MA-141 GEOMETRIA ANALÍTICA,

TURMA G - 1º PERÍODO DE 2007

Inversa de uma Matriz – Determinante

1 Trabalhando com blocos

Observação: Podemos fazer uma matriz cujas entradas são matrizes em vez de números. Por exemplo:

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} & -1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & 7 \end{bmatrix} \qquad \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ \sqrt[3]{2} \end{pmatrix} \right) \qquad \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi & 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 & -12 & \pi \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & 10 & \pi & 15 & 20 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \pi & \pi & 7 & \pi & \pi \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Cada matriz A, $r \times s$, pode ser escrita como uma matriz linha, $1 \times s$, onde cada entrada j é a j–ésima coluna de A (ver exemplos acima) que é uma matrix $r \times 1$. Observe que os delimitadores $(,)$ que colocamos são para nossa referência e nem precisam estar na matriz. Igualmente A pode ser vista como uma matriz coluna, $r \times 1$, onde cada entrada i é a i–ésima linha de A que é uma matriz $1 \times r$. Se vamos multiplicar A por B, matriz $t \times r$, podemos fazer isso multiplicando B por cada uma das colunas de A, conforme equação abaixo.

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{t1} & b_{t2} & \dots & b_{tr} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{r1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{r2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \end{matrix} \begin{bmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{rs} \end{bmatrix} \right] = \left(B \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{r1} \end{bmatrix} \quad B \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{r2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \end{matrix} \quad B \begin{bmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{rs} \end{bmatrix} \right)$$

Também podiamos decompor B em linas e fazer o produto de B por A [1] como linhas multiplicadas por A.

Questão 1. Escreva a multiplicação de B por A escrevendo B como uma matriz coluna onde cada entrada é uma das linhas de B.

Questão 2. Fazer algumas as multiplicações abaixo decompondo uma das matrizes em colunas ou linhas, conforme for permitido.

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 5 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad A \cdot A^t, \text{ onde } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Questão 3. Seja A uma matriz para a equação $A \cdot X = \mathbf{0}$ tem solução não nula. Construir uma matriz $B \neq 0$ de forma que $AB = \mathbf{0}$. **Dica!** Procure B tendo como objetivo fazer o produto $A \cdot B$ usando a decomposição de B em colunas conforme descrito acima

2 Inversa de uma matriz

Definição: Dada $A \in M_n$ chamama-se *inversa* de A a uma matriz $A^{-1} \in M_n$ tal que $A^{-1} \cdot A = I$ e $A \cdot A^{-1} = A$.

Podemos escreve A^{-1}, pois se $B \in M_n$ também satisfaz às condições $B \cdot A = I$ e $A \cdot B = I$, então $B = A^{-1}$. Realmente $B = B \cdot I = B \cdot (A \cdot A^{-1}) = (B \cdot A) \cdot A^{-1} = I \cdot A^{-1} = A^{-1}$.

[1] multiplicar A por B ou fazer o produto de B por A significam a mesma coisa. Neste caso $B \cdot A$.

Questão 4. a) Sejam $A,\ B \in M_n$, mostrar que $A \cdot B$ é invertível se, e somente se A e B são invertíveis e nesse caso, $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
b) A matriz A^t é inversível se, e somente se A é invertível e nesse caso $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
c) Se A é inversível, então A^{-1} também é invertível e nesse caso $(A^{-1})^{-1} = A$.

Questão 5. Seja A invertível. Mostrar que se $A \cdot B = \mathbf{0}$ então $B = \mathbf{0}$; e se $A \cdot B = A \cdot C$ então $B = C$.

Questão 6. Seja $A \in M_n$, mostrar que se a equação matricial $A \cdot X = \mathbf{0}$ possui uma solução não nula $X \in M_{n\times 1}$, então A não é invertıvel.

Questão 7. Seja $A \in M_n$ tal que $A^2 + 2\,A + I = \mathbf{0}$, mostrar que A é invertível e calcular A^{-1} como função de A (Temos que $A^2 = AA$; usar o polinômio).

Observação: Para calcular a inversa de uma matriz A, $n \times n$ temos que resolver n sistemas. Isto é, as colunas de A^{-1} são as soluções dos seguintes problemas:

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pois se

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{então} \quad A \cdot A^{-1} = \left(A \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \end{matrix} \quad A \begin{pmatrix} b_{1s} \\ b_{2s} \\ \vdots \\ b_{ns} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Então, para acharmos A^{-1} temos que resolver simultaneamente n sistemas com a mesma matriz A. Para isso usamos a técnica do escalonamento em uma matriz aumentada que corresponde aos n sistemas.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hdotsfor{4} & \hdotsfor{4} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

Depois do escalonamento obtemos uma matriz $(I|A^{-1})$, caso A seja invertível. Podemos resumir o que vimos acima na formula

---

$$A \in M_n, \quad (A \mid I) \to (I \mid A^{-1})$$

Questão 8. Usando o método acima encontre as inversas das matrizes abaixo, caso existam:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a \end{bmatrix}$$

Observação: Quando as entradas da matriz não são numéricas devemos ter sempre o cuidado de determinar quando existirá inversa, como no caso da matriz F acima.

