius and extremal norms, *Linear Algebra and its Applications* (2002) 17-40.
(Citação na página 83.)

[Wir05] F. Wirth, On the structure of the set of extremal norms of a linear inclusion, *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC'05)* (2005) 3019-3024.
(Citação na página 83.)

[ZZC11] Y. Zhao, L. Zhang e Y Cao, The asymptotically additive topological pressure on the irregular set for asymptotically additive potentials, *Nonlinear Analysis* (2011), 5015-5022.
(Citação na página 26.)

Índice remissivo