<u>GEOMETRIA DESCRITIVA E DESENHO GEOMÉTRICO</u>

Unicamp, 2006
Aluna: Tatiana Lança

AS CÔNICAS E A FÍSICA

AS CÔNICAS E A FÍSICA

RESUMO

O trabalho tem como objetivo relacionar as cônicas (elipse e parábola) aos conceitos Físicos relativos às Leis de Kepler e espelhos.

1. INTRODUÇÃO

O ensino das cônicas costuma acontecer na terceira série do Ensino Médio no conteúdo de Geometria Analítica. Em geral, as cônicas são apresentadas com três curvas distintas: a elipse como o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante; a hipérbole como o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja diferença das distâncias (em módulo) a dois pontos fixos é constante; e a parábola como o lugar geométrico dos pontos de um plano eqüidistante de uma reta e de um ponto fora dela. (Bongiovani, 2006)

È objetivo deste trabalho relacionar as cônicas com alguns conteúdos de Física trabalhados também no Ensino Médio. A Primeira Lei de Kepler apresenta relação com a elipse. As propriedades dos espelhos relacionam-se com as parábolas.

2. DESENVOLVIMENTO

Primeiramente vamos obter as equações correspondentes à elipse, hipérbole e parábola. A seguir, discutiremos alguns conceitos físicos, relacionando-os com a geometria que os envolve.

2.1 As Cônicas

2.1.1. A Elipse

A elipse costuma ser definida como o lugar geométrico dos pontos P do plano, cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante.

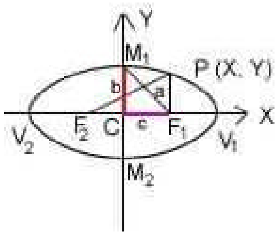


Fig.1

Isso significa que $PF_1 + PF_2$ = constante.

Uma elipse pode ser desenhada com o auxílio de uma linha com as pontas amarradas em dois alfinetes fixados em F_1 e F_2 e por um lápis.

Mantendo-se a linha esticada e movendo-se o lápis no papel, obtemos uma elipse, já que a soma das distâncias PF_1 e PF_2 mantém-se constante.

Os pontos F_1 e F_2 são os *focos* da elipse e o ponto médio do segmento F_1F_2 é o seu *centro*.

Vamos supor a elipse centrada na origem e disposta simetricamente em relação a cada um dos eixos de coordenados. Sejam -c e c as abscissas de F_2 e F_1, respectivamente, e seja 2a a constante $PF_1 + PF_2$, onde P = (x, y) é um ponto arbitrário da elipse.

Colocando $d = PF_1$ e $d' = PF_2$ e notando que:

$$d = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \qquad d' = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

A equação da elipse $PF_1 + PF_2 = 2a$, assume a forma:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \qquad \text{(I)}$$

Para eliminarmos os radicais, elevamos ambos os membros da equação (I) ao quadrado, que resulta:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \qquad \text{(II)}$$

Como que a > c , colocando $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ e dividindo ambos os membros de (II) por $a^2 b^2$,obtemos a equação (III):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(III)}$$

2.1.2 A Hipérbole

A hipérbole é definida com sendo o lugar geométrico dos pontos P do plano, cuja diferença das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é uma constante 2a. A hipérbole possui dois ramos, conforme seja:

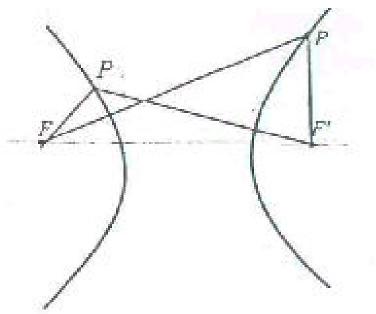


Fig.2

PF-PF' = 2a ou PF' – PF = 2a

Substituindo PF= $\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ e PF' = $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

Podemos juntar as duas equações anteriores numa única assim:

$$\pm\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)=2a \qquad \text{(IV)}$$

A partir desta equação e procedendo como no caso da elipse, obtemos:

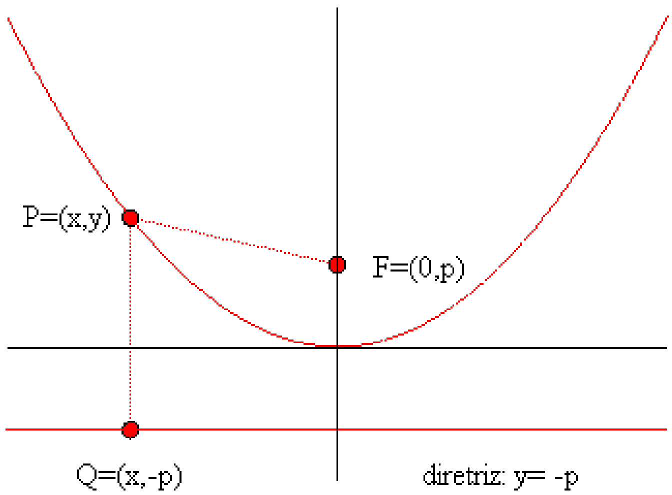
$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2) \qquad \text{(V)}$$

