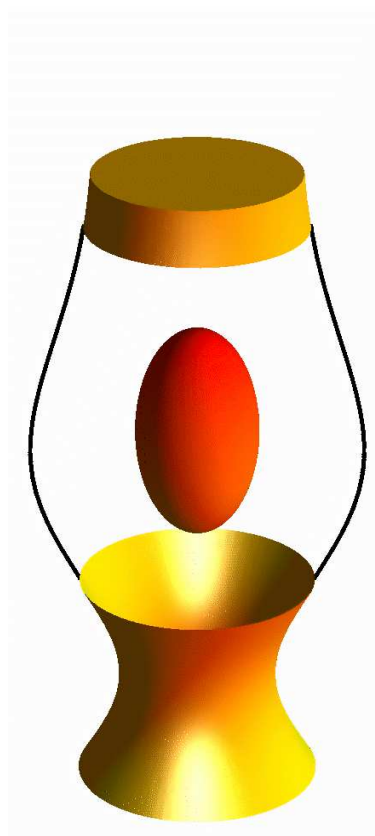


CÁLCULO: VOLUME I



MAURICIO A. VILCHES - MARIA LUIZA CORRÊA

Departamento de Análise - IME
UERJ

Copyright by Mauricio A. Vilches
Todos os direitos reservados
Proibida a reprodução parcial ou total

PREFÁCIO

"Por favor, poderia me dizer que caminho devo seguir agora?

Isso depende bastante de até onde você quer chegar."

Lewis Carrol - Alice no País das Maravilhas

Através dos séculos a Matemática tem sido a mais poderosa e efetiva ferramenta para a compreensão das leis que regem a Natureza e o Universo.

Os tópicos introdutórios que apresentamos neste livro originaram-se, inicialmente, dos problemas práticos que surgiram no dia a dia e que continuaram impulsionados pela curiosidade humana de entender e explicar os fenômenos que regem a natureza.

Historicamente, o Cálculo Diferencial e Integral de uma variável estuda dois tipos de problemas: os associados à noção de derivada, antigamente chamados de tangências e os problemas de integração, antigamente chamados de quadraturas. Os relativos à derivação envolvem variações ou mudanças, como por exemplo, a extensão de uma epidemia, os comportamentos econômicos ou a propagação de poluentes na atmosfera, dentre outros. Como exemplos de problemas relacionados à integração destacam-se o cálculo da áreas de regiões delimitadas por curvas, do volume de sólidos e do trabalho realizado por uma partícula.

Grande parte do Cálculo Diferencial e Integral foi desenvolvida no século XVIII por Isaac Newton para estudar problemas de Física e Astronomia. Aproximadamente na mesma época, Gottfried Wilhelm Leibniz, independentemente de Newton, também desenvolveu considerável parte do assunto. Devemos a Newton e Leibniz o estabelecimento da estreita relação entre derivada e integral por meio de um teorema fundamental. As notações sugeridas por Leibniz são as universalmente usadas.

O principal objetivo do livro foi apresentar os primeiros passos do Cálculo Diferencial e Integral de uma variável com simplicidade, através de exemplos, mas sem descuidar do aspecto formal da disciplina, dando ênfase à interpretação geométrica e intuitiva dos conteúdos.

O livro inclui a maioria da teoria básica, assim como exemplos aplicados e problemas. As provas muito técnicas ou os teoremas mais sofisticados que não foram provados no apêndice, foram ilustrados através de exemplos, aplicações e indicações bibliográficas adequadas e estão incluídos como referência ou leitura adicional para os leitores interessados.

Os conceitos centrais do Cálculo Diferencial e Integral de uma variável são relativamente profundos e não se espera que possam ser assimilados de uma só vez. Neste

nível, o importante é que o leitor desenvolva a habilidade de calcular e adquira a compreensão intuitiva dos problemas. As expressões do tipo "é fácil ver" ou semelhantes, que aparecem no texto, não devem ser encaradas de forma literal e tem o propósito de dar um aviso ao leitor de que naquele lugar a apresentação é resumida e os detalhes, perfeitamente acessíveis, deverão ser preenchidos.

Esperamos que o livro permita ao leitor um acesso rápido e agradável ao Cálculo Diferencial e Integral de uma variável. Não podemos deixar de recomendar aos alunos a utilização, criteriosa, dos softwares de Cálculo existente no mercado, pois eles são um complemento útil ao aprendizado da disciplina.

Desejamos agradecer aos nossos colegas do Departamento de Análise e do IME-UERJ que, de algum modo, nos motivaram e deram condições para escrever estas notas e à Sra. Sonia M. Alves pela digitação. Certamente, todos os erros são exclusivamente de responsabilidade dos autores.

Mauricio A. Vilches - Maria Luiza Corrêa
Rio de Janeiro

Conteúdo

1	FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL	11
1.1	Definições e Exemplos	11
1.2	Domínio e Imagem	17
1.3	Gráficos de Funções	19
1.4	Função Módulo ou Valor Absoluto	27
1.5	Função Polinomial do Primeiro Grau ou Afim	30
1.6	Função Polinomial de Segundo Grau ou Quadrática	35
1.6.1	Vértice da parábola	36
1.7	Função Polinomial de Grau n	40
1.8	Funções Pares e Ímpares	42
1.8.1	Aplicação	43
1.9	Funções e Gráficos	45
1.10	Interseção de Gráficos	45
1.10.1	Interseção de Retas	46
1.11	Álgebra de Funções	49
1.12	Funções Racionais	51
1.13	Composta de Funções	52
1.14	Inversa de uma Função	56
1.15	Método para Determinar a Inversa	58
1.16	Funções Definida por Partes	63
1.17	Exercícios	66
2	FUNÇÕES ELEMENTARES	71
2.1	Função Exponencial	71
2.2	Aplicações	77
2.2.1	Economia: Cálculo de Juros Compostos	77
2.2.2	Crescimento e Decrescimento Exponencial	77
2.3	Função Logística	79
2.4	Função Logarítmica	80
2.5	Desintegração Radioativa	84
2.6	Funções Trigonométricas	88
2.6.1	Função Seno e Função Co-seno	88
2.6.2	Função Tangente e Função Secante	89

2.6.3	Função Co-tangente e Função Co-secante	90
2.7	Funções Trigonômétricas Inversas	95
2.7.1	Função Arco seno	95
2.7.2	Função Arco co-seno	97
2.7.3	Função Arco tangente	98
2.7.4	Funções Arco co-tangente, Arco secante e Arco co-secante	99
2.8	Funções Hiperbólicas	101
2.9	Exercícios	104
3	LIMITE E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES	109
3.1	Introdução	109
3.2	Limites	109
3.3	Limites Laterais	118
3.4	Relação entre Limite e Limites Laterais	122
3.5	Limites no Infinito	125
3.6	Cálculo de Limites de Funções Racionais	127
3.7	Limites Infinitos	129
3.8	Símbolos de Indeterminação	132
3.9	Limites Fundamentais	133
3.9.1	Primeiro Limite Fundamental	133
3.9.2	Segundo Limite Fundamental	135
3.9.3	Terceiro Limite Fundamental	135
3.9.4	Aplicação	136
3.10	Assíntotas	137
3.10.1	Esboço Aproximado de Funções Racionais	139
3.11	Continuidade de Funções	141
3.11.1	Aplicações	149
3.12	Exercícios	152
4	DERIVADA	163
4.1	Introdução	163
4.2	Reta Tangente	163
4.3	Funções Deriváveis	168
4.4	Interpretação Geométrica	169
4.5	Regras de Derivação	174
4.6	Derivada da Função Composta	177
4.6.1	Aplicação:	178
4.6.2	Teorema da Função Inversa	179
4.7	Derivadas das Funções Elementares	180
4.8	Função Exponencial	180
4.9	Função Logarítmica	182
4.9.1	Algumas Propriedades	183
4.10	Funções Trigonômétricas	186

4.11	Funções Trigonométricas Inversas	189
4.12	Funções Hiperbólicas	190
4.13	Derivação Implícita	192
4.14	Cálculo da Derivada de uma Função Implícita	194
4.14.1	Método de Cálculo da Função Implícita	194
4.15	Famílias de Curvas Ortogonais	200
4.16	Derivadas de Ordem Superior	202
4.17	Aproximação Linear	205
4.18	Aproximação de Ordem Superior	208
4.19	Velocidade e Aceleração	210
4.20	A Derivada como Taxa de Variação	213
4.21	Exercícios	218
5	APLICAÇÕES DA DERIVADA	227
5.1	Variação de Funções	227
5.2	Funções Monótonas	236
5.3	Determinação de Máximos e Mínimos	241
5.4	Concavidade e Pontos de Inflexão de Funções	247
5.5	Esboço do Gráfico de Funções	252
5.6	Problemas de Otimização	259
5.7	Teorema de L'Hôpital	271
5.8	Outros tipos de indeterminações	273
5.8.1	Caso $(0 \cdot \infty)$	273
5.8.2	Caso $(\infty - \infty)$	274
5.8.3	Caso (1^∞)	275
5.8.4	Caso (∞^0)	276
5.8.5	Caso (0^0)	277
5.9	Diferencial de uma Função	278
5.10	Exercícios	279
6	INTEGRAÇÃO INDEFINIDA	287
6.1	Introdução	287
6.2	Tabela	291
6.3	Métodos de Integração	293
6.4	Método de Substituição	293
6.5	Outros Tipos de Substituições	295
6.6	Integrais de Produtos e Potências de Funções Trigonométricas	296
6.7	Método de Integração por Partes	297
6.8	Método de Substituição Trigonométrica	300
6.8.1	Caso 1: $\sqrt{a^2 - u^2}$	300
6.8.2	Caso 2: $\sqrt{a^2 + u^2}$	300
6.8.3	Caso 3: $\sqrt{u^2 - a^2}$	301
6.9	Método para Integração de Funções Racionais	304

6.9.1	Caso 1: $Q(x)$ se decompõe em fatores lineares distintos.	305
6.9.2	Caso 2: $Q(x)$ se decompõe em fatores lineares, alguns deles repetidos.	309
6.9.3	Caso 3: $Q(x)$ se decompõe em fatores lineares e fatores quadráticos irreduzíveis, sendo que os fatores quadráticos não se repetem	311
6.9.4	Caso 4: $Q(x)$ se decompõe em fatores lineares e fatores quadráticos irreduzíveis, sendo que alguns dos fatores quadráticos se repetem	313
6.10	Mudança: Tangente do Ângulo Médio	315
6.11	Aplicações da Integral Indefinida	315
6.11.1	Obtenção de Famílias de Curvas	315
6.12	Outras aplicações	317
6.13	Exercícios	319
7	INTEGRAÇÃO DEFINIDA	325
7.1	Introdução	325
7.2	Integral Definida	332
7.3	Teorema Fundamental do Cálculo	334
7.4	Construção de Primitivas	335
7.5	Integral Definida e os Métodos de Integração	338
7.6	Exercícios	346
8	APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA	351
8.1	Aceleração, velocidade e posição	351
8.2	Cálculo de Áreas	353
8.3	Volume de Sólidos de Revolução	373
8.3.1	Cálculo do Volume dos Sólidos	375
8.4	Outros Eixos de Revolução	382
8.5	Método das Arruelas	385
8.6	Cálculo do Comprimento de Arco	388
8.7	Definição de Logaritmo Natural	392
8.7.1	Logaritmo como Área	392
8.8	Trabalho	393
8.9	Exercícios	395
8.9.1	Áreas	395
8.9.2	Volumes de Revolução	397
8.9.3	Comprimento de Arco	398
8.9.4	Logaritmo	399
8.9.5	Trabalho	400
9	INTEGRAIS IMPRÓPRIAS	403
9.1	Introdução	403
9.2	Integrais Definidas em Intervalos Ilimitados	403

9.3	Aplicação	408
9.3.1	Função Gama	408
9.4	Probabilidades	410
9.5	Exemplos	411
9.5.1	Distribuição Uniforme	412
9.5.2	Distribuição Exponencial	413
9.6	Integrais de Funções Descontínuas	415
9.7	Exercícios	420
10	APÊNDICE	423
10.1	Limites	423
10.2	Funções Deriváveis	425
10.3	Funções Integráveis	429
11	RESPOSTAS	433
11.1	Capítulo 1	433
11.2	Capítulo 2	435
11.3	Capítulo 3	436
11.4	Capítulo 4	438
11.5	Capítulo 5	440
11.6	Capítulo 6	442
11.7	Capítulo 7	444
11.8	Capítulo 8	445
11.8.1	Áreas	445
11.8.2	Volumes	446
11.8.3	Comprimento de Arco	447
11.8.4	Logarítmos	447
11.8.5	Trabalho	447
11.9	Capítulo 9	447
	Bibliografia Básica	449

Capítulo 1

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL

1.1 Definições e Exemplos

Neste capítulo estudaremos uma das noções fundamentais e centrais da Matemática, o conceito de função.

Uma função de uma variável real é uma regra que descreve como uma quantidade é determinada por outra quantidade, de maneira única.

Existem várias alternativas para definir formalmente uma função. Escolhemos a seguinte:

Definição 1.1. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$. Uma função f definida em A e com valores em B é uma regra que associa a cada elemento $x \in A$ um **único elemento** $y \in B$.

As notações usuais são: $f : A \longrightarrow B$ tal que $y = f(x)$ ou

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow f(x). \end{aligned}$$

O número x é chamado **variável independente** da função e y **variável dependente** da função.

Exemplo 1.1.

[1] A seguinte tabela, que mostra a vazão semanal de água de uma represa, representa uma função:

Dia	1	2	3	4	5	6	7
m^3/seg	360	510	870	870	950	497	510

De fato, a tabela representa uma função, pois a cada dia fica associada uma única quantidade de vazão. Note que, possivelmente, não existe uma fórmula matemática para expressar a função do exemplo, mas, a definição de função é satisfeita.

[2] Foi feita uma pesquisa de preços (em R\$) de produtos da cesta básica em três supermercados de um determinado bairro, obtendo-se a seguinte tabela:

Produto	Supermercado A	Supermercado B	Supermercado C
1	2.6	2.9	2.52
2	0.96	0.94	1.0
3	1.78	1.5	1.6
4	1.23	1.45	1.36
5	3.2	3.0	2.95
6	4.07	3.96	4.2
7	2.3	2.62	2.5

Esta tabela não representa uma função, pois a cada produto corresponde **mais de um** preço.

[3] A área de qualquer círculo é função de seu raio.

Se o raio do círculo é denotado por r , então:

$$A(r) = \pi r^2.$$

Um círculo de raio igual a 5 u.c. , tem área $A(5) = 25 \pi \text{ u.a.}$; um círculo de raio igual a 300 u.c. , tem área $A(300) = 90000 \pi \text{ u.a.}$ (u.c. =unidades de comprimento) e (u.a. =unidades de área).

[4] Um tanque para estocagem de oxigênio líquido num hospital deve ter a forma de um cilindro circular reto de 8 m (m =metros) de altura, com um hemisfério em cada extremidade. O volume do tanque é descrito em função do raio r .

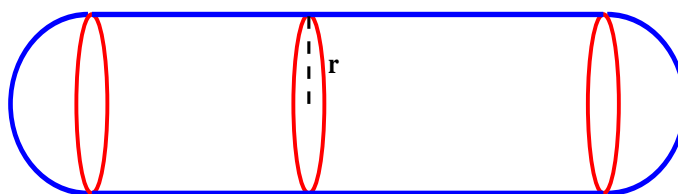


Figura 1.1: Tanque de raio r .

O volume do cilindro é $8r^2 \pi \text{ m}^3$ e o dos dois hemisférios é $\frac{4r^3 \pi}{3} \text{ m}^3$; logo, o volume total é:

$$V(r) = \frac{4r^2(r+6)\pi}{3} m^3.$$

Por exemplo, se o raio for $r = 1 m$, o volume é $V(1) = \frac{28\pi}{3} m^3$.

[5] Dois satélites artificiais estão circulando ao redor do Equador em uma órbita de raio igual a $4.23 \times 10^7 km$. O comprimento s que separa os satélites, se eles tiverem uma separação angular de θ (em radianos), é $s = r\theta$, onde r é o raio.

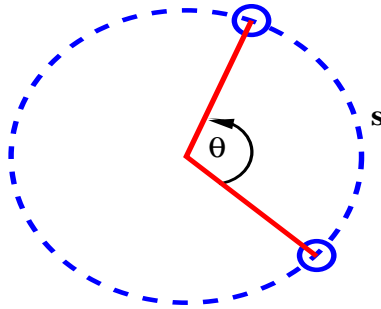


Figura 1.2: Satélites em órbita.

Logo, podemos descrever o comprimento s em função da separação angular:

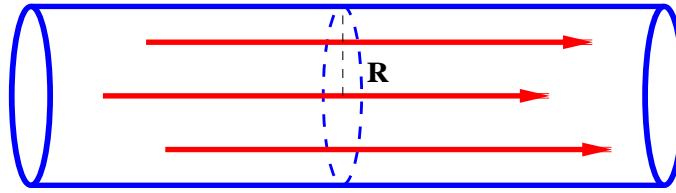
$$s(\theta) = (4.23 \times 10^7) \theta.$$

[6] **Lei de Boyle:** O volume de uma massa gasosa é inversamente proporcional à pressão a que ela está submetida, isto é, o produto da pressão pelo volume é constante, se a temperatura do gás é constante. Denotamos a pressão por P , o volume por V e a temperatura constante por C ; então, $P \times V = C$. Podemos escrever:

$$\text{A pressão em função do volume: } P = f(V) = \frac{C}{V}, \quad \text{ou}$$

$$\text{o volume em função da pressão: } V = f(P) = \frac{C}{P}.$$

[7] **Lei do fluxo laminar de Poiseuille:** (Fluxo sanguíneo através de um vaso, como artérias ou veias). Como as quantidades envolvidas são pequenas, podemos considerar que vasos tem formato cilíndrico não elástico.

Figura 1.3: Vaso de raio R .

Denotemos por R o raio e l o comprimento. Devido a fricção nas paredes do vaso, a velocidade v do sangue é maior ao longo do eixo central do vaso e decresce se a distância d do eixo à parede cresce e é zero na parede. A relação entre a velocidade da circulação e d é dada por:

$$v(d) = \frac{P(R^2 - d^2)}{4l\eta},$$

onde η é a viscosidade do sangue e P a diferença entre a pressão de entrada e a da saída do sangue no vaso.

Experimentalmente, para o sangue humano numa veia: $\eta = 0.0027$, $l = 2$, $R = 8 \times 10^{-5}$ e $P = 4 \times 10^3$, logo:

$$v(d) = 0.001185185185 - 185185.1852 d^2 \quad \text{cm/seg.}$$

[8] Temos 1000 metros de arame para fazer um curral de formato retangular. Podemos escrever a área do curral em função de um dos lados.

De fato, se x e y são os lados do curral, seu perímetro é $2(x + y) = 1000$ e a área do retângulo é $A = xy$; logo:

$$A(x) = x(500 - x) = 500x - x^2.$$

[9] Fisiologistas desenvolveram uma fórmula para determinar a superfície corporal de animais em função de seu peso. Se denotamos por S a superfície corporal, então:

$$S(p) = k \sqrt[3]{p^2},$$

onde p é o peso em quilos do animal e $k > 0$ é uma constante que depende do animal. Experimentalmente, é conhecido que $k = 0.11$ para humanos e $k = 0.118$ para primatas. Por exemplo, um homem de 70 quilos tem uma superfície corporal aproximada de:

$$S(70) = 0.11 \times \sqrt[3]{70^2} = 1.868439 \text{ m}^2;$$

uma criança de 20 quilos tem uma superfície corporal aproximada de:

$$S(20) = 0.11 \times \sqrt[3]{20^2} = 0.81048 \text{ m}^2.$$

p	$S(p) = 0.11 \times \sqrt[3]{p^2}$
20	$0.11 \times \sqrt[3]{20^2} \cong 0.81048 \text{ m}^2$
54	$0.11 \times \sqrt[3]{54^2} \cong 1.57152 \text{ m}^2$
70	$0.11 \times \sqrt[3]{70^2} \cong 1.86839 \text{ m}^2$
90	$0.11 \times \sqrt[3]{90^2} \cong 2.20912 \text{ m}^2$
120	$0.11 \times \sqrt[3]{120^2} \cong 2.67616 \text{ m}^2$

[10] Considere $A = \mathbb{R}$ e f a regra que associa a cada número real $x \in A$, o seu cubo, isto é:

$$y = f(x) = x^3.$$

Por exemplo:

Ao número -1 associamos o número $f(-1) = (-1)^3 = -1$; ao número 2 associamos o número $f(2) = (2)^3 = 8$; ao número $\sqrt{2}$ associamos o número $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, ao número $t^4 + 1$ associamos o número $f(t^4 + 1) = (t^4 + 1)^3$, etc.

x	$f(x) = x^3$
-1	$(-1)^3 = -1$
2	$(2)^3 = 8$
$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$
t	t^3
$t^{-1/4}$	$t^{-3/4}$
$\sqrt[6]{m}$	$m^{1/2}$
$(t^4 - 4\sqrt[7]{t} + 1)^5$	$(t^4 - 4\sqrt[7]{t} + 1)^{15}$

[11] Seja $A = [0, +\infty)$ e f a regra que associa a cada número real $x \geq 0$ sua raiz quadrada, isto é:

$$y = f(x) = \sqrt{x}.$$

Por exemplo, ao número 0 associamos o número $f(0) = \sqrt{0} = 0$; ao número t^4 associamos o número $f(t^4) = \sqrt{t^4} = t^2$ e ao número -4 não podemos associar nenhum número real, pois, $\sqrt{-4}$ não é um número real.

x	$f(x) = \sqrt{x}$
0	0
2	$\sqrt{2}$
4	2
-4	indefinido
t^4	t^2
$\sqrt[6]{m}$	$\sqrt[12]{m}$
$(t^4 + 4\sqrt[8]{t} + 1)^{10}$	$(t^4 + 4\sqrt[8]{t} + 1)^5$

[12] Seja $A = \mathbb{R}$ e f a seguinte função :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 2 \\ x^3 & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

Ao número -1 associamos o número $f(-1) = (-1)^2 = 1$; ao número 2 associamos o número $f(2) = 2^3 = 8$; ao número $\sqrt{2}$ associamos o número $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2$, etc.

x	0	-1	-3	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$
$f(x)$	0	$(-1)^2 = 1$	$(-3)^2 = 9$	$(2)^3 = 8$	3	$5\sqrt{5}$

[13] Seja $A = \mathbb{R}$ e f a seguinte função :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Por exemplo, ao número -1 associamos o número $f(-1) = 1$; ao número 2 associamos o número $f(2) = 1$; ao número $\sqrt{2}$ associamos o número $f(\sqrt{2}) = -1$, pois $\sqrt{2}$ é irracional; $f(\pi) = -1$; $f(\frac{5}{7}) = 1$.

x	0	-1	2	e	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$
$f(x)$	1	1	1	-1	-1	-1

Nos exemplos [3], [4], [5], [6],[7], [8], [9], [10], [11] e [12] as funções são definidas por fórmulas (que fornecem y quando são atribuídos valores a x). No exemplo [13], a função não é dada por uma fórmula, mas, a definição de função é satisfeita. Em geral, nem todas as funções são necessariamente, definidas de maneira explícita. Por exemplo:

[14] Se, durante o verão de 2014, no Rio de Janeiro, registrássemos a temperatura máxima ocorrida em cada dia, obteríamos uma função.

De fato, a cada dia, está associado uma única temperatura máxima, isto é, a temperatura é função do dia. Embora não exista uma fórmula explícita para expressar a função do exemplo, a definição de função é satisfeita.

Observações 1.1.

1. Em geral, a maioria das funções usadas nas aplicações são dadas por fórmulas ou equações.
2. Mas é preciso ter um pouco de cuidado, pois nem toda equação de duas variáveis define uma função. Por exemplo, a equação $y^2 = x$ não define uma função, pois para $x = 1$ temos dois valores para y , a saber: $y = \pm 1$; mas $y^2 = x$ dá origem a duas funções: $y = f_1(x) = \sqrt{x}$ e $y = f_2(x) = -\sqrt{x}$.

1.2 Domínio e Imagem

Podemos imaginar uma função como uma máquina que utiliza uma certa matéria prima (input) para elaborar algum produto final (output) e o conjunto dos números reais como um depósito de matérias primas. Fica evidente que é fundamental determinar, exatamente, neste depósito, qual matéria prima faz funcionar nossa máquina; caso contrário, com certeza, a estragaremos.



Figura 1.4:

Esta analogia nos leva às seguintes definições:

Definição 1.2.

1. O conjunto de todos os $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem a definição de função é chamado **domínio da função** f e é denotado por $Dom(f)$.
2. O conjunto de todos os $y \in \mathbb{R}$ tais que $y = f(x)$, onde $x \in Dom(f)$ é chamado **imagem da função** f e é denotado por $Im(f)$.

Observação 1.1. É claro que $Dom(f) \subset \mathbb{R}$, $Im(f) \subset \mathbb{R}$, e que $Dom(f)$ é o conjunto dos valores da variável independente para os quais f é definida; $Im(f)$ é o conjunto dos valores da variável dependente calculados a partir dos elementos do domínio.

Definição 1.3. Duas funções f e g são ditas **idênticas** se tem o mesmo domínio D e:

$$f(x) = g(x), \quad \forall x \in D.$$

Por exemplo, as funções $f(x) = x^2, x > 0$ e $g(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ são diferentes pois seus domínios são diferentes.

Antes de apresentar alguns exemplos, voltamos a insistir que para estudar qualquer função, devemos sempre determinar os conjuntos $Dom(f)$ e $Im(f)$.

Exemplo 1.2.

[1] A área de um círculo de raio r é $A(r) = \pi r^2$; r sendo o raio, temos: $r > 0$; logo,

$$Dom(A) = Im(A) = (0, +\infty).$$

[2] Considere a função $y = f(x) = x^2$; é claro que não existem restrições para o número real x ; logo, temos que:

$$Dom(f) = \mathbb{R}$$

e $y = x^2 \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$; então $Im(f) \subset [0, +\infty)$. Como todo número real não negativo possui raiz quadrada real; então:

$$Im(f) = [0, +\infty).$$

[3] Considere a função $y = f(x) = \sqrt{x}$. Uma raiz quadrada existe somente se $x \geq 0$; então:

$$Dom(f) = [0, +\infty).$$

Como todo número real $x \geq 0$ possui raiz quadrada:

$$Im(f) = [0, +\infty).$$

[4] Considere a função $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Como no caso anterior, $\sqrt{x^2 - 1}$ existe somente se $x^2 - 1 \geq 0$; resolvendo a inequação temos:

$$Dom(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \text{ e, novamente, temos: } Im(f) = [0, +\infty).$$

[5] Considere a função $y = f(x) = \frac{1}{x}$; é claro que f é definida se e somente se $x \neq 0$; logo temos que:

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty);$$

por outro lado, uma fração é nula se e somente se o numerador é nulo; então

$$Im(f) = \mathbb{R} - \{0\}.$$

[6] Considere a função $y = f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$; como no caso anterior o denominador da fração não pode ser nulo; logo $x^2 - 1 \neq 0$; então, $x \neq \pm 1$ e:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}; \quad \text{Im}(f) = \mathbb{R} - \{0\}.$$

[7] Considere a função $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$; como a raiz cúbica de um número positivo ou negativo é positiva ou negativa,

$$\text{Dom}(f) = \text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

[8] Considere a função $y = f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x^2 - 1}$.

A função é definida se $x \geq 0$ e $x^2 - 1 \geq 0$ simultaneamente. Resolvendo as inequações, obtemos $x \geq 1$; logo,

$$\text{Dom}(f) = [1, +\infty) \quad \text{e} \quad \text{Im}(f) = (0, +\infty).$$

Agora que determinamos nos exemplos os domínios e imagens das funções, podemos avaliar, sem perigo, estas funções.

[9] Se $f(x) = \sqrt{x}$, então $\text{Dom}(f) = [0, +\infty)$, logo podemos calcular:

$$f(5) = \sqrt{5}, \quad f(\pi) = \sqrt{\pi} \quad \text{e} \quad (x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1},$$

pois $5, \pi$ e $x^2 + 1$ são sempre positivos.

[10] Se $g(x) = \frac{1}{x}$, então $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, logo podemos calcular:

$$g\left(\frac{1}{t}\right) = t, \quad \text{se } t \neq 0.$$

1.3 Gráficos de Funções

A representação geométrica de uma função de uma variável real é dada por seu **gráfico** no plano coordenado xy .

Definição 1.4. O gráfico de uma função $y = f(x)$ é o seguinte subconjunto do plano:

$$\boxed{G(f) = \{(x, f(x)) / x \in \text{Dom}(f)\}}$$

Observações 1.2.

1. Geometricamente $G(f)$ é, em geral, uma curva no plano. Nos exemplos [1], [13] e [14] da seção 2.1, $G(f)$ não é uma curva.

2. Nos casos em que $G(f)$ é uma curva, intuitivamente podemos pensar que os conjuntos $Dom(f)$ e $Im(f)$ representam a “largura” e “altura” máxima da curva, respectivamente.
3. Inicialmente, a construção dos gráficos será realizada fazendo uma tabela, onde as entradas da tabela são os elementos do domínio e as saídas, as respectivas imagens.

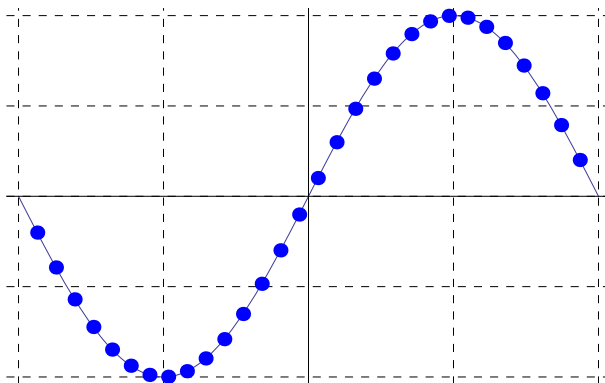


Figura 1.5: Gráfico de uma função.

4. Este processo é demorado e ineficiente e será abandonado nos capítulos seguintes, quando serão dadas técnicas mais eficientes para fazer o gráfico.
5. É importante não confundir a função com seu gráfico, pois o gráfico é um subconjunto do plano.

Exemplo 1.3.

[1] Esboce o gráfico da função dada pela seguinte tabela, que mostra a vazão semanal de água de uma represa:

Dia	m^3/seg
1	360
2	510
3	870
4	870
5	950
6	497
7	510

O gráfico desta função não representa uma curva. A primeira coluna da tabela representa a abscissa e a segunda coluna as respectivas ordenadas; logo, obtemos:

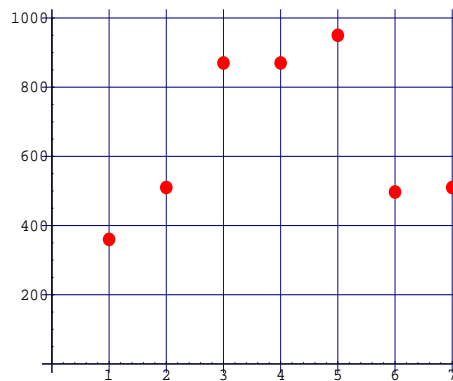


Figura 1.6: Gráfico da vazão semanal de água da represa.

[2] Esboce o gráfico da função $f(x) = x^2$. Note que $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [0, \infty)$. Fazendo a tabela:

x	$f(x) = x^2$
0	0
$\pm 1/4$	$1/16$
$\pm 1/3$	$1/9$
$\pm 1/2$	$1/4$
± 1	1
± 2	4
± 3	9

$x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, os pontos de abscissas x e $-x$ tem a mesma ordenada $y = x^2$. Logo, o gráfico de f fica situado no primeiro e segundo quadrantes.

Observando a tabela, conclui-se que se o valor de $|x|$ aumenta, os valores da correspondente ordenada aumentam mais rapidamente. Se os valores de $|x|$ aproximam-se a zero, os valores correspondentes da ordenada aproximam-se mais rapidamente de zero.

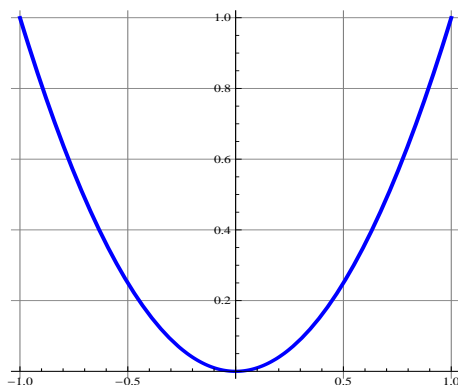


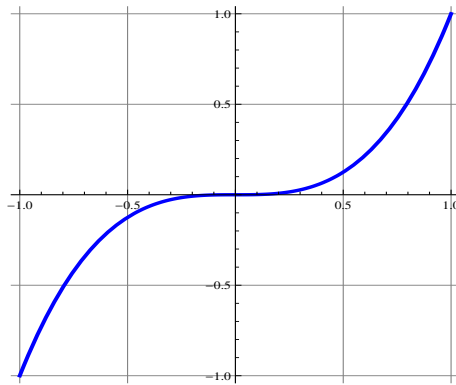
Figura 1.7: Gráfico de $f(x) = x^2$.

[3] Esboce o gráfico da função $f(x) = x^3$. Note que $Dom(f) = Im(f) = \mathbb{R}$. Fazendo a tabela:

x	$f(x) = x^3$
0	0
$\pm 1/4$	$\pm 1/64$
$\pm 1/3$	$\pm 1/27$
$\pm 1/2$	$\pm 1/8$
± 1	± 1
± 2	± 8
± 3	± 27

Se $x \geq 0$, então $y \geq 0$ e se $x < 0$, então $y < 0$. Logo, o gráfico está situado no primeiro e terceiro quadrantes.

Observando a tabela, vemos que quando $x > 0$ e x cresce, os valores correspondentes da ordenada y também crescem e mais rapidamente. Quando $x < 0$ e x decresce, os valores correspondentes da ordenada y decrescem e mais rapidamente. O gráfico de f é:

Figura 1.8: Gráfico de $f(x) = x^3$.

[4] Esboce o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$. Note que $\text{Dom}(f) = \text{Im}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. Fazendo a tabela:

x	$f(x) = \frac{1}{x}$
0	0
$\pm 1/100$	± 100
$\pm 1/4$	± 4
$\pm 1/3$	± 3
$\pm 1/2$	± 2
± 1	± 1
± 2	$\pm 1/2$
± 3	$\pm 1/3$

Se $x > 0$, então $y > 0$ e se $x < 0$, então $y < 0$. Logo, o gráfico está situado no primeiro e terceiro quadrantes.

Observando a tabela, vemos que quando $x > 0$ e x cresce, os valores correspondentes da ordenada y aproximam-se de zero e à medida que x aproxima-se de zero, os valores correspondentes da ordenada y aumentam muito.

Quando $x < 0$ e x cresce, os valores correspondentes da ordenada y decrescem e à medida que x decresce, os valores correspondentes da ordenada y aproximam-se de zero. O gráfico de f é:

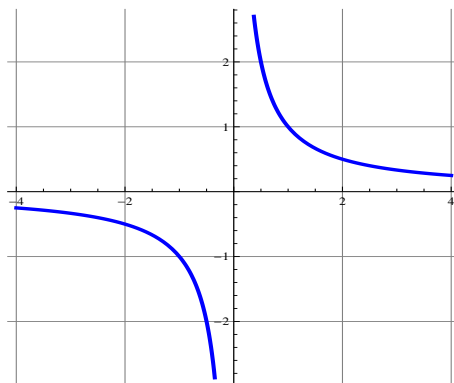


Figura 1.9: Gráfico de $f(x) = 1/x$.

[5] Esboce o gráfico da seguinte função : $f(x) = \begin{cases} x - x^2 & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \\ x & \text{se } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ x^2 + x & \text{se } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$

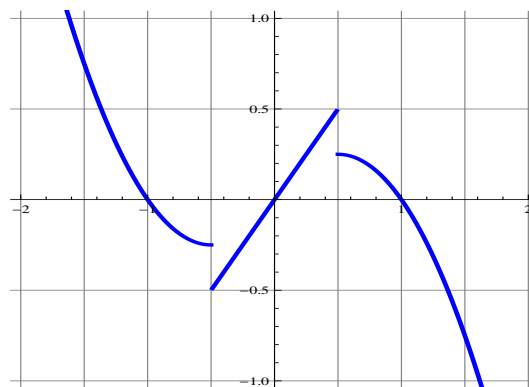


Figura 1.10: Gráfico de $f(x)$ do exemplo [5].

[6] Determine a função f cujo gráfico é:

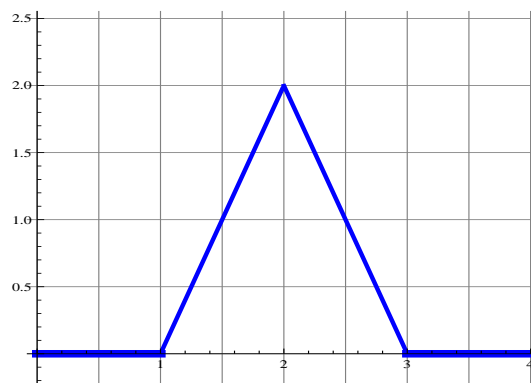


Figura 1.11:

Claramente, $f(x) = 0$ se $x < 1$ e $x > 3$. Determinemos os segmentos de reta que ligam os pontos $(1, 0)$ e $(2, 2)$, $(2, 2)$ e $(3, 0)$, respectivamente.

A equação da reta que passa por $(1, 0)$ e $(2, 2)$ é $y = 2(x - 1)$.

A equação da reta que passa por $(2, 2)$ e $(3, 0)$ é $y = -2(x - 3)$; então:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 2(x - 1) & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ -2(x - 3) & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{se } 3 < x \end{cases}.$$

Observação 1.2.

Os gráficos de $f(x) + c$, $f(x + c)$, $cf(x)$ e $f(cx)$ ($c \in \mathbb{R}$) podem ser obtidos diretamente do gráfico de $f(x)$. De fato.

1. O gráfico de $g(x) = f(x + c)$ pode ser obtido a partir do gráfico de f trasladando-o ao longo do eixo dos x em c unidades para a esquerda se $c > 0$, ou trasladando-o ao longo do eixo dos x em c unidades para a direita se $c < 0$.
2. O gráfico de $g(x) = f(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ pode ser obtido do gráfico de f trasladando-o ao longo do eixo dos y em c unidades para cima se $c > 0$ ou c unidades para baixo se $c < 0$.
3. O gráfico de $g(x) = cf(x)$, $c > 1$ pode ser obtido "esticando-se" o gráfico de f verticalmente pelo fator c .
4. O gráfico de $g(x) = f(cx)$, $c > 1$ pode ser obtido "comprimindo-se" o gráfico de f horizontalmente pelo fator c .
5. O gráfico de $g(x) = cf(x)$, $0 < c < 1$ pode ser obtido "comprimindo-se" o gráfico de f verticalmente pelo fator c .
6. O gráfico de $g(x) = f(cx)$, $0 < c < 1$ pode ser obtido "esticando-se" o gráfico de f horizontalmente pelo fator c .
7. O gráfico de $g(x) = -f(x)$ pode ser obtido pela reflexão do gráfico de f em torno do eixo dos x .
8. O gráfico de $g(x) = f(-x)$ pode ser obtido pela reflexão do gráfico de f em torno do eixo dos y . Em cada caso é conveniente especificar os domínios e imagens.

Exemplo 1.4.

[1] Os gráficos de $f(x) = x$ (azul), de $f(-2x) = -2x$ (vermelho) e $2f(x+1) = 2(x+1)$ (verde).

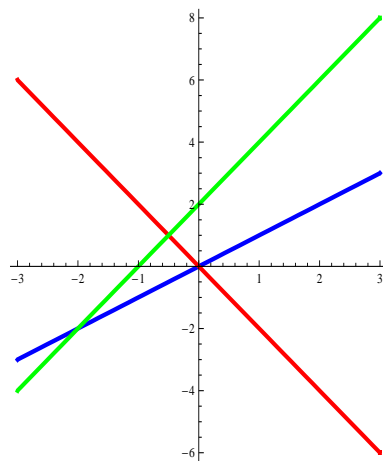


Figura 1.12: Gráficos do exemplo [1].

[2] Os gráficos de $y = f(x) = x^2$ (azul), de $y = f(x+1) = (x+1)^2$ (vermelho) e $y = 2f(x-1) = 2(x-1)^2$ (verde):

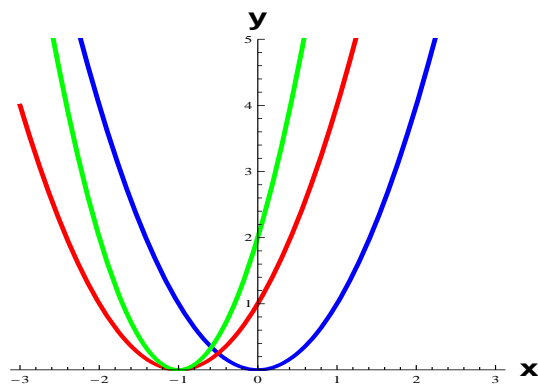


Figura 1.13: Gráficos do exemplo [2].

[3] Os gráficos de $f(x) = x^3$ (azul), de $f(x+1) = (x+1)^3$ (vermelho) e $f(-3x) = -27x^3$ (verde):

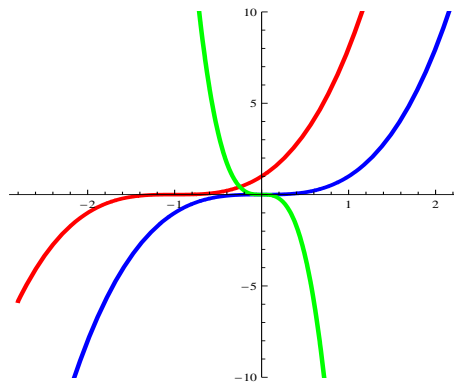


Figura 1.14: Gráficos do exemplo [3].

A seguir daremos vários exemplos de funções, com seus respectivos domínios, imagens e gráficos. A idéia é formar um "catálogo" das funções mais usadas, as quais serão utilizadas nos exemplos e exercícios.

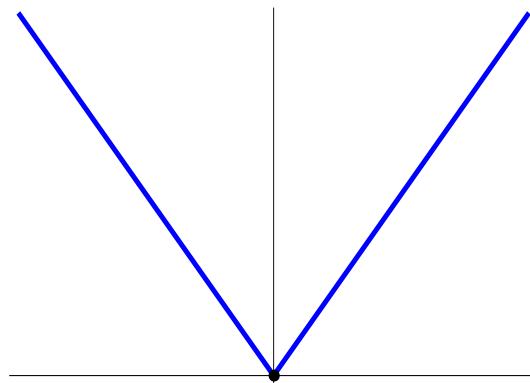
1.4 Função Módulo ou Valor Absoluto

Esta função é definida por:

$$y = f(x) = |x|$$

Note que $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [0, +\infty)$, pois o valor absoluto de um número real é sempre não negativo.

O gráfico é constituído de duas semi-retas de coeficientes angulares 1 e -1 , respectivamente, que se intersectam em $(0, 0)$.

Figura 1.15: Gráfico de $f(x) = |x|$.

Observe que os gráficos de $|f(x)|$ e de $f(|x|)$ podem ser obtidos do gráfico de $f(x)$. De fato, $g(x) = |f(x)|$ é obtido refletindo através do eixo dos x , no primeiro e segundo

quadrantes a porção do gráfico de f que esteja no terceiro e quarto quadrantes.

Como exercício, diga como pode ser obtido o gráfico de $f(|x|)$.

Exemplo 1.5.

[1] Escreva a função $f(x) = |x - 3|$ sem usar valor absoluto.

Primeiramente, note que $f(x) = 0$ se, e somente se $x = 3$. Pela definição do valor absoluto, temos:

$$f(x) = \begin{cases} -(x - 3) & \text{se } x < 3 \\ x - 3 & \text{se } x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} -x + 3 & \text{se } x < 3 \\ x - 3 & \text{se } x \geq 3. \end{cases}$$

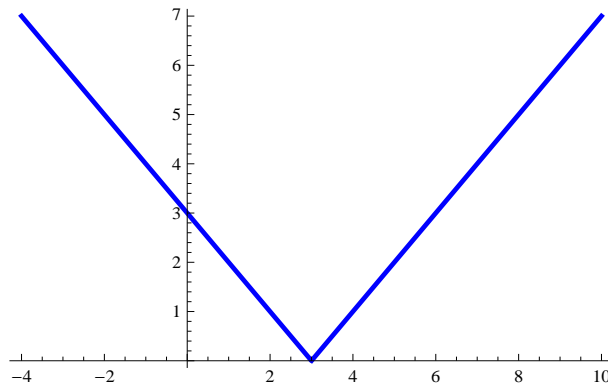


Figura 1.16: Gráfico de $f(x) = |x - 3|$.