Questão 9. Usando a técnica de inverter matrizes e/ou “bom senso"verificar nos casos abaixo quando a inversa existe, e caso exista, encontre-a:

$$\begin{pmatrix} \cos\gamma & \operatorname{sen}\gamma \\ -\operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \dots & \lambda_2 & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ \lambda_n & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Questão 10. Calcule também $(AB)^{-1}$, $(ED)^{-1}$ e $(DE)^{-1}$, onde A, B, C, e D são as matrizes da Questão 8.

Questão 11. Resolver as equações matriciais:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Questão 12. Seja $A \in M_n$ uma matriz que tem uma coluna ou uma linha nula. Prove que A não é invertível. **Dica!** Suponha que existe A^{-1} e use o processo de multiplicar descrito antes da Questão 4 para fazer $A^{-1}A$, caso A tenha coluna nula. (E se A tiver linha nula? Que fazer?)

3 Determinante

Definição: Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem n. O *determinante* de A é o número

$$\det A = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \right| = \sum (-1)^{[i_1 i_2 \dots i_n]} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n},$$

a somatória é sobre todas as $n!$ permutações $i_1 i_2 \dots i_n$ dos números $12 \dots n$. Da definição acima vemos que cada linha e cada coluna de A tem um único elemento em cada uma das parcelas do somatório.

Observação: Usaremos $\det A$ e $|A|$ para indicar o determinante de uma matriz $A \in M_n$.

Questão 13. Quais dos produtos abaixo fazem parte do desenvolvimento do determinante de uma matriz e com que sinal?

1. $a_{17}a_{23}a_{32}a_{41}a_{56}a_{65}a_{74}$;
2. $a_{35}a_{13}a_{21}a_{76}a_{44}a_{57}a_{66}$;
3. $a_{35}a_{13}a_{21}a_{76}a_{44}a_{57}a_{26}$;
4. $a_{16}a_{32}a_{54}a_{63}a_{31}a_{45}$;
5. $a_{16}a_{32}a_{54}a_{63}a_{21}a_{45}$;
6. $a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$;
7. $a_{1n}a_{2,n-1} \dots a_{n1}$;
8. $a_{12}a_{23} \dots a_{n-1,n}a_{n1}$;
9. $a_{11}a_{2n}a_{3,n-1} \dots a_{n2}$.

Questão 14. Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem n onde existem $k > n^2 - n$ coeficientes iguais a zero. Usando a definição de determinante, mostre que A tem determinante igual a zero.

Definição: Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$. Dizemos que A é triangular superior se $a_{ij} = 0$ sempre que $i > j$.

Questão 15. Usando a definição de determinante, calcule $\det A$ para uma matriz triangular superior. Isto é, qual a regra para calcular o deteminante de uma matriz triangular superior?

Questão 16. Defina matriz triangular inferior e escreva a regra para calcular seu deteminante.

Questão 17. Verifique, usando a definição acima que $\det A = \det A^t$.

Questão 18. Mostrar que $\left|\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}\right| = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$

Propriedades do determinante: Seja A uma matriz $n \times n$ e I_n a matriz identidade. Considere A como uma matriz $n \times 1$ onde cada entrada é uma matriz linha, $1 \times n$. Iste é:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{rcl} A_1 & = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \\ A_2 & = & \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix} \\ \vdots & & \vdots \\ A_n & = & \begin{pmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

1. $\det I_n = 1$
2. Permutando-se duas linhas de A o determinante muda de sinal.
3. Multiplicando-se uma lihna de A por um número k o determinante de A fica multiplicado por k.
4. Se a j-ésima linha for a soma de duas matrizes, $A_j = B + C$, onde $B = \begin{pmatrix} b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} c_{j1} & c_{j2} & \cdots & c_{jn} \end{pmatrix}$, então

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdashline b_{j1} + cj1 & b_{j2} + c_{j2} & \dots & b_{jn} + c_{jn} \\ \hdashline a_{n1} & a_{a2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdashline b_{j1} & b_{j2} & \dots & b_{jn} \\ \hdashline a_{n1} & a_{a2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdashline c_{j1} & c_{j2} & \dots & c_{jn} \\ \hdashline a_{n1} & a_{a2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Observação: Como as colunas de uma matriz são as linhas de sua transposta, as propriedades acima valem também para as colunas da matriz, assim como as consequências abaixo.