No caso da hipérbole, c > a. Pondo b =$\sqrt{c^2-a^2}$, a última equação nos dá, após a divisão por a^2b^2:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{(VI)}$$

2.1.3 A Parábola

Consideremos uma reta y e um ponto F. Parábola de foco F e diretriz y e o conjunto de todos os pontos cuja distância à reta d é igual à distância a ponto F. Se PQ= PF, então P é um ponto da parábola de foco F e diretriz y.



Em um sistema de coordenadas, não é difícil encontrar a equação da parábola, dados o foco e a diretriz. Tomemos F= (0,p), como foco e y=-p como diretriz. Se P= (x,y) é tal que PF=PQ, temos:

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = y + p \qquad \text{(VII)}$$

Elevando ao quadrado e cancelando os termos iguais dos dois lados, obtemos:

$$x^2 = 4py \qquad \text{ou} \qquad y = \frac{1}{4p}x^2 \qquad \text{(VIII)}$$

A equação (VIII) mostra que a equação de uma parábola é da forma $y=ax^2$ uma função do segundo grau. Reciprocamente, dada uma função da forma $y = ax^2$, é fácil provar que um de seus pontos possui distância ao ponto (0,1/4 a) igual à distância à reta y = -1/4 a, o que mostra que o gráfico de $y = ax^2$ é uma parábola.

Também é possível mostrar que o gráfico de $y = ax^2 + bx + c$ (com a 0) é também uma parábola e, ainda, exatamente igual ao gráfico de $y = ax^2$. Apenas, o vértice daquela é o ponto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

2.2 A Física

No que se refere aos conteúdos de Física, discutimos a seguir as Leis de Kepler e alguns conceitos relativos á Óptica Geométrica, relacionando-os às propriedades das cônicas.

2.2.1 As leis de Kepler

Johannes Kepler (1571-1630), matemático de excelência, interessou-se pela Astronomia, principalmente pela teoria de Copérnico (1473-1543). Copérnico, em sua obra publicada pouco antes de sua morte, defendia a idéia de que os movimentos dos corpos no céu deveriam ser explicados de modo simples.

Para ele, todos os planetas, incluindo aTerra, giravam em torno do Sol em órbitas circulares, e o Sol ocupava o centro do Universo. Kepler, durante muitos anos acompanhou o movimento do planeta Marte e, com resultado de suas observações e cálculos, apresentou modificações na própria teoria de Copérnico. A contribuição de Kepler à Astronomia é apresentada em três leis que descrevem os movimentos dos planetas em torno do Sol: as Leis de Kepler.

- Primeira Lei: Lei das Órbitas
- Segunda Lei: Lei das Áreas
- Terceira Lei: Lei dos Períodos

De acordo com a Primeira Lei de Kepler, todos os planetas, incluindo a Terra, giram em torno do sol em órbitas elípticas, sendo que o Sol ocupa um dos focos da elipse. Como o Sol ocupa um dos focos da Elipse, cada planeta, em seu movimento, passa elos pontos denominados afélio (A) e periélio (P). O afélio corresponde ao ponto de maior afastamento do planeta em relação ao Sol. O periélio corresponde ao ponto de maior proximidade do planeta em relação ao Sol.

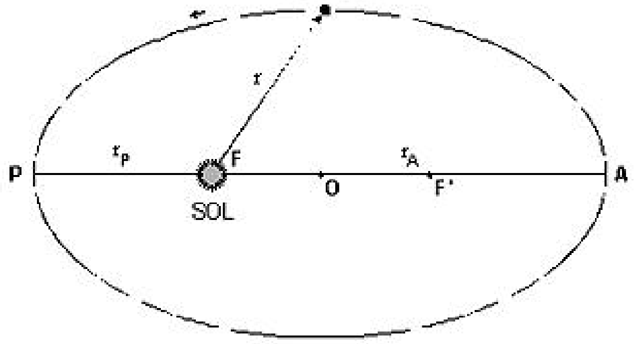


Fig. 3 - Órbita de um planeta ao redor do Sol e a variação de sua distância.

A órbita circular pode ser entendida como o caso extremo em que os focos da elipse coincidem, e nesse caso o Sol ocupa o centro da circunferência descrita pelo planeta.