[2] Escreva a função $f(x) = \frac{|x|}{x}$ sem usar valor absoluto.

Primeiramente, note que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. Pela definição do valor absoluto, temos:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{x}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

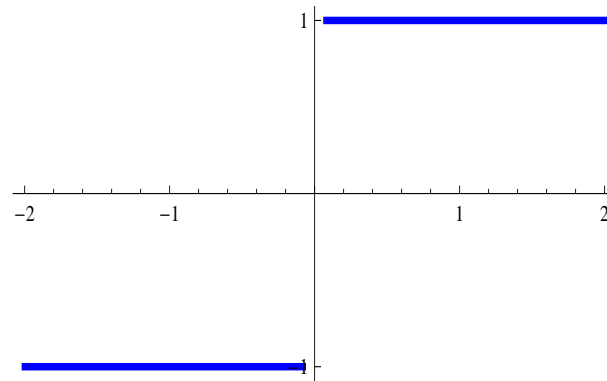


Figura 1.17: Gráfico de $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

[3] Esboce os gráficos de:

(a) $g(x) = |x - 1| + 2$.

(b) $h(x) = |x^3|$.

Seja $f(x) = |x|$.

(a) Logo, $g(x) = f(x - 1) + 2$; então, o gráfico de g é obtido a partir do gráfico da função f trasladando-o ao longo do eixo dos x em 1 unidade para a direita e 2 unidades para cima. O gráfico é constituído de dois segmentos de retas de coeficientes angulares 1 e -1 , passando por $(1,2)$ e $(0,3)$, respectivamente.

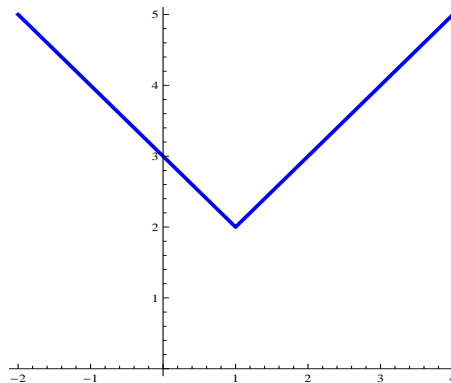
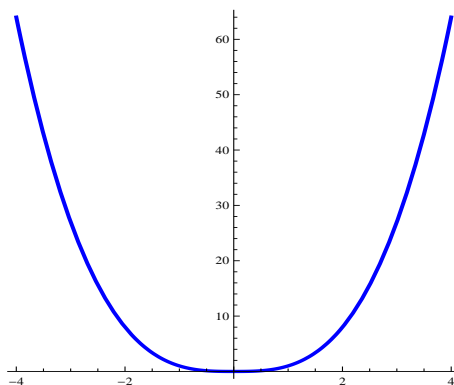


Figura 1.18: Gráfico de g .

(b) Por outro lado $h(x) = f(x^3)$.

Figura 1.19: Gráfico de h .

1.5 Função Polinomial do Primeiro Grau ou Afim

Esta função é definida por:

$$y = f(x) = m x + b$$

onde $m, b \in \mathbb{R}$. Note que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Observações 1.3.

1. Usando a definição de distância entre pontos do plano não é difícil provar que dados três pontos no gráfico de f , estes são colineares; o gráfico de f é a reta de coeficiente angular m passando por $(0, b)$. E, reciprocamente, dados dois pontos que determinem uma reta não vertical existe uma função afim cujo gráfico é a reta. (Verifique!).
2. Note que:

$$\frac{f(c) - f(d)}{c - d} = \frac{m c + b - m d - b}{c - d} = \frac{m(c - d)}{c - d} = m \implies m = \frac{f(c) - f(d)}{c - d},$$

para todo $c, d \in \mathbb{R}, c \neq d$.

3. Logo, $f(0) = b$, $f(1) = m + b$, $f(2) = 2m + b = f(1) + m$; em geral:

$$f(k + 1) = f(k) + m,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

4. Os números, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$..., $f(n)$, ... formam uma progressão aritmética de razão m .

5. Fazendo $h = c - d$, temos:

$$m = \frac{f(d+h) - f(d)}{h}.$$

6. A propriedade que caracteriza as funções polinomiais de primeiro grau é que:

$$f(x+h) - f(x)$$

depende apenas de h , isto é a acréscimos iguais dados a x correspondem acréscimos iguais para f . É esta característica que deve ser utilizada nas aplicações.

7. Quando $m = 0$, a função é chamada **constante** e seu gráfico é uma reta paralela ao eixo dos x que passa pelo ponto $(0, b)$.

Exemplo 1.6.

Usando as observações 1.2, temos:

[1] À esquerda, os gráficos de $f(x) = x + 1$ (negro), e $\frac{1}{2}f(x) = \frac{x+1}{2}$ (azul) e $2f(x) = 2x + 2$ (vermelho), respectivamente.

[2] À direita, os gráficos de $f(x) = x + 1$ (negro), e $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} + 1$ (azul) e $f(-2x) = 1 - 2x$ (vermelho), respectivamente:

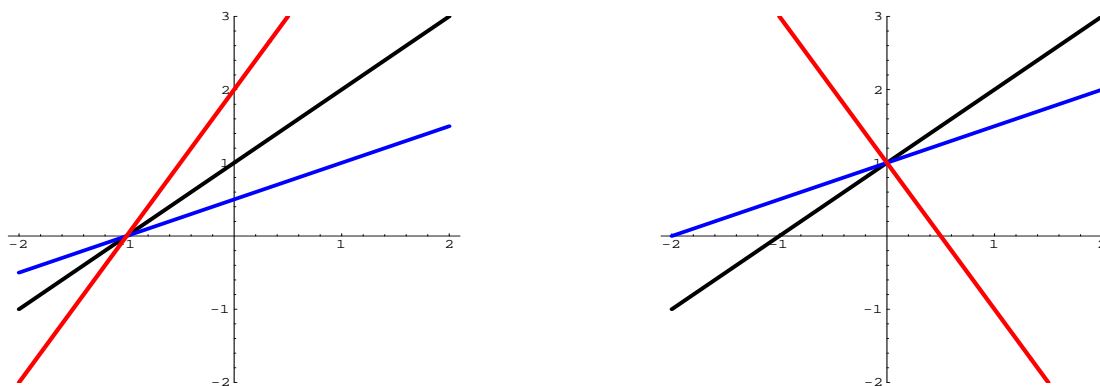


Figura 1.20: Gráficos de [1] e [2], respectivamente.

Quando $b = 0$, obtemos um tipo importante de função, chamada **função linear**. Portanto, a função linear é definida por:

$$f(x) = m x, \quad m \in \mathbb{R}$$

e é modelo matemático para resolver problemas que envolvem proporcionalidade. Seu gráfico é uma reta de coeficiente angular m passando pela origem.

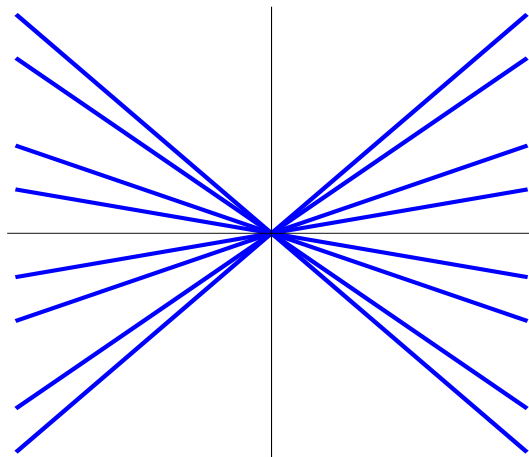


Figura 1.21: O gráfico de $f(x) = m x$, para diversos m .

Proposição 1.1. Seja f uma função linear:

1. Para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, temos que:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

2. Como $f(1) = m$, $f(2) = f(1) + f(1) = 2m$; em geral:

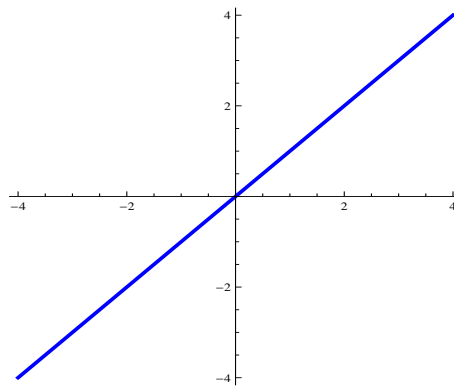
$$f(nx) = n f(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$.

3. Quando $m = 1$, temos:

$$f(x) = x,$$

que é chamada função **identidade**. Seu gráfico é uma reta de coeficiente angular 1.

Figura 1.22: O gráfico de $f(x) = x$.**Exemplo 1.7.**

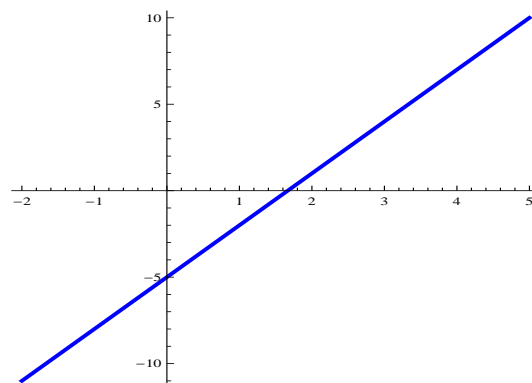
[1] Suponha que os seguintes dados foram coletados num experimento. Se a teoria subjacente à experiência indica que os dados tem uma correlação afim, ache tal função afim.

x	-10.3	-6.8	1.5	14.6	234.6
y	-35.9	-25.4	-0.5	38.8	698.8

Seja $y = f(x) = ax + b$. Pelas propriedades das funções afins:

$$\begin{aligned} -0.5 &= f(1.5) = 1.5a + b \\ -35.9 &= f(-10.3) = -10.3a + b. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtemos: $a = 3$ e $b = -5$; logo, $f(x) = 3x - 5$.

Figura 1.23: A reta $y = 3x - 5$.

Note que como o gráfico de uma função afim é uma reta, podemos tomar qualquer par de pontos e obtemos a mesma função; por exemplo:

$$\begin{aligned} 38.8 &= f(14.6) = 14.6a + b \\ 698.8 &= f(234.6) = 234.6a + b. \end{aligned}$$

[2] Sabemos que a pressão da água do mar é função da profundidade. Denotemos por P a pressão e H a profundidade relativa ao nível do mar. Experimentalmente verifica-se que a pressão da água ao nível do mar é de 1 atm , ($\text{atm} = \text{atmosfera}$) e que acréscimos iguais na profundidade correspondem a acréscimos iguais na pressão. Logo, ao passar de um ponto do mar para outro situado a 1 m ($\text{m} = \text{metro}$) de profundidade, haverá um aumento da pressão de aproximadamente 1 atm . Passando do nível do mar a uma profundidade de $H \text{ m}$, a pressão aumentará $H \times 0.1$.

A pressão da água, em atmosferas, é dada pela função polinomial do primeiro grau:

$$P = f(H) = 0.1H + 1.$$

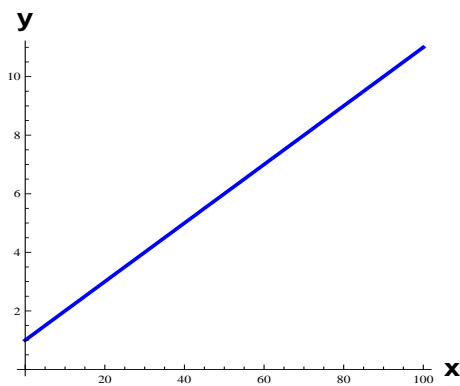


Figura 1.24: Gráfico de $P = f(H)$.

A pressão da água a uma profundidade de 100 m é $P = f(100) = 0.1 \times 100 + 1 = 11 \text{ atm}$. Se a pressão da água é de 50 atm , a profundidade é $50 = 0.1 \times H + 1$; logo, $H = 490 \text{ m}$.

[3] Sabe-se que 100 g ($\text{g} = \text{gramas}$) de soja contem 35 g de proteínas e 100 g de lentilhas contem 26 g de proteínas. Um adulto médio, num clima moderado, necessita de 70 g de proteínas diárias em sua alimentação. Uma pessoa deseja prover estas 70 g de proteínas somente com soja e/ou lentilhas. Se x é a quantidade de soja e y a quantidade de lentilhas diárias (x e y medidas em unidades de 100 g), qual é a relação entre x e y ?

A quantidade de proteína na soja é $35x$ e a quantidade de proteína nas lentilhas é $26y$ por dia (ambas medida em gramas). O total de proteínas diário é 70 ; logo, temos a equação de primeiro grau:

$$35x + 26y = 70 \implies f(x) = -\frac{35x}{26} + \frac{70}{26}.$$

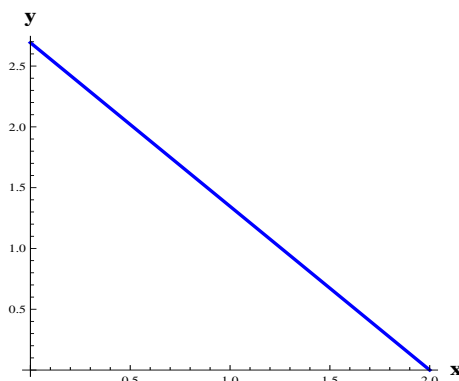


Figura 1.25: Gráfico de $35x + 26y = 70$.

$x, y \geq 0$. Os pontos do gráfico são as possíveis combinações de soja e lentilhas para fornecer 70 gramas de proteínas diárias.

[4] (**Lei de Hooke**): Se um peso de x unidades for pendurado em uma mola esta se alonga em um valor y que é diretamente proporcional a x , isto é,

$$y = f(x) = kx.$$

A constante k depende da rigidez da mola (quanto mais rígida for a mola, menor será o valor de k).

[5] O número de centímetros A de água produzido pelo derretimento de neve varia diretamente com P , o número de centímetros de neve. Os meteorologistas descobriram que 150 cm de neve derretida dá 16,8 cm de água. Determine quantos centímetros de água se obtém de 500 cm de neve?

Note que temos: $A(P) = kP$; logo:

$$A(150) = k \cdot 150$$

$$16.8 = k \cdot 150 \implies k = 0.112 \implies A(P) = 0.112P \implies A(500) = 56 \text{ cm}.$$

1.6 Função Polinomial de Segundo Grau ou Quadrática

Esta função é definida por:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$. Claramente $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Observações 1.4.

1. Para todo $h \in \mathbb{R}$, $f(x+h) - f(x)$ é uma função afim em x .
2. A $Im(f)$ e o gráfico de f dependem essencialmente do discriminante Δ da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ e do coeficiente a do termo principal.
3. Não é difícil verificar que o gráfico da função $f(x) = ax^2$ é uma parábola de foco $(0, 1/4a)$ e diretriz:

$$y = -\frac{1}{4a}.$$

4. Fazendo uma translação adequada dos eixos coordenados verifica-se que o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo dos y , tem foco:

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac + b^2 - 1}{4a} \right)$$

e diretriz:

$$y = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}.$$

1.6.1 Vértice da parábola

O vértice da parábola $y = ax^2 + bx + c$ é o ponto onde a parábola intersecta seu eixo e é dado por:

$$v = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right).$$

Se $a > 0$, então v é o ponto da parábola de menor altura, pois o ponto mais próximo da diretriz é o vértice. Logo, a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ atinge seu menor valor.

Se $a < 0$, então v é o ponto da parábola de maior altura. Analogamente ao caso anterior, a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ atinge seu maior valor.

Não é difícil ver que se v_1 é a abscissa do vértice da parábola $y = f(x)$, então:

$$f(v_1 + x) = f(v_1 - x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Usando completamento dos quadrados:

$$f(x) = a(x - v_1)^2 + q,$$

onde $q = f(v_1)$.

Gráficos da Função Quadrática

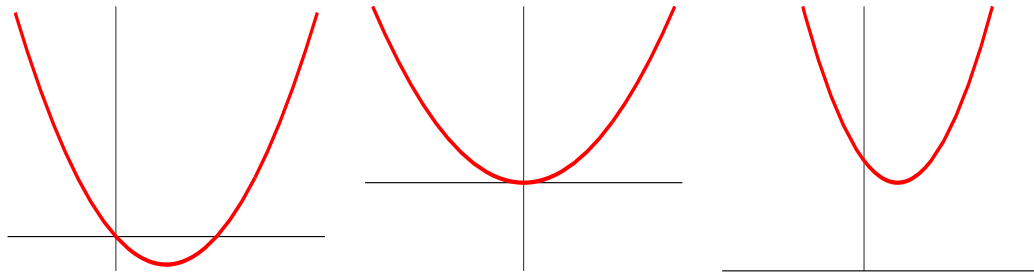


Figura 1.26: Gráficos para $a > 0$, $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$, respectivamente .

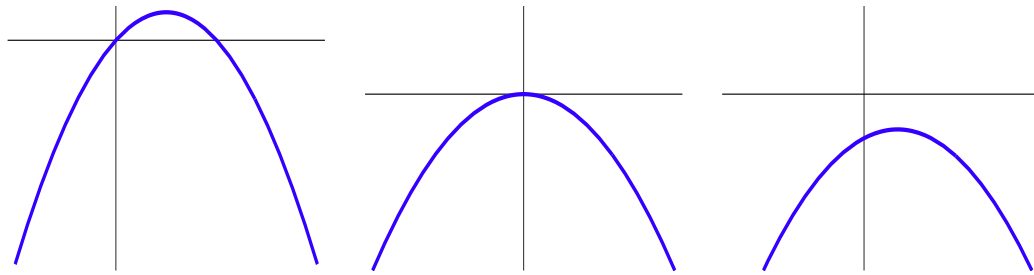


Figura 1.27: Gráficos para $a < 0$, $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$, respectivamente .

Exemplo 1.8.

[1] Determine a função quadrática se seu gráfico passa pelos pontos $(-1, 2)$, $(1, -2)$ e $(3, 4)$.

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, a função quadrática, então devemos ter:

$$\begin{cases} f(-1) = 2 \\ f(1) = -2 \\ f(3) = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a - b + c = 2 \\ a + b + c = -2 \\ 9a + 3b + c = 4 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $a = \frac{5}{4}$, $b = -2$ e $c = -\frac{5}{4}$; logo:

$$f(x) = \frac{5x^2}{4} - 2x - \frac{5}{4}.$$

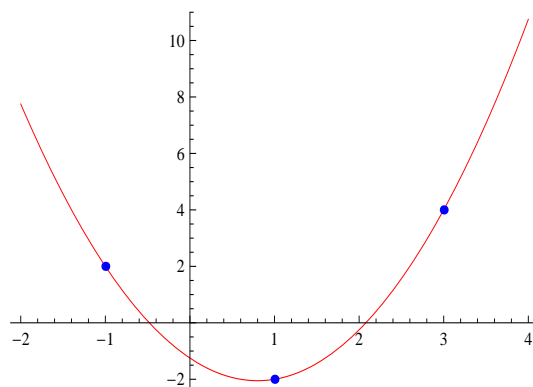


Figura 1.28: A parábola do exemplo [1].

[2] A área de uma esfera é função quadrática de seu raio. De fato, $S(r) = 4\pi r^2$.

[3] (Lei do fluxo laminar de Poiseuille): Fluxo sanguíneo através de um vaso, como artérias ou veias. É uma função quadrática em d :

$$v(d) = \frac{P(R^2 - d^2)}{4l\eta}.$$

Para o sangue humano numa veia: $\eta = 0.0027$, $l = 2$, $R = 8 \times 10^{-5}$ e $P = 4 \times 10^3$, logo:

$$v(d) = 0.001185185185 - 185185.1852 d^2 \quad \text{cm/seg.}$$

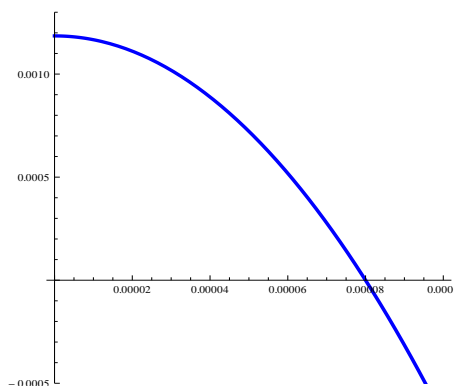


Figura 1.29: A parábola do exemplo [3].

[4] A trajetória de um corpo lançado obliquamente, desprezando a resistência do ar, é dada por uma função polinomial do segundo grau. A partir de seu deslocamento horizontal (ao longo do eixo dos x), obtemos sua altura y . Por exemplo, um objeto é lançado no ar. Se sua altura, em metros, t segundos após o lançamento é dada por $y = f(t) = 20t - 10t^2$, qual é a altura máxima atingida pelo objeto e em que instante ele a atinge?

Determinemos o vértice da parábola $y = 20t - 10t^2$, $\Delta = 400$, $a = -10 < 0$ e $b = 20$; $v = (1, 10)$. Logo, a altura máxima é de 10 m , atingida 1 segundo após o lançamento.

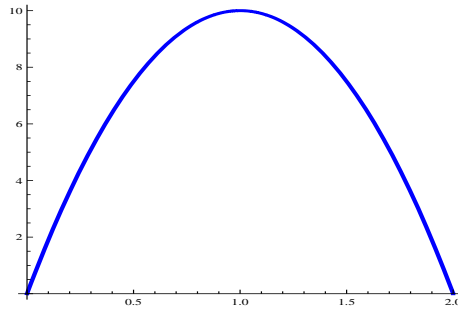


Figura 1.30: A parábola do exemplo [3].

[5] A emissão de partículas de poluição produzida pelos ônibus, na atmosfera, de uma cidade é dada por:

$$h(t) = -10t^2 + 300t + 2.61$$

t em anos e h em milhares de toneladas, onde se utilizou como ano base 2000.

(a) De quanto foi a poluição no ano de 2007?

(b) Que ano a poluição atingiu o máximo a poluição?

(a) Calculamos $h(8) = 1762.61$ milhares de toneladas.

(b) Como o fator da potência quadrática é negativo, temos que o valor máximo será atingido na ordenada do vértice:

$$-\frac{b}{2a} = 15.$$

Logo, o máximo de poluição será atingido no ano de 2015.

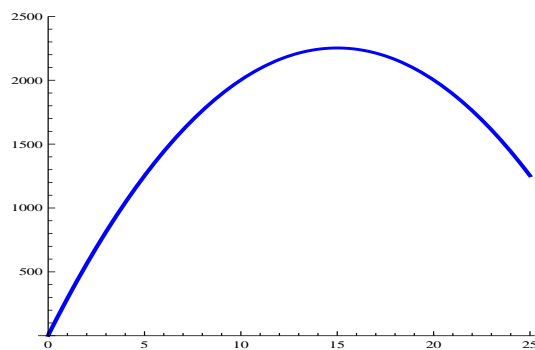


Figura 1.31: A parábola do exemplo [3].

[6] Pelas observações 1.2, os gráficos de $y = f(x) = x^2$ (azul), $y = f\left(-\frac{4x}{3}\right) = \frac{16x^2}{9}$ (vermelha) e $y = f(2x) = 4x^2$ (verde), são:

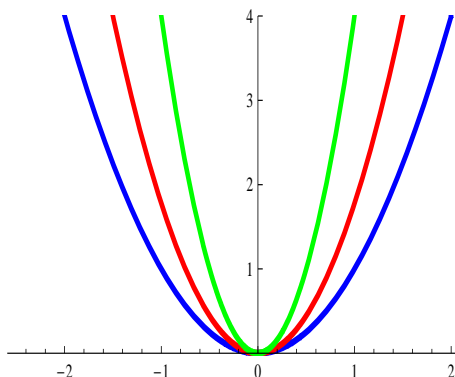


Figura 1.32: As parábolas do exemplo [4].

1.7 Função Polinomial de Grau n

A função polinomial de grau n é definida por:

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

onde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$; $a_n \neq 0$; $Dom(f) = \mathbb{R}$, mas a $Im(f)$ e o gráfico de f dependem essencialmente do grau do polinômio e de a_n . Esta função é, claramente, a generalização natural das funções anteriores.

Como exemplo, as funções: $f(x) = x^3 - x$ e $g(x) = 24x^4 + 1$; $Im(f) = \mathbb{R}$ e $Im(g) = [1, +\infty)$. Seus respectivos gráficos são:

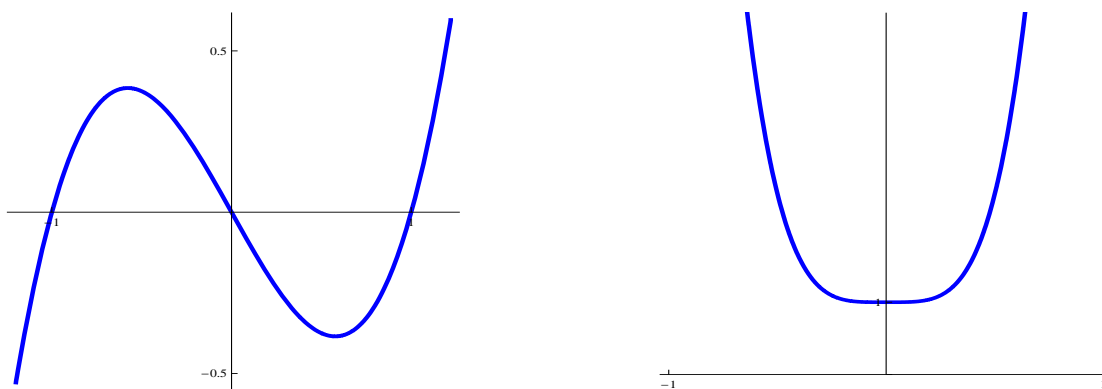


Figura 1.33: Gráficos de f e g , respectivamente.

Exemplo 1.9.

[1] O faturamento de uma empresa, num certo período, foi expresso em função do número x de vendedores por $f(x) = x^3 - 3x^2 - 18x$ reais por dia. Quantos eram os vendedores no dia em que o faturamento atingiu 70 mil reais?

Estudemos as raízes inteiras de $f(x) = 70$, isto é, $x^3 - 3x^2 - 18x - 70 = 0$. Não é difícil ver que 7 é uma raiz do polinômio; de fato:

$$x^3 - 3x^2 - 18x - 70 = (x - 7)(x^2 + 4x + 10);$$

logo, são 7 vendedores.

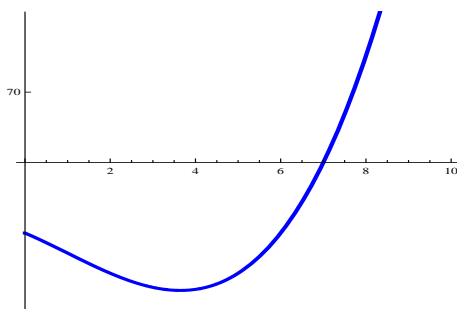


Figura 1.34: Gráfico de $f(x) = 70$.

[2] Suponha que foram introduzidos numa ilha, 144 indivíduos de uma certa espécie de macacos. Inicialmente, a quantidade de indivíduos tende a crescer; após um certo tempo, o alimento e a população de macacos decresce. Se o número de macacos no tempo t , em anos, é dado por:

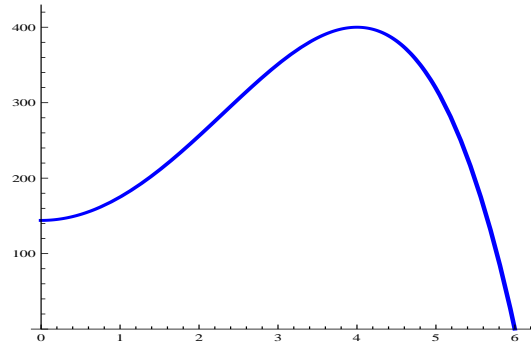
$$P(t) = -t^4 + 32t^2 + 144,$$

quando a população se extingue?

Estudemos as raízes inteiras de $P(t) = 0$, isto é, $-t^4 + 32t^2 + 144 = 0$. Não é difícil ver que -6 e 6 são raízes do polinômio; de fato:

$$-t^4 + 32t^2 + 144 = -(t - 6)(t + 6)(t^2 + 4);$$

como $t \geq 0$, temos que em 6 anos a população será extinta.

Figura 1.35: Gráfico de $P = P(t)$.

1.8 Funções Pares e Ímpares

Definição 1.5.

1. Uma função f é dita **par** se, para todo $x \in \text{Dom}(f)$ então $-x \in \text{Dom}(f)$ e

$$f(-x) = f(x)$$

2. Uma função f é dita **ímpar** se, para todo $x \in \text{Dom}(f)$ então $-x \in \text{Dom}(f)$ e

$$f(-x) = -f(x)$$

Pelas definições de função par e de função ímpar é fácil ver que o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo dos y e o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.

Exemplo 1.10.

[1] Seja $y = f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, a primeira parte das definições é verificada e:

$$f(-x) = (-x)^2 + \frac{1}{(-x)^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} = f(x);$$

logo, f é função par.

[2] Seja $y = f(x) = x^5 - x^3$.

como $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, a primeira parte das definições é verificada e:

$$f(-x) = (-x)^5 - (-x)^3 = -(x^5) + x^3 = -f(x);$$

logo, f é função ímpar.

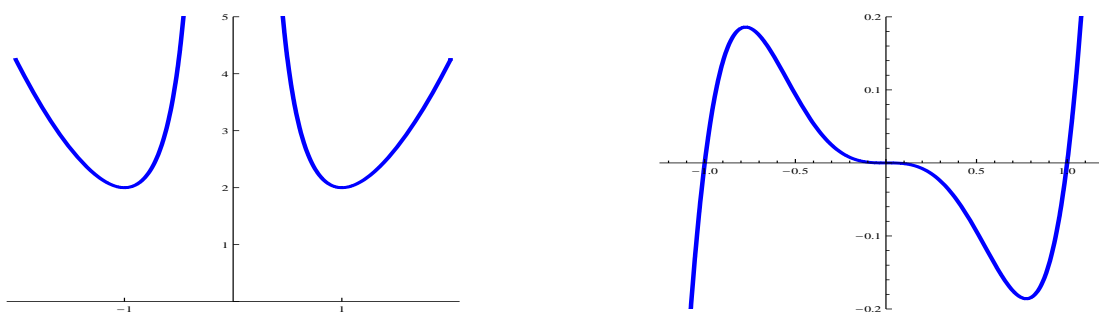


Figura 1.36: Gráficos dos exemplos [1] e [2], respectivamente.

1.8.1 Aplicação

Seja $n \in \mathbb{N}$, tal que $n > 1$, definamos:

$$y = f(x) = x^n.$$

A função é par se n é par e é ímpar se n é ímpar.

Para $x \in (0, 1)$, tem-se:

$$x^2 > x^3 > x^4 > x^5 > x^6 > \dots\dots\dots,$$

isto é, quanto maior o valor de n , menor o valor da função. Consequentemente, o gráfico de $y = x^5$, está abaixo do gráfico de $y = x^4$, que também está abaixo do gráfico de $y = x^3$, e assim sucessivamente. Para valores de x próximos de zero, as potências menores dominam e quanto maior o expoente n , os gráficos ficam cada vez mais “planos” (quase paralelos ao eixo dos x).

Para $x \in (1, +\infty)$, tem-se:

$$x^2 < x^3 < x^4 < x^5 < x^6 < \dots\dots\dots,$$

ou seja para valores grandes de x , as potências de maior grau dominam as de menor grau.

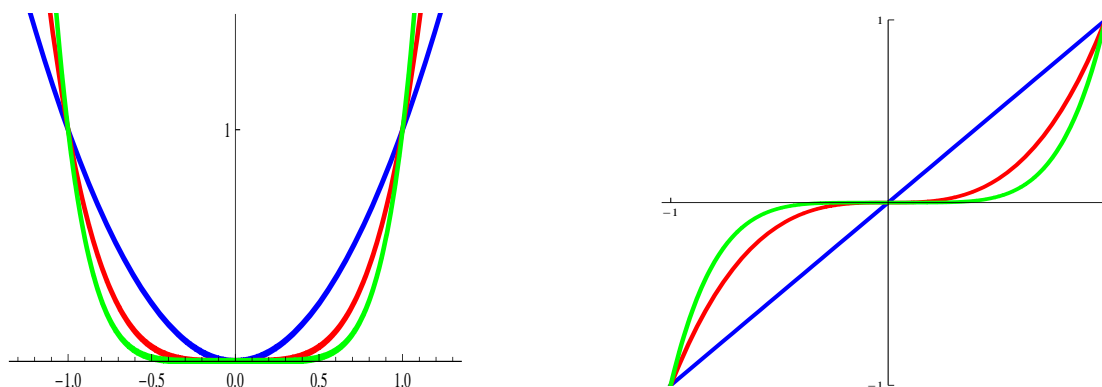


Figura 1.37: Gráficos de $y = f(x) = x^n$ para $n = 2, 4, 6$ e $n = 1, 3, 5$, respectivamente.

Observações 1.5.

1. Algumas vezes, para esboçar o gráfico de uma função é conveniente verificar se a função é par ou ímpar, pois a simetria presente nos gráficos destas funções facilitará o desenho.
2. Note que existem muitas funções que não são pares e nem ímpares.

Por exemplo, seja $f(x) = x^2 + x$; como $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e $f(-x) = x^2 - x$; logo, $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$; então, f não é função par nem ímpar.

Achar os x tais que $f(x) > b$ é equivalente a determinar os elementos do $\text{Dom}(f)$ tal que os pontos do gráfico de f , estão acima da reta $y = b$. Achar os x tais que $f(x) < b$ é equivalente a determinar os elementos do $\text{Dom}(f)$ tal que os pontos do gráfico de f , estão abaixo da reta $y = b$.

Exemplo 1.11.

[1] Se $f(x) = x^2$, então, achar x tal que $f(x) > 1$ é equivalente a determinar os elementos do $\text{Dom}(f)$ tal que os pontos do gráfico de f , estão acima da reta $y = 1$.

[2] $f(x) = x^2(x - 1)$; então, achar x tal que $f(x) < 0$ é equivalente a determinar os elementos do $\text{Dom}(f)$ tal que os pontos do gráfico de f , estão abaixo da reta $y = 0$.

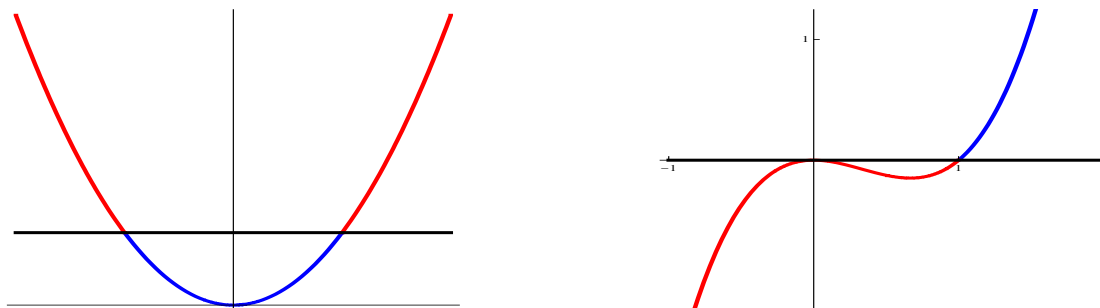


Figura 1.38: Gráficos dos exemplos [1] e [2], respectivamente.

1.9 Funções e Gráficos

Podemos afirmar, em geral, que o gráfico de uma função é, em geral, uma curva no plano coordenado; a recíproca nem sempre é verdadeira, isto é, nem toda curva no plano coordenado (ou conjunto do plano) é o gráfico de alguma função.

Geometricamente uma curva no plano coordenado é o gráfico de uma função se toda reta paralela ao eixo dos y intersecta a curva no máximo num ponto (por que?).

Por exemplo, a seguinte curva não representa uma função:

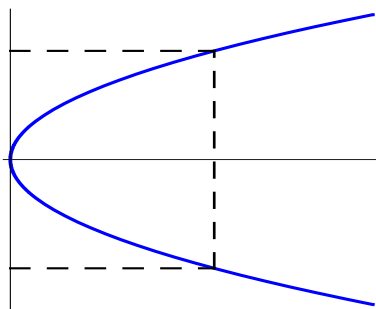


Figura 1.39:

[1] O conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ não é o gráfico de uma função. De fato, temos $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$; logo, para todo $x \in (-1, 1)$ existe mais de um y tal que $(x, y) \in A$.

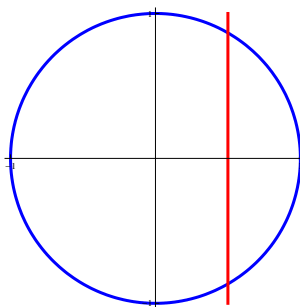


Figura 1.40: O conjunto A .

1.10 Interseção de Gráficos

Sejam $y = f(x)$ e $y = g(x)$ tais que seus gráficos se intersectam no ponto P ; então, as coordenadas de P são: $P = (x_1, f(x_1)) = (x_1, g(x_1))$, logo $f(x_1) = g(x_1)$; equivalentemente, x_1 é solução do sistema:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x). \end{cases}$$

Analogamente, para n funções:

$$\begin{cases} y = f_1(x) \\ y = f_2(x) \\ y = f_3(x) \\ \vdots \\ y = f_n(x). \end{cases}$$

1.10.1 Interseção de Retas

Se $f(x) = m_1 x + b_1$ e $g(x) = m_2 x + b_2$ são funções afins, então, o sistema:

$$\begin{cases} y = m_1 x + b_1 \\ y = m_2 x + b_2, \end{cases}$$

tem uma única solução se, e somente se as retas são não paralelas, isto é $m_1 \neq m_2$; logo, seus gráficos se intersectam num único ponto:

$$P = \left(\frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2}, \frac{b_2 m_1 - b_1 m_2}{m_1 - m_2} \right).$$

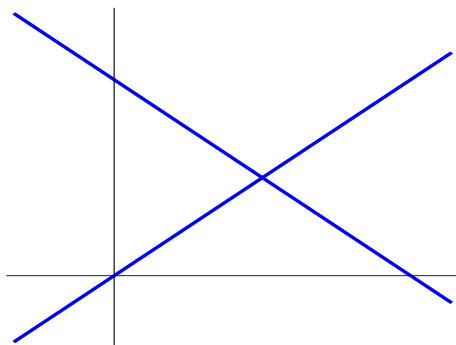


Figura 1.41: Interseção de funções afins não paralelas.

Exemplo 1.12.

[1] Achar o ponto de interseção dos gráficos de $f(x) = 2x$, $f_2(x) = 2 - x$ e $f_3(x) = x - 5$. Resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} (1) & y = 3x \\ (2) & y = 2 - x \\ (3) & y = x - 5. \end{cases}$$

Fazendo (1)=(2), temos $x = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{3}{2}$; fazendo (2)=(3), temos $x = \frac{7}{2}$ e $y = -\frac{3}{2}$ e finalmente fazendo (1)=(3), temos $x = -\frac{5}{2}$ e $y = -\frac{15}{2}$.

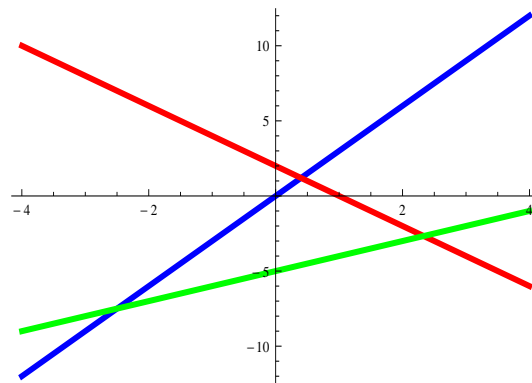


Figura 1.42: Exemplo [1].

[2] Achar os pontos de interseção dos gráficos de $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$. Resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2, \end{cases}$$

donde $x^2 - x = x(x - 1)$, logo $x(x - 1) = 0$ e $x = 0$ ou $x = 1$. Os pontos são $(0, 0)$ e $(1, 1)$.

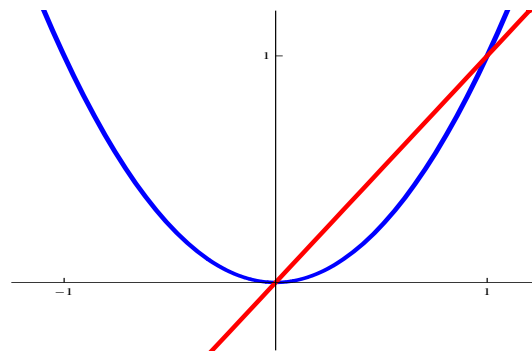


Figura 1.43: Exemplo [2]

[3] Achar os pontos de interseção dos gráficos de $f(x) = x^3 - x$ e $g(x) = x^4 + x^3$. Resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} y = x^3 - x \\ y = x^4 + x^3, \end{cases}$$

donde $x^4 + x^3 = x^3 - x$, logo $x^4 + x = x(x^3 + 1) = 0$ e $x = 0$ ou $x = -1$. Os pontos são $(0, 0)$ e $(-1, 0)$.

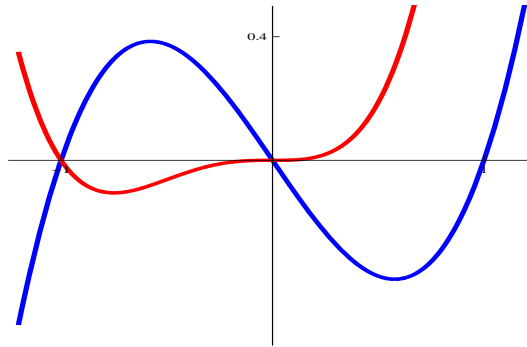


Figura 1.44: Exemplo [3]

[4] Os níveis de dois reservatórios de água são expressos em função do tempo t pelas seguintes funções: $h_1(t) = 100t^3 + 5t - 1.8$ e $h_2(t) = 50t^3 + 2t - 0.8$. Determine os instantes em que cada um dos níveis se reduz a zero, sabendo que alguma vez isto acontece simultaneamente.

Como existe t_0 tal que $h_1(t_0) = 0$ e $h_2(t_0) = 0$, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} h_1(t_0) = 0 \\ h_2(t_0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (1) & 100t_0^3 + 5t_0 - 1.8 = 0 \\ (2) & 50t_0^3 + 2t_0 - 0.8 = 0 \end{cases}$$

Multiplicando (2) por 2 e subtraindo de (1), temos que $t_0 = 0.2$ é a raiz comum.

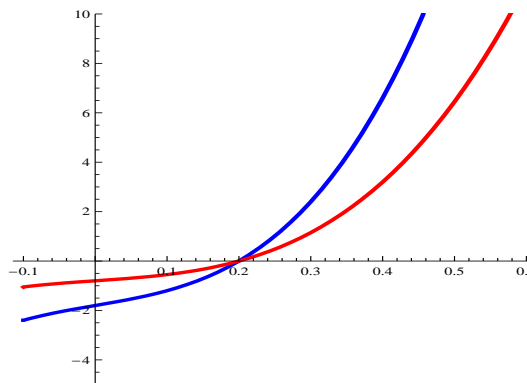


Figura 1.45: Exemplo [4]

Dividindo os polinômios (1) e (2), verificamos que não possuem outras raízes reais. Logo, o único instante em que cada um dos níveis descem a zero é em 0.2 u.t. (u.t.=unidades de tempo).

1.11 Álgebra de Funções

A seguir, veremos como construir novas funções a partir de outras já conhecidas.

Definição 1.6. Sejam $y = f(x)$ e $y = g(x)$ funções.

1. Adição e subtração de funções:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

2. Multiplicação de funções:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

3. Divisão de funções:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ se } g(x) \neq 0$$

Em particular, se $k \in \mathbb{R}$, temos que $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$. Antes de apresentar exemplos destas definições, determinemos os respectivos domínios.

$$\text{Dom}(f \pm g) = \text{Dom}(f \cdot g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g),$$

$$\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = (\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)) - \{x \in \text{Dom}(g) / g(x) = 0\}.$$

Geometricamente o gráfico da soma, diferença, produto ou quociente de f e g tem, em cada ponto uma ordenada que é respectivamente, a soma, diferença, produto ou quociente das ordenadas de f e g nos pontos correspondentes.

A aplicação destas definições é, em geral, muito simples, como observaremos nos exemplos.

Exemplo 1.13.