Consequências:

1. Se uma matriz A tem duas linhas (ou colunas) iguais, então $\det A = 0$.
2. Se uma matriz A tem uma linha nula, então $\det A = 0$.
3. Mais geralmente, se uma linha de A for uma combinação linear de outras linhas de A, então $\det A = 0$.
4. Substituindo-se a linha j de A, pela linha j somada com a linha i multiplicada por um escalar k, o deteminante não se altera.

Questão 19. Usando as propriedades do determinante calcular os determinantes

$$\left|\begin{pmatrix} a+a & b+b \\ c & d \end{pmatrix}\right|, \quad \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -a & b & c \\ 5-a & 5+b & -5+c \end{pmatrix}\right|$$

$\left|\begin{pmatrix} 1+\cos\theta & 1-\operatorname{sen}\theta \\ 1+\operatorname{sen}\theta & 1+\cos\theta \end{pmatrix}\right|$, $\left|\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}\right|$ nesta última, use linha equivalência para simplicificar a matriz transformando-a numa matriz triangular superior. Também pode usar linha equivalência para reduzir ao caso 2×2 e sair facil por Laplace como abaixo abaixo. O primerio procedimento aplica-se também no caso 4×4. A seguir, calcule

$\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}\right|$. Esse tipo de determinante é conhecido como *determinante de Vandermonde.*

Generalize o caso 3×3 para um $n \times n$ qualquer.

Questão 20. Recordemos que a média geométrica de dois números positivos a, b é dada por $\sqrt{ab}$. Considere uma matriz A, 3×3, com todas as suas entradas $\neq 0$ e onde cada elemento da segunda coluna é a média geométrica dos outros dois nessa linha. Por exemplo $a_{22} = \sqrt{a_{21}a_{23}}$. Usando linha equivalência encontre uma matriz de Vandermonde B de forma que $|A| = k|B|$, onde $k \neq 0$ é um escalar. Isto é, calcule $|A|$ reduzindo o problema ao caso Vandermonde.

Questão 21. Seja A uma matriz de ordem n tal que $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo índice i, j. Verifique que se n é impar, então $|A| = 0$. **Dica!** Observe que A é "quase igual" a A^t. Matrizes desse tipo são chamadas de *antisimétricas.*

4 Regra de Laplace

Na prática o cálculo do determinate é feito pela regra de Laplace:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$\det A = \ (-1)^{1+1}a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{22} \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

No exemplo acima escolhemos aplicar a regra de Laplace na primeira linha, mas ela pode ser aplicada em qualquer linha ou coluna. Essa regra permite reduzir repedidamente a ordem da matriz até chegarmos ao caso 2×2.

Questão 22. Calcular o determinante:

a) $\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right|$; **b)** $\left|\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}\right|$; **c)** $\left|\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\right|$; **d)** $\left|\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\right|$;

f) $\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right|$; **g)** $\left|\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right|$; **h)** $\left|\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right|$; **i)** $\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}\right|$; **j)** $\left|\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{pmatrix}\right|$;

Questão 23. Calcular o determinante nos casos confusos abaixo:

a) $\left|\begin{pmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix}\right|$;
(de ordem n)

b) $\left|\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -y_n & x_n \end{pmatrix}\right|$;
(de ordem $n+1$)

c) $\left|\begin{pmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix}\right|$; (de ordem $n+1$)

d) $\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{pmatrix}\right|$; (de ordem n)

5 Regra de Cramer

Consideramos o sistema com n equações e n variáveis $\begin{cases} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \cdots+ & a_{1n}x_n & =b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & \cdots+ & a_{2n}x_n & =b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1+ & a_{n2}x_2+ & \cdots+ & a_{nn}x_n & =b_n \end{cases}$

com matriz $A=(a_{ij})\in M_n$ e determinante $\Delta=\det A$. Seja Δ_i o determinante obtido a partir de $\det A$ substituindo-se a i–ésima coluna de A pela coluna dos coeficientes livres do sistema, $i=1,\ 2,\dots,\ n$. Se $\Delta\neq 0$ então o sistema é determinado com solução $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $\dots$, $x_n=\dfrac{\Delta_n}{\Delta}$. Esse procedimento é conhecido como *regra de Cramer*.

Questão 24. Resolver o sistema utilizando as fórmulas de Cramer:

a) $\begin{cases} 3x+ & 7y & =1 \\ 2x+ & 5y & =3 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} ax+ & by & =a \\ -bx+ & ay & =-b \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x\cos\alpha+ & y\,\mathrm{sen}\,\alpha & =\mathrm{sen}\,\beta \\ -x\,\mathrm{sen}\,\alpha+ & y\cos\alpha & =\cos\beta \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2x- & 7y+ & 3z & =1 \\ 5x+ & 2y- & z & =3 \\ 4x- & y+ & 2z & =2 \end{cases}$; **e)** $\begin{cases} x+ & 7y- & 2z & =9 \\ 2x+ & 10y- & 5z & =7 \\ 3x+ & 4y- & z & =8 \end{cases}$;