De um modo geral, as órbitas dos planetas não apresentam grandes excentricidades. Por isso podemos considerar suas órbitas praticamente circulares. Podemos observar as excentricidades dos planetas do sistema solar na tabela abaixo:

PLANETA	EXCENTRICIDADE	PLANETA	EXCENTRICIDADE
Mercúrio	0,205631	Júpiter	0,048494
Vênus	0,006771	Saturno	0,055509
Terra	0,016709	Urano	0,046296
Marte	0,093401	Netuno	0,008988
		Plutão	0,246003

Fig. 4: Excentricidades das órbitas dos planetas.

A Segunda Lei de Kepler é a Lei das Áreas. Um planeta, em sua órbita em torno do Sol, se move de tal forma que o veto posição, com a origem no centro do Sol e extremidade no centro do planeta, varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais. Observe a figura:

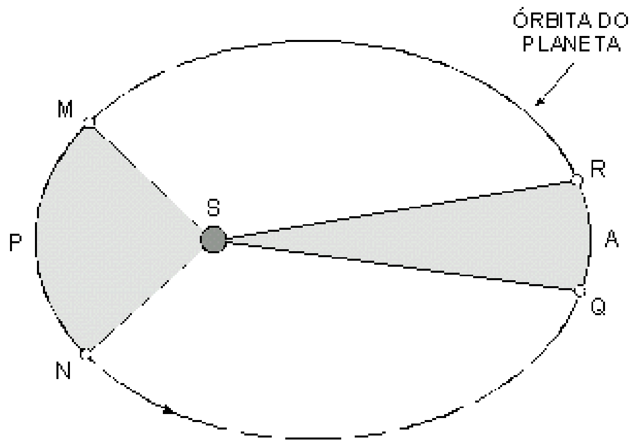


Fig. 5 - A lei das áreas

Um planeta qualquer do sistema solar, movimenta-se ao redor do Sol com velocidade variável, apresentando um valor máximo no periélio e um valor mínimo no afélio. Como o espaço percorrido MN é maior que o espaço percorrido RQ e os tempos para percorrer MN e RQ são os mesmos (pela segunda Lei) a velocidade no ponto P é maior que velocidade no ponto A.

A Terceira Lei de Kepler é a Lei dos Períodos: O quadrado do período de revolução é diretamente proporcional ao cubo do raio médio da órbita.

$$R = \frac{r_a + r_p}{2}$$

Sendo T o período de revolução de um planeta a redor do Sol e R o raio médio da órbita descrita pelo planeta, temos:

$$\frac{T^2}{R^3} = K$$

2.2.2 Os Espelhos

Porque as antenas que captam sinais do espaço são parabólicas? Por que os espelhos dos telescópios astronômicos são parabólicos?

Os sinais que recebemos (ondas de rádio ou luz) são muito fracos. Por isso, é necessário captá-los em uma área relativamente grande e concentrá-los em um único ponto para que sejam naturalmente amplificados. Portanto, a superfície da antena ou do espelho deve ser tal que todos os sinais recebidos de uma mesma direção sejam direcionados para um único ponto após a reflexão.

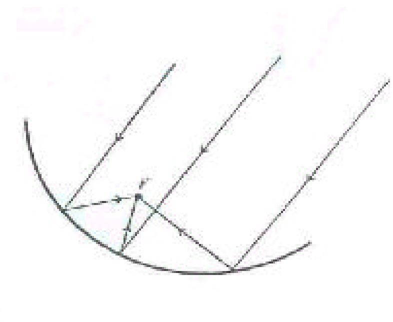


Fig.6 A antena ideal deve dirigir todos os sinais recebidos ao ponto F.

A parábola possui exatamente essa propriedade e, por isso, as antenas e os espelhos precisam ser parabólicos. (Wagner, 1997)

Para se demonstrar isso, vamos analisar duas propriedades da parábola, cuja equação está escrita no item 2.1.3.

Primeira Propriedade

Uma parábola separa os demais pontos do plano em duas regiões:

- Uma, onde cada ponto tem distância ao foco menor que sua distância à diretriz.
- Outra, onde a distância de cada ponto ao foco é maior que distância à diretriz.