[1] A adição e a subtração de funções afins são funções afins. De fato, se $f(x) = m_1 x + b_1$ e $g(x) = m_2 x + b_2$; então:

$$(f \pm g)(x) = (m_1 \pm m_2)x + (b_1 \pm b_2).$$

Por exemplo, se $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = -3x + 2$; então, $(f + g)(x) = 1 - x$ e $(f - g)(x) = 5x - 3$.

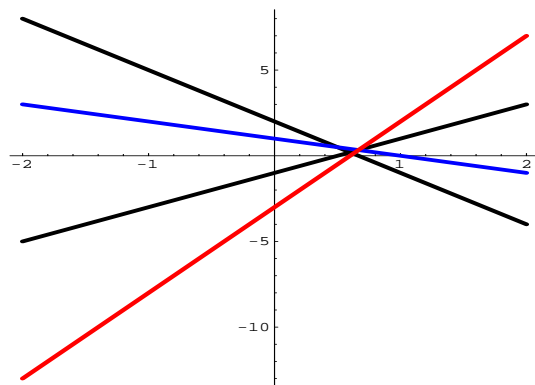


Figura 1.46: Gráficos de f , g , $f + g$ e $f - g$.

[2] A adição e a subtração de funções polinomiais quadráticas são, em geral, funções polinomiais quadráticas. De fato, se $f(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ e $g(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ tais que $a_1 \neq a_2$; então:

$$(f \pm g)(x) = (a_1 \pm a_2)x^2 + (b_1 \pm b_2)x + c_1 \pm c_2.$$

Por exemplo, se $f(x) = x^2 - 2x + 1$ e $g(x) = 2x^2 + x - 4$; então, $(f + g)(x) = 3x^2 - x - 3$ e $(f - g)(x) = -x^2 - 3x + 5$.

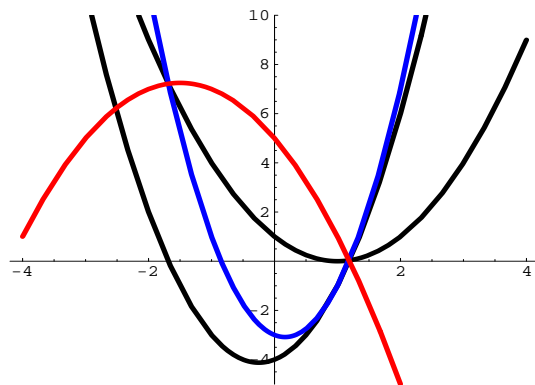


Figura 1.47: Gráficos de f , g , $f + g$ e $f - g$.

[3] Sejam $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ e $g(x) = x^3 + 1$. Logo:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) = \sqrt{x^2 - 1} \pm (x^3 + 1),$$

e $(f \cdot g)(x) = (\sqrt{x^2 - 1}) \cdot (x^3 + 1)$; os domínios são:

$$\text{Dom}(f \pm g) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) = \text{Dom}(f \cdot g),$$

e:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^3 + 1};$$

o domínio é $\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$.

1.12 Funções Racionais

Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ polinômios de coeficientes reais. Podemos definir a função **racional** por:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Da definição, temos que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / Q(x) = 0\}$; em outras palavras, o domínio de uma função racional é o conjunto dos números reais menos as raízes do polinômio que aparece no denominador.

Note que as funções polinomiais são um caso particular das funções racionais; basta considerar $Q(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A função:

$$f(x) = \frac{k}{x}, \quad k \in \mathbb{R}$$

é modelo matemático de problemas que envolvem quantidades inversamente proporcionais. Por exemplo, a lei de Boyle.

Exemplo 1.14.

[1] O tempo T , necessário para fazer um trabalho varia inversamente proporcional ao número P de pessoas que trabalham. Se leva 72 horas para 8 pessoas para fazer as paredes de uma casa, quanto tempo vai levar 6 pessoas para completar a mesma tarefa?

Temos que $T(P) = \frac{k}{P}$, logo:

$$T(8) = \frac{k}{8} \implies 72 = \frac{k}{8} \implies k = 648 \implies T(P) = \frac{648}{P} \implies T(6) = 108 \text{ h.}$$

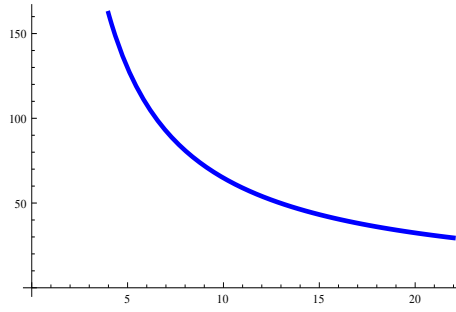


Figura 1.48: Gráfico de $T(P) = \frac{648}{P}$.

[2] Seja $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^3 + 4x^2 - x - 5}$.

Fatorando $Q(x) = x^4 + x^3 + 4x^2 - x - 5 = (x^2 - 1)(x^2 + x + 5)$, tem-se: $Q(x) = 0$ se $x = \pm 1$; logo, $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

[3] Seja $f(x) = \frac{x + 8}{x^5 - 4x^3 - x^2 + 4}$.

Fatorando $Q(x) = x^5 - 4x^3 - x^2 + 4 = (x^3 - 1)(x^2 - 4)$, tem-se: $Q(x) = 0$ se $x = 1$, $x = 2$ ou $x = -2$; logo, $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-2, 1, 2\}$.

[4] Seja $f(x) = \frac{x^4 + 6}{x^4 + 4x^2 + 3}$.

Fatorando $Q(x) = x^4 + 4x^2 + 3 = (x^2 + 1)(x^2 + 3)$, tem-se: $Q(x)$ não possui raízes reais; logo $Dom(f) = \mathbb{R}$.

1.13 Composta de Funções

Definição 1.7. Sejam f e g funções tais que $Im(f) \subset Dom(g)$. A composta das funções g e f é denotada por $g \circ f$ e definida por:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Observe que a definição faz sentido, pois $f(x) \in Dom(g)$. Por outro lado:

$$Dom(g \circ f) = \{x \in Dom(f) / f(x) \in Dom(g)\}.$$

Esta definição produz, a partir de funções conhecidas, novas funções, como veremos mais adiante.

A definição de composta de funções é de fácil manejo, como veremos nos exemplos.

Exemplo 1.15.

[1] A composta de funções afins é uma função afim.

De fato, sejam $f(x) = m_1 x + b_1$ e $g(x) = m_2 x + b_2$; então:

$$(g \circ f)(x) = (m_1 m_2) x + m_2 b_1 + b_2$$

e

$$(f \circ g)(x) = m_1 m_2 x + m_1 b_2 + b_1.$$

Por exemplo, se $f(x) = -2x - 1$ e $g(x) = x + 5$, então:

$$(g \circ f)(x) = -2x + 4 \quad \text{e} \quad (f \circ g)(x) = -2x - 11.$$

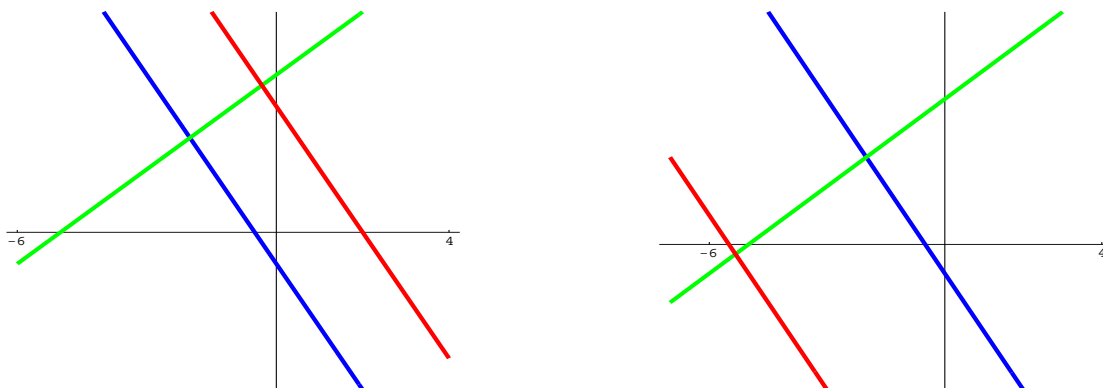


Figura 1.49: Gráficos de f , g , $g \circ f$ e $f \circ g$.

[2] Sejam $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ e $g(x) = x + 1$; calcule $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g \circ g$ e $f \circ f \circ f \circ f$ respectivamente.

$Im(f) = [0, +\infty)$ e $Dom(g) = \mathbb{R}$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x^2 - 1}) = \sqrt{x^2 - 1} + 1.$$

Logo,

$$Dom(g \circ f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

$Im(g) = \mathbb{R}$ e $Dom(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$; logo, não podemos calcular $f \circ g$ a menos que consideremos um domínio menor para g de modo que $Im(g) \subset Dom(f)$.

De fato:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = \sqrt{(x + 1)^2 - 1} = \sqrt{x^2 + 2x}.$$

Temos:

$$\text{Dom}(f \circ g) = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty).$$

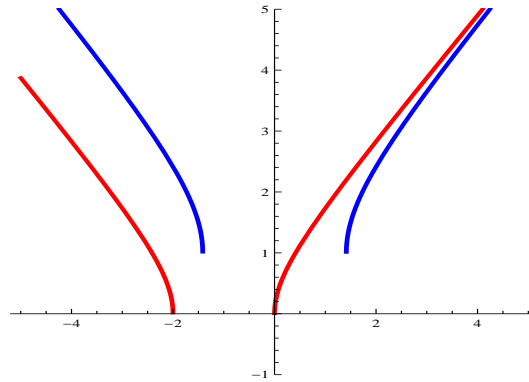


Figura 1.50: Gráficos de $g \circ f$ (azul), $f \circ g$ (vermelho).

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x^2 - 1}) = \sqrt{(\sqrt{x^2 - 1})^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 2}. \text{ Logo,}$$

$$\text{Dom}(f \circ f) = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty).$$

$$(g \circ g \circ g)(x) = g(g(g(x))) = g(g(x + 1)) = g(x + 2) = x + 3.$$

$$\text{Dom}(g \circ g \circ g) = \mathbb{R}.$$

$$(f \circ f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(f(x)))) = \sqrt{x^2 - 4}.$$

$$\text{Dom}(f \circ f \circ f \circ f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty).$$

Dos exemplos anteriores podemos concluir que, em geral:

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$$

[3] Suponha que uma mancha de poluente que contamina uma lagoa tem a forma de um disco de raio r (em cm) e sua área A (em cm^2) é função do raio. Se o raio cresce em função do tempo t (em min) pela lei $r = r(t) = (10t + 0.5) cm$, determine a área da mancha em função do tempo.

A área é $A(r) = \pi r^2$; devemos calcular $A(t)$, por outro lado $A(t) = (A \circ r)(t) = A(r(t))$; logo:

$$A(t) = A(r(t)) = A(10t + 0.5) = \pi (10t + 0.5)^2 cm^2.$$

[4] A função $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$ pode ser escrita como a composta de duas outras funções. De fato, $h(x) = (g \circ f)(x)$, onde $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ e $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

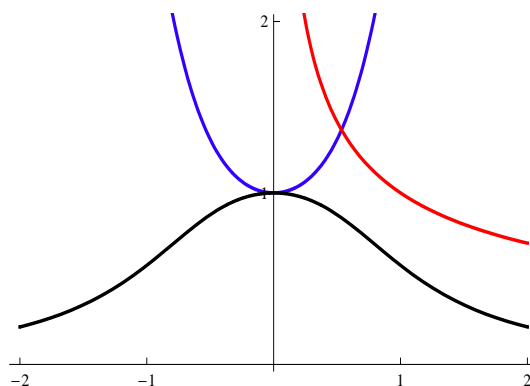


Figura 1.51: Gráficos de f (azul), g (vermelho) e h .

[5] Esboce o gráfico de $y = |x^2 - 1|$.

A função $h(x) = x^2 - 1$ pode ser escrita como a composta das funções $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = |x|$; logo, $h = g \circ f$. Pelas observações 1.2, o gráfico de $h(x) = |f(x)|$ é

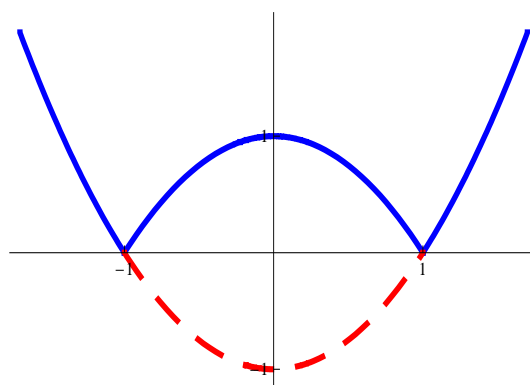


Figura 1.52: Gráfico de $h(x) = |f(x)|$.

[6] Determine $f_n(x)$, se:

(a) $f_0(x) = \frac{1}{2-x}$ e $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

(b) $f_0(x) = x^2$ e $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

(a) Se $f_0(x) = \frac{1}{2-x}$, então:

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= (f_0 \circ f_0)(x) = f_0(f_0(x)) = f_0\left(\frac{1}{2-x}\right) = \frac{1}{2 - \frac{1}{2-x}} = \frac{2-x}{3-2x}, \\
 f_2(x) &= (f_0 \circ f_1)(x) = f_0\left(\frac{2-x}{3-2x}\right) = \frac{1}{2 - \frac{2-x}{3-2x}} = \frac{3-2x}{4-3x}, \\
 f_3(x) &= (f_0 \circ f_2)(x) = f_0\left(\frac{3-2x}{4-3x}\right) = \frac{4-3x}{5-4x}.
 \end{aligned}$$

Observando as expressões anteriores podemos afirmar que:

$$f_n(x) = \frac{(n+1) - nx}{(n+2) - (n+1)x}.$$

(b) Se $f_0(x) = x^2$, então:

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= (f_0 \circ f_0)(x) = f_0(f_0(x)) = f_0(x^2) = x^4, \\
 f_2(x) &= (f_0 \circ f_1)(x) = f_0(f_1(x)) = f_0(x^4) = x^8, \\
 f_3(x) &= (f_0 \circ f_2)(x) = f_0(f_2(x)) = f_0(x^8) = x^{16}, \\
 f_4(x) &= (f_0 \circ f_3)(x) = f_0(f_3(x)) = f_0(x^{16}) = x^{32}
 \end{aligned}$$

Note que:

$$4 = 2^2 = 2^{1+1}, \quad 8 = 2^3 = 2^{2+1}, \quad 16 = 2^4 = 2^{3+1} \quad \text{e} \quad 32 = 2^5 = 2^{4+1}.$$

Observando as expressões anteriores podemos afirmar que:

$$f_n(x) = x^{2^{n+1}}.$$

1.14 Inversa de uma Função

Observe as seguintes tabelas:

a	$B = B(a)$
0	25
1	28
2	31
3	35
4	38
5	41
6	44

B	$a = a(B)$
25	0
28	1
31	2
35	3
38	4
41	5
44	6

A primeira tabela foi obtida num estudo sobre a população de baleias corcundas num certo setor costeiro utilizado como ponto de reprodução pela espécie. O tamanho da população de baleias é medido anualmente, durante 6 anos. O número B de baleias é função do ano a em que é realizada a medição: $B = B(a)$. Suponha que, em certo instante, os biólogos mudam o ponto de vista e ficam interessados no tempo estimado para que a população de baleias atinja um certo número de indivíduos B , ou seja, desejam obter a em função de B : $a = a(B)$. Tal função é chamada de inversa de $B = B(a)$. Veja a segunda tabela.

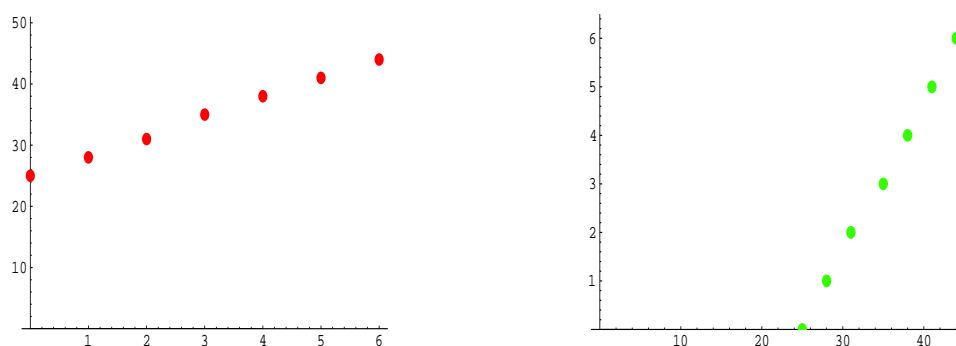


Figura 1.53: Gráfico da $B = B(a)$ e $a = a(B)$, respectivamente.

Definição 1.8. A função g é dita função inversa de f se:

1. $Im(g) = Dom(f)$ e $Im(f) = Dom(g)$.
2. Para todo $x \in Dom(g)$, $(f \circ g)(x) = x$ e para todo $x \in Dom(f)$, $(g \circ f)(x) = x$. Em tal caso f é dita **invertível**.

Exemplo 1.16.

[1] $f(x) = x - 4$, $-1 \leq x \leq 1$ e $g(x) = x + 4$, $-5 \leq x \leq -3$ são inversas.

De fato, $Dom(f) = Im(g) = [-1, 1]$, $Dom(g) = Im(f) = [-5, -3]$ e:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 4) = x, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 4) = x.$$

[2] $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ e $g(x) = x^2$, $x \geq 0$ são inversas.

De fato, $Dom(f) = Im(g) = [0, +\infty)$, $Dom(g) = Im(f) = [0, +\infty)$ e,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = x.$$

Seja f uma função invertível. Denotemos por f^{-1} sua inversa.

Observação 1.3.

1. Dizer que f^{-1} é a função inversa de f é equivalente dizer que $f \circ f^{-1}$ e $f^{-1} \circ f$ são a função identidade. Em outras palavras, f é **bijetiva**, ou seja, a função f é invertível se, e somente se para todo $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$, temos; se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$ e para todo $y \in \text{Im}(f)$, existe $x \in \text{Dom}(f)$ tal que $f(x) = y$.
2. Se f é invertível então f^{-1} é invertível e $(f^{-1})^{-1} = f$. Note que $f^{-1}(x) \neq (f(x))^{-1}$.
3. O gráfico de f^{-1} é simétrico ao gráfico de f em relação à reta $y = x$.

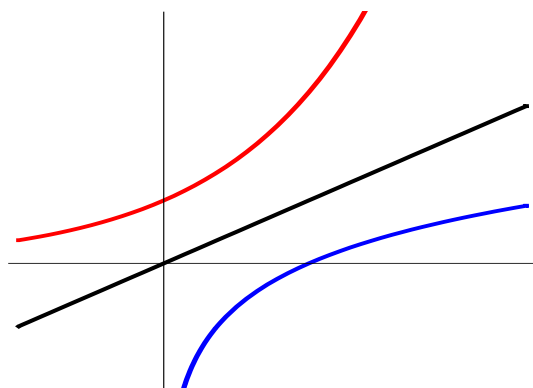


Figura 1.54: Gráficos de f (azul) e f^{-1} (vermelho).

1.15 Método para Determinar a Inversa

1. Escreva a equação $y = f(x)$ que define a função f .
2. Resolva a equação $y = f(x)$, para x em função de y para obter $x = f^{-1}(y)$ e,
3. a seguir, permuta x por y . A equação obtida define f^{-1} .

Note que, a rigor, a função f^{-1} toma valores nos $y \in \text{Im}(f)$.

Observação 1.4. É possível determinar geometricamente se uma função possui ou não função inversa. Para isto, desenhe qualquer reta paralela ao eixo dos x ; se a reta intersecta o gráfico da função no máximo num ponto, então a função possui inversa.

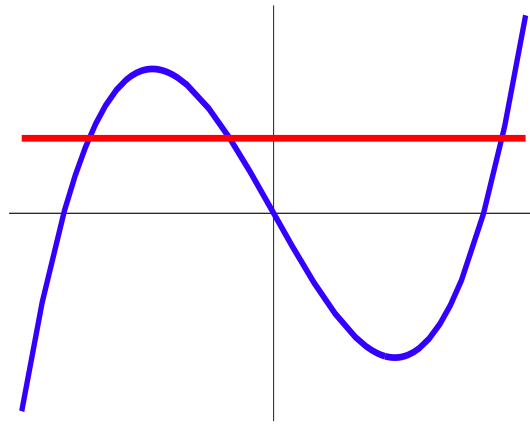


Figura 1.55: Função sem inversa.

Exemplo 1.17.

[1] Funcionamento de um termômetro:

O volume de uma quantidade de mercúrio é função da sua temperatura. Usando a função inversa, determinamos a temperatura através de seu volume.

[2] A inversa de uma função afim não constante é afim. De fato, se $y = f(x) = mx + b$; então:

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{m} (y - b).$$

Permutando x por y :

$$y = f^{-1}(x) = \frac{1}{m} (x - b).$$

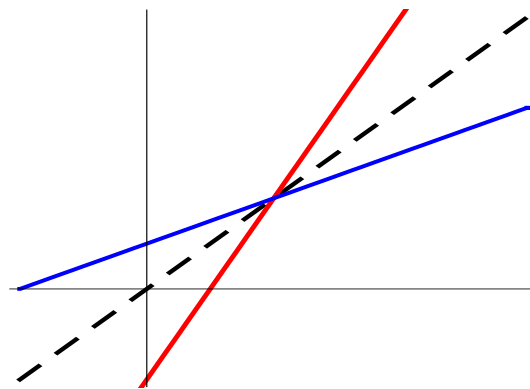


Figura 1.56: Uma função afim e sua inversa.

[3] Seja $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Sabemos que se n é par a função é par e se n é ímpar a função é ímpar. Logo f possui inversa para $x \geq 0$ se n é par:

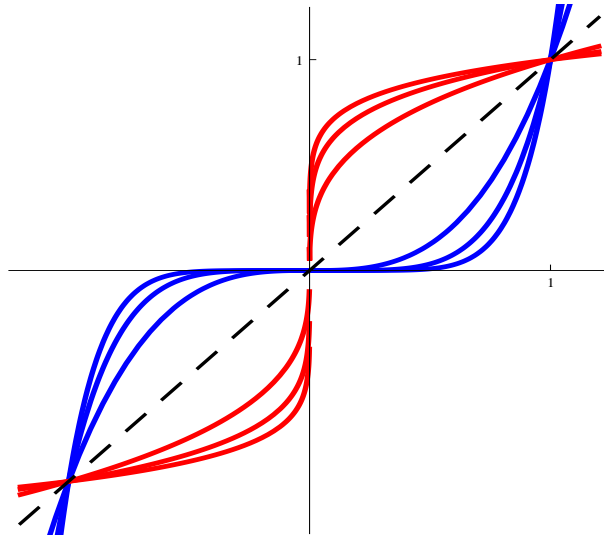


Figura 1.57: Desenho para n ímpar.

f possui inversa para todo $x \in \mathbb{R}$ se n é ímpar. A inversa para ambas é $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$. Permutando x por y , $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$.

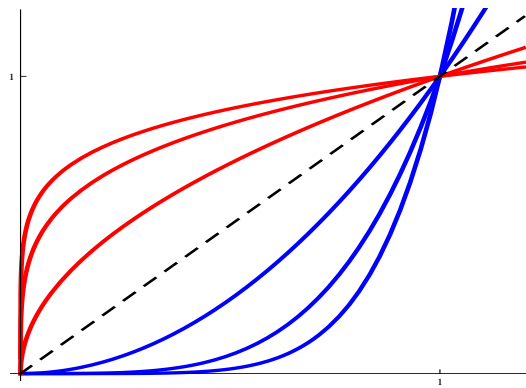


Figura 1.58: Desenho para n par.

[4] Seja $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $ad-bc \neq 0$; fazendo: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ e resolvendo a equação em relação a x , temos,

$$x = \frac{dy-b}{a-cy};$$

logo:

$$f^{-1}(y) = \frac{d y - b}{a - c y}$$

se $y \neq \frac{a}{c}$ ou, equivalentemente,

$$f^{-1}(x) = \frac{d x - b}{a - c x}$$

se $x \neq \frac{a}{c}$, que é a inversa de f .

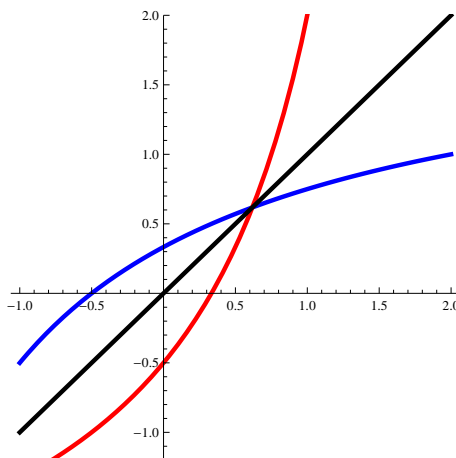


Figura 1.59: Desenho para $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$ (azul) e $f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{2-x}$

[5] Uma bola de borracha está sendo inflada e seu volume V é função do tempo t (em *min*) sendo $V(t) = (4t + 5) \text{ cm}^3$. Quanto tempo demora a bola até atingir o volume de 45 cm^3 ?

Devemos determinar a função inversa de V . Como $V = 4t + 5$ então $t = \frac{V - 5}{4}$ e

$$t = V^{-1}(V) = \frac{V - 5}{4} \quad \text{e} \quad t = V^{-1}(45) = 10 \text{ min.}$$

[6] É comum, em diferentes Ciências da Natureza, utilizar duas escalas para medir temperaturas, Fahrenheit e Celsius.

(a) Determine a função f que relaciona a temperatura y em graus Celsius à temperatura x em graus Fahrenheit, sabendo que seu gráfico é uma reta.

(a) Determine f^{-1} .

(a) Se o gráfico é uma reta a função deve ser do tipo: $y = f(x) = mx + b$. Por outro lado, sabemos que: $y = f(32) = 0$, pois a água se congela a 0 graus Celsius. $y = f(212) = 100$, pois a água ferve a 100 graus Celsius. Portanto:

$$m = \frac{f(212) - f(32)}{212 - 32} = \frac{5}{9} \text{ e } b = -\frac{160}{9};$$

$$\text{logo } f(x) = \frac{5x}{9} - \frac{160}{9}.$$

(b) Seja $y = \frac{5}{9}(x - 32)$; então, $x = \frac{9y}{5} + 32$ e $f^{-1}(x) = \frac{9x}{5} + 32$. Logo, estas são as regras de conversão entre temperaturas dadas em graus Celsius e graus Fahrenheit.

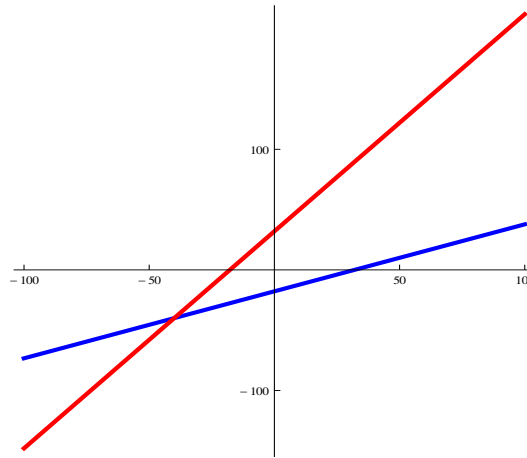


Figura 1.60: Gráfico do exemplo [6].

[7] Calcule a inversa de uma função polinomial de segundo grau.

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$; observando o gráfico de f temos que fazer $-\frac{b}{2a} \leq x$ (ou $-\frac{b}{2a} \geq x$) para obter a inversa.

Resolvendo $y = ax^2 + bx + c$ ou $ax^2 + bx + (c - y) = 0$, temos que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + 4ay}}{2a}.$$

Então:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac + 4ay}}{2a} & \text{se } a > 0 \\ \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac + 4ay}}{2a} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Analogamente se $-\frac{b}{2a} \geq x$; ou equivalentemente:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac + 4ax}}{2a} & \text{se } a > 0 \\ \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac + 4ax}}{2a} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

1.16 Funções Definida por Partes

É comum aparecer nas aplicações, funções definidas por:

$$h(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \in \text{Dom}(f_1) \\ f_2(x) & \text{se } x \in \text{Dom}(f_2) \\ f_3(x) & \text{se } x \in \text{Dom}(f_3) \\ f_4(x) & \text{se } x \in \text{Dom}(f_4) \\ \vdots & \\ \vdots & \\ f_n(x) & \text{se } x \in \text{Dom}(f_n). \end{cases}$$

Note que $\text{Dom}(h) = \text{Dom}(f_1) \cup \text{Dom}(f_2) \cup \dots \cup \text{Dom}(f_n)$ e que:

$$h(x) = f_i(x) \iff x \in \text{Dom}(f_i), \forall i = 1, \dots, n.$$

Exemplo 1.18.

[1] Considere a função :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + 1} & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{5x^2} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{\frac{1}{x+1}} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Logo, $\text{Dom}(h) = (-\infty, 0] \cup (0, 1] \cup (1, +\infty) = \mathbb{R}$, então:

$$\begin{aligned}
 h(-3) &= \frac{1}{(-3)^2 + 1} = \frac{1}{10} \quad \text{pois } -3 \in (-\infty, 0] \\
 h(1) &= \frac{1}{5} \quad \text{pois } 1 \in (0, 1] \\
 h(3) &= \sqrt{\frac{1}{3+1}} = \frac{1}{2} \quad \text{pois } 3 \in (1, +\infty).
 \end{aligned}$$

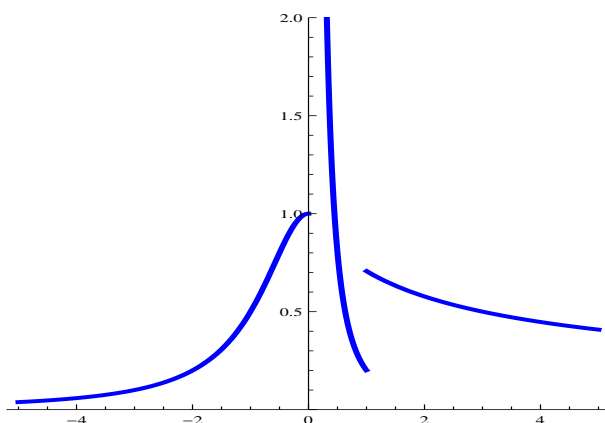


Figura 1.61: Gráfico do exemplo [1].

[2] Uma empresa de ônibus cobra 40 reais pela passagem unitária, se vende menos de 20 passagens, e cobra 50 centavos a menos pela passagem adicional. Denotemos por x o número de passagens, então a função $h = h(x)$, representa a quantidade de dinheiro que recebe a empresa por x passageiros, e é dada por:

$$h(x) = \begin{cases} 40x & \text{se } x \leq 20 \\ [40 - (x - 20) 0.5]x & \text{se } x > 20 \end{cases} = \begin{cases} 40x & \text{se } x \leq 20 \\ [50 - 0.5x]x & \text{se } x > 20 \end{cases}$$

Por exemplo, para saber quanto dinheiro recebe a empresa com 46 passageiros, calculamos:

$$h(46) = [50 - 0.5 \times 46] \times 46 = 1241 \quad \text{reais,}$$

pois $46 > 20$.

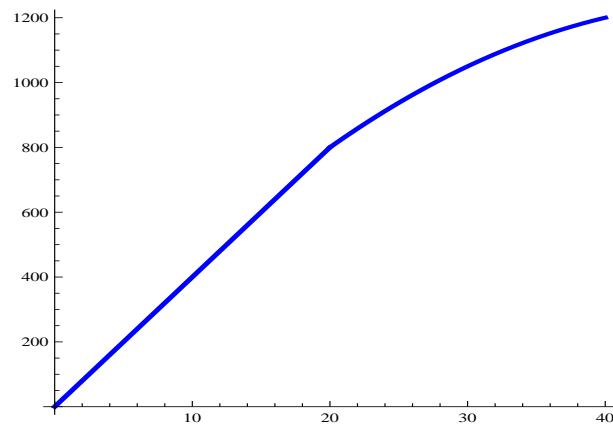


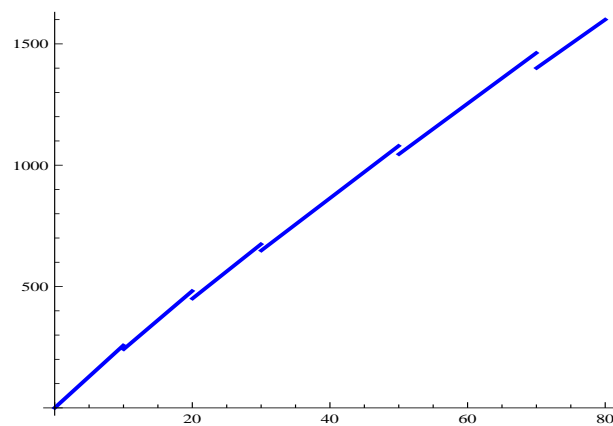
Figura 1.62: Gráfico do exemplo [2].

[3] Um atacadista vende um certo tipo de produto, por caixas, segundo a seguinte tabela de preços, em dólares:

Preço	25.8	24.1	22.5	21.6	20.9	20
x	$x \leq 20$	$20 < x \leq 50$	$50 < x \leq 100$	$100 < x \leq 250$	$250 < x \leq 400$	$400 < x$

onde x é a quantidade de caixas; a tabela de preços pode ser modelada por:

$$p(x) = \begin{cases} 25.8x & \text{se } 0 \leq x \leq 20 \\ 24.1x & \text{se } 20 < x \leq 50 \\ 22.5x & \text{se } 50 < x \leq 100 \\ 21.6x & \text{se } 100 < x \leq 250 \\ 20.9x & \text{se } 250 < x \leq 400 \\ 20x & \text{se } x > 400. \end{cases}$$

Figura 1.63: Gráfico de $p = p(x)$.

Note que existem algumas compras erradas, por exemplo, $p(20) = 516$ e $p(21) = 506.1$; logo, é melhor comprar 21 caixas.

1.17 Exercícios

1. Exprima como função de x :

- (a) a área de um triângulo de base x se sua altura é o dobro de sua base.
- (b) o volume de uma esfera de raio x .
- (c) o volume de um cone circular reto de raio x se sua altura é o triplo do raio da base.
- (d) o volume e a área total de um cilindro circular reto de raio x sendo sua altura igual a $\frac{10}{3}$ do raio da base.

2. Determine o domínio e a imagem das seguintes funções:

- | | |
|--|---|
| (a) $f(x) = x^4$ | (j) $f(x) = x^3 - x $ |
| (b) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$ | (k) $f(x) = \frac{9x^2 - 4}{3x - 2}$ |
| (c) $f(x) = \frac{1}{x - 4}$ | (l) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x - 1)(x + 2)}}$ |
| (d) $f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x}}$ | (m) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 1}} + \frac{1}{x - 5}$ |
| (e) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ | (n) $f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}$ |
| (f) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x}}$ | (o) $f(x) = \frac{\sqrt{x - 4}}{\sqrt{x - 9}}$ |
| (g) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ | (p) $f(x) = \frac{x^5 + x^2}{x^2 + 1}$ |
| (h) $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x}}$ | |
| (i) $f(x) = \sqrt[6]{\frac{x - 3}{x + 2}}$ | |

3. Seja $f(x) = |x| - 2x$; determine $\text{Dom}(f)$; calcule $f(1)$, $f(-\frac{2}{3})$ e verifique que $f(|a|) = -|a|$.

4. Determine o domínio de $f(x) = \frac{x - 1}{2x + 7}$ e calcule $f(\frac{1}{x})$ e $(f(x))^{-1}$.

5. Simplifique a seguinte expressão: $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, $x \neq a$, se:

- (a) $f(x) = x^2, a = 1$
 (b) $f(x) = x^3, a = -2$
 (c) $f(x) = x^2 + x, a = -1$
 (d) $f(x) = \frac{1}{x}, a = 1$
 (e) $f(x) = 2x + 1, a = 2$
 (f) $f(x) = \frac{1}{x^2}, a = 2$
 (g) $f(x) = x^3 + x, a = 2$
 (h) $f(x) = \frac{1}{x^3}, a = 3$
 (i) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}, a = 1$
 (j) $f(x) = \frac{1}{x^4}, a = 4$

6. Repita o exercício anterior para um a qualquer e compare os resultados obtidos.

7. Fazendo uma tabela, esboce os gráficos das seguintes funções:

- (a) $y = x^2 + 1$
 (b) $y = (x - 1)^2$
 (c) $y = (x + 1)^2$
 (d) $y = x^2 - 1$
 (e) $y = x|x|$
 (f) $y = \frac{1}{x-2}$
 (g) $y = \sqrt{4-x^2}$
 (h) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$
 (i) $y = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$
 (j) $y = |x-1| + |x-2|$
 (k) $y = \frac{|x|}{1-x}$
 (l) $y = 1 + x - |x|$
 (m) $y = x^2$ se $x < 1$ e $y = 2 - (x-2)^2$ se $1 < x$.
 (n) $y = x^2 - 1$ se $x \leq 0$ e $y = x$ se $0 < x$.

8. Verifique se as seguintes funções são constantes:

- (a) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x}$
 (b) $f(x) = \frac{x}{|x|} - \frac{|x|}{x}$

9. Esboce os gráficos no mesmo desenho:

- (a) $y = |x|, y = |x+1|, y = |x-1|$
 (b) $y = |x|, y = 2|x|, y = \frac{|x|}{2}$

10. Determine $f+g, f-g, f \cdot g$ e f/g , se:

- (a) $f(x) = 2x, g(x) = x^2 + 2$
 (b) $f(x) = 3x - 2, g(x) = |x+2|$
 (c) $f(x) = \sqrt{x+1}, g(x) = x^2 - 1$
 (d) $f(x) = \sqrt{x+1}, g(x) = \sqrt{x+3}$
 (e) $f(x) = x^4, g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^4$

$$\begin{array}{ll} \text{(f)} \quad f(x) = \frac{1}{x}, & g(x) = x^2 \\ \text{(h)} \quad f(x) = \frac{1}{x^2}, & g(x) = x^2 \\ \text{(g)} \quad f(x) = x^3 + x^2, & g(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)^4 \end{array}$$

11. Seja $f = g \circ h$. Calcule h se:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad f(x) = x^2 + 1, & g(x) = x + 1 \\ \text{(b)} \quad f(x) = bx + a, & g(x) = x + a \\ \text{(c)} \quad f(x) = |x^2 - 3x + 5|, & g(x) = |x| \end{array}$$

12. Seja $f(x) = ax + b$. Para que valores de a e b vale: $(f \circ f)(x) = 9x - 3$?

13. Se $f(x) = \sqrt{x-4}$ e $g(x) = \frac{1}{2x}$, determine o domínio de $g \circ f$ e esboce o gráfico de $g \circ f$.

14. Verifique que $Im(f) \subset Dom(g)$ e determine $g \circ f$ se:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad f(x) = x + 2, & g(x) = 3x + 1 \\ \text{(b)} \quad f(x) = x^2 + 2, & g(x) = \sqrt{x} \\ \text{(c)} \quad f(x) = x^2 + 3, & g(x) = \frac{x+1}{x-2} \\ \text{(d)} \quad f(x) = 2x-3, & g(x) = -x^2+3x+1 \\ \text{(e)} \quad f(x) = x+1, & g(x) = \frac{2}{x-2} \\ \text{(f)} \quad f(x) = \frac{x}{x+1}, & g(x) = \frac{x+1}{x-1} \end{array}$$

15. Escreva $h(x)$ como composta de duas outras funções:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad h(x) = (x^2 + 1)^4 & \text{(b)} \quad h(x) = (x^2 - 9)^{-2} & \text{(c)} \quad h(x) = \sqrt[4]{3x+5} \end{array}$$

16. Determine f_n , se $f_0(x) = x + 3$ e $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

17. Esboce o gráfico das seguintes funções:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad y = x^4 + x^3 - x^2 & \text{(d)} \quad y = \frac{x-1}{x+4} & \text{(f)} \quad y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \\ \text{(b)} \quad y = (2-x)^2 & & \\ \text{(c)} \quad y = 2 + (x-1)^3 & \text{(e)} \quad y = x + \frac{1}{x^2} & \text{(g)} \quad y = \frac{x}{x^2-1} \end{array}$$

18. Determine os vértices das seguintes parábolas:

(a) $y = -x^2 + 4x - 3$

(c) $y = 2x^2 - x - 1$

(b) $y = x^2 - 8x + 12$

(d) $y = x - x^2 - 9$

19. Determine a função afim tal que $f(1) = 2$ e $f(2) = -4$ e a função quadrática tal que $g(1) = -1$, $g(2) = -2$ e $f(3) = 1$.

20. Verifique que se f é uma função periódica de período t , então também é periódica de período nt , $n \in \mathbb{Z}$.

21. A função :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

é periódica para algum período?

22. Prove que a função afim tem como gráfico uma reta não vertical.

23. Prove que a função polinomial de segundo grau tem como gráfico uma parábola com eixo paralelo ao eixo dos y .

24. Prove que se f é uma função periódica de período t , então:

(a) $f(x + a)$ é periódica de período t , para todo $a \in \mathbb{R}$.

(b) $f(ax)$ é periódica de período $\frac{t}{a}$, para todo $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

25. Sejam $f(x) = 1 - x$ e $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$. Verifique que: f e g são as inversas de f e g respectivamente.

26. Verifique:

(a) Se f e g são funções ímpares então fg e $\frac{f}{g}$ são funções pares.

(b) Se f e g são funções ímpares então $f \pm g$ são funções ímpares.

(c) $\frac{1}{2} [f(x) + f(-x)]$ é função par e $\frac{1}{2} [f(x) - f(-x)]$ é função ímpar para toda função f . Então toda função pode ser escrita como soma de uma função par e de uma função ímpar.

27. Para pequenas variações de temperatura, o modelo para a dilatação de uma barra de metal homogênea submetida à mudanças de temperatura é $L - L_0 = a L_0 (t - t_0)$, onde L é o comprimento da barra quando a temperatura é t , L_0 é o comprimento inicial da barra na temperatura t_0 e a é uma constante que depende do tipo de metal.

(a) Verifique se L é função linear de t .

(b) Supondo que a barra, inicialmente mede 100 cm a uma temperatura de 60°C e que para o metal com que foi feita $a = 10^{-5}$, esboce o gráfico que expresse o comprimento da barra em função da temperatura.

28. O custo em $u.m.$ (unidades monetárias) para remover x dos detritos tóxicos despejados num aterro é dado por:

$$S(x) = \frac{0.8x}{100 - x},$$

para $0 < x < 100$.

(a) Determine o custo referente à remoção de 40, 60 e 90 dos detritos. Esboce o gráfico de $S = S(x)$.

(b) Que percentual de detritos pode ser removido por 10.000 $u.m$?

Capítulo 2

FUNÇÕES ELEMENTARES

A seguir apresentamos uma classe importante de funções que tem um papel fundamental nas aplicações que serão tratadas nos capítulos posteriores. Este tipo de funções são ditas elementares pois não podem ser obtidas através de outras funções.

2.1 Função Exponencial

A função exponencial está associada a fenômenos de crescimento ou decrescimento, como por exemplo, crescimento populacional e desintegração radioativa.

Exemplo 2.1.

Suponha que após 7 meses de observação foram obtidos os seguintes dados de uma população de formigas:

M	Q	V
1	150000	
2	159000	9000
3	168540	9540
4	178652	10112
5	189371	10719
6	200733	11362
7	212777	12044

M é o mês, Q é a quantidade de formigas em cada mês da observação e V é a variação mensal da população. Dividindo a quantidade de formigas de um mês em relação ao mês anterior, obtemos um fator constante 1.06, o que mostra que a população de formigas cresce, aproximadamente, 6% ao mês. Temos:

se $x = 0$, então $150000 = 150000 \times (1.06)^0$;
 se $x = 1$, então $159000 = 150000 \times (1.06)^1$;
 se $x = 2$, então $168540 = 150000 \times (1.06)^2$;
 se $x = 3$, então $178652 = 150000 \times (1.06)^3$.

Em geral, decorridos x meses após a primeira observação, a população de formigas é dada por:

$$f(x) = 150000 \times (1.06)^x.$$

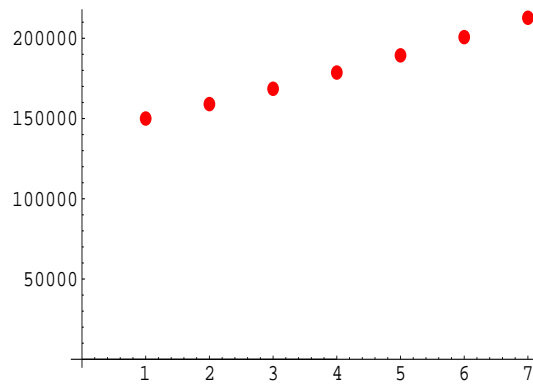


Figura 2.1: Gráfico de $f(x) = 150000 \times (1.06)^x$.

Definição 2.1. Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a \neq 1$. A **função exponencial de base a** é denotada e definida por:

$$y = f(x) = a^x$$

Note que: $Dom(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = (0, +\infty)$ e:

$$\begin{aligned} f(0) &= a^0 = 1 \\ f(1) &= a, \end{aligned}$$

seu gráfico depende de ser $a > 1$ ou $0 < a < 1$.

Observações 2.1.

1. Se $n \in \mathbb{N}$, então $a^n = a \times a \times \dots \times a$, n vezes. Se $n \in \mathbb{N}$, então $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

2. Se $x \in \mathbb{Q}$, então $x = \frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z} - \{0\}$, e:

$$a^x = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

3. Se $x \notin \mathbb{Q}$, isto é, x é um número irracional como π , $\sqrt{3}$, que sentido tem a expressão a^π e $a^{\sqrt{3}}$?

4. A resposta rigorosa a esta pergunta será respondida em níveis de estudos mais elevados que o destas notas introdutórias. Por enquanto, vejamos uma idéia intuitiva:

Exemplo 2.2.

Considere $2^{\sqrt{3}}$; o número irracional $\sqrt{3}$ é aproximadamente $\sqrt{3} \cong 1.732050807568 \dots$. Por outro lado, os seguintes números são racionais: 1.7, 1.73, 1.732, 1.73205, etc. Logo, pela observação anterior sabemos calcular $2^{1.7}$, $2^{1.73}$, $2^{1.732}$, $2^{1.73205}$, ... e podemos obter um valor aproximado para $2^{\sqrt{3}}$. Observe a tabela:

x	2^x
1.7	3.249009
1.73	3.317278
1.732	3.321880
1.73205	3.321995
\vdots	\vdots
$\sqrt{3}$	$2^{\sqrt{3}}$

Proposição 2.1. Seja $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a \neq 1$

1. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) f(x_2)$. Isto é:

$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1} a^{x_2},$$

para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

2. $f(bx) = (f(x))^b = (f(b))^x$. Isto é:

$$a^{bx} = (a^x)^b = (a^b)^x,$$

para todo $x, b \in \mathbb{R}$.

Observação 2.1. Dada uma função exponencial $f(x) = a^x$, os valores $f(1), f(2), f(3), \dots$ formam uma progressão geométrica (P.G.) de razão a . Na verdade, para toda função exponencial $f(x) = a^x$, as razões

$$\frac{f(x+h)}{f(x)} = a^h$$

dependem apenas de h e não de x . Esta é uma propriedade característica das funções exponenciais e significa que se consideramos a progressão aritmética de razão h :

$$x, x+h, x+2h, x+3h, x+4h, \dots$$

então, obtemos a progressão geométrica de razão a^h :

$$\begin{aligned} f(x+h) &= a^h f(x), \\ f(x+2h) &= f((x+h)+h) = a^h f(x+h) = a^{2h} f(x) \\ &\vdots \\ f(x+nh) &= a^{nh} f(x). \end{aligned}$$

Pelas propriedades anteriores, cada vez que a abscissa aumenta uma unidade a ordenada é multiplicada por a e cada vez que a abscissa diminui uma unidade a ordenada é multiplicada por $\frac{1}{a}$.

Se $a > 1$, então, a distância da curva ao eixo dos x cresce quando x cresce e decresce quando x decresce. Se $a < 1$ ocorre o contrário.

Observação 2.2. Um caso particular e importante de função exponencial é quando a é a constante de Euler $e \simeq 2.718281$.

Gráficos para $0 < a < 1$:

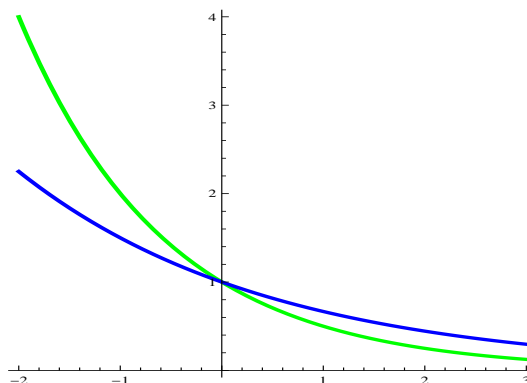


Figura 2.2: $a = \frac{1}{2}$ (verde) e $a = \frac{2}{3}$ (azul).

Gráficos para $a > 1$:

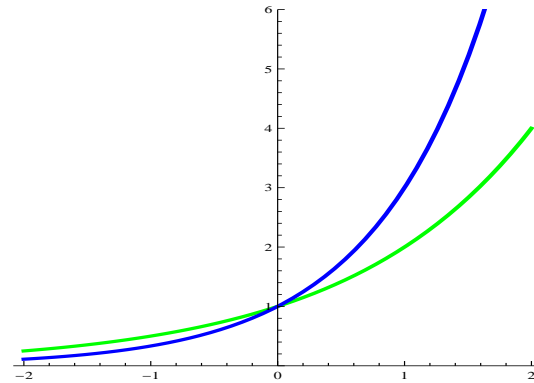


Figura 2.3: $a = 2$ (verde) e $a = 3$ (azul).

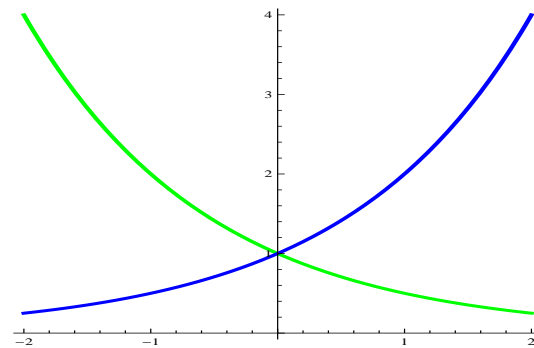


Figura 2.4: Gráficos para $a = \frac{1}{2}$ (verde) e $a = 2$ (azul).

Exemplo 2.3.

[1] Um fabricante de certos componentes eletrônicos fez um estudo estatístico da confiabilidade do seu produto. O estudo indicou que a fração dos componentes que após t anos de uso, ainda estão em condições de funcionamento é, aproximadamente, $f(t) = e^{-0.2t}$.

- (a) Que fração dos componentes deve funcionar pelo menos por três anos?
- (b) Que fração dos componentes deve parar de funcionar durante o terceiro ano de uso?
- (a) Devemos calcular: $f(3) = e^{-0.6} \cong 0.54$, isto é, podemos esperar que aproximadamente 55 dos componentes funcione pelo menos três anos.
- (b) Para determinar a fração dos componentes que deve parar de funcionar durante o terceiro ano de uso, basta calcular:

$$f(3) - f(4) = e^{-0.6} - e^{-0.8} \cong 0.099.$$

Portanto, podemos esperar que, aproximadamente, 10 dos componentes parem de funcionar durante o terceiro ano de uso.

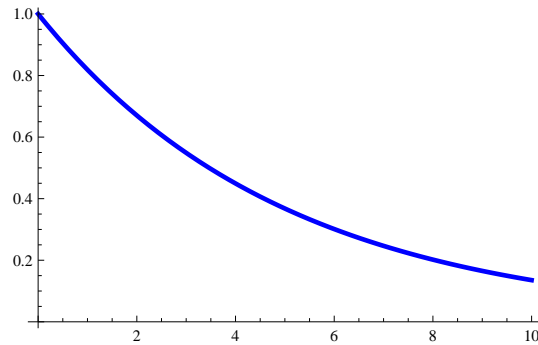


Figura 2.5: Gráfico de $f(t) = e^{-0.2t}$.

[2] Num dia de verão, um refrigerante gelado é retirado de uma geladeira cuja temperatura é de 12°C e é colocada numa sala onde a temperatura é de 32°C . De acordo com uma lei da Física, a temperatura do refrigerante, após t minutos mais tarde, é dada por $T(t) = 32 - Ae^{-kt}$, onde $A, k > 0$. Supondo que a temperatura do refrigerante é 16°C após 20 minutos, qual será a temperatura do refrigerante, após 40 minutos?

Primeiramente devemos determinar as constantes A e k . Sabemos que inicialmente a temperatura do refrigerante é de 12°C ; logo, $T(0) = 12$ e $32 - A = 12$, donde $A = 20$. Por outro lado, após 20 minutos a temperatura é de 16°C , e:

$$T(20) = 16 \Rightarrow 32 - 20e^{-20k} = 16 \Rightarrow e^{-20k} = \frac{4}{5}.$$

Finalmente:

$$T(40) = 32 - 20e^{-40k} = 32 - 20[e^{-20k}]^2 = 32 - 20\left[\frac{4}{5}\right]^2 \cong 19.2^{\circ}\text{C}.$$

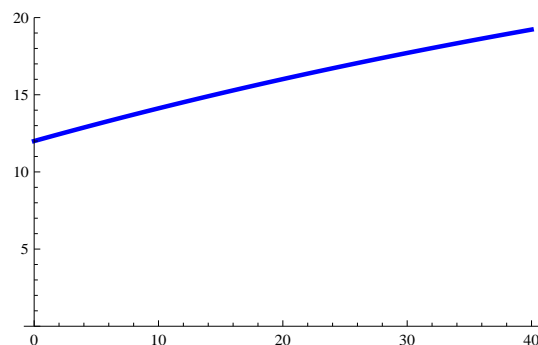


Figura 2.6: Gráfico do exemplo [2].

2.2 Aplicações

As funções exponenciais ou compostas de exponenciais tem um importante papel em Matemática Aplicada. A seguir, apresentamos algumas destas aplicações.

2.2.1 Economia: Cálculo de Juros Compostos

Se uma quantia inicial A_0 em dinheiro for investida a uma taxa de juros compostos de r , m vezes ao ano, o montante do investimento, após t anos será dado por:

$$A(t) = A_0 \left[1 + \frac{r}{m} \right]^{mt}.$$

Por exemplo, suponha que 1000 reais são investidos a uma taxa de juros compostos de 7% ao ano, o montante acumulado após 5 anos, se os juros forem capitalizados semestralmente é de

$$A = 1000 \left[1 + \frac{0.07}{2} \right]^{10},$$

logo $A \cong 1410.59$ reais.

2.2.2 Crescimento e Decrescimento Exponencial

Uma quantidade que cresce de acordo com a lei:

$$Q(t) = Q_0 e^{kt},$$

Q_0 , $k > 0$ é dita que experimenta um crescimento exponencial com valor inicial $Q(0) = Q_0$. Este modelo se aplica em diversas situações.

Exemplo 2.4.

[1] Projeta-se que em t anos, a população de um estado será de $P(t) = 10 e^{0.02t}$ milhões de habitantes. Qual é a população atual? Qual será a população em 20 anos, se a população continuar crescendo nesta proporção?

A população atual é $P(0) = 10$ milhões e:

$$P(20) = 10 e^{0.4} \cong 14.918 \quad \text{milhões.}$$

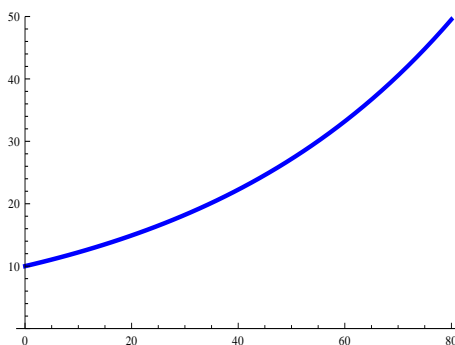


Figura 2.7: Gráfico de [1] .

[2] Biólogos determinaram que em condições ideais uma colônia de bactérias cresce exponencialmente. Se, inicialmente existem 3000 bactérias e após 30 minutos estão presentes 9000, quantas bactérias estarão presentes após uma hora?

Note que $Q(t) = 3000 e^{kt}$, pois $Q(0) = 3000$; por outro lado $9000 = Q(30) = 3000 e^{30k}$ e $e^{30k} = 3$. Logo,

$$Q(60) = 3000 e^{60k} = 3000 (e^{30k})^2 = 3000 \times 9 = 27000 \quad \text{bactérias.}$$

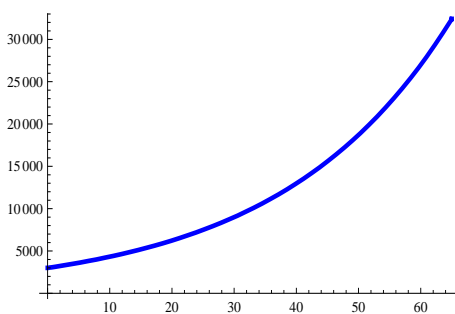


Figura 2.8: Gráfico de [2].

Uma quantidade que decresce de acordo com a lei:

$$Q(t) = Q_0 e^{-kt};$$

$Q_0, k > 0$ é dita que experimenta um decrescimento exponencial com valor inicial $Q(0) = Q_0$.

[3] Em Farmacologia, sabe-se que a concentração de penicilina e outras drogas tem um decrescimento exponencial, em relação ao tempo da aplicação da droga.

O modelo utilizado é $Q(t) = Q_0 e^{-kt}$, onde $k > 0$ é uma constante que depende da droga.

Outras aplicações serão vistas nos próximos parágrafos.

2.3 Função Logística

O modelo exponencial é interessante, pois é simples e serve como base para outros modelos mais complexos que estudam situações mais gerais. Por outro lado, crescimentos exponenciais não acontecem na natureza, pelo menos por tempo ilimitado. No entanto, durante breves intervalos de tempo populações crescem com este modelo. Observa-se que os níveis de natalidade de uma população diminui quando a população aumenta. Os motivos podem ser variados, como fatores sociais, econômicos ou suprimento limitado de alimentos e de espaço. A população eventualmente se estabilizaria num nível compatível com o que o meio ambiente pode sustentar, sem a extinção da espécie.

Um ótimo modelo para o estudo deste tipo de situação é a função logística, definida por:

$$L(t) = \frac{A}{1 + B e^{-Ct}},$$

onde A , B , e C são constantes positivas.

Este modelo também é usado no estudo da propagação de epidemias, da propagação de doenças infecciosas e na propagação de boatos ou notícias.

Exemplo 2.5.

[1] Uma população de moscas drosófilas num ambiente limitado é dada por:

$$L_1(t) = \frac{400}{1 + 39 e^{-0.4t}},$$

onde t denota o número de dias transcorridos. Qual é a população inicial? Qual é a população no 10º dia?

Note que inicialmente, temos $L_1(0) = 10$ moscas; $L_1(10) = 233.33$; aproximadamente 233 moscas.

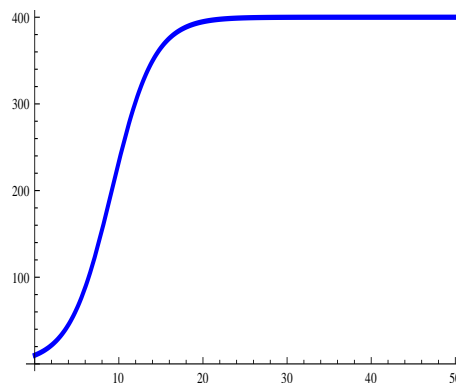


Figura 2.9: Gráfico de L_1 .

[2] Durante uma epidemia de dengue, o número de pessoas que adoeceram após t dias, num certo bairro, é dada por:

$$L_2(t) = \frac{10000}{1 + 99e^{-0.2t}}.$$

Quantas pessoas ficaram doentes após o primeiro dia? Quantas pessoas ficaram doentes após 25 dias?

Note que inicialmente, temos $L_2(1) = 121.87$; aproximadamente 121 doentes e $L_2(25) = 5998.6$; aproximadamente 5998 doentes.

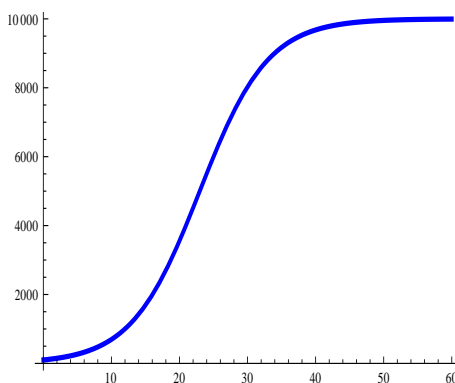


Figura 2.10: Gráfico de L_2 .

2.4 Função Logarítmica

Como qualquer reta paralela ao eixo dos x intersecta o gráfico da função exponencial $y = a^x$ no máximo num ponto, ela possui uma inversa denominada **função logarítmica de base a** , que é denotada por:

$$f(x) = \log_a(x)$$

e definida por:

$$y = \log_a(x) \iff a^y = x$$

onde $a \in \mathbb{R}$ é tal que $0 < a \neq 1$.

Note que $Dom(f) = (0, +\infty)$, $Im(f) = \mathbb{R}$, $f(1) = 0$, $f(a) = 1$ e seu gráfico depende de ser $a > 1$ ou $0 < a < 1$.

Gráficos para $0 < a < 1$:

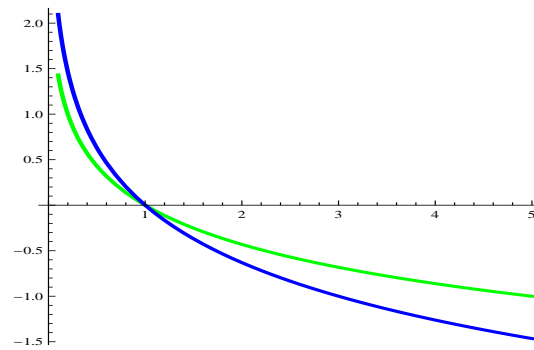


Figura 2.11: $a = \frac{1}{5}$ (verde) e $a = \frac{1}{3}$ (azul).

Gráficos para $a > 1$:

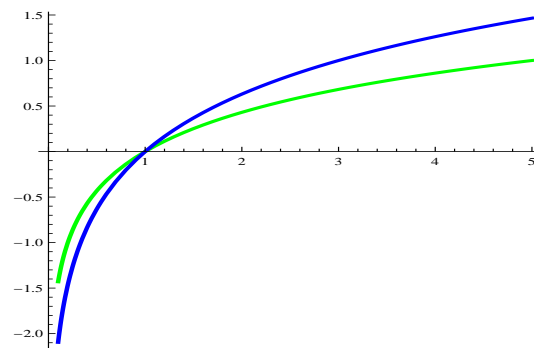


Figura 2.12: $a = 5$ (verde) e $a = 3$ (azul).

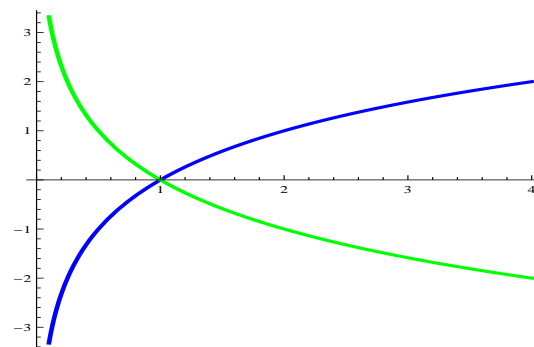


Figura 2.13: Gráficos para $a = 2$ (azul) e $a = \frac{1}{2}$ (verde).

Usando novamente o fato de $y = \log_a(x)$ ser a inversa da exponencial temos as seguintes identidades: $\log_a(a^x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $a^{\log_a(x)} = x$ para todo $x \in (0, +\infty)$.

Proposição 2.2. Seja $y = \log_a(x)$, $a \in \mathbb{R}$ e tal que $0 < a \neq 1$:

1. $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, para todo $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, isto é:

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2), \quad \text{para todo } x_1, x_2 \in (0, +\infty).$$

2. $\log_a(x^b) = b \cdot \log_a(x)$.

3. $\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a(x_1) - \log_a(x_2)$.

4. $\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$.

5. $a^x = b^{x \log_b(a)}$.

A mudança de base da função logarítmica é dada por:

$$\boxed{\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}}$$

Observações 2.2.

1. Um caso particular e importante de função logarítmica é quando a é a constante de Euler, o número $e \simeq 2,718281$.
2. Em tal caso a notação usual é $y = f(x) = \log_e(x) = \ln(x)$, chamado logaritmo natural de x . Veja o capítulo V.

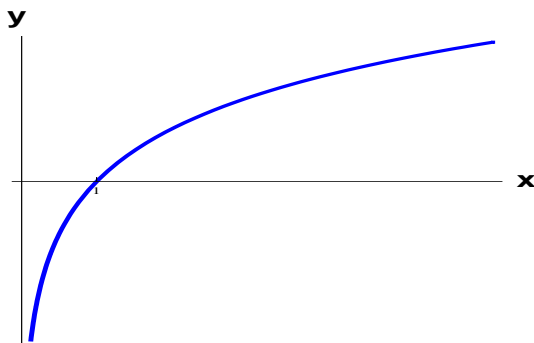


Figura 2.14: Gráfico de $f(x) = \ln(x)$.

3. A relação entre a^x e e^x é:

$$a^x = (e^{\ln(a)})^x = e^{kx}$$

onde $k = \ln(a)$.

Exemplo 2.6.

[1] Determine o domínio da função $f(x) = \ln(\ln(x))$.

Note que $\ln(u)$ é definido se $u > 0$; logo, para que $f(x) = \ln(\ln(x))$ esteja definido é necessário que $\ln(x) > 0$; logo $x > 1$ e $Dom(f) = (1, +\infty)$.

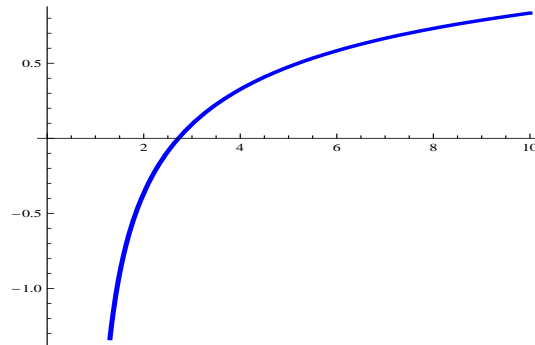


Figura 2.15: Gráfico de $f(x) = \ln(\ln(x))$.

[2] Determine a inversa da função $f(x) = 81 \times (6561)^x$.

Fazendo $y = 81 \times (6561)^x = 3^{8x+4}$ e aplicando logaritmo de base $b = 3$ a ambos os lados: $\log_3(y) = 8x + 4$ e $x = \frac{\log_3(y) - 4}{8}$ ou,

$$f^{-1}(y) = \frac{\log_3(y) - 4}{8}.$$

Equivalentemente:

$$f^{-1}(x) = \frac{\log_3(x) - 4}{8}, \quad x > 0$$

que é a inversa da função dada.

[3] Uma floresta possui, aproximadamente, 24000 m^3 de madeira comercializável, a qual aumenta na razão de 3.5 ao ano. Outra floresta possui, aproximadamente, 48000 m^3 de madeira comercializável com a mesma razão de crescimento da primeira.

(a) Quantos anos devem traspasar para que a primeira floresta tenha a mesma quantidade de madeira da segunda?

(b) Quantos anos são necessários para que ambas as florestas tripliquem a quantidade de madeira?

Denotemos por $f(t) = 24000 \times 1.035^t$ e $g(t) = 48000 \times 1.035^t$ as funções exponenciais que modelam cada floresta. Então:

(a) Devemos ter $f(t) = 48000$; logo, $24000 \times 1.035^t = 48000$, então $1.035^t = 2$. Aplicando logaritmo natural a ambos os lados:

$$t = \frac{\ln(2)}{\ln(1.035)} \cong 20.14 \text{ anos.}$$

(b) Devemos ter $f(t_0) = 72000$ e $g(t_1) = 144000$, então $1.035^{t_0} = 3$ e $1.035^{t_1} = 3$. . Aplicando logaritmo natural a ambos os lados: :

$$t = t_0 = t_1 = \frac{\ln(3)}{\ln(1.035)} \cong 31.93 \text{ anos.}$$

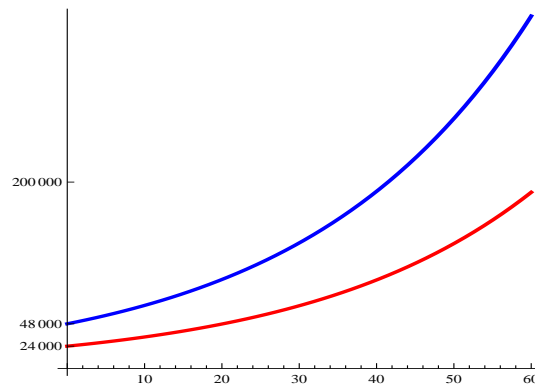


Figura 2.16: Gráfico de $f(x)$ e $g(x)$.

2.5 Desintegração Radioativa

Considere uma amostra de material que contém uma certa quantidade de isótopo radioativo. Foi experimentalmente observado que uma fração constante desse material radioativo decairá espontaneamente (em outro elemento ou em outro isótopo do mesmo elemento) durante uma unidade de tempo. A meia-vida de um isótopo radioativo é o tempo necessário para a metade dele decair.

Por exemplo, a meia-vida do Carbono-14 é de 5730 anos, a do Tório-234 é de 24.5 dias, aproximadamente.

Esta é a chave do método para a determinação da idade de objetos orgânicos utilizando Carbono-14. Este isótopo é acumulado durante toda a vida e começa a decair com a morte.

Como a meia-vida do Carbono-14 é de 5730 anos aproximadamente, quantidades mensuráveis de Carbono-14 estão presentes muitos anos após a morte do objeto orgânico.

Por exemplo, um osso após 5700 anos possui a metade da quantidade de Carbono-14 que existia quando estava vivo; após 11000 anos possui uma quarta parte da quantidade de Carbono-14 que existia quando estava vivo; após 16000 anos possui uma oitava parte de Carbono-14 que existia quando estava vivo.

Para determinar a função que representa o exemplo, consideramos 5730 anos como unidade. Seja C_0 a quantidade inicial de Carbono-14; então a quantidade C de Carbono-14 após t unidades de tempo é calculada por:

$$C(t) = C_0 \left[\frac{1}{2} \right]^{\frac{t}{5730}}.$$

Em geral, se a meia-vida de um isótopo radioativo é h anos, então a quantidade de isótopo após t unidades de tempo é determinada por:

$$Q(t) = Q_0 \left[\frac{1}{2} \right]^{\frac{t}{h}},$$

onde Q_0 é a quantidade inicial.

Escrevamos a função que representa o decaimento radioativo do Carbono-14 utilizando a função exponencial: $f(t) = e^t$. Devemos determinar k tal que:

$$C_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{5730}} = C_0 e^{k t}.$$

Aplicando logaritmo a ambos os lados: $k = -\frac{\ln(2)}{5730} = -0.0001216$ e:

$$C(t) = C_0 e^{-0.0001216 t}.$$

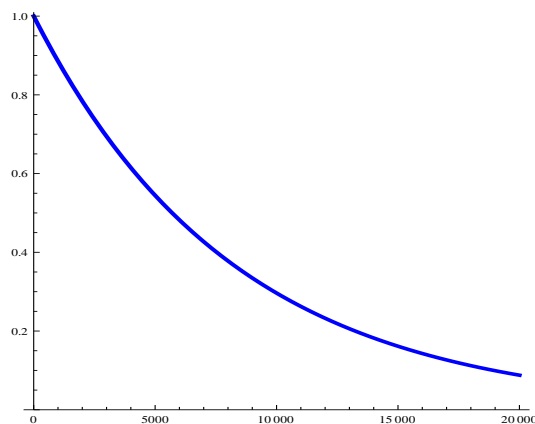


Figura 2.17: Gráfico de $C = C(t)$ para $C_0 = 1$.

Exemplo 2.7.

[1] Se uma amostra de carvão vegetal achada contem 63% de Carbono-14, em relação a uma amostra atual de igual massa, determine a idade da amostra achada.

$C_0 \times 0.63 = C(t) = C_0 e^{-0.000121 t}$; aplicando logaritmo a ambos os lados:

$$t = -\frac{\ln(0.63)}{0.0001216} \cong 3799.63,$$

que é igual, aproximadamente, a 3800 anos.

[2] O elemento radioativo polônio-210 tem uma meia-vida de 140 dias aproximadamente. Sabendo que uma amostra pesa 20 miligramas inicialmente, quanto restará após duas semanas?

$Q(t) = 20 e^{-kt}$; como a meia-vida do polônio-210 é de 140 dias, então, $Q(140) = 10$;

logo, $20 e^{-140k} = 10$ e $k = \frac{\ln(2)}{140} \cong 0.004951$; portanto,

$$Q(t) = 20 e^{-0.004951t}$$

e $Q(14) = 18.66$ miligramas.

[3] A população de uma cidade é de 20000 habitantes, de acordo com um censo realizado em 1990 e 25000 habitantes de acordo de um censo realizado em 1995. Sabendo que a população tem um crescimento exponencial, pergunta-se:

(a) qual era a população no ano de 1980?

(b) quando a cidade atingirá uma população de 40000 habitantes?

(a) $Q(t) = 20000 e^{kt}$; por outro lado, $25000 = Q(5) = 20000 e^{5k}$ e $k = \frac{1}{5} \ln\left(\frac{5}{4}\right) \cong 0.044628$; logo,

$$Q(t) = 20000 e^{0.044628t}$$

e $Q(-10) = 12800$ habitantes.

(b) Se $Q(t) = 40000$, então $t = 15.531$; aproximadamente, 15 anos.

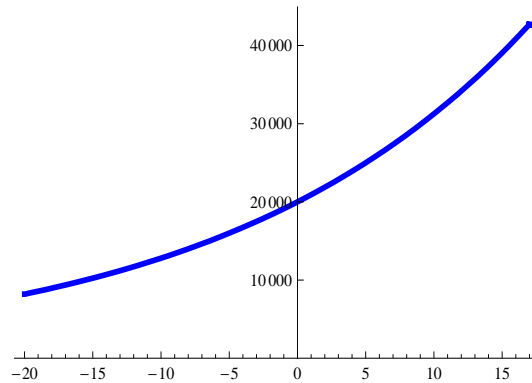


Figura 2.18: Gráfico da evolução da população.

[4] Se a população de uma certa espécie de peixes num ambiente limitado é dada por:

$$L(t) = \frac{50000}{1 + 199e^{-t}},$$

onde t denota o número de semanas transcorridas, quanto tempo será necessário para a população atingir 20000 peixes?

Devemos determinar $t = L^{-1}(y)$, onde $y = L(t)$; logo:

$$t = L^{-1}(y) = \ln\left(\frac{199y}{50000 - y}\right).$$

Então, para $y = 20000$, temos

$$t = \ln\left(\frac{398}{3}\right) \cong 4.88 \text{ semanas.}$$

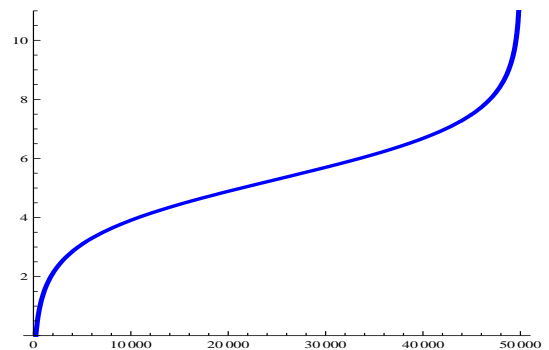
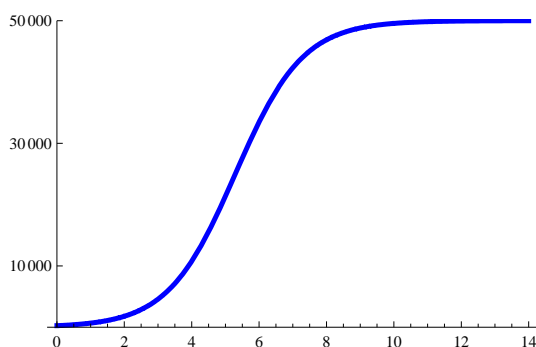


Figura 2.19: Gráficos de L e L^{-1} , respectivamente.

2.6 Funções Trigonômétricas

Fenômenos de natureza cíclica ou periódicos são associados às funções trigonométricas. Por exemplo, o batimento cardíaco, as ondas de rádio, o ritmo oscilatório dos braços durante uma corrida, o movimento periódico dos planetas e a vibração de átomos em cristais.

Definição 2.2. Uma função f é periódica de período t , $t > 0$, quando para todo $x \in \text{Dom}(f)$, $x + t \in \text{Dom}(f)$ e $f(x) = f(x + t)$.

O gráfico de uma função periódica de período t se repete em cada intervalo de comprimento t . Veja os exercícios.

2.6.1 Função Seno e Função Co-seno

As funções trigonométricas podem ser estendidas para todos os números reais de modo que sejam preservadas todas as suas propriedades básicas.

A forma de estender é a seguinte: considere um círculo centrado na origem de raio 1 e fixe o ponto $A = (1, 0)$ em tal círculo; considere como sentido positivo, o sentido anti-horário; analogamente, o sentido negativo é o sentido horário.

Para cada $x \in \mathbb{R}$ associamos um ponto P de modo que:

Se $0 < x < 2\pi$, partimos de A e percorremos o círculo no sentido positivo até obter um arco cujo comprimento seja x . O ponto onde o arco termina é P .

Se $-2\pi < x < 0$, partimos de A e percorremos o círculo no sentido negativo até obter um arco cujo comprimento seja $|x|$. O ponto onde o arco termina é P . Assim a cada número real corresponde um ponto P .

Se $x > 2\pi$ será necessário dar mais uma volta no círculo, no sentido positivo, para atingir a extremidade P do arco. Idem para $x < -2\pi$. Assim a cada número da forma $x + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) corresponderá um ponto do círculo.

Definição 2.3.

1. **Função Seno** É a ordenada de P :

$$\boxed{f(x) = \text{sen}(x)}.$$

2. **Função Co-seno** É a abscissa de P :

$$\boxed{f(x) = \text{cos}(x)}.$$

Por exemplo $\text{sen}(2003)$ indica que estamos calculando o seno de 2003 radianos. Nas duas funções temos que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = [-1, 1]$; seno é uma função ímpar e co-seno é uma função par; ambas são periódicas de período 2π .

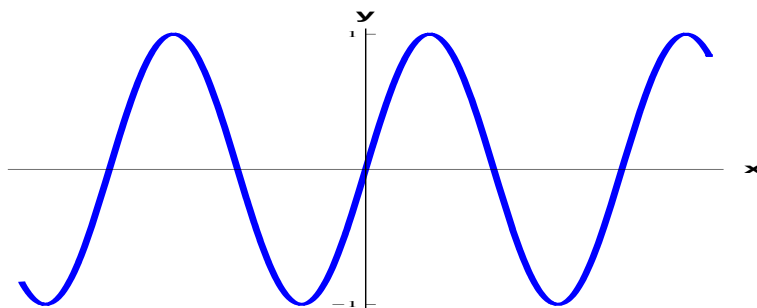


Figura 2.20: Gráfico do Seno.

Observe que se $f(x) = \text{sen}(x)$, então $f(x + \frac{\pi}{2}) = \text{cos}(x)$; logo, o gráfico do co-seno é uma translação de $\frac{\pi}{2}$ do gráfico do seno.

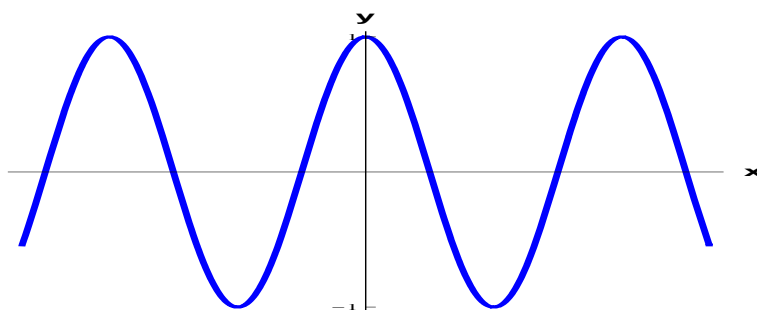


Figura 2.21: Gráfico do Co-seno.

2.6.2 Função Tangente e Função Secante

Definição 2.4. Se $\cos(x) \neq 0$, definimos:

1. Função Tangente :

$$f(x) = \text{tg}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)}$$

2. Função Secante :

$$f(x) = \text{sec}(x) = \frac{1}{\text{cos}(x)}$$

Nas duas funções temos que $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \text{ inteiro}\}$, $Im(tg) = \mathbb{R}$ e $Im(sec) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$; tangente é uma função ímpar e secante é uma função par; ambas são periódicas de períodos π e 2π , respectivamente. Seus gráficos são:

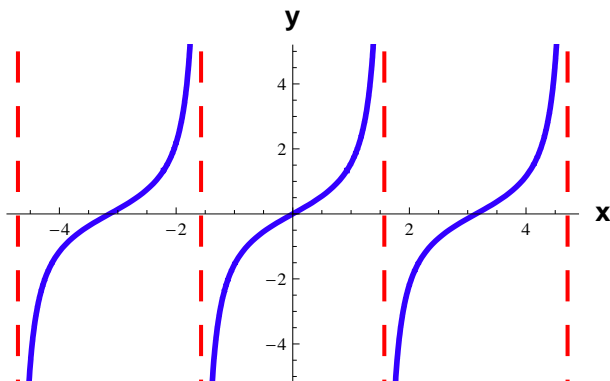


Figura 2.22: Gráfico da Tangente.

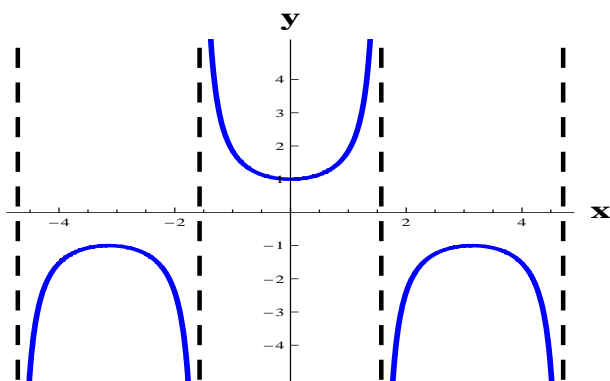


Figura 2.23: Gráfico da Secante.

2.6.3 Função Co-tangente e Função Co-secante

Definição 2.5. Se $\text{sen}(x) \neq 0$, definimos:

1. **Função Co-tangente :**

$$f(x) = \cotg(x) = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$$

2. **Função Co-secante :**

$$f(x) = \text{cosec}(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)}$$

Nas duas funções temos que $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} / x \neq n\pi, n \text{ inteiro}\}$.

Por outro lado, $Im(cotg) = \mathbb{R}$ e $Im(cosec) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$; co-tangente e co-secante são funções ímpares; ambas são periódicas de períodos π e 2π , respectivamente.

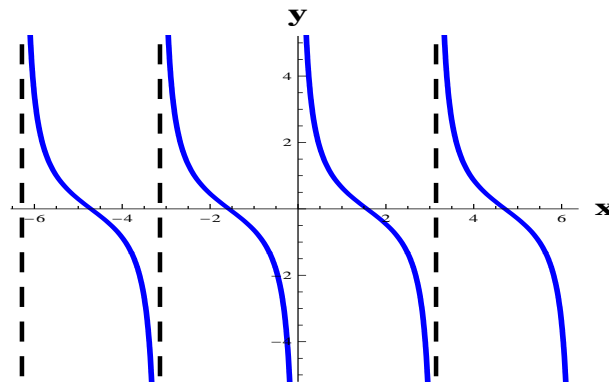


Figura 2.24: Gráfico da Co-tangente.

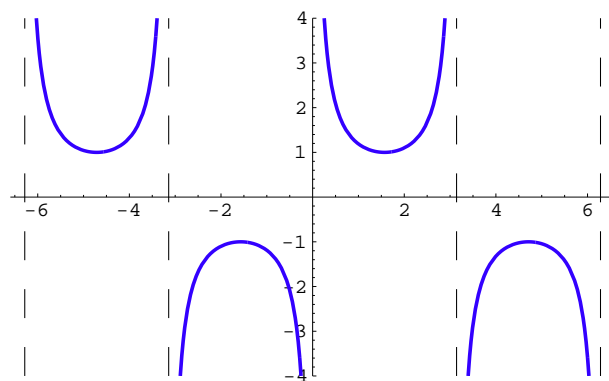


Figura 2.25: Gráfico da Co-secante.

Observe os gráficos de seno e co-secante, co-seno e secante:

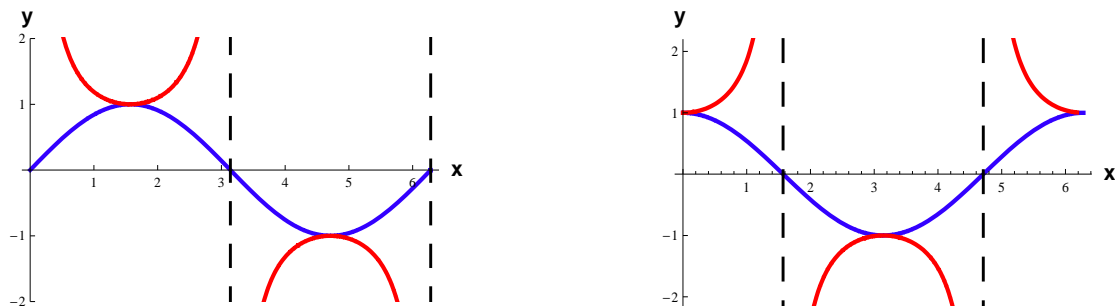


Figura 2.26:

Tangente e co-tangente:

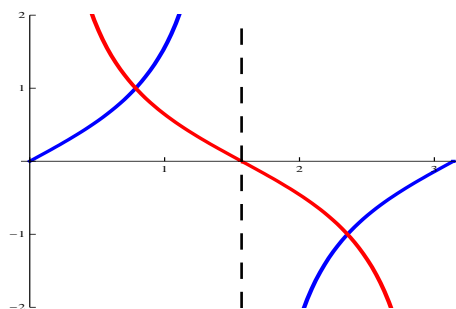


Figura 2.27:

Exemplo 2.8.

[1] O fluxo de ar através da traquéia é uma função periódica do tempo x e se dá em ambos os sentidos dos pulmões (inspiração e expiração). O fluxo pode ser representado pela função:

$$f(x) = A \operatorname{sen}(w x),$$

onde A é o fluxo máximo durante a expiração e inspiração; w é o período respiratório, tal que

$$w = \frac{2\pi}{T},$$

onde T é o tempo que o indivíduo leva para fazer um ciclo completo. A função $f(x)$ é, certamente, uma aproximação, pois T varia de indivíduo a indivíduo. Mas, estudos experimentais mostram que é uma "boa" aproximação da realidade.

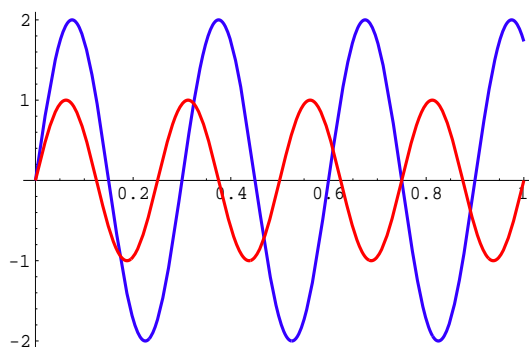


Figura 2.28: Gráfico para $A = 1$ e $T = \frac{1}{4}$, $A = 2$ e $T = \frac{3}{10}$.

[2] O ritmo oscilatório dos braços durante uma corrida pode ser representado por:

$$y = f(x) = \frac{\pi}{9} \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{3} \left[x - \frac{3}{4}\right]\right) = \frac{\pi}{9} \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi x}{3}\right),$$

onde y é o ângulo compreendido entre a posição do braço e o eixo vertical e x é o tempo medido em segundos. O período é $\frac{3}{4}$ segundos por ciclo, isto é, uma oscilação completa, obtida quando o braço descreve o ciclo para frente e para trás, é concluída em $\frac{3}{4}$ segundos.

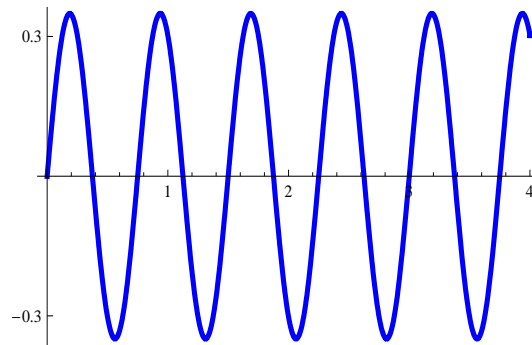


Figura 2.29: Gráfico de $f(x) = \frac{\pi}{9} \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi x}{3}\right)$ para $x \in [0, 4]$.