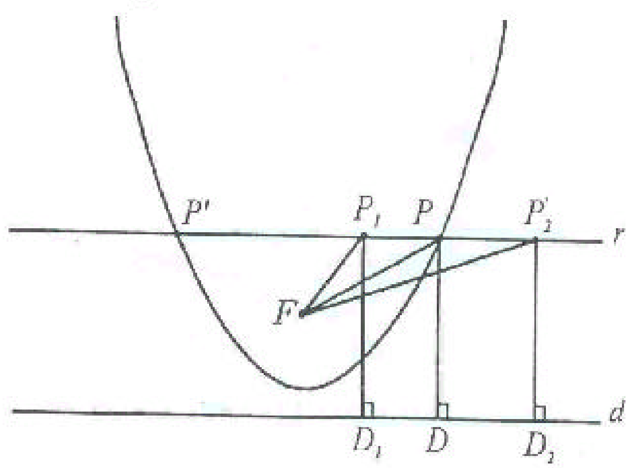


Fig.7

A figura anterior mostra uma parábola de foco F e diretriz d e uma reta r paralela a d cortando a curva em P e P'. Se o ponto P_1 da reta r é interior ao segmento PP', então P_1<PF= PD = P_1D e, portanto, P_1 é interior à parábola. Por outro lado, se P_2 é um ponto da reta r exterior ao segmento PP', então P_2F<PF=PD=P_2 D_2 e P_2 é exterior à parábola.

Segunda Propriedade

Os raios de luz e as ondas de rádio propagam-se no espaço em linha reta. Isso não é inteiramente verdadeiro, mas para um observador na Terra é praticamente. Quando esses sinais são refletidos em um ponto de uma superfície, tudo se passa como se estivessem sendo refletidos em um plano tangente à superfície nesse ponto, de acordo com a lei da Física: **"O ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão".**

Considerando um ponto P qualquer da parábola de foco F e diretriz d, e ainda a reta t, bissetriz do ângulo FPD, vamos demonstrar geometricamente que t é tangente à parábola.

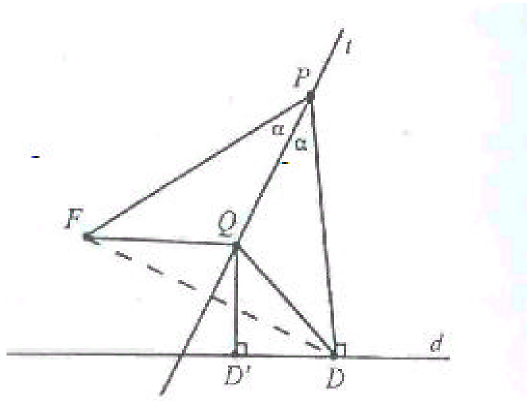


Fig.8

No triângulo PFD, como PF=PD, a reta t, bissetriz do ângulo FPD, é também mediana e altura. Em outras palavras, a reta t é mediatriz do segmento FD. Seja agora Q, um ponto qualquer da reta t, distinto de P. Se D' é a projeção de Q sobre d, temos:

$$QF = QD > QD'$$

Portanto, Q é exterior à parábola. O Ponto P da reta t pertence à parábola e todos os outros pontos de t são exteriores. Logo, t é tangente à parábola em P.

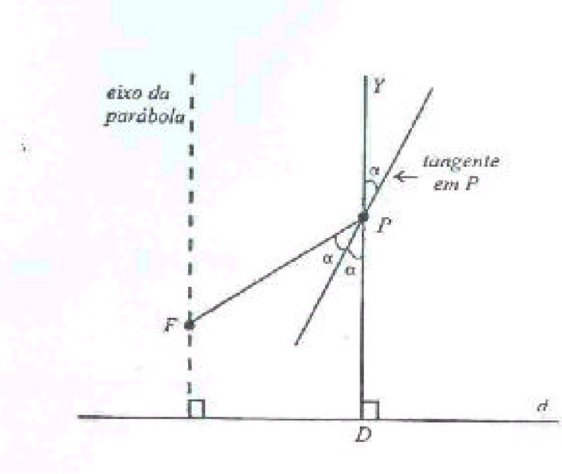


Fig.9

Observe, na figura acima, a semi-reta PY, prolongamento do segmento DP. Como a tangente à parábola em P é bissetriz do ângulo FPD, temos que PY e PF fazem ângulos iguais com essa tangente. Portanto, PY e PF. Por isso, todo sinal recebido na direção do eixo da parábola toma direção do foco após a reflexão.

3. CONCLUSÃO

A partir da discussão feita a respeito das cônicas e de sua relação com alguns conceitos físicos, acredito que no Ensino Médio seria bastante interessante relacionar o ensino de Geometria Analítica ao ensino de Física. A compreensão das cônicas pode ser tornar mais efetiva a partir da aplicação de suas propriedades em assuntos relativos à Física.

4. BIBIOGRAFIA

ÁVILA, Geraldo. Revista do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. V.35, p.9-15 1997.

BONGIOVANNI, Vincenzo. Revista do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática.v.60, n.47-51 2006.

WAGNER, Eduardo. Revista do Professor de Matemática Sociedade Brasileira de Matemática.v.33, p.11-15, 1997.