[3] O movimento harmônico simples descreve a posição das oscilações regulares em torno de uma posição de equilíbrio e que variam suavemente, como um pêndulo que oscila continuamente na vertical sem nenhum tipo de restrição, como por exemplo, a fricção. Estas posições são muito bem descritas pelas funções:

$$f(t) = k \operatorname{sen}(wt + b) \quad \text{ou} \quad g(t) = k \cos(wt + b),$$

onde $k, b \in \mathbb{R}$ e $w > 0$.

O período é o tempo $\frac{2\pi}{w}$ necessário para uma oscilação completa e a frequência $\frac{w}{2\pi}$ é o número de oscilações por unidade de tempo.

O movimento harmônico amortecido descreve fenômenos de oscilação onde são impostas restrições, como por exemplo, um pêndulo que oscila com fricção. Tal tipo de movimento é descrito por:

$$f(x) = e^{-ax} \operatorname{sen}(bx) \quad a, b > 0.$$

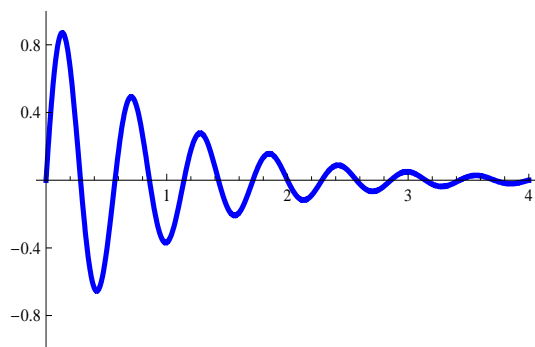


Figura 2.30: Gráfico para $f(x) = e^{-ax} \operatorname{sen}(bx)$.

[4] Se f é uma função periódica de período l , então a função definida por $g(x) = f(kx + m)$ é periódica de período $\frac{l}{k}$, se $k > 0$.

De fato:

$$g\left(x + \frac{l}{k}\right) = f\left(k\left(x + \frac{l}{k}\right) + m\right) = f(kx + m + l) = f(kx + m) = g(x).$$

Por exemplo, as funções $f(x) = \operatorname{sen}(kx)$ e $g(x) = \cos(kx)$ são periódicas de período $\frac{2\pi}{k}$.

Determinemos o período da função $g(x) = \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. Seja $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ que é periódica de período π ; $g(x) = \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right) = f\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; logo, a função g é periódica de período π .

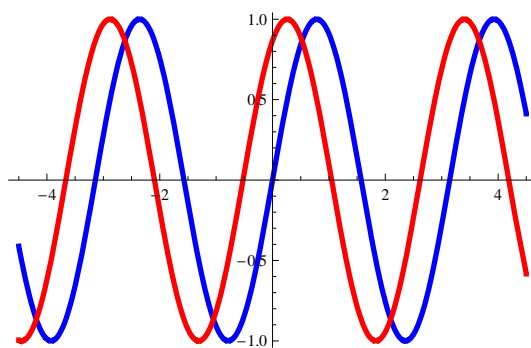
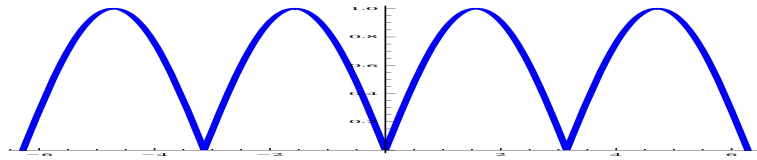


Figura 2.31: Gráfico de g (vermelho) e de f (azul).

[5] Esboçemos o gráfico de $f(x) = |\operatorname{sen}(x)|$.

Como $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\operatorname{Im}(f) = [0, 1]$, f é uma função par e periódica de período 2π ; então, basta estudar $f(x)$ no primeiro quadrante. $\operatorname{sen}(x) \geq 0$ se $0 \leq x \leq \pi$.

Figura 2.32: Gráfico de $f(x) = |\text{sen}(x)|$.

2.7 Funções Trigonométricas Inversas

É claro que a função $y = \text{sen}(x)$ não possui uma inversa, pois para cada y existem infinitos x que satisfazem a relação $y = \text{sen}(x)$.

Geometricamente, qualquer reta paralela ao eixo dos x de equação $y = b$ tal que $b \in [-1, 1]$, intersecta o gráfico da função infinitas vezes. Para evitar esta situação, restringimos o domínio de $\text{sen}(x)$ para obter uma nova função que não apresentará este problema.

A rigor estas duas funções são diferentes, pois tem domínios diferentes. Isto será feito para cada função trigonométrica.

2.7.1 Função Arco seno

Definamos a função :

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$$

tal que $f(x) = \text{sen}(x)$. Esta nova função possui inversa chamada função **arco seno**.

$$f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

é denotada por $y = f^{-1}(x) = \text{arcsen}(x)$ e definida por:

$$\boxed{y = \text{arcsen}(x) \iff \text{sen}(y) = x}$$

Para representar graficamente a função $f^{-1}(x) = \text{arcsen}(x)$, usamos a simetria de f e f^{-1} em relação a $y = x$. O gráfico é:

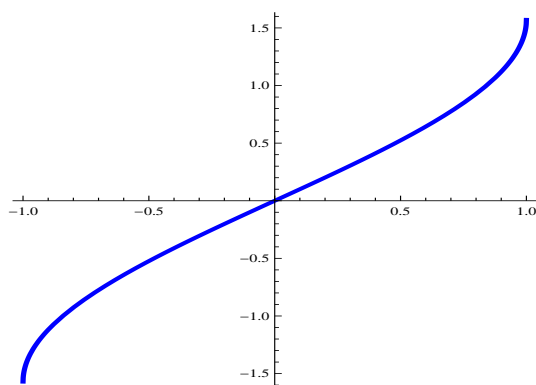


Figura 2.33: Gráfico de $f(x) = \arcsen(x)$.

Observação 2.3. O domínio usado para definir a função arco-seno, poderia ser substituído por qualquer dos intervalos seguintes: $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, $[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$, ..., etc.; esta observação também será válida para as outras funções trigonométricas.

Exemplo 2.9.

[1] Calcule $\arcsen(\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Devemos resolver a equação $y = \arcsen(\frac{\sqrt{2}}{2})$, que é equivalente a calcular $\sen(y) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. A solução desta equação é $y = \frac{\pi}{4}$; então $\arcsen(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$.

[2] Calcule $\arcsen(\sen(\frac{13\pi}{6}))$.

Observe primeiramente que $\frac{13\pi}{6} \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; então, não podemos escrever

$$\arcsen(\sen(\frac{13\pi}{6})) = \frac{13\pi}{6}.$$

Mas $\sen(\frac{13\pi}{6}) = \sen(2\pi + \frac{\pi}{6}) = \sen(\frac{\pi}{6})$ e $\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; então,

$$\arcsen(\sen(\frac{13\pi}{6})) = \arcsen(\sen(\frac{\pi}{6})) = \frac{\pi}{6},$$

pois \sen e \arcsen são inversas.

[3] Verifique que $\cos(\arcsen(x)) = \sqrt{1-x^2}$, $|x| \leq 1$.

Se $y = \arcsen(x)$, então $\sen(y) = x$, $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; de $\sen^2(y) + \cos^2(y) = 1$, segue que $\cos^2(y) = 1 - \sen^2(y) = 1 - x^2$; logo, $\cos(y) = \sqrt{1-x^2}$, pois $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e

$$\cos(\arcsen(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

2.7.2 Função Arco co-seno

Como no caso anterior, definamos a função $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ tal que $f(x) = \cos(x)$; esta nova função possui inversa chamada função **arco co-seno**:

$$f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

é denotada por $y = f^{-1}(x) = \arccos(x)$ e definida por:

$$\boxed{y = \arccos(x) \iff \cos(y) = x}$$

Para representar graficamente a função $f^{-1}(x) = \arccos(x)$, usamos a simetria de f e f^{-1} em relação a $y = x$.

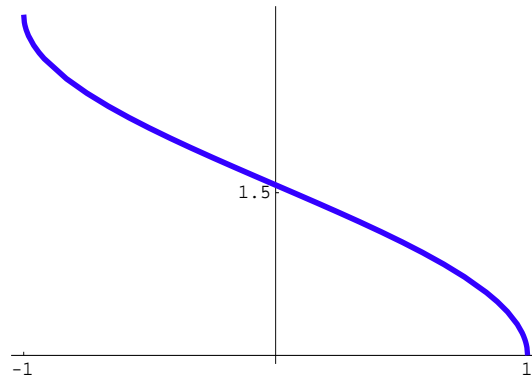


Figura 2.34: Gráfico de $f(x) = \arccos(x)$.

O domínio usado para definir a função arco co-seno poderia ser substituído por qualquer dos intervalos seguintes: $[\pi, 2\pi]$, $[2\pi, 3\pi]$, ..., etc.

Exemplo 2.10.

[1] Calcule $\arccos(-1)$.

Devemos resolver a equação $y = \arccos(-1)$, que é equivalente a calcular $\cos(y) = -1$. A solução desta equação é $y = \pi$; logo $\arccos(-1) = \pi$.

[2] Calcule $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Devemos resolver a equação $y = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, que é equivalente a calcular $\cos(y) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. A solução desta equação é $y = \frac{\pi}{4}$; logo, $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

[3] Determine o domínio da função $f(x) = \arccos\left(\frac{2x}{x+1}\right)$.

A função $\arccos(u)$ é definido se, e somente se $u \in [-1, 1]$, logo para que $\arccos(\frac{2x}{x+1})$ esteja definido é necessário que $\frac{2x}{x+1} \in [-1, 1]$. Então: $-1 \leq \frac{2x}{x+1} \leq 1$; resolvendo as inequações temos que $x \leq 1$ e $x \geq -\frac{1}{3}$; logo, $Dom(f) = [-\frac{1}{3}, 1]$.

[4] Verifique que $\arcsen(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.

Como $\cos(\frac{\pi}{2} - y) = \sin(y)$. Logo, $\cos(\frac{\pi}{2} - \arcsen(x)) = \sin(\arcsen(x)) = x$; logo temos que $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsen(x)$; então, $\arcsen(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.

2.7.3 Função Arco tangente

Como antes, definamos a função :

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que $f(x) = tg(x)$. Esta nova função possui inversa chamada função **arco tangente**.

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

é denotada por $y = f^{-1}(x) = \arctg(x)$ e definida por:

$$\boxed{y = \arctg(x) \iff tg(y) = x}$$

Para representar graficamente a função $f^{-1}(x) = \arctg(x)$, usamos a simetria de f e f^{-1} em relação a $y = x$.

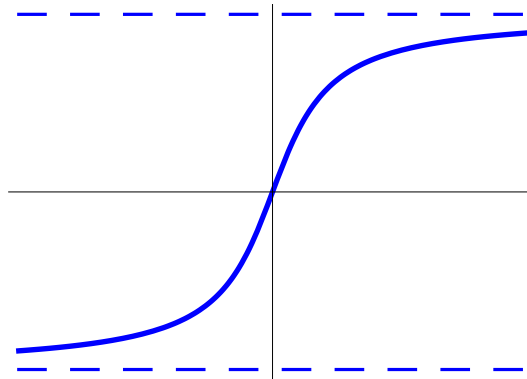


Figura 2.35: Gráfico de $f(x) = \arctg(x)$.

O domínio usado para definir a função arco-tangente, poderia ser substituído por qualquer dos intervalos seguintes: $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, $(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$, ..., etc.

Exemplo 2.11.

[1] Calcule $\arctg(-\sqrt{3})$.

Devemos resolver a equação $y = \arctg(-\sqrt{3})$, que é equivalente a calcular $tg(y) = -\sqrt{3}$. A solução desta equação é $y = -\frac{\pi}{3}$; logo, $\arctg(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$.

[2] Calcule $\text{sen}(\arctg(\frac{\sqrt{3}}{3}))$.

Resolvamos a equação $y = \arctg(\frac{\sqrt{3}}{3})$, que é equivalente a calcular $tg(y) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. A solução desta equação é $y = \frac{\pi}{6}$; logo:

$$\text{sen}(\arctg(\frac{\sqrt{3}}{3})) = \text{sen}(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}.$$

[3] Se $f(x) = \arctg(x)$, verifique que : $f(x) + f(y) = f(\frac{x+y}{1-xy})$.

Sejam $v = f(\frac{x+y}{1-xy}) = \arctg(\frac{x+y}{1-xy})$, $z = f(x)$ e $w = f(y)$; pelas definições temos:

$$tg(v) = \frac{x+y}{1-xy}, \quad tg(z) = x, \quad tg(w) = y.$$

Logo, $tg(v) = \frac{tg(z) + tg(w)}{1 - tg(z)tg(w)} = tg(z+w)$; então, $v = z + w$.

2.7.4 Funções Arco co-tangente, Arco secante e Arco co-secante

Analogamente aos casos anteriores, as outras inversas são denotadas e definidas, respectivamente por:

Arco co-tangente:

$$f^{-1}(x) = \text{arccotg}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctg(x).$$

Note que $\text{Dom}(f^{-1}) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f^{-1}) = (0, \pi)$.

Arco secante:

$$f^{-1}(x) = \text{arcsec}(x) = \arccos(\frac{1}{x}).$$

Note que $\text{Dom}(f^{-1}) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ e $\text{Im}(f^{-1}) = [0, \frac{\pi}{2}] \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$.

Arco co-secante:

$$f^{-1}(x) = \text{arccosec}(x) = \arcsen(\frac{1}{x}).$$

Note que $Dom(f^{-1}) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ e $Im(f^{-1}) = [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$.

Novamente para representar graficamente a função f^{-1} , usamos a simetria de f e f^{-1} em relação a $y = x$.

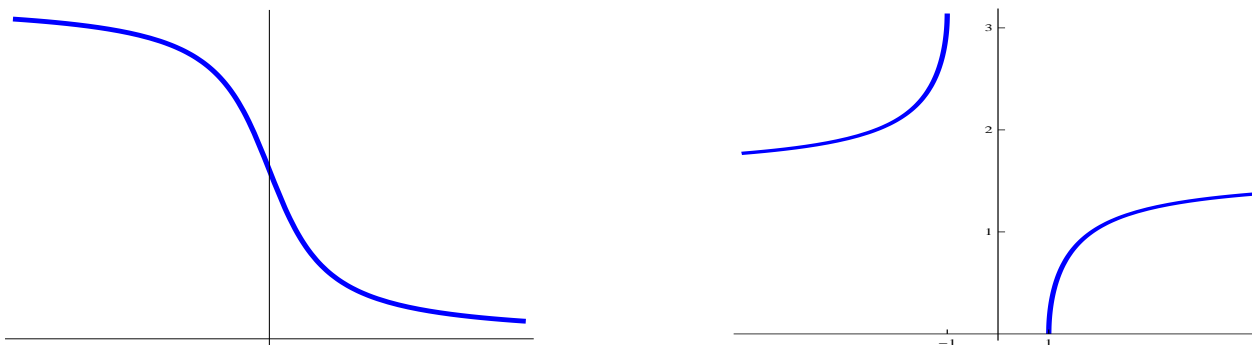


Figura 2.36: Gráficos de $f(x) = \operatorname{arccotg}(x)$ e $f(x) = \operatorname{arcsec}(x)$, respectivamente.

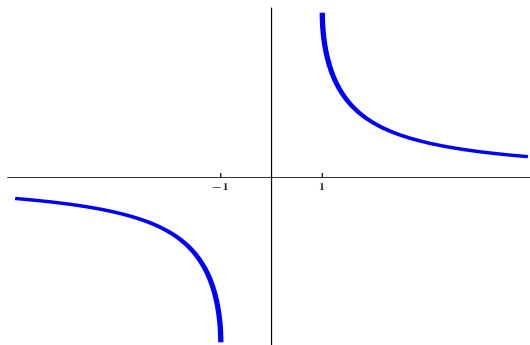


Figura 2.37: Gráfico de $f(x) = \operatorname{arccosec}(x)$.

Exemplo 2.12.

[1] Calcule $\operatorname{arccotg}(1)$.

Devemos resolver a equação $y = \operatorname{arctg}(1)$, que é equivalente a calcular $\operatorname{tg}(y) = 1$. A solução desta equação é $y = \frac{\pi}{4}$; $\operatorname{arccotg}(1) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

[2] Calcule $\operatorname{arcsec}(2)$.

Como $\operatorname{arcsec}(2) = \arccos(\frac{1}{2})$, devemos resolver a equação $y = \arccos(\frac{1}{2})$, que é equivalente a calcular $\cos(y) = \frac{1}{2}$. A solução desta equação é $y = \frac{\pi}{3}$; logo, $\operatorname{arcsec}(2) = \frac{\pi}{3}$.

[3] Calcule $\operatorname{arccosec}(\frac{2\sqrt{3}}{3})$.

Como $\operatorname{arccosec}(\frac{2\sqrt{3}}{3}) = \operatorname{arcsen}(\frac{\sqrt{3}}{2})$, devemos resolver a equação $y = \operatorname{arcsen}(\frac{\sqrt{3}}{2})$, que é equivalente a calcular $\operatorname{sen}(y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. A solução desta equação é $y = \frac{\pi}{3}$; logo:

$$\operatorname{arccosec}(\frac{2\sqrt{3}}{3}) = \frac{\pi}{3}.$$

2.8 Funções Hiperbólicas

As funções hiperbólicas são definidas como combinações de funções exponenciais e estão relacionadas com a hipérbole, da mesma maneira que as funções trigonométricas estão relacionadas com o círculo. As funções seno e co-seno hiperbólico são denotadas e definidas respectivamente como:

Seno hiperbólico: $f(x) = \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$

Co-seno hiperbólico: $f(x) = \operatorname{cosh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$

Note que $\operatorname{Dom}(\operatorname{senh}) = \operatorname{Dom}(\operatorname{cosh}) = \operatorname{Im}(\operatorname{senh}) = \mathbb{R}$ e $\operatorname{Im}(\operatorname{cosh}) = [1, +\infty)$; seus gráficos respectivos são:

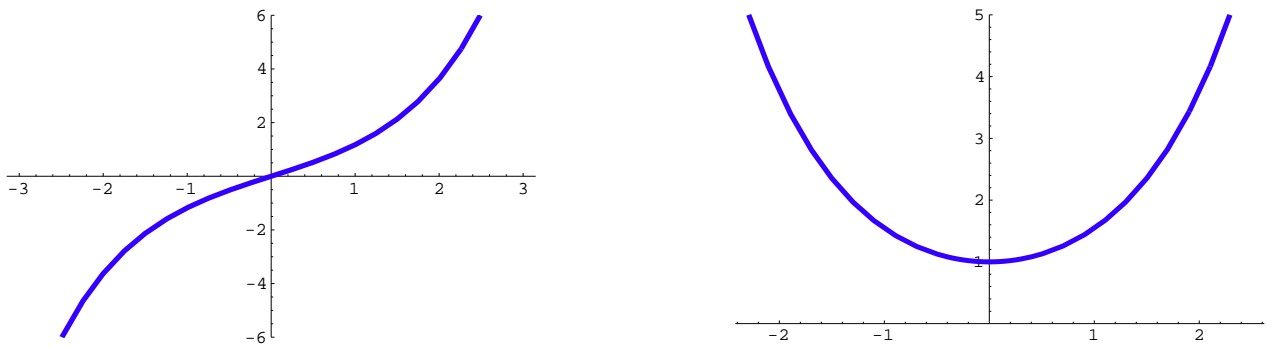


Figura 2.38: Gráficos de $f(x) = \operatorname{senh}(x)$ e $f(x) = \operatorname{cosh}(x)$, respectivamente.

Observação 2.4.

1. Usando as definições, é fácil verificar que $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, “análoga” à identidade trigonométrica $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
2. A diferença é que se fizermos $u = \cosh(x)$ e $v = \sinh(x)$, temos $u^2 - v^2 = 1$, que é a equação de uma hipérbole no plano uv , o que “justifica”, de alguma forma, o nome de hiperbólico.

As outras funções hiperbólicas são denotadas e definidas, respectivamente, como:

Tangente hiperbólica:

$$f(x) = \operatorname{tgh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Co-tangente hiperbólica:

$$f(x) = \operatorname{cotgh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Secante hiperbólica:

$$f(x) = \operatorname{sech}(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}.$$

Co-secante hiperbólica:

$$f(x) = \operatorname{cosech}(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

Note que $\operatorname{Dom}(\operatorname{tgh}) = \operatorname{Dom}(\operatorname{sech}) = \mathbb{R}$, $\operatorname{Dom}(\operatorname{cotgh}) = \operatorname{Dom}(\operatorname{cosech}) = \operatorname{Im}(\operatorname{cosech}) = \mathbb{R} - \{0\}$, $\operatorname{Im}(\operatorname{tgh}) = (-1, 1)$, $\operatorname{Im}(\operatorname{sech}) = (0, 1]$ e $\operatorname{Im}(\operatorname{cotgh}) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; seus respectivos gráficos são:

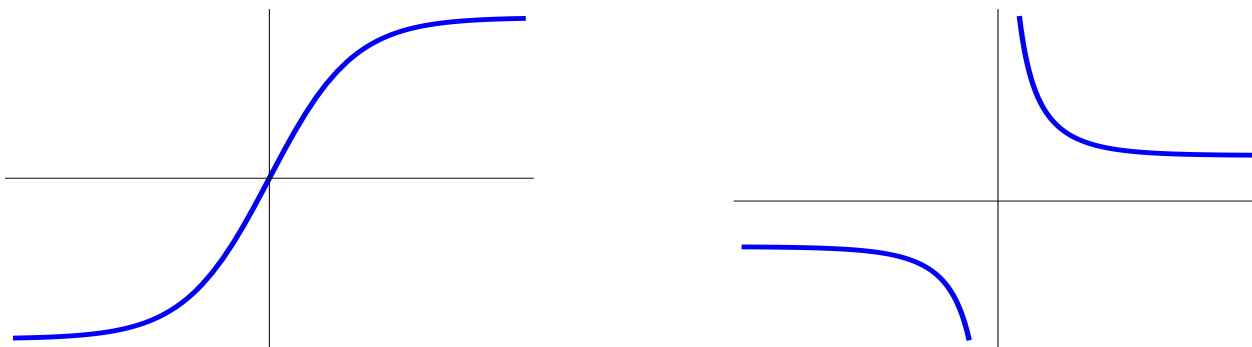


Figura 2.39:

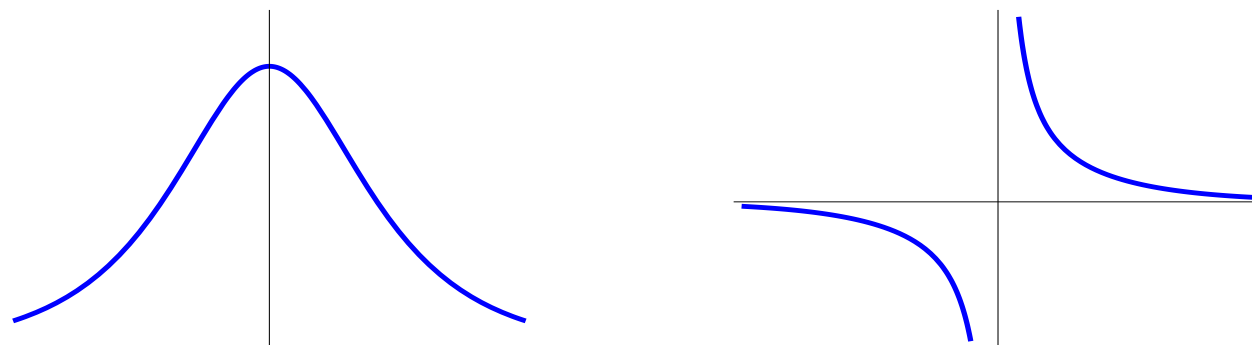


Figura 2.40:

As função hiperbólicas tem importantes aplicações.

Exemplo 2.13.

[1] A velocidade de uma onda marinha de comprimento L , onde o solo marinho está a uma profundidade de h metros é descrita por:

$$V(h) = \sqrt{k t g h (p h)},$$

onde g é a constante gravitacional, $k = \frac{g L}{\pi}$ e $p = \frac{2 \pi}{L}$. O desenho descreve a velocidade de uma onda de 100 metros de comprimento; note que a velocidade aumenta quando a profundidade aumenta:

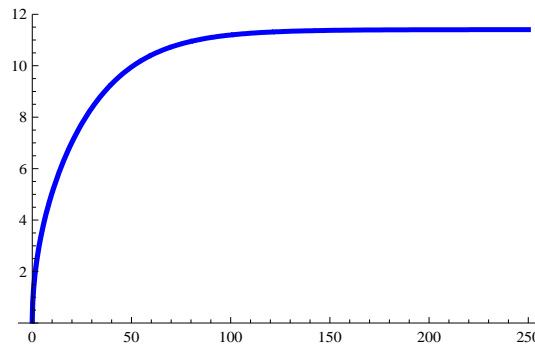


Figura 2.41:

[2] No estudo das linhas de transmissão de energia elétrica, a configuração de equilíbrio de um cabo homogêneo e flexível sob a ação de seu peso e suspenso por dois pontos tem por expressão:

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right),$$

onde a é uma constante positiva. O gráfico desta curva é chamado catenária.

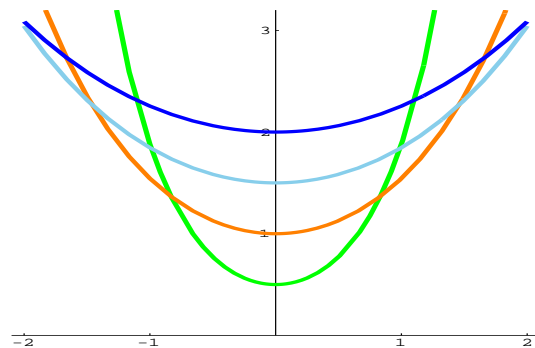


Figura 2.42: Desenhos para $a = \frac{1}{2}$, $a = 1$, $a = \frac{3}{2}$ e $a = 2$.

2.9 Exercícios

1. Ache o domínio das seguintes funções:

$$(a) f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\lg(x)}$$

$$(b) f(x) = \sqrt{\ln(x)}$$

$$(c) f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$(d) f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}$$

$$(e) f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(f) f(x) = \operatorname{arcsen}(x^2)$$

$$(g) f(x) = \arccos\left(\frac{3x}{x+1}\right)$$

$$(h) f(x) = \operatorname{arctg}(x^2 + 2)$$

$$(i) f(x) = \operatorname{arcsen}(\sqrt[3]{x})$$

$$(j) f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{arcsen}(x)}$$

$$(k) f(x) = \log_a(|x|)$$

$$(l) f(x) = \log_a(x(x^2 - 2)(x^2 - 3))$$

2. Determine a inversa das seguintes funções:

$$(a) f(x) = \frac{1}{x}$$

$$(b) f(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

$$(c) f(x) = x^4, x > 0$$

$$(d) f(x) = x^2 - 2x, x > 1$$

$$(e) f(x) = 2 + \frac{3}{x+1}$$

$$(f) f(x) = x^2 - 4x + 3, x > 2$$

$$(g) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$(h) f(x) = \frac{x+2}{2x-1}$$

$$(i) f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}, x > 0$$

$$(j) f(x) = \frac{3x+5}{4-3x}$$

$$(k) f(x) = 1 + \log_a(x)$$

$$(l) f(x) = \frac{1}{2} \log_a\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

3. Sejam $f(x) = \frac{1}{2} [a^x + a^{-x}]$ e $g(x) = \frac{1}{2} [a^x - a^{-x}]$, $a > 0$, $a \neq 1$. Verifique que:

$$(a) f(x+y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$$

$$(b) g(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x)$$

(c) Analise o caso $a = e$.

4. Esboce o gráfico das seguintes funções exponenciais:

$$(a) f(x) = a^x, a = 2, a = \frac{1}{2}$$

$$(b) f(x) = a^x, a = 10, a = 20$$

$$(c) f(x) = a^{-x}, a = e, a = 3$$

$$(d) f(x) = a^{-2x}, a = 2, a = 10$$

5. (a) Se $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$, verifique que: $f(a) + f(b) = f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$.

- (b) Se $f(x) = 2^x$, verifique que: $f(x+3) - f(x-1) = 15f(x-1)$.
6. Esboce o gráfico das seguintes funções logarítmicas:
- (a) $y = \ln(-x)$, $x < 0$ (c) $y = \frac{\ln(x)}{x}$ (e) $y = |\ln(x)|$
 (b) $y = \ln(|x|)$ (d) $y = x \ln(x)$ (f) $y = \ln(x^2)$
7. Verifique que: $\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y) = \operatorname{arccotg}(y) - \operatorname{arccotg}(x)$.
8. Se $f(x) = \arccos(\log_a(x))$, calcule:
- (a) $f(a)$, se $a = 10$ e $a = e$.
 (b) $f(1)$, $f(10)$, $f(100)$, se $a = 100$.
9. Verifique que $f(x) = \sinh(x)$, $g(x) = \tanh(x)$, $h(x) = \coth(x)$ e $F(x) = \operatorname{cosech}(x)$ são funções ímpares e $G(x) = \cosh(x)$, $H(x) = \operatorname{sech}(x)$ são funções pares.
10. As inversas das funções hiperbólicas são definidas por:
- (a) $y = \operatorname{argsenh}(x)$ se, e somente se, $\sinh(y) = x$.
 (b) $y = \operatorname{argcosh}(x)$ se, e somente se, $\cosh(y) = x$.
 (c) $y = \operatorname{argtgh}(x)$ se, e somente se, $\tanh(y) = x$.
 (d) $y = \operatorname{argcotgh}(x)$ se, e somente se, $\coth(y) = x$.
 (e) $y = \operatorname{argsech}(x)$ se, e somente se, $\operatorname{sech}(y) = x$.
 (f) $y = \operatorname{argcosech}(x)$ se, e somente se, $\operatorname{cosech}(y) = x$.

Verifique que:

- (a) $\operatorname{argsenh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$
 (b) $\operatorname{argcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $x \geq 1$
 (c) $\operatorname{argtgh}(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\right)$, $|x| < 1$
 (d) $\operatorname{argcotgh}(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$, $|x| > 1$
 (e) $\operatorname{argsech}(x) = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}\right)$, $x \in (0, 1]$

(f) $\operatorname{argcotgh}(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{|x|}\right), x \neq 0$

(g) Esboce o gráfico de cada uma destas funções.

11. Se $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, determine $\operatorname{Dom}(f)$ e calcule:

(a) $(f \circ f \circ f \circ f)(x^2 + 1)$

(c) $(f \circ f)\left(\frac{1}{1-x}\right)$

(b) $(f \circ f \circ f)((x+1)^2)$

(d) $(f \circ f)\left(\frac{1}{x}\right)$

Determine em cada caso as condições para as compostas.

12. Quando uma função polinomial do primeiro grau verifica: $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$? Esta propriedade vale ou não para:

(a) $f(x) = x^2$

(c) $f(x) = 2x + 1$

(e) $f(x) = x^3$

(b) $f(x) = 2x^3$

(d) $f(x) = 3x$

13. Verifique:

(a) $\operatorname{tgh}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tgh}(x) \pm \operatorname{tgh}(y)}{1 \pm \operatorname{tgh}(x)\operatorname{tgh}(y)}$

(c) $\operatorname{argsenh}(\sqrt{x^2 - 1}) = \operatorname{argcosh}(x)$

(d) $\operatorname{argcosh}(\sqrt{x^2 + 1}) = \operatorname{argsenh}(|x|)$

(b) $\cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cosh(x)}{2}}$

14. Defina a função: $f(x) = \llbracket x \rrbracket$, onde $\llbracket x \rrbracket$ denota o maior número inteiro n tal que $n \leq x$. Por exemplo $\llbracket \pi \rrbracket = 3$, $\llbracket -\frac{1}{2} \rrbracket = -1$ e $f(x) = 0$, se $x \in [0, 1)$. Calcule $\operatorname{Dom}(f)$, $\operatorname{Im}(f)$ e esboce o gráfico de f .

15. Esboce os gráficos de:

(a) $f(x) = \llbracket x \rrbracket - \llbracket -x \rrbracket$

(c) $f(x) = \llbracket x - 1 \rrbracket$

(b) $f(x) = \llbracket x + 1 \rrbracket$

(d) $f(x) = x - \llbracket x \rrbracket$

16. Escreva de forma mais simples as seguintes funções:

(a) $f(x) = \sinh(\ln(x)), x > 0$ (b) $f(x) = \operatorname{tgh}(2x)$

(c) $f(x) = \sinh(x) + \cosh(x)$

17. Verifique que $\operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$, $|x| \leq 1$.
18. Verifique que $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$.
19. Determine o domínio da função $f(x) = \operatorname{arcsen}(3x+1)$.
20. Seja $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(\log_{10}(x+1))}$. Determine $\operatorname{Dom}(f)$ e calcule $f(9)$.
21. Se $\log_b(a \sqrt[3]{b}) = 4$ e $\log_a(b) = c$, determine c .
22. Verifique que a função $f(x) = x - [[x]]$ é periódica de período 1.
23. Para calcular a dosagem de medicamentos que pode ser prescrita para crianças de 1 a 14 anos é utilizada a função

$$W(t) = \frac{et}{t+14},$$

onde e é a dose para adultos em mg e t é a idade em anos. Determine a dose que pode ser indicada para uma criança de 6 anos se a dose adulta é de $400\,mg$.

24. Num sítio arqueológico foram encontrados ossos que contem 20% da quantidade original de C_{14} . Faça uma estimativa da idade dos ossos.
25. A meia-vida do fósforo-32 é de 14.2 dias. Sabendo que 100 g desta substância estão presentes no início, obtenha uma fórmula para a quantidade presente após t anos. Que quantidade de fósforo-32 restará após 7 dias?
26. Em ciências naturais, meia-vida é o tempo necessário para que uma quantidade atinja a metade de seu valor inicial. O processo de eliminação de uma substância pelo organismo dos mamíferos é análogo ao de decaimento radioativo; logo, utiliza-se o modelo de decrescimento exponencial. Se 30% de uma droga aplicada num paciente é eliminada após 12 horas, qual é a meia-vida da droga?
27. Sabendo que a população de um certo país foi estimada em 23 milhões em 1990 e de 27 milhões em 1995, e supondo que a população tem um crescimento exponencial, determine quando a população atingirá 46 milhões.
28. Suponha que 10000 $u.m.$ são investidos a uma taxa de juros compostos de 9% ao ano. Determine o montante acumulado após 5 anos se os juros forem capitalizados mensalmente, semestralmente e anualmente.

29. Numa epidemia de gripe, o número de pessoas num bairro que pegaram gripe após t dias é dado por :

$$L(t) = \frac{90000}{1 + 1990 e^{-0.5t}}.$$

- (a) Quantas pessoas foram infectadas após 1 dia; após 10 dias?
- (b) Em quantos dias 50000 pessoas ficaram com gripe?
30. Utilizando exemplos determine o comportamento do gráfico da função logística se variamos A , B e C .
31. A magnitude de um terremoto na escala Richter é dada por

$$M(E) = \frac{2}{3} \log_{10} \left[\frac{E}{E_0} \right],$$

onde E é a energia liberada pelo terremoto em Jules e $E_0 = 10^{4.4} J$.

Note que $0 \leq M \leq 8.9$, onde 8.9 é a magnitude para o maior terremoto registrado.

- (a) O terremoto de São Francisco nos EEUU em 1906 liberou aproximadamente $5.95 \times 10^{16} J$. Qual foi sua magnitude?
- (b) Se o terremoto de Koebe no Japão teve uma magnitude de 7.1, quanta energia liberou?

Capítulo 3

LIMITE E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES

3.1 Introdução

O desenvolvimento teórico de grande parte do Cálculo foi feito utilizando a noção de **limite**. Por exemplo, as definições de derivada e de integral definida, independente de seu significado geométrico ou físico, são estabelecidas usando limites.

3.2 Limites

Inicialmente desenvolveremos a idéia intuitiva de limite, estudando o comportamento de uma função $y = f(x)$ nas proximidades de um ponto que não pertence, necessariamente, ao seu domínio.

Por exemplo, consideremos a seguinte função:

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \frac{(2x + 1)(x - 1)}{x - 1}.$$

É claro que $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.

Estudaremos a função nos valores de x que ficam próximos de 1, mas sem atingir 1. Para todo $x \in Dom(f)$ temos que $f(x) = 2x + 1$.

Vamos construir uma tabela de valores de x aproximando-se de 1, pela esquerda ($x < 1$) e pela direita ($x > 1$) e os correspondentes valores de $f(x)$:

$x < 1$	$f(x)$
0	1
0.5	2
0.7	2.4
0.8	2.6
0.9	2.8
0.99	2.98
0.999	2.998
0.9999	2.9998
0.99999	2.99998
0.999999	2.999998
0.9999999	2.9999998

$x > 1$	$f(x)$
2	5
1.7	4.4
1.5	4
1.2	3.4
1.09	3.18
1.009	3.018
1.0009	3.0018
1.00009	3.00018
1.000009	3.000018
1.0000009	3.0000018
1.00000009	3.00000018

Observações 3.1.

1. Observando as tabelas, podemos verificar que: “à medida que x vai se aproximando de 1, os valores de $f(x)$ vão aproximando-se de 3”.
2. A noção de proximidade pode ficar mais precisa utilizando valor absoluto. De fato, a distância entre dois pontos quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ é $|y - x|$. Assim a frase anterior escrita entre aspas, pode ser expressa por: se $|x - 1|$ aproxima-se de zero, então $|f(x) - 3|$ também se aproxima de zero; em outras palavras: para que $|f(x) - 3|$ seja pequeno é necessário que $|x - 1|$ também seja pequeno.
3. O número 3 é chamado limite de $f(x)$ quando x está próximo de 1. No exemplo, temos $|f(x) - 3| = 2|x - 1|$; logo, a distância de $f(x)$ a 3 é igual a duas vezes a distância de x a 1. É claro que quando x aproxima-se de 1, $|x - 1|$ aproxima-se de zero e conseqüentemente $|f(x) - 3|$ também aproxima-se de zero.
4. Mais ainda, poderemos tornar $f(x)$ tão perto de 3 quanto desejarmos, bastando para tal considerar x suficientemente próximo de 1. Por exemplo, se desejarmos que $|f(x) - 3|$ seja igual a 0, 2, basta considerar $|x - 1| = 0, 1$; agora, se desejarmos que $|f(x) - 3| < 0, 02$, basta considerar $|x - 1| < 0, 01$.
5. De um modo geral, considerando qualquer número real positivo ε (letra grega epsilon), tão pequeno quanto se deseje e definindo o número real δ (letra grega delta), $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, teremos que a distância de $f(x)$ a 3 é menor que ε , desde que a distância de x a 1 seja menor que δ . Então para todo número real positivo ε existe outro número real positivo δ , que depende de ε , tal que se $0 < |x - 1| < \delta$, então $|f(x) - 3| = 2|x - 1| < 2\delta = \varepsilon$.

6. Note que todos os intervalos abertos que contém 1 intersectam $\mathbb{R} - \{1\}$ de forma não vazia.

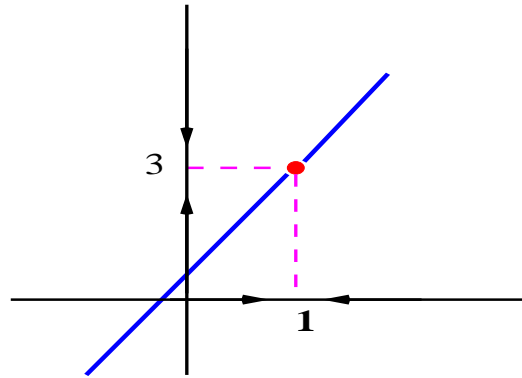


Figura 3.1:

Definição 3.1. Sejam $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $b \in \mathbb{R}$ tais que para todo intervalo aberto I , contendo b , tem-se $I \cap (A - \{b\}) \neq \emptyset$. O número real L é o **limite** de $f(x)$ quando x aproxima-se de b quando para todo número $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (δ dependendo de ε), tal que, se $x \in A$ e $0 < |x - b| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$. A notação é:

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L$$

Observação 3.1. A definição é equivalente a dizer:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in (b - \delta, b + \delta) \cap (A - \{b\})$, então

$$f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

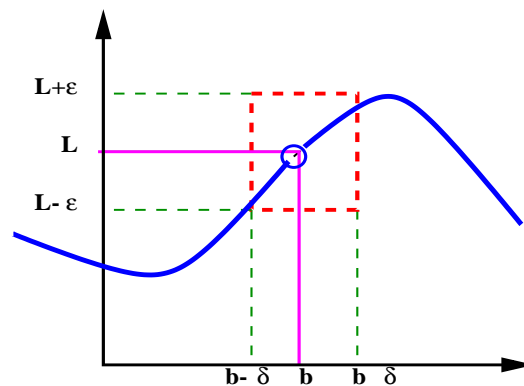


Figura 3.2:

Exemplo 3.1.

Estudemos o limite:

$$\lim_{x \rightarrow 4} x^2 = 16.$$

1. Pela definição temos que, dado $\varepsilon > 0$, devemos obter um $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - 4| < \delta$ então $|x^2 - 16| < \varepsilon$. Mas $|x^2 - 16| = |x - 4||x + 4|$ e desejamos que este produto fique menor que ε para x suficientemente próximo de 4.
2. Intuitivamente, se x está próximo de 4, $|x + 4|$ estará próximo de 8 e $|x - 4|$ ficará próximo de zero. Logo $|x - 4||x + 4|$ ficará próximo de zero; estamos, pois em condições de tornar $|x^2 - 16| < \varepsilon$ desde que x fique suficientemente próximo de 4. A primeira coisa a fazer é limitar o fator $|x + 4|$.
3. Há várias maneiras de fazer isto. Por exemplo, se $3 < x < 5$, teremos $-1 < x - 4 < 1$ ou $|x - 4| < 1$; logo, $|x + 4| = |x - 4 + 8| \leq |x - 4| + 8 < 9$ e $|x - 4||x + 4| < 9|x - 4|$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, considerando δ o menor entre os números 1 e $\frac{\varepsilon}{9}$, teremos que, se $0 < |x - 4| < \delta$, então $|x^2 - 16| < \varepsilon$.
4. É recomendável fazer uma tabela, como no exemplo anterior.
5. **Observe que o limite de uma função $y = f(x)$ num ponto b , depende apenas dos valores que f assume nas proximidades de b , ou seja, num pequeno intervalo aberto de centro b .**

Proposição 3.1. (Unicidade do Limite): Se $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L_2$; ($L_1, L_2 \in \mathbb{R}$), então

$$L_1 = L_2.$$

Em outras palavras se o limite existe (é um número real), ele é único. Para a prova veja o apêndice.

Corolário 3.1. Se as funções $f(x)$ e $g(x)$ são tais que $f(x) = g(x)$ exceto num ponto b , então:

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x),$$

desde que exista um dos limites.

Esta propriedade nos permite "simplificar" antes de calcular o limite, como no primeiro exemplo.

Proposição 3.2. Se $m, b, c \in \mathbb{R}$, então:

$$\lim_{x \rightarrow c} (m x + b) = m c + b.$$

De fato, devemos verificar que, para todo número $\varepsilon > 0$, existe outro número $\delta > 0$, tal que: $|(m x + b) - (m c + b)| < \varepsilon$ se $|x - c| < \delta$. Mas, $|(m x + b) - (m c + b)| = |m||x - c|$; logo basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$, se $m \neq 0$. Se $m = 0$, todo $\delta > 0$ serve.

Exemplo 3.2.

[1] Seja $f(x) = 8x + 3$, então:

$$\lim_{x \rightarrow 4} (8x + 3) = 8 \cdot 4 + 3 = 35.$$

[2] Sejam $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$ e $g(x) = 2x + 1$.

Logo, $f(x) = g(x)$ se $x \neq 1$; então, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$, como já foi verificado.

[3] $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ não existe.

Se $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ existisse, então para valores de x muito muito próximos de zero, a função $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ deveria se aproximar de um valor fixo, que seria o limite. Mas isto não ocorre.

De fato, considerando $x = \frac{2}{(2n+1)\pi} \in \mathbb{R}$, ($n \in \mathbb{Z}$), x ficará próximo de zero se n for muito grande. Mas,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n,$$

e a função ficará oscilando entre 1 (se n é par) e -1 (se n é ímpar). Logo, o limite de f não pode existir.

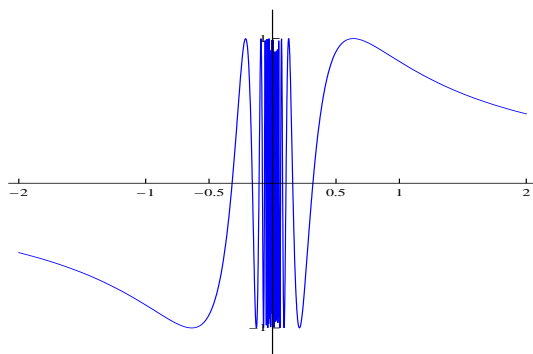


Figura 3.3: Gráfico de $\text{sen}(\frac{1}{x})$.

[4] Seja

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{se } x \neq 1 \\ 2\pi & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Observemos que $f(1) = 2\pi$, mas o valor do limite da função quando x tende a 1 não depende do valor da função no ponto 1, pois $f(x) = x + 5$ se $x \neq 1$; logo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 5) = 6.$$

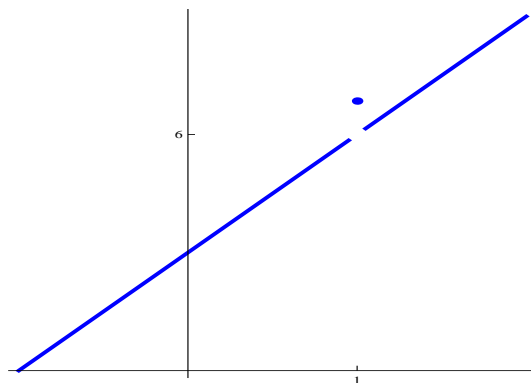


Figura 3.4: Exemplo [4].

Proposição 3.3. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, existem, então para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$1. \lim_{x \rightarrow a} [\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \beta \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) g(x)] = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \left[\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right].$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \text{ se } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n, \text{ se } n \in \mathbb{N}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}, \text{ se } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0 \text{ e } n \text{ é qualquer natural, ou } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ positivo, negativo ou nulo e } n \text{ é um natural ímpar.}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow a} \ln[f(x)] = \ln\left[\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right], \quad \text{se } \lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0.$$

$$7. \text{ Se } \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \text{ e existe } \delta > 0 \text{ tal que } h(x) \leq f(x) \leq g(x), \text{ para } 0 < |x - a| < \delta, \text{ então } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Provas no apêndice.

Segue diretamente da proposição 10.3:

Corolário 3.2. (a) Se $P(x)$ é uma função polinomial, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a).$$

(b) Se $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ é uma função racional e $a \in \text{Dom}(f)$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Exemplo 3.3.

Calcule os seguintes limites:

[1] $\lim_{x \rightarrow 1} (x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 1)$. Neste caso $P(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 1$; logo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow 1} P(x) = P(1) = 9.$$

[2] $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 5}{x^3 - 7}$. Como $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 7) = 20 \neq 0$, podemos aplicar a proposição 10.3; então,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-5}{x^3-7} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x-5)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x^3-7)} = -\frac{1}{10}.$$

[3] $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$. Como $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$, não podemos aplicar a proposição 10.3; mas fatorando o numerador:

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1,$$

para todo $x \neq 1$. Logo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2.$$

[4] Determine o valor de a tal que

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

exista.

Note que $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$. Dividindo $3x^2 + ax + a + 3$ por $x+2$; obtemos, $3x^2 + ax + a + 3 = (x+2)(3x+a-6) + (15-a)$; logo, para que a divisão seja exata devemos ter $a = 15$; logo, $3x^2 + ax + a + 3 = 3(x^2 + 5x + 6) = 3(x+2)(x+3)$:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2} = 3 \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+3}{x-1} = -1.$$

[5] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}.$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, não podemos aplicar diretamente a proposição 10.3; mas racionalizando o numerador: $\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$. Logo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

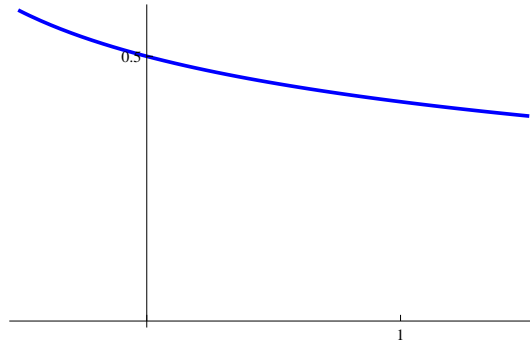


Figura 3.5: Gráfico de $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$, perto da origem.

$$[6] \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt[5]{x} - 1}.$$

Para calcular este limite façamos a mudança de variáveis $x = t^{20}$; então:

$$\frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt[5]{x} - 1} = \frac{t^5 - 1}{t^4 - 1} = \frac{(t^4 + t^3 + t^2 + t + 1)(t - 1)}{(t - 1)(t^3 + t^2 + t + 1)}.$$

Se $x \rightarrow 1$, então $t \rightarrow 1$; logo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt[5]{x} - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^4 + t^3 + t^2 + t + 1}{t^3 + t^2 + t + 1} = \frac{5}{4}.$$

$$[7] \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right) = 0.$$

De fato, $-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$; logo $-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$, para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Como $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = 0$; pela proposição 10.3, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right) = 0.$$

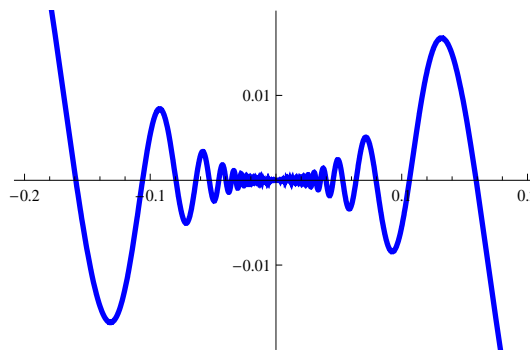


Figura 3.6: Gráfico de $f(x) = x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, perto da origem.

[8] Seja $f(x)$ uma função tal que $|f(x)| \leq x^2$; então, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

De fato. Pela proposição 10.3, ítem 7, temos: $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0$, o que implica, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

[9] Verifique que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1}$, $a \in \mathbb{R}$.

Se $n \in \mathbb{N}$, então:

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + a x^{n-2} + \dots + a^{n-1}, \quad x \neq a;$$

denotando por $P(x) = x^{n-1} + a x^{n-2} + \dots + a^{n-1}$, temos:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a) = n a^{n-1}.$$

Se $n \in \mathbb{Z}$ e $n < 0$, fazendo $n = -m$, $m \in \mathbb{N}$, temos:

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \frac{\frac{1}{x^m} - \frac{1}{a^m}}{x - a} = -\frac{1}{x^m a^m} \left[\frac{x^m - a^m}{x - a} \right];$$

pelo caso anterior, temos:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = -m \frac{1}{a^{2m}} a^{m-1} = n a^{n-1}.$$

Se $n \in \mathbb{Q}$, $n = \frac{p}{q}$; $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Fazendo $x = y^q$ e $a = b^q$, então $x^n = y^p$ e $a^n = b^p$; logo:

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \frac{y^p - b^p}{y^q - b^q} = \frac{y^p - b^p}{y - b} \frac{y - b}{y^q - b^q};$$

do segundo caso:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{y^p - b^p}{y - b} \frac{y - b}{y^q - b^q} = \left[\frac{p}{q} \right] a^{p/q-1} = n a^{n-1}.$$

3.3 Limites Laterais

Sejam f uma função definida em um domínio D (que pode ser um intervalo ou uma reunião de intervalos).

Definição 3.2.

1. Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que existem $b \in \mathbb{R}$ e $(a, b) \subset \text{Dom}(f)$. O número real L é o limite à direita de $f(x)$, quando x se aproxima de a pela direita se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, se $a < x < a + \delta$. Notação:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

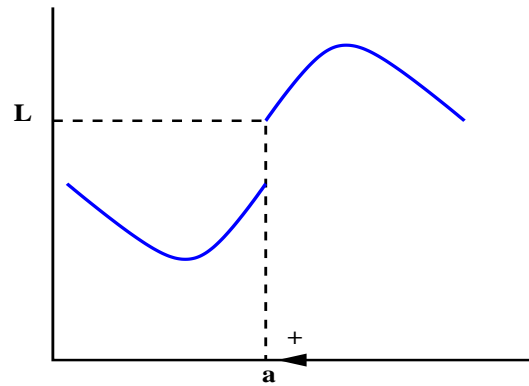


Figura 3.7: Limite à direita.

2. Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que existem $c \in \mathbb{R}$ e $(c, a) \subset \text{Dom}(f)$. O número real L é o limite à esquerda de $f(x)$, quando x se aproxima de a pela esquerda se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, se $a - \delta < x < a$. Notação:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

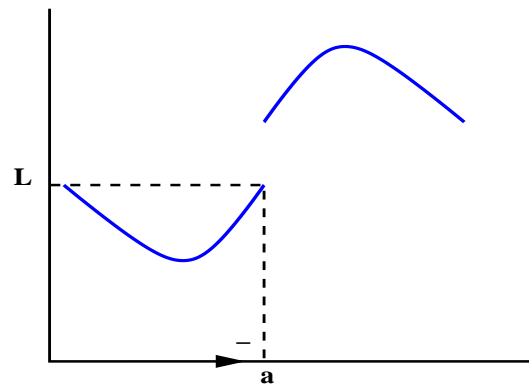


Figura 3.8: Limite à esquerda.

Exemplo 3.4.

[1] Calcule $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, se:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x < 2 \\ 2 & \text{se } x = 2 \\ -x^2 + 9 & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Para calcular estes limites observemos que $x \rightarrow 2^+$ significa que x fica perto de 2, para valores de x maiores que 2 e $x \rightarrow 2^-$ significa que x fica perto de 2, para valores de x menores que 2. Assim:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 5 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + 9) = 5.$$

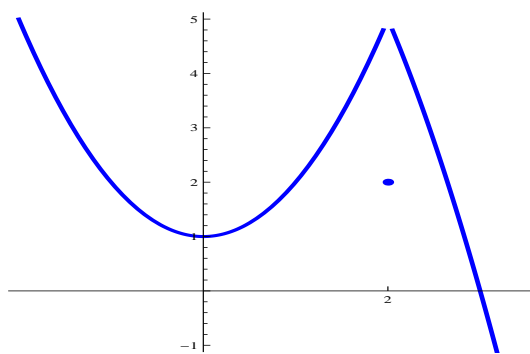


Figura 3.9: Gráfico de f , perto de 2.

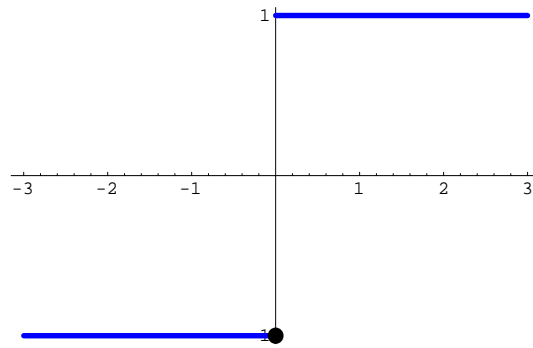
[2] Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, se:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Novamente, para calcular estes limites observemos que $x \rightarrow 0^+$ significa que x fica perto de 0, para valores x maiores que 0 e $x \rightarrow 0^-$ significa que x fica perto de 0, para valores x menores que 0. Primeiramente, escrevamos a função da seguinte maneira:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Assim $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-1) = -1$.

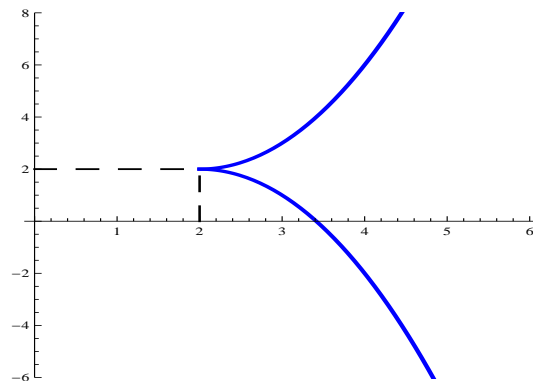
Figura 3.10: Gráfico de f .

[3] Calcule $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, se:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6 & \text{se } x < 2 \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Calculando diretamente :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + 4x - 2) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x + 6) = 2.$$

Figura 3.11: Gráfico de f , perto de 2.

[4] **(Contração de Lorentz):** Na teoria da relatividade especial, temos que o comprimento de um objeto é função de sua velocidade:

$$L(v) = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

onde L_0 é o comprimento do objeto em repouso e c é a velocidade da luz. A velocidade da luz é de aproximadamente $30 \times 10^8 \text{ m/s}$. Da teoria da relatividade é conhecido que nenhum objeto pode ir além da velocidade da luz; logo $v \rightarrow c^-$:

$$\lim_{v \rightarrow c^-} L(v) = 0.$$

Isto significa que para um observador parado o objeto desaparece.

3.4 Relação entre Limite e Limites Laterais

Teorema 3.3. Seja $f(x)$ uma função com domínio D nas condições das definições. Então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se e somente se os limites laterais existem e:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L.$$

Para a prova, veja o apêndice.

Teste para determinar quando não existe um limite

Se

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)}$$

ou se um dos limites laterais não existe, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ não existe.

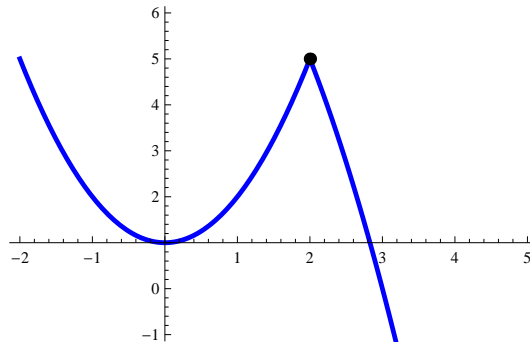
Exemplo 3.5.

[1] Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, se:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x < 2 \\ 2 & \text{se } x = 2 \\ -x^2 + 9 & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Utilizando o teorema anterior, basta calcular os limites laterais correspondentes.

Do exemplo [1] das páginas anteriores temos $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5$ e $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5$. Pelo teorema, temos que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$.

Figura 3.12: Gráfico de f , perto de 2.

[2] Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, se:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Utilizando o teorema anterior, basta calcular os limites laterais correspondentes.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-1) = -1.$$

Pelo teorema, temos que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ não existe.

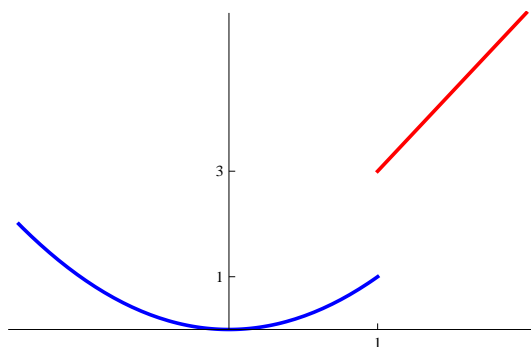
[3] Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, se:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1 \\ 3x & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Utilizando o teorema anterior, basta calcular os limites laterais correspondentes. Do exemplo [3] da página anterior, temos

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1.$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ não existe.

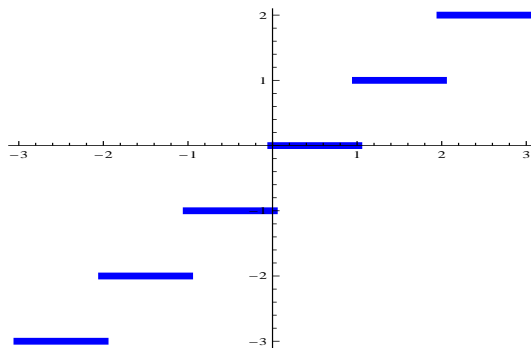
Figura 3.13: Gráfico de f , perto de 1.

[4] A função degrau unitário é definida como:

$$u_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < c \\ 1 & \text{se } x \geq c, \end{cases}$$

onde $c \in \mathbb{R}$. Logo, $\lim_{x \rightarrow c^-} u_c(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow c^+} u_c(x) = 1$; logo, $\lim_{x \rightarrow c} u_c(x)$ não existe.

[5] Calcule $\lim_{x \rightarrow k} \llbracket x \rrbracket$. Veja o exercício 14 do capítulo anterior.

Figura 3.14: Gráfico de $f(x) = \llbracket x \rrbracket$.

Se $k \in \mathbb{Z}$, $\lim_{x \rightarrow k^-} \llbracket x \rrbracket = k - 1$ e $\lim_{x \rightarrow k^+} \llbracket x \rrbracket = k$; logo, $\lim_{x \rightarrow k} \llbracket x \rrbracket$ não existe. Se $k \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, então $\lim_{x \rightarrow k} \llbracket x \rrbracket$ existe. (Por que?).

[6] Determine o valor da constante c tal que $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ exista, se:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{se } x \leq c \\ x & \text{se } x > c. \end{cases}$$

Utilizando o teorema anterior, basta calcular os limites laterais correspondentes.

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} x = c \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} (2 - x^2) = 2 - c^2.$$

Pelo teorema, devemos ter $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$; logo, resolvemos a equação $c^2 + c - 2 = 0$ de onde obtemos $c = 1$ e $c = -2$. Então, podemos definir:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ x & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{se } x \leq -2 \\ x & \text{se } x > -2. \end{cases}$$

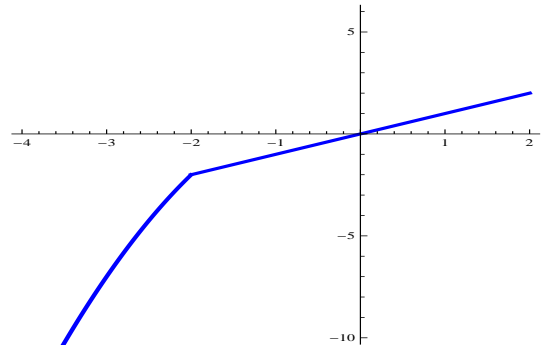
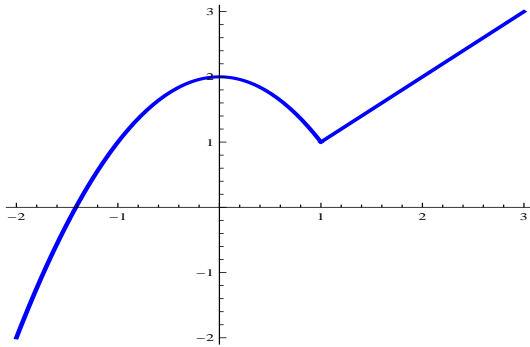


Figura 3.15: Gráficos de f para $c = 1$ e $c = -2$, respectivamente.

3.5 Limites no Infinito

Definição 3.3.

1. Seja $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ quando para todo $\varepsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ se $x > A$.
2. Seja $f : (-\infty, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ quando para todo $\varepsilon > 0$, existe $B > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ se $x < -B$.

Exemplo 3.6.

[1] Verifique que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

De fato, pois para todo $\varepsilon > 0$ existe $A > \frac{1}{\varepsilon} > 0$, tal que se $x > A$, então $\frac{1}{x} < \frac{1}{A} < \varepsilon$ e $|\frac{1}{x} - 0| = |\frac{1}{x}| < \varepsilon$.

[2] Verifique que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

De fato, pois para todo $\varepsilon > 0$ existe $B > \frac{1}{\varepsilon} > 0$, tal que se $x < -B$, então $|\frac{1}{x}| = -\frac{1}{x} < \varepsilon$.

Observe que $x \rightarrow +\infty$ implica $x > 0$ e $x \rightarrow -\infty$ implica $x < 0$.

Proposição 3.4. Para todo número natural n e para $b \in \mathbb{R} - \{0\}$, tem-se:

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{x^n} = 0.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{b}{x^n} = 0.$$

1. Devemos provar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $A > 0$ tal que $\left| \frac{b}{x^n} \right| < \varepsilon$ se $x > A$. De fato, $\left| \frac{b}{x^n} \right| = \frac{|b|}{|x|^n} < \varepsilon$ se $\frac{\sqrt[n]{|b|}}{|x|} < \sqrt[n]{\varepsilon}$, ou seja, se $x > \frac{\sqrt[n]{|b|}}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$; logo basta considerar $A = \frac{\sqrt[n]{|b|}}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$. A prova de 2 é análoga a do item 1.

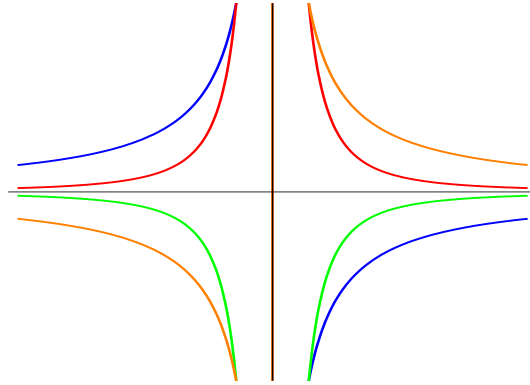


Figura 3.16: Gráficos de $f(x) = \frac{1}{x^n}$ para diferentes n .

Proposição 3.5. Se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)$ existem, então, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$1. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) + \beta \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x),$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) \right),$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)}, \text{ se } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) \neq 0.$$

As provas são análogas às das propriedades dos limites num ponto.

Exemplo 3.7.

[1] Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x^3} + 5 \right)$.

Aplicando diretamente a proposição anterior:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x^3} + 5 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x^3} \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} 5 = 0 + 5 = 5.$$

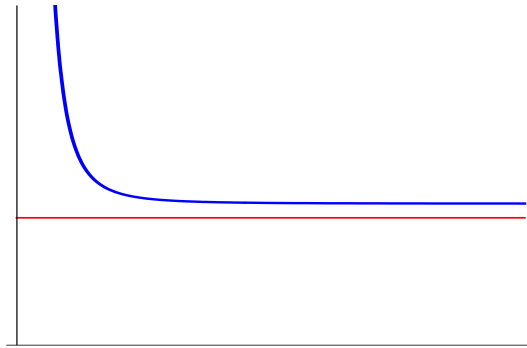


Figura 3.17: Gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

[2] Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2}$.

Aplicando diretamente a proposição anterior : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2} = 5 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

3.6 Cálculo de Limites de Funções Racionais

Proposição 3.6. Seja

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

onde $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ e $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$ são polinômios de coeficientes reais de graus n e m , respectivamente, isto é $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$. Então:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m} & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n < m \end{cases}$$

De fato:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} = \frac{x^n \left[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right]}{x^m \left[b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \dots + \frac{b_0}{x^m} \right]}.$$

Aplicando limite e as propriedades da proposição 3.5, obtemos o resultado. Para $n > m$, veja o próximo parágrafo.

Exemplo 3.8.

[1] Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{x^4 + 5x^3 + x + 2}$.

Como $n < m$, temos: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{x^4 + 5x^3 + x + 2} = 0$.

[2] Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3}{3x + 2}$.

Como $n = m$, temos: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3}{3x + 2} = \frac{2}{3}$.

[3] Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 5}}$.

Neste problema, a função não é racional, mas utilizaremos a mesma idéia dos exercícios anteriores:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 5}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{(x + 1)^2}{x^2 - 5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 5}} \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 5}} = \sqrt{1} = 1. \end{aligned}$$

[4] Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 5}}$.

Aparentemente este limite é análogo ao do exemplo [3]; mas devemos ter cuidado, pois, $x \rightarrow -\infty$, significa que $x < 0$; logo, consideramos $\sqrt{x^2} = -x$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 5}} = \lim_{-x \rightarrow +\infty} \frac{-1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{5}{x^2}}} = -1.$$

[5] **Fractal de Koch** A seguinte curva é chamada de Koch e é obtida a partir da linha poligonal constituída pelos lados de um triângulo equilátero de lado unitário. A cada

passo substitui-se o terço médio de cada segmento da linha poligonal por dois segmentos que formariam um triângulo equilátero com o terço médio que foi retirado, conforme os desenhos abaixo:

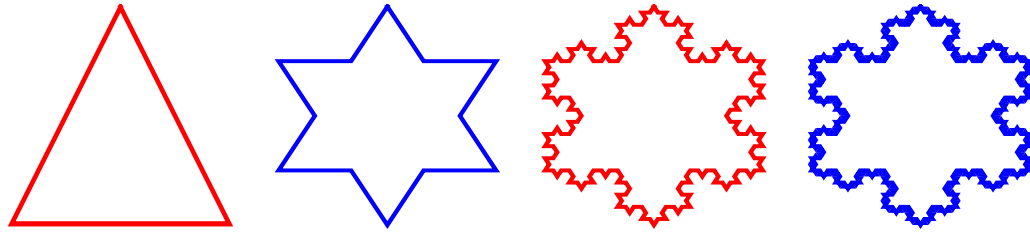


Figura 3.18:

Denote por A_n a área compreendida pela linha poligonal após n passos; logo:

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad A_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad A_2 = \frac{10\sqrt{3}}{27}, \quad A_3 = \frac{94\sqrt{3}}{243}, \quad A_4 = \frac{862\sqrt{3}}{2187},$$

em geral:

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[1 + \frac{3}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9} \right)^n \right) \right],$$

se $n \geq 0$; então:

$$A_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

Fica como exercício interpretar o limite.

3.7 Limites Infinitos

Seja f uma função definida num domínio D , que pode ser um intervalo ou uma reunião de intervalos. Seja a um ponto que não pertence necessariamente a D , mas tal que nas proximidades de a existam pontos de D ; em outras palavras, qualquer intervalo aberto que contem a intersecta D de forma não vazia.

Definição 3.4.

1. Diz-se que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, quando para todo $A > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > A$, se $x \in D$ e $0 < |x - a| < \delta$.
2. Diz-se que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, quando para todo $B > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < -B$, se $x \in D$ e $0 < |x - a| < \delta$.

Exemplo 3.9.

$$[1] \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$$

Como $\frac{1}{(x-1)^2} > A$, se $(x-1)^2 < \frac{1}{A}$, isto é, se $|x-1| < \frac{1}{\sqrt{A}}$, então para todo $A > 0$, existe $\delta = \frac{1}{\sqrt{A}} > 0$ tal que $f(x) > A$ se $0 < |x-1| < \delta$.

$$[2] \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Como $\frac{1}{x^2} > B$ se $|x| < \frac{1}{\sqrt{B}}$, então para todo $B > 0$, existe $\delta = \frac{1}{\sqrt{B}} > 0$ tal que $f(x) > B$ se $0 < |x| < \delta$.

Analogamente podemos definir limites laterais infinitos. Assim:

Diz-se que $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$, quando para todo $A > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > A$ se $a - \delta < x < a$.

Diz-se que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$, quando para todo $B > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < -B$ se $a < x < a + \delta$.

Proposição 3.7. Para todo número natural n , temos:

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ é par} \\ -\infty & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

Proposição 3.8. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções tais que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Então

1. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ se $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ para valores de x próximos de a .
2. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ se $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ para valores de x próximos de a .

As provas das proposições são deixadas como exercícios.

Exemplo 3.10.

[1] Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 2}{(x - 1)^2}$.

Como $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 = 0$, observando que se $x > \frac{2}{3}$, mas $x \neq 1$, então $\frac{3x - 2}{(x - 1)^2} > 0$ e aplicando o teorema, logo: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 2}{(x - 1)^2} = +\infty$.

[2] Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 5}{(x - 2)^2}$.

Como $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 5) = -1$ e $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)^2 = 0$, observando que se $x < \frac{5}{2}$, mas $x \neq 2$, então $\frac{2x - 5}{(x - 2)^2} < 0$ e aplicando o teorema, temos: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 5}{(x - 2)^2} = -\infty$.

Analogamente podemos definir outros tipos de limites. Como exercício, defina os seguintes limites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Corolário 3.4. Para funções racionais, temos:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } n > m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n < m \end{cases}.$$

Exemplo 3.11.

[1] $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 + 3x^3 + x + 1)$. Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right) = 1$; temos,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 + 3x^3 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 \left(1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty.$$

[2] $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 + 3x^3 + x + 1)$. Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right) = 1$; temos,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 + 3x^3 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \left(1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty.$$

[3] $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^6 + x^3 + 1)$. Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^6}\right) = 1$; temos,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^6 + x^3 + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^6 \left(1 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^6}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^6 = +\infty.$$

$$[4] \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^5 + 1}{x^4 + 5x^3 + 2} \right).$$

Como $n > m$, pelo corolário anterior: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^5 + 1}{x^4 + 5x^3 + 2} \right) = +\infty$.

[5] Na teoria da relatividade especial, a massa de uma partícula é função de sua velocidade:

$$M(v) = \frac{c m_0}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

onde m_0 é a massa da partícula em repouso e c é a velocidade da luz. Logo,

$$\lim_{v \rightarrow c^-} M(v) = +\infty;$$

em outras palavras, se a velocidade de uma partícula aumenta, sua massa aumenta em relação a sua massa inicial m_0 .

[6] Considere o fractal de Koch e denote por P_n o perímetro da linha poligonal após n passos; logo:

$$P_0 = 3, \quad P_1 = 4, \quad P_2 = \frac{16}{3};$$

em geral, $A_n = 3 \left(\frac{4}{3} \right)^n$, se $n \geq 0$; então:

$$P_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = +\infty.$$

Fica como exercício interpretar o limite.

3.8 Símbolos de Indeterminação

Nas operações com limites, muitas vezes aparecem os símbolos:

$$\infty - \infty, \infty \cdot 0, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0^0, 1^\infty, \infty^0$$

chamados símbolos de indeterminação. Quando aparece um destes símbolos no cálculo de um limite, nada se pode dizer sobre este limite. Ele poderá existir ou não, dependendo da expressão da qual se está calculando o limite.

Exemplo 3.12.

[1] Se $f(x) = 1 + \frac{1}{(x-1)^2}$ e $g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, onde f e g são definidas em $\mathbb{R} - \{1\}$, então,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty,$$

mas $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x)) = 1$.

[2] Se $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right) + \frac{1}{(x-1)^2}$ e $g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, onde f e g são definidas em $\mathbb{R} - \{1\}$, então, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$, mas $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x))$ não existe.

[3] Se $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \ln(x)$, onde f e g são definidas para $x > 0$, então, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, mas $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) (g(x)) = 0$.

De fato, $\ln(x) < x$ para todo $x > 0$; então $\ln(x) = \ln(\sqrt{x}\sqrt{x}) = 2\ln(\sqrt{x}) < 2\sqrt{x}$ para $x \geq 1$; logo, $0 < \frac{\ln(x)}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$. Aplicando limite a ambas partes e usando o item [7] da proposição 10.3, válida também para limites no infinito, temos o resultado.

[4] Se $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $g(x) = x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, onde f e g são definidas em $\mathbb{R} - \{0\}$, então, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, mas $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x)) (g(x))$, não existe.

3.9 Limites Fundamentais

3.9.1 Primeiro Limite Fundamental

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$

Antes de provar este limite faremos uma tabela, usando o fato de que $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ é uma função par:

$x \neq 0$	$f(x)$
± 1	0.8414
± 0.5	0.9588
± 0.2	0.9933
± 0.1	0.9983
± 0.01	0.99998
± 0.001	0.99999

Prova: Considere o seguinte desenho:

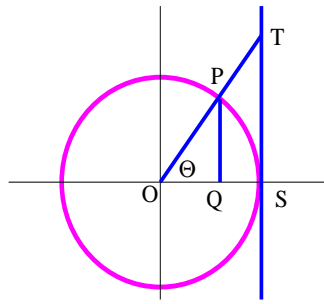


Figura 3.19:

Denotemos por A_1 e A_2 as áreas dos triângulos QOP e SOT respectivamente e por A a área do setor circular SOP . Claramente $A_1 < A < A_2$. Por outro lado, se $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$,

$$A_1 = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta), \quad A_2 = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\theta) \sec(\theta) \quad \text{e} \quad A = \frac{1}{2} \theta.$$

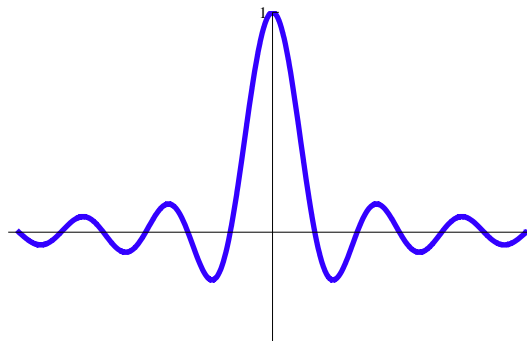
Então, da desigualdade acima: $\operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) < \theta < \operatorname{sen}(\theta) \sec(\theta)$; e, como $\operatorname{sen}(\theta) > 0$ se $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, temos:

$$\cos(\theta) < \frac{\theta}{\operatorname{sen}(\theta)} < \sec(\theta), \quad \text{ou} \quad \cos(\theta) < \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta} < \sec(\theta)$$

se $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Como $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \cos(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \sec(\theta) = 1$, segue que $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta} = 1$.

Por ser $\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta}$ uma função par: $\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta} = 1$; logo,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta} = 1.$$

Figura 3.20: Gráfico da função $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 1$.

3.9.2 Segundo Limite Fundamental

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Façamos uma tabela usando a função $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

$x > 0$	$f(x)$	$x < 0$	$f(x)$
10^1	2.59374	-10^1	2.86797
10^2	2.70481	-10^2	2.73200
10^3	2.71692	-10^3	2.71964
10^4	2.71815	-10^4	2.71842

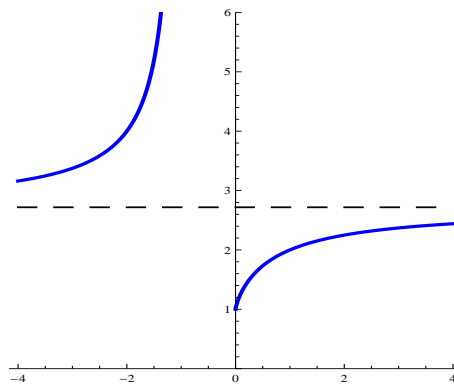


Figura 3.21: Gráfico de $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ para $x \neq 0$.

É possível provar que:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

onde $e \simeq 2.71828\dots$ é o número de Euler. A prova direta desta propriedade poderá ser encontrada na bibliografia intermediária ou avançada.

3.9.3 Terceiro Limite Fundamental

Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, então:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - 1}{x} \right) = \ln(a)$$

Em particular, e é a única base da exponencial tal que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = \ln(e) = 1$$

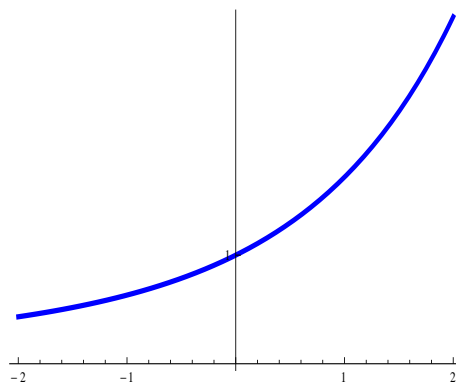


Figura 3.22: Gráfico de $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.

3.9.4 Aplicação

Sabemos que se uma quantia A_0 é investida a uma taxa r de juros compostos, capitalizados m vezes ao ano, o saldo $A(t)$, após t anos é dado por:

$$A(t) = A_0 \left(1 + \frac{r}{m} \right)^{mt}.$$

Se os juros forem capitalizados continuamente, o saldo deverá ser:

$$A(t) = \lim_{m \rightarrow +\infty} A_0 \left(1 + \frac{r}{m} \right)^{mt} = A_0 \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{r}{m} \right)^m \right)^t = A_0 e^{rt}.$$

Exemplo 3.13.

[1] Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x \cos(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos(x)} \right) = 1.$$

[2] Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(3x)}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(3x)} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} \right) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x}{\operatorname{sen}(3x)} \right) = \frac{2}{3}.$$

[3] Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$. Seja $x = \frac{1}{t}$; se $x \rightarrow 0$ então $t \rightarrow \pm\infty$; logo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e.$$

[4] Calcule $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^x$, onde b é um número real.

Seja $\frac{x}{b} = t$, então: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^x = \left(\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right)^b = e^b$.

[5] Calcule $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x+b}\right)^x$, onde b é um número real.

Seja $x+b = t$, então: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x+b}\right)^x = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t-b} = e$.

[6] Calcule $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{x+b}$, onde b é um número real.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{x+b} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{3}{x-1}\right)^{x+b} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{3}{x-1}\right)^x \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{3}{x-1}\right)^b = e^3.$$

[7] Verifique que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$.

Seja $t = a^x - 1$; então $\ln(a^x) = \ln(t+1)$; logo $x \ln(a) = \ln(t+1)$ e $x = \frac{\ln(t+1)}{\ln(a)}$. Quando $x \rightarrow 0$ temos que $t \rightarrow 0$ e:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\frac{\ln(t+1)}{\ln(a)}} = \ln(a) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{t} \ln(t+1)} = \ln(a) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\ln((1+t)^{\frac{1}{t}})} = \ln(a).$$

[8] Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$, onde $a, b > 0$ e $a, b \neq 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1 + 1 - b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - 1}{x} - \frac{b^x - 1}{x} \right) = \ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right).$$

[9] Se $2^a + 2^{a-1} = 192$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{ax} = L$, determine $\ln(L)$.

Primeiramente, note que $L = e^{a^2}$; então, $\ln(L) = a^2$. Por outro lado $2^a + 2^{a-1} = 3 \times 2^{a-1}$; logo, $3 \times 2^{a-1} = 192$, donde $2^{a-1} = 2^6$ e $a = 7$. Portanto, $\ln(L) = 49$.

3.10 Assíntotas

Definição 3.5. A reta $y = b$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes afirmações é verdadeira:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

Exemplo 3.14.

[1] Esboçemos o gráfico da função logística:

$$L(t) = \frac{A}{1 + B e^{-Ct}} \quad \text{onde } A, B, C \in \mathbb{R}.$$

1. Note que $\text{Dom}(L) = \mathbb{R}$ e a curva passa pelo ponto $(0, \frac{A}{1+B})$.
2. Por outro lado $\lim_{t \rightarrow +\infty} L(t) = A$; logo, $y = A$ é uma assíntota horizontal.
3. Como $\lim_{t \rightarrow -\infty} L(t) = 0$; logo, $y = 0$ é uma assíntota horizontal.
4. No caso em que $L = L(t)$ descreve o crescimento de uma população, o valor A é dito valor limite da população e corresponde ao número máximo de indivíduos que um ecossistema pode suportar.

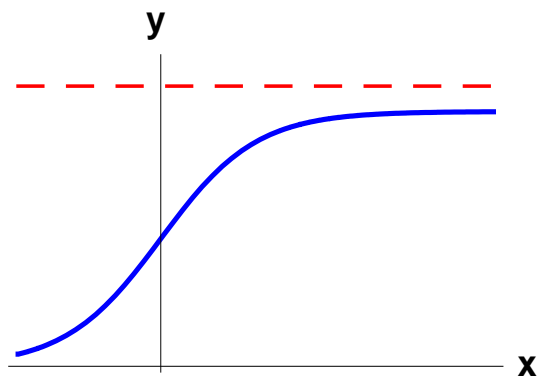


Figura 3.23: Gráfico da função logística.

Definição 3.6. A reta $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes afirmações é verdadeira:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty.$$

Em geral, se o $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, então o gráfico de f não possui assíntotas verticais.

3.10.1 Esboço Aproximado de Funções Racionais

Seja $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ tal que $a \notin \text{Dom}(f)$, isto é, $Q(a) = 0$; então:

$$Q(x) = (x - a)^n Q_1(x), \quad n > 1 \quad \text{e} \quad Q_1(a) \neq 0;$$

analogamente $P(x) = (x - a)^m P_1(x)$, $m \geq 0$ e $P_1(a) \neq 0$.

Se $m < n$, fazendo $k = n - m$, temos:

$$f(x) = \frac{1}{(x - a)^k} f_1(x),$$

onde $f_1(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ é uma função definida em a . Então:

$$\lim_{x \rightarrow a^\pm} |f(x)| = \infty.$$

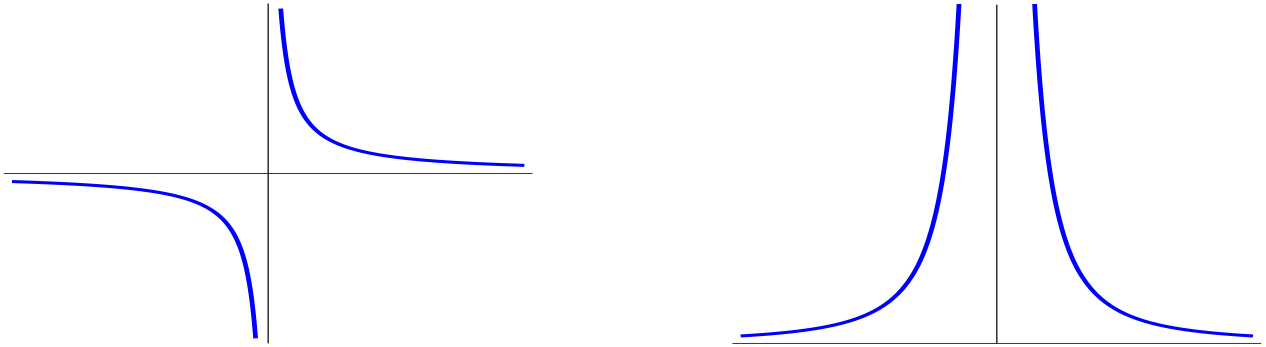


Figura 3.24: Gráficos de f ao redor do ponto a , para k ímpar e k par e $f_1(a) > 0$.



Figura 3.25: Gráficos de f ao redor do ponto a , para k ímpar e k par e $f_1(a) < 0$.

Logo, a função possui uma assíntota vertical em cada raiz do polinômio $Q(x)$.

Exemplo 3.15.

[1] Esboce o gráfico de $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ e a curva passa por $(0, 0)$. Por outro lado $f(x) = \frac{f_1(x)}{x - 1}$, onde:

$$f_1(x) = \frac{x}{x + 1};$$

$k = 1$ e $f_1(1) > 0$; então,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty.$$

Analogamente: $f(x) = \frac{1}{x + 1} f_1(x)$, onde:

$$f_1(x) = \frac{x}{x - 1};$$

$k = 1$ e $f_1(-1) > 0$, então: $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$; logo, $x = 1$ e $x = -1$ são assíntotas verticais. Por outro lado, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$; logo, $y = 0$ é uma assíntota horizontal.

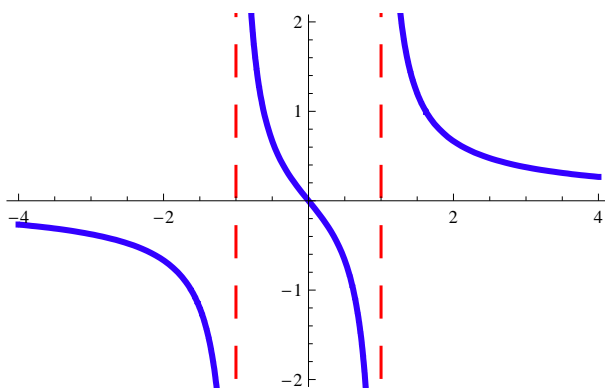


Figura 3.26: gráfico de $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

[2] Esboce o gráfico de $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$.

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ e a curva passa por $(0, 0)$. Por outro lado $f(x) = \frac{f_1(x)}{x - 1}$, onde:

$$f_1(x) = \frac{x^2}{x + 1};$$

$k = 1$ e $f_1(1) > 0$; então,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty.$$

Analogamente: $f(x) = \frac{1}{x+1} f_1(x)$, onde:

$$f_1(x) = \frac{x^2}{x-1};$$

$k = 1$ e $f_1(-1) < 0$; então, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$; logo $x = 1$ e $x = -1$ são assíntotas verticais. Por outro lado, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$; logo, $y = 1$ é uma assíntota horizontal.

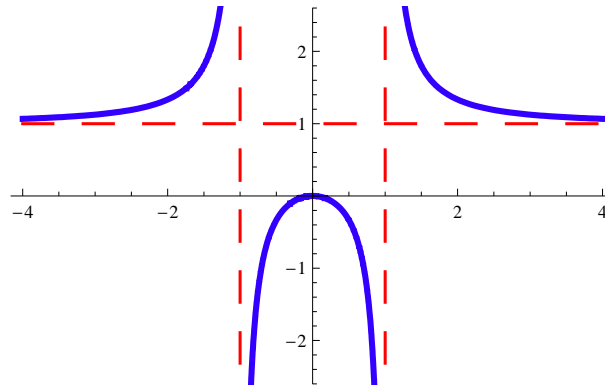


Figura 3.27: gráfico de $y = \frac{x^2}{x^2-1}$.

3.11 Continuidade de Funções

A noção de continuidade em Matemática é a que utilizamos no dia a dia, isto é, onde não há interrupção ou, então, onde não existem partes separadas umas das outras.

Nos parágrafos anteriores, estudamos o comportamento de uma função $y = f(x)$ para valores de x próximos de um ponto a .

Pode acontecer que o limite de $f(x)$ quando x tende a a exista, mas que f não seja definida em a ; ou ainda, pode acontecer que o limite seja diferente de $f(a)$. Estudaremos, agora, uma classe especial de funções, onde se verifica que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Definição 3.7. Seja f uma função e $a \in \text{Dom}(f)$, onde $\text{Dom}(f)$ é um intervalo aberto ou uma reunião de intervalos abertos. f é dita **contínua em a** , se:

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe.
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Se f não verifica qualquer das condições da definição, f é dita **descontínua** em a .

Exemplo 3.16.

[1] Considere:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Note que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, mas f não é contínua em 1.

De fato, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 \neq f(1)$. Veja o desenho:

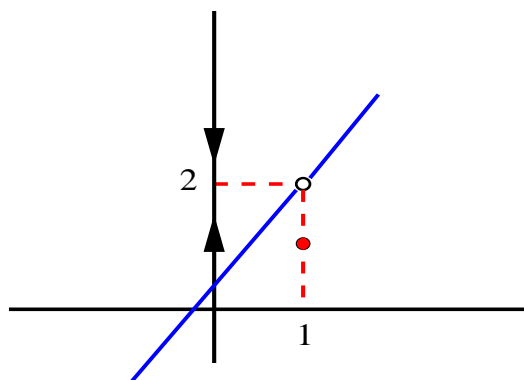


Figura 3.28:

Observe que se redefinirmos a função, fazendo $f(1) = 2$, a função será contínua em todos os pontos de \mathbb{R} . Verifique este fato.

[2] Seja:

$$u_c(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq c \\ 0 & \text{se } x < c. \end{cases}$$

A função degrau unitário $y = u_c(x)$ não é contínua em c , pois não existe $\lim_{x \rightarrow c} u_c(x)$.

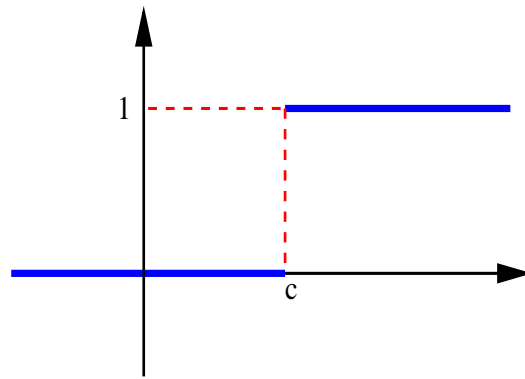


Figura 3.29: Função degrau unitário.

Intuitivamente, a continuidade de uma função em um ponto indica que o gráfico da função não apresenta saltos nesse ponto (veja o desenho anterior).

[3] $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ é uma função contínua em todo ponto de seu domínio.

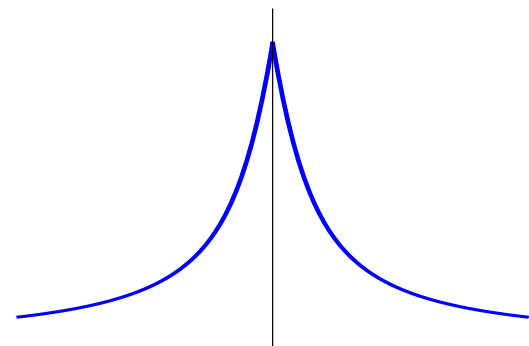
De fato $f(x) = x + 1$ se $x \neq 1$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0 + 1 = f(x_0)$.

[4] O potencial ϕ de uma distribuição de carga num ponto do eixo dos x é dado por:

$$\phi(x) = \begin{cases} 2\pi\sigma(\sqrt{x^2 + a^2} - x) & \text{se } x \geq 0 \\ 2\pi\sigma(\sqrt{x^2 + a^2} + x) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

$a, \sigma > 0$; ϕ é contínua em 0.

De fato, como $\lim_{x \rightarrow 0^-} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \phi(x) = 2\pi\sigma a$, $\lim_{x \rightarrow 0} \phi(x)$ existe e $\lim_{x \rightarrow 0} \phi(x) = \phi(0)$. Então, ϕ é contínua em 0.

Figura 3.30: Gráfico de $y = \phi(x)$.

[5] Seja

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{se } x < -1 \\ Ax + B & \text{se } x \in [-1, 1] \\ 5x + 7 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Ache A e B tais que f seja uma função contínua em \mathbb{R} .

Os pontos problemáticos do domínio de f são $x = -1$ e $x = 1$. Utilizando a definição, f é contínua se:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \end{cases}$$

que é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} A - B = 4 \\ A + B = 12; \end{cases}$$

logo, $A = 8$ e $B = 4$. Então:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{se } x < -1 \\ 8x + 4 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 5x + 7 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

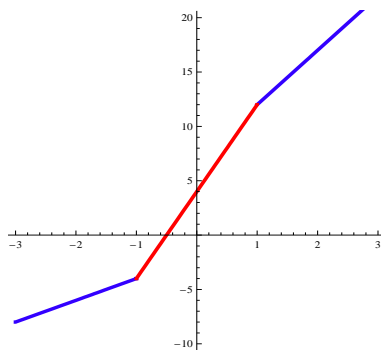


Figura 3.31:

A continuidade também pode ser expressa em função de ε e δ .

De fato, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ significa que: para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in \text{Dom}(f)$ e $|x - a| < \delta$, então $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Em outras palavras, f é contínua em a quando para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ desde que $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap \text{Dom}(f)$.

Proposição 3.9. Sejam f e g funções contínuas no ponto a . Então:

1. $\alpha f + \beta g$ são contínuas em a , para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. $f g$ é contínua em a .
3. $\frac{f}{g}$ é contínua em a , se $a \in \text{Dom}(\frac{f}{g})$.

As provas destas propriedades decorrem imediatamente das definições.

Definição 3.8. Uma função f é dita contínua em $A \subset \mathbb{R}$ se f é contínua em cada ponto de A . Se f é contínua em A e $B \subset A$, então, f é contínua em B .

Exemplo 3.17.

[1] Os polinômios são funções contínuas em \mathbb{R} , pois são expressos por somas e produtos de funções contínuas em \mathbb{R} .

[2] As funções racionais são funções contínuas no seu domínio.

[3] As funções $f(x) = \text{sen}(x)$ e $f(x) = \cos(x)$ são contínuas em \mathbb{R} .

[4] As funções exponenciais são funções contínuas em \mathbb{R} .

[5] As funções logarítmicas são funções contínuas em $(0, +\infty)$.

[6] A seguinte função é contínua em \mathbb{R} :

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

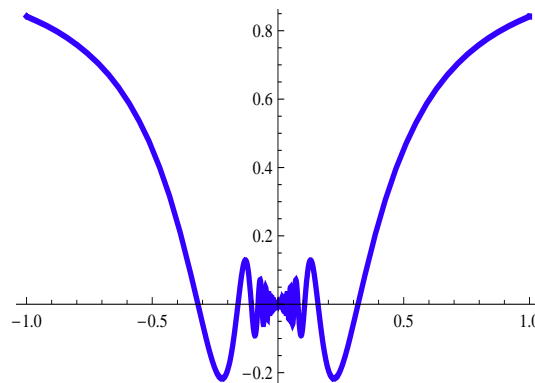


Figura 3.32: Gráfico de [6]

[7] A função $f(x) = [[x]]$ é descontínua para cada $x \in \mathbb{Z}$. Veja exercício 14 do capítulo anterior.

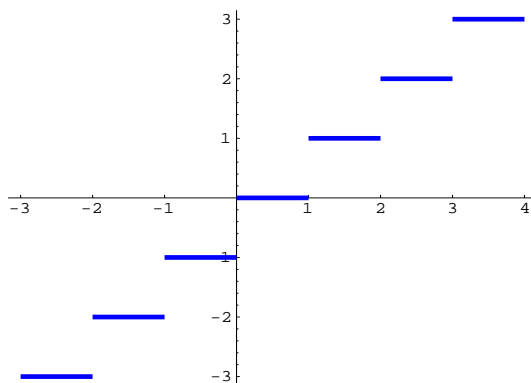


Figura 3.33: Gráfico de $f(x) = [[x]]$.

[8] A função $f(x) = \frac{\ln(x) + \operatorname{arctg}(x)}{x^2 - 1}$ é contínua em $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

De fato, $\ln(x)$ é contínua em $(0, +\infty)$ e $\operatorname{arctg}(x)$ é contínua em \mathbb{R} , logo $\ln(x) + \operatorname{arctg}(x)$ é contínua em $(0, +\infty)$; o polinômio $x^2 - 1$ possui raízes reais $x = \pm 1$ e $-1 \notin (0, +\infty)$, então f é contínua em $(0, 1) \cup (1, +\infty)$, que é o domínio de f .

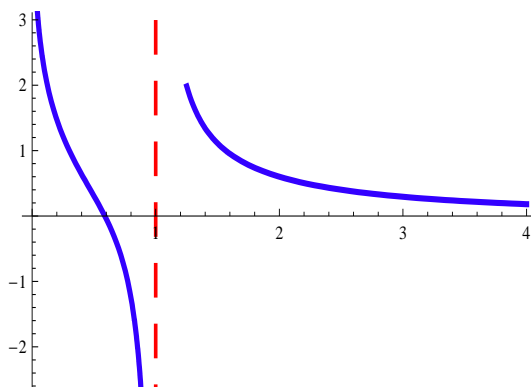


Figura 3.34:

Proposição 3.10. Sejam f e g funções tais que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e g é contínua no ponto b . Então:

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)$$

A prova segue das definições.

Exemplo 3.18.

Como aplicação direta desta propriedade temos:

[1] A função $g(x) = e^x$ é contínua em \mathbb{R} ; logo, se existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}.$$

[2] As funções $g(x) = \text{sen}(x)$ e $h(x) = \text{cos}(x)$ são funções contínuas em \mathbb{R} ; logo, se existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} \text{sen}(f(x)) = \text{sen}\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right); \quad \lim_{x \rightarrow a} \text{cos}(f(x)) = \text{cos}\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right).$$

[3] A função $g(x) = \ln(x)$ é contínua em $(0, +\infty)$; logo, se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \in (0, +\infty)$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln(f(x)) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right).$$

$$[4] \lim_{x \rightarrow 1} \ln\left(\frac{x^5 + x^3 + 1}{x^2 + 1}\right) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 + x^3 + 1}{x^2 + 1}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

$$[5] \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln(\text{sen}(x)) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \text{sen}(x)\right) = \ln\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \ln(1) = 0.$$

$$[6] \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{x^2-1}{x+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)} = e^0 = 1.$$

$$[7] \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x^2 + \text{sen}(x) + \pi) = \cos(\pi) = -1.$$

Teorema 3.5. Sejam f e g funções tais que $g \circ f$ esteja bem definida. Se f é contínua no ponto a e g é contínua em $f(a)$, então $g \circ f$ é contínua em a .

Prova: $Im(f) \subset Dom(g)$. Como g é contínua em $b = f(a)$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que se $y \in Im(f)$ e $|y - b| < \delta_1$, então $|g(y) - g(b)| < \varepsilon$. Por outro lado f é contínua em a ; logo, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $x \in Dom(f)$ e $|x - a| < \delta_2$, então $|f(x) - f(a)| = |f(x) - b| < \delta_1$. Logo, se $x \in Dom(f) \cap (a - \delta_2, a + \delta_2)$, $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$.

Exemplo 3.19.

[1] A função $h(x) = |x^2 + 2x + 1|$ é uma função contínua em \mathbb{R} , pois h é a composta das seguintes funções: $f(x) = x^2 + 2x + 1$ e $g(x) = |x|$; ambas funções são contínuas em \mathbb{R} . (Verifique!).

[2] A função $h(x) = e^{x^2+5x+2}$ é contínua. (Verifique!).

[3] A função $h(x) = \text{sen}\left(\frac{x^6 - x^2}{x^2 + 4}\right)$ é contínua. (Verifique!).

Observação 3.2. O teorema seguinte estabelece que com hipóteses adequadas, uma função f , definida num intervalo fechado $[a, b]$, assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$; em outras palavras, para que f passe de $f(a)$ a $f(b)$ tem que passar por todos os valores intermediários. A definição anterior de continuidade foi feita considerando como domínios intervalos abertos ou reunião de intervalos abertos; então necessitamos da seguinte definição:

Definição 3.9. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$; f é contínua em $[a, b]$ se:

1. f é contínua em (a, b) .
2. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existe e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.
3. $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ existe e $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

As condições 2 e 3, são chamadas continuidades laterais, à direita e à esquerda, respectivamente.

Teorema 3.6. (Valor Intermediário) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$ e $f(a) < d < f(b)$ ou $f(b) < d < f(a)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Para a prova, veja [TA] ou [RC].

Exemplo 3.20.

Seja $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3 - \cos(\pi x) + 1$; então f assume o valor $\frac{3}{2}$.

De fato f é contínua e $1 = f(-1) < \frac{3}{2} < f(1) = 3$; logo, do teorema, temos que existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = \frac{3}{2}$.

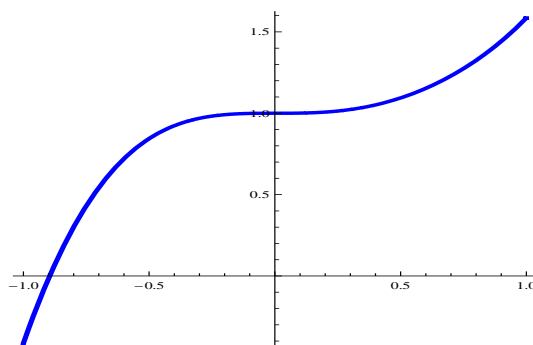


Figura 3.35:

Corolário 3.7. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$. Se $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais opostos, ou seja $f(a)f(b) < 0$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

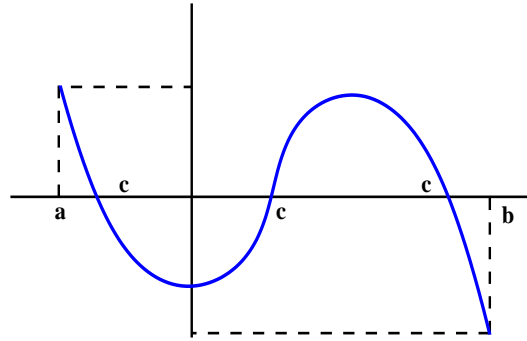


Figura 3.36:

3.11.1 Aplicações

Este resultado pode ser utilizado para localizar as raízes reais de um polinômio de grau ímpar. De fato, seja

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

uma função polinomial de grau n ímpar, $a_i \in \mathbb{R}$. Para os $x \neq 0$, escrevemos:

$$f(x) = x^n \left[1 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} \right].$$

Como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[1 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} \right] = 1$; então,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty,$$

pois, n é ímpar. Logo, existem $x_1 < x_2$ tais que $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$. f é contínua no intervalo $[x_1, x_2]$; pelo corolário, existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f(c) = 0$.

Se n é par, a conclusão é falsa. O polinômio $f(x) = x^2 + 1$ não possui raízes reais.

Exemplo 3.21.

[1] A equação $x^3 - 4x + 2 = 0$ possui 3 raízes reais distintas.

De fato, a função $f(x) = x^3 - 4x + 2$ é contínua em \mathbb{R} ; logo, é contínua em qualquer intervalo fechado.

Considere:

x_1	x_2	$f(x_1) \cdot f(x_2)$	Conclusão
-3	-2	-26	Existe $c_1 \in (-3, -2)$ tal que $f(c_1) = 0$.
1	0	-2	Existe $c_1 \in (0, 1)$ tal que $f(c_2) = 0$.
1	2	-2	Existe $c_3 \in (1, 2)$ tal que $f(c_3) = 0$.

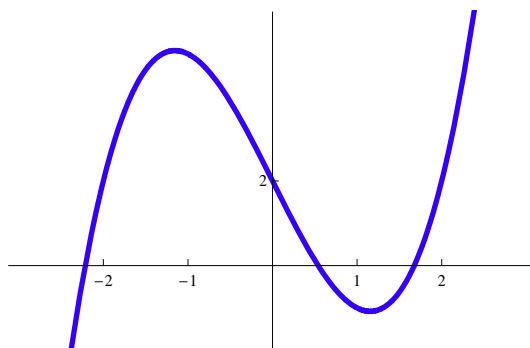


Figura 3.37: Exemplo [1]

[2] A equação $2^x \ln(x^2 + 1) + x^3 \log_6(e^{-x}) - \frac{1}{20} = 0$ possui pelo menos 4 raízes reais distintas no intervalo $[-1, 2]$.

De fato, a função $f(x) = 2^x \ln(x^2 + 1) + x^3 \log_6(e^{-x}) - \frac{1}{20}$ é contínua em $[-1, 2]$ e

$$f(-1) \simeq -0.26, \quad f(-0.5) \simeq 0.072, \quad f(0) = -0.05, \quad f(0.5) \simeq 0.23 \quad \text{e} \quad f(2) \simeq -8.57;$$

então:

x_1	x_2	$f(x_1) \cdot f(x_2)$	Conclusão
-1	-0.5	-0.019	Existe $c_1 \in (-1, -0.5)$ tal que $f(c_1) = 0$.
-0.5	0	-0.003	Existe $c_1 \in (-0.5, 0)$ tal que $f(c_2) = 0$.
0	0.5	-0.011	Existe $c_3 \in (0, 0.5)$ tal que $f(c_3) = 0$.
0.5	2	-0.586	Existe $c_4 \in (0.5, 2)$ tal que $f(c_4) = 0$.

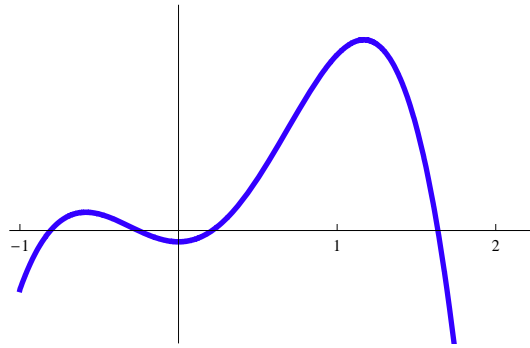


Figura 3.38: Exemplo [2]

[3] A função $f(x) = 1 - 2x^2 - \arctg(x)$, atinge o valor $\frac{1}{2}$ no intervalo $[0, 1]$.

Considere a função $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$; g é função contínua no intervalo $[0, 1]$ e

$$g(0)g(1) = -\frac{\pi + 6}{8};$$

logo, existe $c_1 \in (0, 1)$ tal que $g(c_1) = 0$, isto é, $f(c_1) = \frac{1}{2}$.

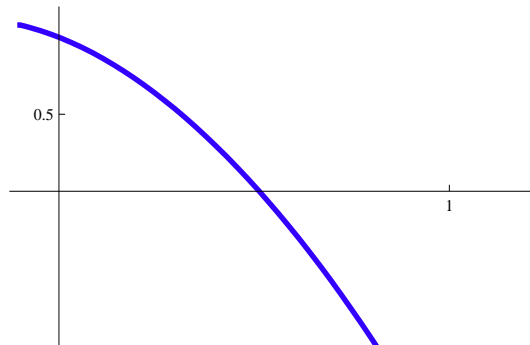


Figura 3.39:

O seguinte algoritmo serve para determinar aproximadamente as raízes de uma equação, utilizando o corolário:

Seja f contínua em $[a, b]$.

i) Se $f(a)f(b) < 0$, então, existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

ii) Considere:

$$m_1 = \frac{a+b}{2};$$

se $f(m_1) = 0$, achamos a raiz. Caso contrário, $f(a)f(m_1) < 0$ ou $f(m_1)f(b) < 0$.

iii) Se $f(a) f(m_1) < 0$, então, $f(x) = 0$ tem solução em $[a, m_1]$. Considere:

$$m_2 = \frac{a + m_1}{2};$$

se $f(m_2) = 0$, achamos a raiz. Caso contrário $f(a) f(m_2) < 0$ ou $f(m_2) f(m_1) < 0$.

iv) Se $f(m_2) f(m_1) < 0$, então, $f(x) = 0$ tem solução em $[m_2, m_1]$. Considere:

$$m_3 = \frac{m_1 + m_2}{2};$$

se $f(m_3) = 0$, achamos a raiz. Caso contrário $f(m_3) f(m_2) < 0$ ou $f(m_3) f(m_1) < 0$.

Continuando obtemos m_n tal que $|f(c) - f(m_n)|$ é menor que a metade do comprimento do último intervalo.

Exemplo 3.22.

No exemplo [1] temos $f(x) = x^3 - 4x + 2$.

i) $f(1) f(2) < 0$; seja $m_1 = \frac{3}{2}$, como $f(m_1) \neq 0$ e $f(m_1) f(2) < 0$, então, procuramos a solução no intervalo $[m_1, 2]$; seja:

$$m_2 = \frac{m_1 + 2}{2} = \frac{7}{4}.$$

ii) Como $f(m_2) \neq 0$ e $f(m_1) f(m_2) < 0$, então, procuramos a solução no intervalo $[m_1, m_2]$; seja:

$$m_3 = \frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{13}{8}.$$

Assim, continuando podemos, por exemplo, obter:

$$m_{14} = \frac{27445}{16384} \cong 1.675109$$

no intervalo $[1.67504, 1.67517]$ e tal que $f(m_{14}) = -0.0000928$.

3.12 Exercícios

1. Calcule os seguintes limites usando tabelas:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 8)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x + 2}{2x + 3}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2)$

(e) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 1}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + 5x - 4}{x - 1}$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 - \frac{2^x}{1000} \right)$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(4x)}{x}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)^2}{x}$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}}{x^2 + 1}$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x^2 + x + 2}$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)}{x - 1}$$

2. Determine k tal que:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 5} (3kx^2 - 5kx + 3k - 1) = \frac{3}{2}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow k} (x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 2} (5x^4 - 3x^2 + 2x - 2) = k$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{k - x^2}{x + k} = -1$$

3. Verifique se são corretas as seguintes afirmações:

$$(a) \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 3)$$

4. Calcule os seguintes limites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^5 + 9x + 7}{3x^6 + x^3 + 1}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6 + 2}{10x^7 - 2}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{2 - \sqrt{2x}}$$

$$(h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(t+h)^2 - t^2}{h}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{3x^2 - 4x + 1}$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - x^3}{x^2 - 2x}$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{\sqrt{6x^2 + 3} + 3x}$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 + 5x + 4x^2} - 3}{x}$$

$$(m) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

$$(n) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$$

$$(o) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x^3 - x - 1}{x^2 - 1}$$

$$(p) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{\sqrt{x+2}}$$

$$(q) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\cos^2(x) + 1} - 1}$$

$$(r) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$(s) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$(t) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 5x - 7}$$

$$(u) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{\sqrt{x + 2}}$$

5. Calcule os seguintes limites laterais:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\sqrt{1 - \cos(2x)}}{x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0^\pm} [[x]]$$

6. Verifique se os seguintes limites existem:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{|x - 1|}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 3} |x - 3|$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x) - [[\sin(x)]])$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0} (\sin(x) - [[\cos(x)]])$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 6x^2 + 6x - 5}{x^2 - 5x}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{a} \left| \frac{b}{x} \right|$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 + 4x^2 - 3x - 12}$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 0^+} [[\frac{x}{a}]]$$

7. Calcule os seguintes limites no infinito:

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 5x + 1}{x^4 + 5x^3 + 3}$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x - 1}}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 2}{\sqrt{x^8 + 3x + 4}}$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x + 3})$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{3x^2 + x + 1}$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + 1}{x^6 + 1}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 3x + 1}$$

$$(m) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x + 1}{\sqrt[3]{x^9 + 1}}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{3x + 2}$$

$$(n) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 2}}{x^3}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{3x + 2}$$

$$(o) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^3 + 5}}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x^2 + 3}$$

$$(p) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$$

$$(q) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^3 + 1}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{x}{x^2 + 3}}$$

$$(r) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2 + 8}{x^2 + x}}$$

$$(s) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x^2 - 4x + 3}$$

$$(t) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + x + 1}{x^4 - 5}$$

$$(u) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 + x^4 + 1}{x^6 + x^3 + 1}$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^9 + 1}{x^9 + x^6 + x^4 + 1}$$

$$(w) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 11}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$(x) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6 - 7x}{(2x + 3)^4}$$

8. Calcule os seguintes limites infinitos:

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x + 1}{2x^2 + x + 1}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 4}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (5 - 4x + x^2 - x^5)$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - 6x + 1}{6x^2 + x + 1}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[m]{x}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{5}{3 - x}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + 1}{x}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + 3}{x^2 - 1}$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x + 3}{x^2 - 1}$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 6x + 9}$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$$

$$(m) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(x)}{x^3 - x^2}$$

$$(n) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x}$$

$$(o) \lim_{x \rightarrow 0} \ln(|x|)$$

$$(p) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg(x)}{x^3}$$

$$(q) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} tg(x)$$

$$(r) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^3} \text{sen}(x)$$

$$(s) \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^+} \frac{x^2}{4 - 9x^2}$$

$$(t) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$(u) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow \frac{3}{5}^-} \frac{1}{5x - 3}$$

9. Se $f(x) = 3x - 5$ e $g(x) = \frac{x}{2} - \frac{2}{3}$, calcule:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} (f + g)(x)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} (g - f)(x)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} (gf)(x)$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

- (e) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{g}{f}\right)(x)$ (k) $\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} \cos\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)$
 (f) $\lim_{x \rightarrow 1} (f \circ f)(x)$ (l) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{g(x)}\right)$
 (g) $\lim_{x \rightarrow 2} (f \circ g)(x)$ (m) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{tg}\left(\frac{1}{g(x)}\right)$
 (h) $\lim_{x \rightarrow 2} (g \circ f)(x)$ (n) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{cotg}\left(\frac{1}{g(x)}\right)$
 (i) $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} (f \circ g \circ f)(x)$
 (j) $\lim_{x \rightarrow 2} \ln(|f(x)|)$

10. Calcule os seguintes limites:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}$ (k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$
 (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\operatorname{sen}(x)}$ (l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x}$
 (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{sen}(4x)}$ (m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{x}$
 (d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{sen}(x)}{2x - \pi}$ (n) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x^2}$
 (e) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x - \pi}$ (o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\operatorname{sen}(ax) - \operatorname{sen}(bx)}, a, b \neq 0$
 (f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ (p) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos^2(x)$
 (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg}(x)}{x + \operatorname{tg}(x)}$ (q) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2(x)}{x^2 \sec(x)}$
 (h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x+1}$ (r) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{x}\right)^{x+4}$
 (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$ (s) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$
 (j) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$

11. Calcule $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ e $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t + a) - f(a)}{t}$, se:

- (a) $f(x) = x^2, a = 2$ (f) $f(x) = x(1 - x), a = 1$
 (b) $f(x) = x^2 + 1, a = 2$ (g) $f(x) = \cos(x), a = \pi$
 (c) $f(x) = 3x^2 - x, a = 0$ (h) $f(x) = (x - 3)^2, a = 1$
 (d) $f(x) = |x|^2, a = 2$ (i) $f(x) = \ln(x), a = 1$
 (e) $f(x) = \sqrt{x}, a = 1$ (j) $f(x) = e^{2x}, a = 0$

12. Se $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$, verifique que: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$.

13. Verifique que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}}) = 1$.

14. No problema 51 do capítulo II, foi visto que o custo para remover x de resíduos tóxicos num aterro é dado por $S(x) = \frac{0.8x}{100 - x}$, $0 < x < 100$.

(a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 100^-} S(x)$.

(b) Interprete o resultado obtido.

15. Suponha que 2000 reais são investidos a uma taxa de juros anual de 6% e os juros são capitalizados continuamente.

(a) Qual é o saldo ao final de 10 anos? E de 50 anos?

(b) Que quantia deveria ser investida hoje a uma taxa anual de 7% de juros capitalizados continuamente, de modo a se transformar, daqui a 20 anos, em 20000 reais?

16. Durante uma epidemia de dengue, o número de pessoas que adoeceram, num certo bairro, após t dias é dado por $L(t) = \frac{100000}{1 + 19900 e^{-0.8t}}$.

(a) Determine a quantidade máxima de indivíduos atingidos pela doença.

(b) Esboce o gráfico de L .

17. Esboce o gráfico das seguintes funções:

(a) $y = \frac{1}{(x + 1)(x^3 - 1)}$

(d) $y = \frac{x}{(x - 1)(x^3 + 1)}$

(b) $y = \frac{x}{(x + 1)(x^3 - 1)}$

(e) $y = \frac{1}{(x - 3)(x + 2)(x^2 + 1)}$

(c) $y = \frac{1}{(x - 1)(x^3 + 1)}$

(f) $y = \frac{x^2}{(x - 3)(x + 2)(x^2 - 1)}$

18. Use a continuidade da função para calcular os seguintes limites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \pi} \cos(x + \operatorname{sen}(x))$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\operatorname{arctg}(x)}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + \operatorname{sen}(\cos(x)))}{x^2 + 1}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{\cos^2(x) + 1}{\sqrt{2(x^2 + 1)}}\right)$$

19. Verifique se as seguintes funções são contínuas:

$$(a) f(x) = \operatorname{argsenh}(2x) \quad (b) f(x) = \cos(2x)$$

$$(c) f(x) = \frac{x}{x^4 + 1} \quad (d) f(x) = |\operatorname{sen}(x)|$$

$$(e) f(x) = \sec(x^2 + 1) \quad (f) f(x) = \operatorname{tg}(x^2 + 1)$$

$$(g) f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$(h) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ 4 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

Esboce os gráficos correspondentes.

20. Seja $f(x) = x^3 + x$. Verifique que:

$$(a) |f(x) - f(2)| \leq 20|x - 2| \text{ se } 0 \leq x \leq 3 \quad (b) f \text{ é contínua em } 2.$$

21. Determine o valor de L para que as seguintes funções sejam contínuas nos pontos dados:

$$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ L & \text{se } x = 0 \end{cases}, \text{ no ponto } x = 0.$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{se } x \neq 3 \\ L & \text{se } x = 3 \end{cases}, \text{ no ponto } x = 3.$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} x + 2L & \text{se } x \geq -1 \\ L^2 & \text{se } x < -1 \end{cases}, \text{ no ponto } x = -1.$$

$$(d) \quad f(x) = \begin{cases} 4 \cdot 3^x & \text{se } x < 0 \\ 2L + x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}, \text{ no ponto } x = 0.$$

$$(e) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ L & \text{se } x = 0 \end{cases}, \text{ no ponto } x = 0.$$

$$(f) \quad f(x) = \begin{cases} 4 - x + x^3 & \text{se } x \leq 1 \\ 9 - Lx^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}, \text{ no ponto } x = 1.$$

22. Verifique se as seguintes funções são contínuas.

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$(d) \quad f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x < -1 \\ \ln(2 - x^2) & -1 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} & x > 1 \end{cases}$$

$$(b) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 - 5x + 6|}{x^2 - 5x + 6} & x \neq 2, 3 \\ 1 & x = 2 \\ 9 & x = 3 \end{cases}$$

$$(e) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}(2x^2 + 3) & x \leq 1 \\ 6 - 5x & 1 < x < 3 \\ x - 3 & x \geq 3 \end{cases}$$

$$(f) \quad f(x) = \frac{e^{tg(x)} - 1}{e^{tg(x)} + 1}$$

$$(c) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{1-x^3} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

$$(g) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{[[x+3]]}{(x+1)^3 - 1} & x < 0 \\ \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$$

23. Determine em que pontos as seguintes funções são contínuas:

$$(a) \quad f(x) = \arctg\left(\frac{\cos(x) + \operatorname{sen}(x)}{x^4 + x^2 + 1}\right)$$

$$(d) \quad f(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(x^2) + \ln(x^2 + 1)}{x^2 \arctg(x)}$$

$$(b) \quad f(x) = \cos\left(\ln\left(\frac{x^4 + 4}{x^2}\right)\right)$$

$$(e) \quad f(x) = \frac{e^{x^2} + e^{\operatorname{sen}(x)} + 2}{(x^2 + 6)(e^x + 1)}$$

$$(c) \quad f(x) = \frac{x^5 + x^4 - x^2 + 1}{\sec(x^2 + 1)}$$

$$(f) \quad f(x) = \frac{\cos([x]))}{[x]}$$

24. Verifique se as seguintes equações admitem, pelo menos, uma raiz real:

(a) $x^3 + x^2 - 4x - 15 = 0$

(d) $2^x + x^2 = 0$

(b) $\cos(x) - x = 0$

(e) $x^5 - x^3 + x^2 = 0$

(c) $\sin(x) - x + 1 = 0$

(f) $x^7 + x^5 + 1 = 0$

25. Seja $f(x) = 1 - x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$. Como escolher o valor de $f(0)$, para que a função f seja contínua em $x = 0$?

26. Sendo $f(x) = \arctg\left(\frac{1}{x-2}\right)$, $x \neq 2$, é possível escolher o valor de $f(2)$ tal que a função f seja contínua em $x = 2$?

27. Determine $f(0)$ de modo que as seguintes funções sejam contínuas em $x = 0$:

(a) $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$; (b) $f(x) = x \ln(x+1) - x \ln(x-1)$;

c) $f(x) = x \cotg(x)$.

28. A função sinal de x é definida por: $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$

Verifique se $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ e $g(x) = x \operatorname{sgn}(x)$ são funções contínuas.

29. Dê um exemplo de duas funções descontínuas cuja soma seja contínua.

30. Verifique que a equação $x = \operatorname{tg}(x)$ tem uma infinidade de raízes reais.

31. Seja $f(x) = \frac{x^3}{4} - \sin(\pi x) + 3$. A função f atinge o valor $\frac{7}{3}$ no intervalo $[-2, 2]$? Justifique sua resposta.

32. Uma esfera oca de raio R está carregada com uma unidade de eletricidade estática. A intensidade de um campo elétrico $E(x)$ num ponto P localizado a x unidades do centro da esfera é determinada pela função:

$$E(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < x < R \\ \frac{1}{3x^2} & \text{se } x = R \\ x^{-2} & \text{se } x > R. \end{cases}$$

Verifique se a função $E = E(x)$ é contínua. Esboce o gráfico de E .

33. A função de Heaviside é utilizada no estudo de circuitos elétricos para representar o surgimento de corrente elétrica ou de voltagem, quando uma chave é instantaneamente ligada e, é definida por:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

(a) Discuta a continuidade de $f(t) = H(t^2 + 1)$ e de $g(t) = H(\sin(\pi t))$. Esboce os respectivos gráficos em $[-5, 5]$.

(b) A função $R(t) = ct H(t)$ ($c > 0$) é chamada rampa e representa o crescimento gradual na voltagem ou corrente num circuito elétrico. Discuta a continuidade de R e esboce seu gráfico para $c = 1, 2, 3$.

(c) Verifique que $u_c(t) = H(t - c)$.

(d) Se $h(t) = \begin{cases} f(t) & \text{se } 0 \leq t < c \\ g(t) & \text{se } t \geq c \end{cases}$, verifique que $h(t) = (1 - u_c(t)) f(t) + u_c(t) g(t)$.

34. A aceleração devida a gravidade G varia com a altitude em relação à superfície terrestre. G é função de r (a distância ao centro da terra) e, é dada por:

$$G(r) = \begin{cases} \frac{g M r}{R^3} & \text{se } r < R \\ \frac{g M}{r^2} & \text{se } r \geq R, \end{cases}$$

onde R é o raio da terra, M a massa da terra e g a constante gravitacional. Verifique se G é contínua. Esboce o gráfico de G .

35. Seja $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ contínua. Verifique que existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.
36. Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas tais que $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$. Verifique que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = g(x_0)$.
37. A população (em milhares) de uma colônia de bactérias, t minutos após a introdução de uma toxina é dada pela função:

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + 7 & \text{se } t < 5 \\ -8t + 72 & \text{se } 5 \leq t. \end{cases}$$

Explique por que a população deve ser de 10000 bactérias em algum momento entre $t = 1$ e $t = 7$.

38. Verifique que a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x^3}{4} - \operatorname{sen}(\pi x) + 3$ assume o valor $\frac{4}{3}$.

Capítulo 4

DERIVADA

4.1 Introdução

Neste capítulo estabeleceremos a noção de derivada de uma função. A derivada envolve a variação ou a mudança no comportamento de vários fenômenos.

Inicialmente apresentaremos a definição de reta tangente ao gráfico de uma função. Posteriormente, definiremos funções deriváveis e derivada de uma função num ponto, dando ênfase ao seu significado geométrico.

4.2 Reta Tangente

Seja:

$$f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

uma função definida num domínio D que pode ser um intervalo aberto ou uma reunião de intervalos abertos, ou ainda, D tal que para todo intervalo aberto I que contenha x_0 , se tenha: $I \cap (D - \{x_0\}) \neq \emptyset$.

Considere $P = (x_0, f(x_0))$ e $Q_i = (x_i, f(x_i))$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) pontos no gráfico de f , $P \neq Q_i$; seja r_1 a reta secante que passa por P e Q_1 ; seu coeficiente angular é:

$$m_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Fixemos o ponto P e movamos Q_1 sobre o gráfico de f em direção a P , até um ponto $Q_2 = (x_2, f(x_2))$ tal que $Q_2 \neq P$; seja r_2 a reta secante que passa por P e Q_2 ; seu coeficiente angular é:

$$m_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}.$$

Suponha que os pontos Q_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) vão se aproximando sucessivamente do ponto P (mas sem atingir P), ao longo do gráfico de f ; repetindo o processo obtemos r_1, r_2, r_3, \dots , retas secantes de coeficientes angulares m_1, m_2, m_3, \dots , respectivamente.

É possível provar, rigorosamente, que quando os pontos Q_i vão se aproximando cada vez mais de P , os m_i respectivos, variam cada vez menos, tendendo a um valor limite constante, que denotaremos por m_{x_0} .

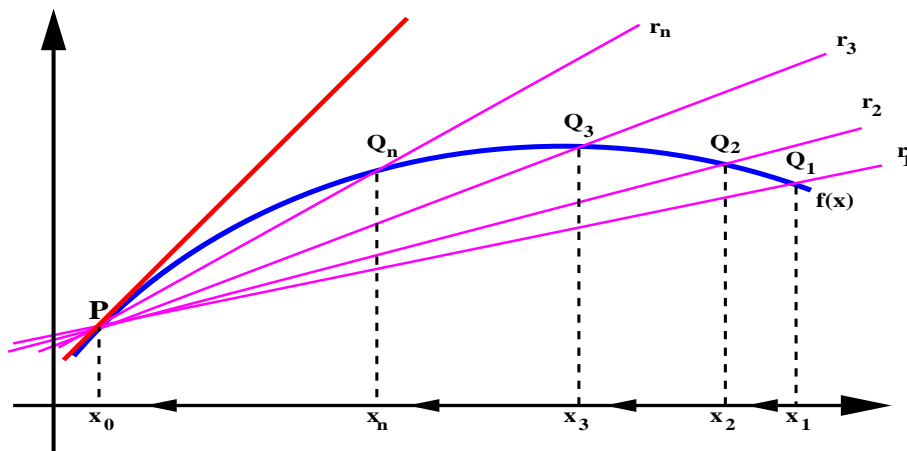


Figura 4.1:

Definição 4.1. A reta passando pelo ponto P e tendo coeficiente angular m_{x_0} , é chamada reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$.

Se

$$m_{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe, fazendo a mudança $t = x - x_0$, temos:

$$m_{x_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}.$$

Como x_0 é um ponto arbitrário, podemos calcular o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f para qualquer ponto $(x, f(x))$:

$$m_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t) - f(x)}{t}$$

Assim, m_x só depende x .

Definição 4.2. Se f for contínua em x_0 , então, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é:

$$y - f(x_0) = m_{x_0} (x - x_0)$$

se o limite existe,

Exemplo 4.1.

[1] Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = 4 - x^2$, no ponto $(1, 3)$.

Denotemos por m_1 o coeficiente angular da reta tangente à parábola $y = 4 - x^2$ passando pelo ponto $(1, f(1)) = (1, 3)$. Seja $P = (1, 3)$ e $Q = (x_0, 4 - x_0^2)$ pontos da parábola; o coeficiente angular da reta secante à parábola passando por P e Q é:

$$m_{PQ} = \frac{f(x_0) - f(1)}{x_0 - 1} = -(x_0 + 1).$$

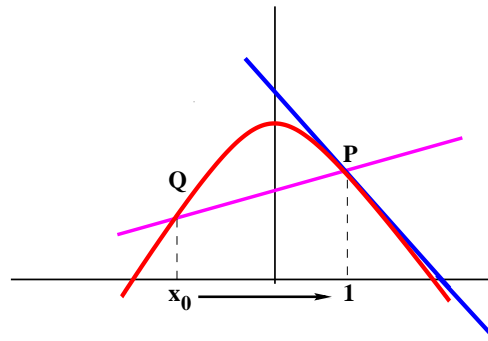


Figura 4.2:

Do desenho, é intuitivo que se Q aproxima-se de P (x_0 aproxima-se de 1), os coeficientes angulares de ambas as retas ficarão iguais; logo:

$$m_1 = \lim_{x_0 \rightarrow 1} m_{PQ} = -2.$$

A equação da reta tangente ao gráfico de f , no ponto $(1, 3)$ é $y - 3 = -2(x - 1)$ ou, equivalentemente, $y + 2x = 5$.

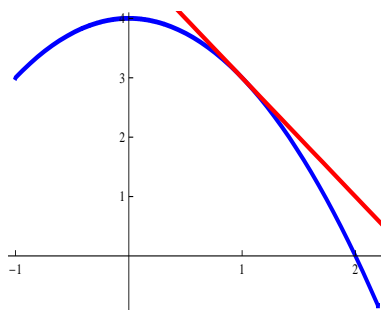


Figura 4.3: Reta tangente a $y = 4 - x^2$, no ponto $(1, 3)$.

[2] Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$, no ponto $(\frac{1}{2}, 2)$.

Seja $m_{\frac{1}{2}}$ o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $y = \frac{1}{x}$ passando pelo ponto $(\frac{1}{2}, 2)$. Seja $P = (\frac{1}{2}, 2)$ e $Q = (x_0, \frac{1}{x_0})$ pontos da curva; o coeficiente angular da reta secante à curva passando por P e Q é:

$$m_{PQ} = \frac{f(x_0) - f(\frac{1}{2})}{x_0 - \frac{1}{2}} = -\frac{2}{x_0}.$$

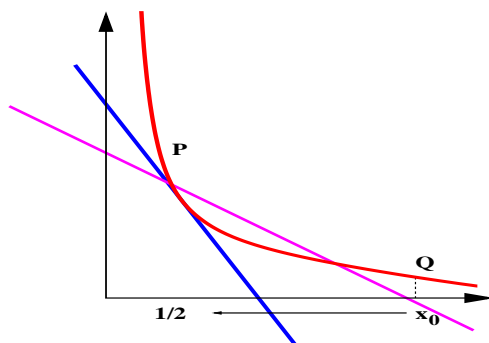


Figura 4.4:

Novamente do desenho, é intuitivo que se Q aproxima-se de P (x_0 aproxima-se de $\frac{1}{2}$) os coeficientes angulares de ambas as retas ficarão iguais; logo:

$$m_{\frac{1}{2}} = \lim_{x_0 \rightarrow \frac{1}{2}} m_{PQ} = -4.$$

A equação da reta tangente ao gráfico de f , no ponto $(\frac{1}{2}, 2)$ é $y - 2 = -4(x - \frac{1}{2})$ ou, equivalentemente, $y + 4x = 4$.

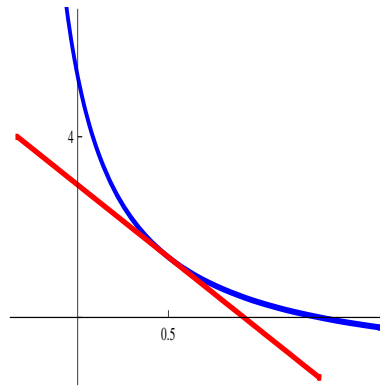


Figura 4.5: Reta tangente a $y = \frac{1}{x}$, no ponto $(\frac{1}{2}, 2)$.

[3] Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^3 - x + 1$, no ponto $(1, 1)$. Utilizemos agora diretamente a definição:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t) - f(1)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(t^2 + 3t + 2)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} (t^2 + 3t + 2) = 2.$$

Logo $m_1 = 2$. A equação da reta tangente ao gráfico de f , no ponto $(1, 1)$ é:

$$y - 2x = -1.$$

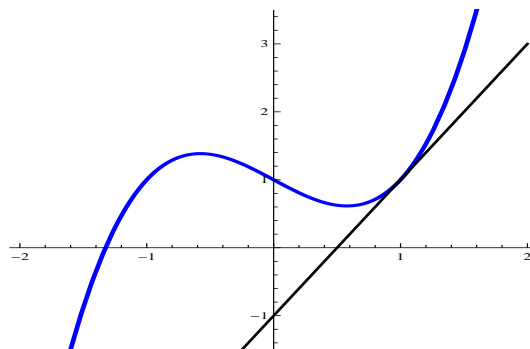


Figura 4.6: Exemplo [3].

Observação 4.1. Da definição segue que a equação da reta normal ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{m_{x_0}} (x - x_0), \quad \text{se} \quad m_{x_0} \neq 0$$

4.3 Funções Deriváveis

Definição 4.3. Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida num domínio D que pode ser um intervalo aberto ou uma reunião de intervalos abertos ou ainda, D tal que para todo intervalo aberto I que contenha x_0 , se tenha: $I \cap (D - \{x_0\}) \neq \emptyset$. f é **derivável ou diferenciável** no ponto x_0 quando existe o seguinte limite:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Observação 4.2. Fazendo a mudança $t = x - x_0$, temos:

$$f'(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}.$$

$f'(x_0)$ é chamada a derivada de f no ponto x_0 . Como x_0 é um ponto arbitrário, podemos calcular a derivada de f para qualquer ponto $x \in \text{Dom}(f)$;

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t) - f(x)}{t}$$

Assim f' é função de x e $f'(x_0) \in \mathbb{R}$.

Definição 4.4. Uma função f é derivável (ou diferenciável) em $A \subset \mathbb{R}$, se é derivável ou diferenciável em cada ponto $x \in A$.

Outras notações para a derivada de $y = y(x)$ são:

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{ou} \quad D_x f.$$

Exemplo 4.2.

[1] Calcule $f'(\frac{1}{4})$ e $f'(2)$, se $f(x) = x^2$.

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x+t)^2 - x^2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} (2x+t) = 2x.$$

Logo, $f'(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$ e $f'(2) = 4$.

[2] Calcule $f'(\frac{1}{2})$ se $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - (x+t)^2} - \sqrt{1 - x^2}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{2x+t}{\sqrt{1 - (x+t)^2} + \sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Logo, $f'(\frac{1}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

[3] Calcule $f'(1)$ se $f(x) = 4 - x^2$.

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{t(t+2x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} -(t+2x) = -2x.$$

Logo, $f'(1) = -2$.

[4] Calcule $f'(\frac{1}{2})$ se $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2 + xt} = -\frac{1}{x^2}.$$

Logo, $f'(\frac{1}{2}) = -4$.

4.4 Interpretação Geométrica

A função $F : (D - \{x_0\}) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

representa, geometricamente, o coeficiente angular da reta secante ao gráfico de f passando pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$.

Logo, quando f é derivável no ponto x_0 , a reta de coeficiente angular $f'(x_0)$ e passando pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ é a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$.

Se f admite derivada no ponto x_0 , então, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é:

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

A equação da reta normal ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é:

$$\boxed{y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad \text{se } f'(x_0) \neq 0}$$

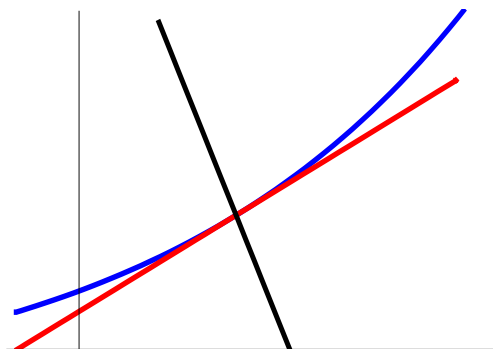


Figura 4.7: As retas tangente e normal ao gráfico de $y = f(x)$.

Exemplo 4.3.

[1] Determine as equações da reta tangente e da reta normal ao gráfico de $f(x) = x^2 + 1$, no ponto de abscissa $x_0 = 1$.

Se $x_0 = 1$ então $f(x_0) = 2$; logo, a reta tangente passa pelo ponto $(1, 2)$ e seu coeficiente angular é $f'(1)$. Temos:

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x+t)^2 + 1 - (x^2 + 1)}{t} = 2x.$$

$f'(1) = 2$ e as respectivas equações são: $y - 2x = 0$ e $2y + x - 5 = 0$.

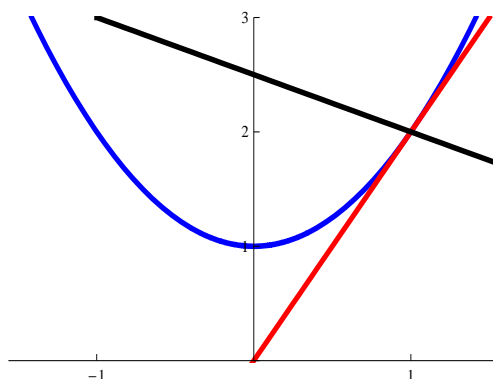


Figura 4.8: As retas tangente e normal ao gráfico de $y = f(x)$.

[2] Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ que seja paralela à reta

$$2x - y - 1 = 0.$$

Para determinar a equação de uma reta, necessitamos de um ponto (x_0, y_0) e do coeficiente angular $f'(x_0)$. Neste problema, temos que determinar um ponto.

Sejam r_t a reta tangente, r a reta dada, m_t e m os correspondentes coeficientes angulares; como r_t e r são paralelas, então $m_t = m$; mas $m = 2$ e $m_t = f'(x_0)$, onde x_0 é a abscissa do ponto procurado; como:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

resolvendo a equação $f'(x_0) = 2$, obtemos $x_0 = \frac{1}{16}$ e $f(\frac{1}{16}) = \frac{1}{4}$; a equação é $16x - 8y + 1 = 0$.

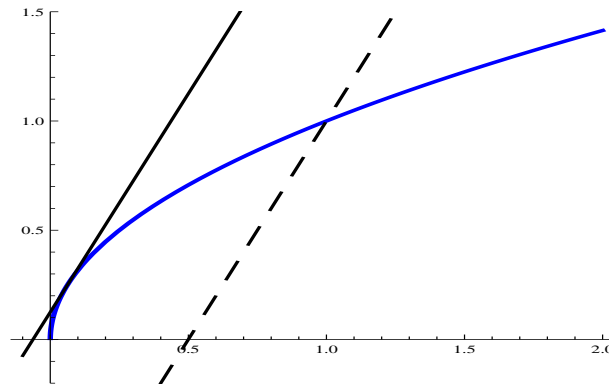


Figura 4.9: Reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ paralela à reta $2x - y - 1 = 0$.

[3] Determine as equações das retas tangentes ao gráfico de $f(x) = \frac{x^3}{3} - 1$ que sejam perpendiculares à reta $y + x = 0$.

Sejam r_t a reta tangente, r a reta dada, m_t e m os correspondentes coeficientes angulares; como r_t e r são perpendiculares, então $m_t m = -1$; mas $m = -1$ e $m_t = f'(x_0)$, onde x_0 é a abscissa do ponto procurado; resolvendo a equação $f'(x_0) = 1$, temos $f'(x_0) = x_0^2$ e $x_0 = \pm 1$; as equações são: $3y - 3x + 5 = 0$ e $3y - 3x + 1 = 0$.

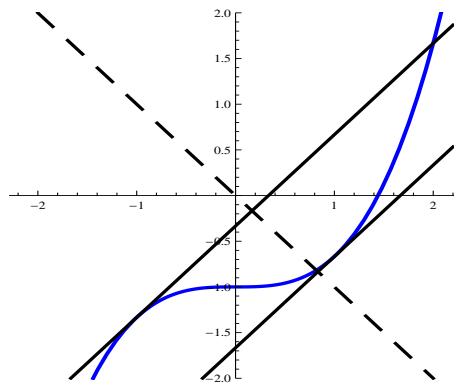


Figura 4.10: Exemplo [3].

Teorema 4.1. Se f é derivável em x_0 então f é contínua em x_0 .

Para a prova veja o apêndice.

Exemplo 4.4.

Seja $f(x) = |x|$. f é contínua em todo \mathbb{R} ; em particular em $x_0 = 0$. Mas a derivada de f em 0 não existe; de fato:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}.$$

Calculemos os limites laterais:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{x}\right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\left(\frac{x}{x}\right) = -1. \end{cases}$$

Logo, $f'(0)$ não existe. Para $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f'(x)$ existe e:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Observações 4.1.

1. Do teorema segue que não existe a derivada de f no ponto
2. Não existe a derivada de f no ponto x_0 , se existe "quina" no gráfico da função contínua no ponto de abscissa x_0 , como no ponto $x_0 = 0$ do exemplo anterior.
3. Também não existe a derivada de f no ponto x_0 , se f é contínua em x_0 e se possui reta tangente vertical passando pelo ponto de abscissa x_0 . Neste caso,:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f'(x)| = \infty.$$

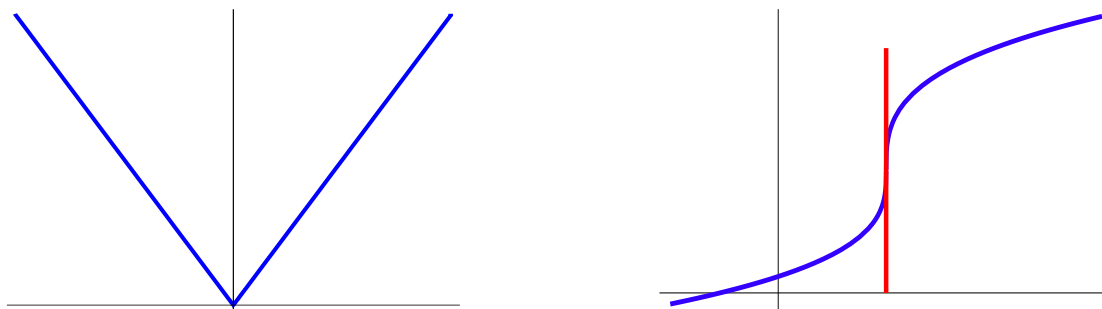


Figura 4.11: Funções não deriváveis.

Exemplo 4.5.

[1] Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} (x \operatorname{sen}(\frac{1}{x})) = 0;$$

logo, a derivada em 0 existe; então, f é contínua em 0.

[2] $f(x) = \sqrt[3]{x}$ é contínua em todo \mathbb{R} e não é diferenciável em $x = 0$. De fato:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty.$$

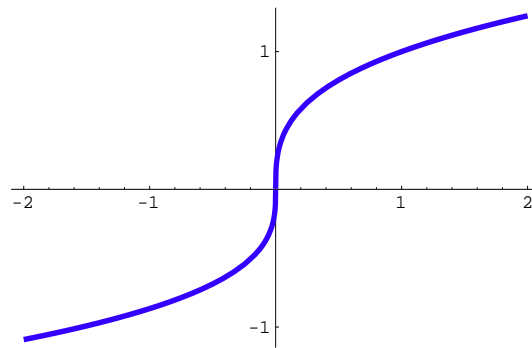


Figura 4.12: Gráfico do exemplo [2].

[3] Determine as constantes a e b tais que:

$$f(x) = \begin{cases} a x^3 & \text{se } x < 2 \\ x^2 + b & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

seja derivável.

Devemos calcular:

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+2) - f(2)}{x}.$$

Devemos determinar os limites laterais:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x+2) - f(2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12 a x + 6 a x^2 + a x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (12 a + 6 a x + a x^2) = 12 a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x+2) - f(2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 x + x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (4 + x) = 4. \end{cases}$$

Logo, devemos ter $12a = 4$, então $a = \frac{1}{3}$. Por outro lado, f deve ser contínua em $x_0 = 2$; isto é:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \iff 8a = 4 + b \iff b = -\frac{4}{3}.$$

A função deve ser definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} & \text{se } x < 2 \\ x^2 - \frac{4}{3} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Note que $f(2) = \frac{8}{3}$.

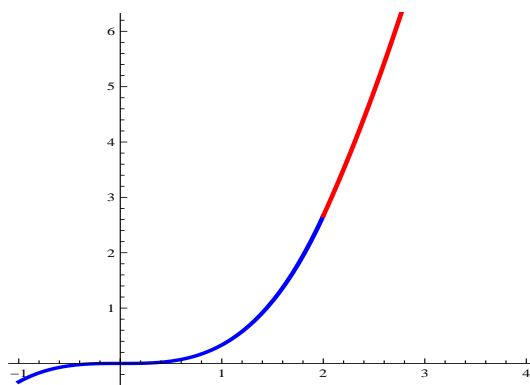


Figura 4.13: Gráfico do exemplo [3].

4.5 Regras de Derivação

[1] Se $u(x) = c$, então $u'(x) = 0$.

[2] Se $u(x) = mx + b$; $m, b \in \mathbb{R}$ e $m \neq 0$, então $u'(x) = m$.

De fato, a função é contínua e seu gráfico coincide com sua reta tangente em qualquer ponto; logo, tem o mesmo coeficiente angular. Equivalentemente,

$$\frac{u(x+t) - u(x)}{t} = \frac{mt}{t} = m.$$

[3] Se $u(x) = x^n$; $n \in \mathbb{N}$, então $u'(x) = nx^{n-1}$.

De fato: $u(x+t) - u(x) = x^n + t \left[nx^{n-1} + t \left(\frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} t + \dots + t^{n-2} \right) \right] - x^n$ e:

$$\begin{aligned}
 u'(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x+t) - u(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x+t)^n - x^n}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \left[n x^{n-1} + t \left(\frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} t + \dots + t^{n-1} \right) \right]}{t} \\
 &= n x^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Proposição 4.1. Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ funções deriváveis; então:

1. **Regra da soma:** As funções $u \pm v$ são deriváveis e

$$(u \pm v)'(x) = u'(x) \pm v'(x)$$

2. **Regra do produto:** A função $u \cdot v$ é derivável e

$$(u \cdot v)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

3. **Regra do quociente:** A função $\frac{u}{v}$ é derivável, e

$$\left(\frac{u}{v} \right)'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2} \quad \text{se } v(x) \neq 0$$

Veja as provas no apêndice.

Da regra do produto temos: $(k u(x))' = k u'(x)$, para toda constante k . Da regra do quociente, temos: se $u(x) = x^n$, $x \neq 0$, com $n < 0$, então $u'(x) = n x^{n-1}$.

Exemplo 4.6.

[1] Calcule $u'(x)$, sendo $u(x) = \frac{x^4 + 3x + 1}{x^5}$; $x \neq 0$.

Note que: $u(x) = x^{-1} + 3x^{-4} + x^{-5}$, temos:

$$u'(x) = (x^{-1} + 3x^{-4} + x^{-5})' = -x^{-2} - 12x^{-5} - 5x^{-6}.$$

[2] Calcule $u'(x)$ sendo $u(x) = (x^3 + 2x + 1)(2x^2 + 3)$.

Aplicando diretamente as regras:

$$u'(x) = ((x^3 + 2x + 1))'(2x^2 + 3) + (x^3 + 2x + 1)((2x^2 + 3))'$$

$$\text{e } u'(x) = 10x^4 + 21x^2 + 4x + 6.$$

[3] Calcule $u'(x)$, sendo $u(x) = \frac{x^2 + x}{x^3 + 1}$.

$$u'(x) = \left(\frac{x^2 + x}{x^3 + 1} \right)' = \frac{(x^2 + x)'(x^3 + 1) - (x^2 + x)(x^3 + 1)'}{(x^3 + 1)^2};$$

logo,

$$u'(x) = \frac{-x^4 - 2x^3 + 2x + 1}{(x^3 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

[4] Determine as equações das retas tangentes ao gráfico de $f(x) = x^2 - 3x$ e que passa pelo ponto $(3, -4)$.

O ponto dado não pertence ao gráfico de f . Por outro lado a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

onde $f'(x_0) = 2x_0 - 3$ e $f(x_0) = x_0^2 - 3x_0$. O ponto $(3, -4)$ pertence à reta tangente, logo, obtemos:

$$-4 = y(3) = x_0^2 - 3x_0 + (2x_0 - 3)(3 - x_0) = -x_0^2 + 6x_0 - 9.$$

Resolvendo a equação, obtemos: $x_0 = 1$ e $x_0 = 5$. Então, as equações obtidas são:

$$y + x + 1 = 0 \quad \text{e} \quad y - 7x + 25 = 0.$$

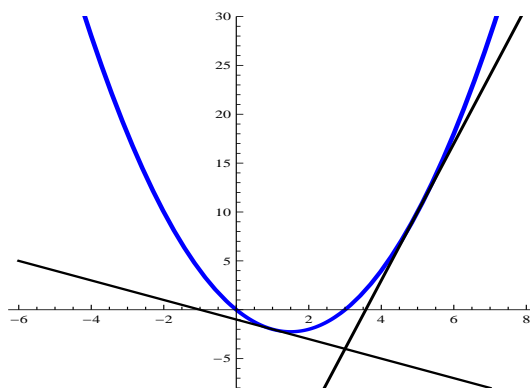


Figura 4.14: Exemplo [4].

[5] Determine as equações das retas tangentes ao gráfico de $g(x) = x^3 - x$, paralelas à reta $y - 2x = 0$.

O coeficiente angular da reta tangente no ponto x_0 é $g'(x_0) = 3x_0^2 - 1$ e deve ser igual ao coeficiente angular da reta dada; então $3x_0^2 - 1 = 2$; logo, $x_0 = \pm 1$. As equações das retas tangentes são:

$$y - 2x + 2 = 0 \quad \text{e} \quad y - 2x - 2 = 0.$$

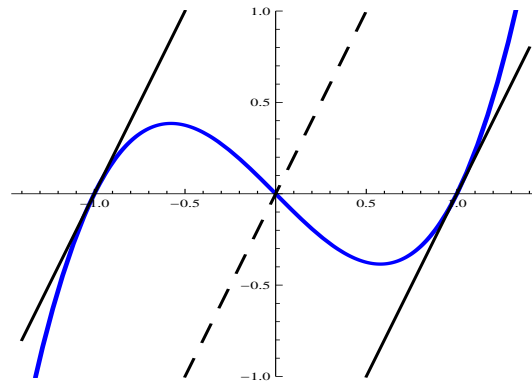


Figura 4.15: Exemplo [5].

4.6 Derivada da Função Composta

Suponha que desejamos derivar a seguinte expressão:

$$u(x) = (x^9 + x^6 + 1)^{1000}$$

com as regras dadas. Só temos a possibilidade de desenvolver o trinômio e aplicar sucessivamente a regra da soma ou escrever como produto de 1000 polinômios e usar a regra do produto.

Como ambas as possibilidades são tediosas, vamos tentar reescrever esta função.

$$\text{Seja } g(x) = x^{1000} \text{ e } f(x) = x^9 + x^6 + 1; \text{ é claro que } u(x) = (g \circ f)(x).$$

Logo, se soubermos derivar a composta de funções o problema estará resolvido.

O seguinte teorema nos ensina a derivar uma função composta $g \circ f$ em termos das derivadas de f e g , que em geral, são mais simples.

Teorema 4.2. (Regra da Cadeia) Sejam f e g funções, tais que $g \circ f$ esteja bem definida. Se f é derivável em x e g é derivável em $f(x)$, então $g \circ f$ é derivável em x e:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Outra maneira de escrever o último parágrafo é: se $y = g(x)$ e $x = f(t)$, nas hipóteses do teorema, temos que:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$$

Para a prova, veja o apêndice.

4.6.1 Aplicação:

Seja $v(x) = (u(x))^n$, onde $n \in \mathbb{Z}$. Então:

$$v'(x) = n (u(x))^{n-1} u'(x).$$

Exemplo 4.7.

[1] Calcule $v'(x)$ se $v(x) = (x^9 + x^6 + 1)^{1000}$.

Neste caso $u(x) = x^9 + x^6 + 1$; logo, $u'(x) = 9x^8 + 6x^5$ e $n = 1000$; então:

$$v'(x) = ((u(x))^{1000})' = 1000 (u(x))^{999} u'(x) = 1000 (x^9 + x^6 + 1)^{999} (9x^8 + 6x^5).$$

[2] Calcule $\frac{dy}{dt}$ se $y = g(x) = x^3 + x + 1$ e $x = x(t) = t^2 + 1$.

Pela regra da cadeia:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = 2t(3x^2 + 1) = 6t(t^2 + 1)^2 + 2t.$$

[3] Seja g uma função derivável e $h(x) = g(x^2 + 1)$. Calcule $h'(1)$ se $g'(2) = 5$.

Observemos que $h(x) = (g \circ f)(x)$, onde $f(x) = x^2 + 1$; pela regra da cadeia:

$$h'(x) = g'(f(x)) f'(x),$$

e $f'(x) = 2x$. Logo, $h'(x) = g'(x^2 + 1) 2x$. Calculando a última expressão em $x = 1$, temos que: $h'(1) = 2g'(2) = 10$.

[4] Se $y = u^3 + u^2 + 3$ e $u = 2x^2 - 1$, calcule $\frac{dy}{dx}$.

Pela regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = 4x(3u^2 + 2u) = 4x(3(2x^2 - 1)^2 + 2(2x^2 - 1)) \\ &= 4(12x^5 - 8x^3 + x); \end{aligned}$$

ou, fazemos a composta das funções:

$$y = u^3 + u^2 + 3 = (2x^2 - 1)^3 + (2x^2 - 1)^2 + 3 \text{ e } y' = 4(12x^5 - 8x^3 + x).$$

[5] Determine $f'(1)$ se $f(x) = h(h(h(x)))$, $h(1) = 1$ e $h'(1) = 2$.

Pela regra da Cadeia:

$$f'(x) = h'(x) h'(h(x)) h'(h(h(x)));$$

logo, $f'(1) = 8$.

4.6.2 Teorema da Função Inversa

A seguir apresentamos um dos teoremas fundamentais em Matemática, o qual garante a existência da inversa derivável de uma função derivável. A prova deste teorema fica fora dos objetivos deste livro.

Teorema 4.3. (Função Inversa): Seja f uma função definida num intervalo aberto I . Se f é derivável em I e $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, então f possui inversa f^{-1} derivável e:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Para a prova da primeira parte veja a bibliografia avançada.

A fórmula pode ser obtida diretamente da regra da cadeia. De fato, $(f \circ f^{-1})(x) = x$ para todo $x \in I$. Derivando ambos os lados, temos que:

$$(f \circ f^{-1})'(x) = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1.$$

Exemplo 4.8.

[1] Seja $f(x) = x^2$, $x \geq 0$; logo sua inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ e $f'(x) = 2x \neq 0$ se $x \neq 0$; logo:

$$f'(f^{-1}(x)) = 2\sqrt{x}.$$

Aplicando o teorema:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x \neq 0.$$

[2] Seja $f(x) = x^3$; logo sua inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ e $f'(x) = 3x^2 \neq 0$ se $x \neq 0$;

$$f'(f^{-1}(x)) = 3\sqrt[3]{x^2}.$$

Aplicando o teorema:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad x \neq 0.$$

[3] Se $n \in \mathbb{N}$, então:

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{x^{\frac{1}{n}-1}}{n},$$

para todos os valores de x tais que $\sqrt[n]{x}$ seja definida.

De fato, seja $u(x) = x^n$; para n par, $x > 0$ e para n ímpar, x não tem restrições; a inversa de u é $u^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ e $u'(x) = n x^{n-1}$; $u'(x) \neq 0$ se $x \neq 0$. Aplicando o teorema, temos:

$$(\sqrt[n]{x})' = (u^{-1}(x))' = \frac{1}{u'(u^{-1}(x))} = \frac{x^{\frac{1}{n}-1}}{n}.$$

Em geral, pela regra da cadeia, se $u = u(x)$ é uma função derivável e:

$$v(x) = (u(x))^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{Q};$$

então:

$$v'(x) = \alpha (u(x))^{\alpha-1} u'(x).$$

[4] Calcule $f'(x)$, se $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Escrevemos $f = g \circ h$, onde $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = x^2 + 1$; logo, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ e $h'(x) = 2x$;

então: $f'(x) = g'(h(x)) h'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

[5] Determine $f'(0)$, se $f(x) = h(x) \sqrt[4]{h(x) + 1}$, $h(0) = 0$ e $h'(0) = 1$.

Pela regra da cadeia:

$$f'(x) = \frac{h'(x) (4 + 5 h(x))}{4 \sqrt[4]{(1 + h(x))^3}};$$

logo, $f'(0) = 1$.

4.7 Derivadas das Funções Elementares

A seguir apresentamos as regras de derivação para as funções elementares.

4.8 Função Exponencial

Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a \neq 1$ e $\boxed{u(x) = a^x}$ Então,

$$\boxed{u'(x) = \ln(a) a^x}$$

De fato, $u'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^{x+t} - a^x}{t} = a^x \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} = \ln(a) a^x$. Em particular, se $a = e$, temos:

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

Seja $v = v(x)$ uma função derivável e considere a função: $u(x) = a^{v(x)}$ Então:

$$u'(x) = \ln(a) a^{v(x)} v'(x)$$

De fato, $a^{v(x)} = e^{v(x)\ln(a)}$; usando a regra da cadeia para $g(x) = e^x$ e $f(x) = v(x)\ln(a)$, temos que $u(x) = (g \circ f)(x)$; então $g'(x) = e^x$ e:

$$g'(f(x)) = e^{v(x)\ln(a)} = a^{v(x)}$$

e $f'(x) = v'(x)\ln(a)$; logo, em particular,

$$(e^{v(x)})' = e^{v(x)} v'(x)$$

O crescimento ou decrescimento exponencial, expresso pela função

$$Q(t) = Q_0 e^{kt}, \quad (k \neq 0)$$

tem a propriedade $Q'(t) = k Q(t)$, isto é, a sua derivada é proporcional à função. Aliás, isto é o que caracteriza a função exponencial.

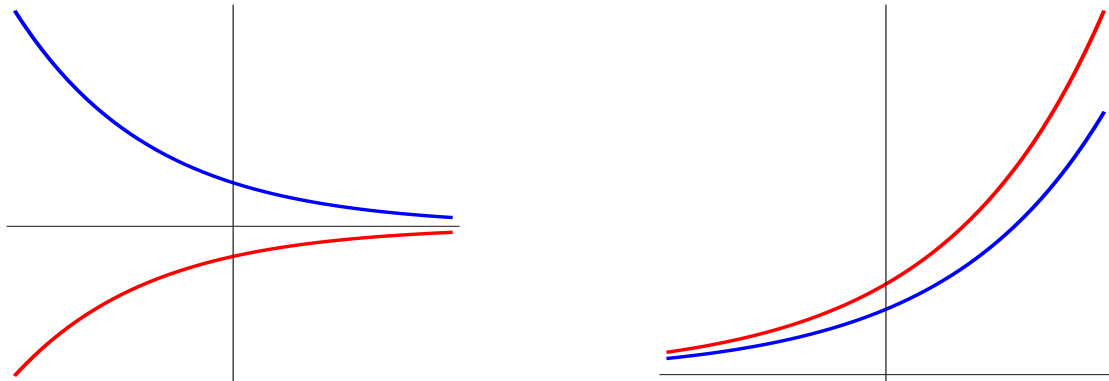


Figura 4.16: Nos desenhos, a função exponencial em azul e sua derivada em vermelho; para $0 < a < 1$ e $a > 1$, respectivamente.

Exemplo 4.9.

[1] Seja $y = e^{\sqrt{x}}$.

Fazendo $v(x) = \sqrt{x}$, temos $y' = (e^{v(x)})' = e^{v(x)} v'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

[2] Seja $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Fazendo $v(x) = \frac{1}{x}$, temos $y' = -\ln(2) \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} v'(x) = \ln(2) \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2}$.

[3] Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $y = e^{-x^2}$ no ponto de abscissa 1.

Derivando $y' = -2x e^{-x^2}$; $y'(1) = -2e^{-1}$ e $y(1) = e^{-1}$; logo, a equação da reta tangente passando pelo ponto $(1, y(1))$, é:

$$y + 2x e^{-1} - 3e^{-1} = 0.$$

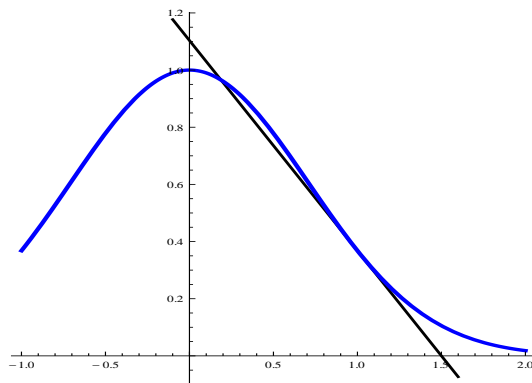


Figura 4.17: A reta tangente a $y = e^{-x^2}$, no ponto de abscissa 1.

4.9 Função Logarítmica

Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a \neq 1$ e $\boxed{u(x) = \log_a(x)}$.

Usando o teorema da função inversa para $f^{-1} = u$ e $f(x) = a^x$, temos que:

$$\boxed{u'(x) = \frac{\log_a(e)}{x}}$$

De fato, $u'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{x \ln(a)} = \frac{\log_a(e)}{x}$. Em particular, se $a = e$:

$$\boxed{(\ln(x))' = \frac{1}{x}}$$

Usemos a regra da cadeia para calcular a derivada de $\boxed{u(x) = \log_a(v(x))}$ onde $v(x) > 0$ é uma função derivável. Em tal caso:

$$\boxed{u'(x) = \frac{\log_a(e) v'(x)}{v(x)}}$$

Em particular, se $a = e$:

$$\boxed{(\ln(v(x)))' = \frac{v'(x)}{v(x)}}$$

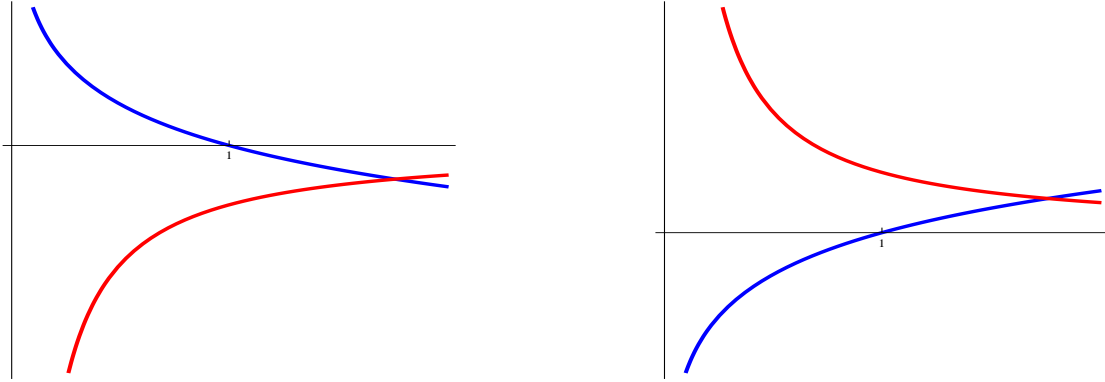


Figura 4.18: Função logarítmica em azul e sua derivada em vermelho; para $0 < a < 1$ e $a > 1$, respectivamente.

4.9.1 Algumas Propriedades

(a) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, se $u(x) = x^\alpha$, $x > 0$; então:

$$u'(x) = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Aplicando logaritmo à expressão $y = u(x) = x^\alpha$: temos, $\ln(y) = \ln(u(x)) = \alpha \ln(x)$; derivando:

$$[\ln(y)]' = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{y'}{y};$$

ou seja, $\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x}$; logo,

$$y' = y \left[\frac{\alpha}{x} \right] = \frac{\alpha x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Observação 4.3. Em geral, se $\boxed{u(x) = [v(x)]^\alpha}$, onde $v(x) > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$\boxed{u'(x) = \alpha (v(x))^{\alpha-1} v'(x)}$$

(b) Seja $\boxed{y = [u(x)]^{v(x)}}$, onde $u(x) > 0$. Aplicando logaritmo à expressão:

$$y = [u(x)]^{v(x)};$$

temos que, $\ln(y) = v(x) \ln(u(x))$. Derivando, temos:

$$\frac{y'}{y} = v'(x) \ln(u(x)) + \frac{u'(x) v(x)}{u(x)} \quad \text{e} \quad y'(x) = y(x) \left[v'(x) \ln(u(x)) + \frac{u'(x) v(x)}{u(x)} \right].$$

Então, se $y = (u(x))^{v(x)}$:

$$y' = [u(x)]^{v(x)} \left[v'(x) \ln(u(x)) + \frac{u'(x) v(x)}{u(x)} \right]$$

Exemplo 4.10.

[1] Calcule a derivada de $y = 3\sqrt{x} + x^{-5} + 2\sqrt[4]{x^3}$, $x > 0$.

Aqui $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = -5$ e $\alpha = \frac{3}{4}$, respectivamente; logo: $y' = \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 5x^{-6} + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{4}}$.

[2] Calcule a derivada de $y = \frac{\sqrt{x} e^{\sqrt{x}}}{(x^2 + x + 1)^4}$.

Aplicando logaritmo à função e usando as propriedades da função logarítmica, temos:

$$\ln(y) = \ln(\sqrt{x}) + \ln(e^{\sqrt{x}}) - 4 \ln(x^2 + x + 1) = \frac{\ln(x)}{2} + \sqrt{x} - 4 \ln(x^2 + x + 1).$$

Derivando: $\frac{y'}{y} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{8x+4}{x^2+x+1}$, logo:

$$y' = y(x) \left[\frac{1}{2x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{8x+4}{x^2+x+1} \right] = \frac{\sqrt{x} e^{\sqrt{x}}}{(x^2+x+1)^4} \left[\frac{1}{2x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{8x+4}{x^2+x+1} \right].$$

[3] Calcule a derivada de $y = x^x$, $x > 0$.

Aplicando logaritmo à expressão e usando as propriedades da função logarítmica, temos: $\ln(y) = x \ln(x)$. Derivando: $\frac{y'}{y} = \ln(x) + 1$ e,

$$y' = y(x) (\ln(x) + 1) = (\ln(x) + 1) x^x.$$

[4] Calcule a derivada de $y = x^{\sqrt{x}}$, $x > 0$.

Aplicando logaritmo à expressão e usando as propriedades da função logarítmica, temos: $\ln(y) = \ln(x) \sqrt{x}$. Derivando: $\frac{y'}{y} = \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$, logo:

$$y' = y(x) \left[\frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right] = \left[\frac{\ln(x) + 2}{2\sqrt{x}} \right] x^{\sqrt{x}}.$$

[5] Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^{x^2}$, ($x > 0$) no ponto de abscissa $x_0 = 1$.

Aplicando logaritmo a ambos os lados de $y = x^{x^2}$, temos que: $\ln(y) = x^2 \ln(x)$; derivando, obtemos:

$$y' = y (2x \ln(x) + x) = x^{x^2+1} (2 \ln(x) + 1) \implies y'(1) = 1$$

e a equação da reta tangente é $y - x = 0$.

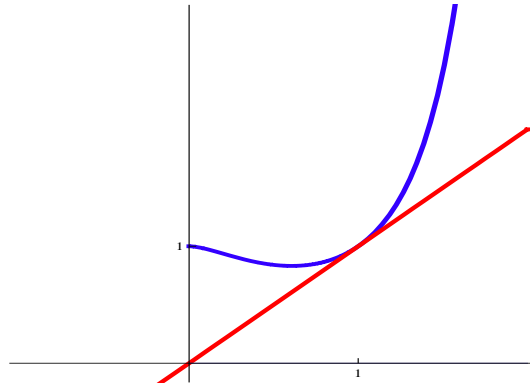


Figura 4.19: Gráfico de $f(x) = x^{x^2}$.

[6] Seja $f(x) = \ln(x)$. Sabendo que $f'(1) = 1$, verifique que: $\lim_{t \rightarrow 0} (t+1)^{\frac{1}{t}} = e$.

$$f'(1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t+1) - f(1)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \ln((t+1)^{\frac{1}{t}}) = \ln \left[\lim_{t \rightarrow 0} (t+1)^{\frac{1}{t}} \right];$$

então, $1 = \ln \left[\lim_{t \rightarrow 0} (t+1)^{\frac{1}{t}} \right]$; logo:

$$\lim_{t \rightarrow 0} (t+1)^{\frac{1}{t}} = e.$$

Tabela

Sejam $u(x)$, $v(x)$ funções diferenciáveis e k uma constante. Se:

[1] $y = k$, então $y' = 0$.

[2] $y = x$, então $y' = 1$.

[3] $y = k v(x)$, então $y' = k v'(x)$.

[4] $y = u(x) \pm v(x)$, então $y' = u'(x) \pm v'(x)$.

[5] $y = u(x) \cdot v(x)$, então $y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.

$$[6] y = \frac{u(x)}{v(x)}, v(x) \neq 0, \text{ então } y' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}.$$

$$[7] y = a^{u(x)}, \text{ então } y' = a^{u(x)} \cdot \ln(a) \cdot u'(x).$$

$$[8] y = e^{u(x)}, \text{ então } y' = u'(x) e^{u(x)}$$

$$[9] y = \log_a(u(x)), \text{ então } y' = \log_a(e) \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

$$[10] y = \ln(u(x)), \text{ então } y' = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

$$[11] y = (u(x))^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \text{ então } y' = \alpha (u(x))^{\alpha-1} u'(x).$$

$$[12] \text{ Seja } y = (u(x))^{v(x)}, \text{ onde } u(x) > 0, \text{ então:}$$

$$y' = (u(x))^{v(x)} \left[v'(x) \ln(u(x)) + \frac{u'(x) v(x)}{u(x)} \right].$$

4.10 Funções Trigonométricas

Se $y = \text{sen}(x)$, então $\text{sen}(x+t) - \text{sen}(x) = 2 \text{sen}(u) \cos(x+u)$, onde $u = \frac{t}{2}$. Logo:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+t) - \text{sen}(x)}{t} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(u) \cos(x+u)}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(u)}{u} \cos(x+u) \\ &= \cos(x) \end{aligned}$$

onde, para calcular o último limite usamos um limite fundamental. Se $y = \cos(x)$, sabendo que $\cos(x) = \text{sen}(\frac{\pi}{2} - x)$ e utilizando a regra da cadeia com $u(x) = \frac{\pi}{2} - x$, temos:

$$y' = \cos(u(x)) u'(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\text{sen}(x).$$

Se $y = \text{tg}(x)$, sabendo que $\text{tg}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$ e utilizando a regra do quociente, temos:

$$y' = \frac{\cos^2(x) + \text{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \sec^2(x).$$

Se $y = \text{sen}(x)$, então $y' = \cos(x)$.

Se $y = \cos(x)$, então $y' = -\operatorname{sen}(x)$

Se $y = \operatorname{tg}(x)$, então $y' = \sec^2(x)$

Se $y = \operatorname{cotg}(x)$, então $y' = -\operatorname{cosec}^2(x)$

Se $y = \sec(x)$, então $y' = \operatorname{tg}(x) \sec(x)$

Se $y = \operatorname{cosec}(x)$, então $y' = -\operatorname{cotg}(x) \operatorname{cosec}(x)$.

Tabela

Sejam $u(x), v(x)$ funções diferenciáveis e k uma constante. Se:

[13] Se $y = \operatorname{sen}(u(x))$, então $y' = \cos(u(x)) u'(x)$.

[14] Se $y = \cos(u(x))$, então $y' = -\operatorname{sen}(u(x)) u'(x)$.

[15] Se $y = \operatorname{tg}(u(x))$, então $y' = \sec^2(u(x)) u'(x)$.

[16] Se $y = \operatorname{cotg}(u(x))$, então $y' = -\operatorname{cosec}^2(u(x)) u'(x)$.

[17] Se $y = \sec(u(x))$, então $y' = \operatorname{tg}(u(x)) \sec(u(x)) \cdot u'(x)$.

[18] Se $y = \operatorname{cosec}(u(x))$, então $y' = -\operatorname{cotg}(u(x)) \operatorname{cosec}(u(x)) u'(x)$.

Exemplo 4.11.

[1] Se $y = \operatorname{sen}(\alpha x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Fazendo $u(x) = \alpha x$, temos $u'(x) = \alpha$; utilizando a tabela, temos que:

$$y' = \alpha \cos(\alpha x).$$

Para as outras funções trigonométricas, o procedimento é análogo.

[2] Seja $y = \operatorname{sen}^\beta(\alpha x)$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Fazendo $y = \operatorname{sen}^\beta(\alpha x) = (\operatorname{sen}(\alpha x))^\beta$, derivando como uma potência e usando o exercício anterior, temos:

$$y' = \beta \alpha \operatorname{sen}^{\beta-1}(\alpha x) \cos(\alpha x).$$

Para as outras funções trigonométricas, o procedimento é análogo.

[3] Seja $y = \operatorname{tg}(\operatorname{sen}(x))$.

Fazendo $u(x) = \operatorname{sen}(x)$, temos $u'(x) = \cos(x)$; logo, temos que:

$$y' = \cos(x) \sec^2(\operatorname{sen}(x)).$$

[4] Determine as retas tangentes ao gráfico de $u = \operatorname{sen}(x)$ que tenham o coeficiente angular igual a $\frac{1}{2}$.

Sabemos que se $u(x) = \text{sen}(x)$, então $u'(x) = \cos(x)$; logo, devemos resolver a equação :

$$u'(x) = \frac{1}{2},$$

ou seja, $\cos(x) = \frac{1}{2}$, que tem soluções $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$. As equações são:

$$6y - 3x + (1 + 6k)\pi - 3\sqrt{3} = 0, \quad \text{se } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{e}$$

$$6y - 3x + (6k - 1)\pi + 3\sqrt{3} = 0, \quad \text{se } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

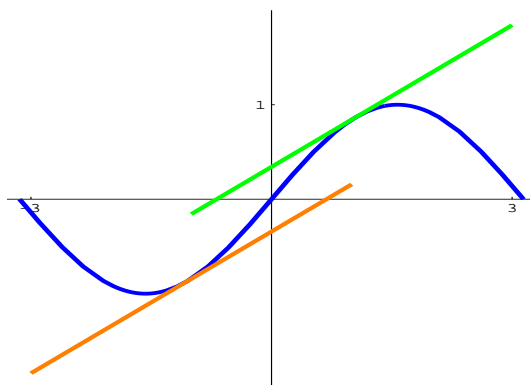


Figura 4.20: Desenho para $k = 0$.

[5] Determine os pontos onde o gráfico da função $y = x + 2 \text{sen}(x)$ possui reta tangente horizontal.

Devemos resolver a equação $y' = 0$ ou, equivalentemente, $\cos(x) = -\frac{1}{2}$; logo, os pontos tem abscissas $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

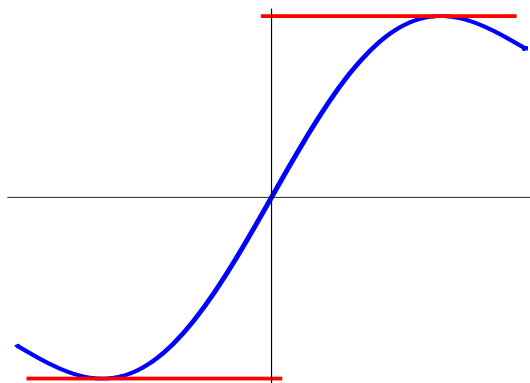


Figura 4.21: Desenho para $k = 0$.

4.11 Funções Trigonométricas Inversas

Seja $y = \arcsen(x)$. A função arco seno, definida para $x \in [-1, 1]$ é a função inversa da função:

$$f(x) = \text{sen}(x), \quad \text{se} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Logo, $f'(x) = \cos(x) \neq 0$ se $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Usando a fórmula do Teorema da Função Inversa, temos: se $y = f^{-1}(x) = \arcsen(x)$, ou seja, $\text{sen}(y) = x$, então:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsen(x))} = \frac{1}{\cos(y)}.$$

Mas, $\cos(y) = \sqrt{1 - \text{sen}^2(y)}$, pois $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Então:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \text{se} \quad x \in (-1, 1).$$

Seja $y = \arccos(x)$. Como $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsen(x)$, temos: $y' = -(\arcsen(x))'$; logo,

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \text{se} \quad x \in (-1, 1).$$

Tabela

Sejam $u(x)$, $v(x)$ funções diferenciáveis e k uma constante. Se:

[19] Se $y = \arcsen(u(x))$, então $y' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$.

[20] Se $y = \arccos(u(x))$, então $y' = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$.

[21] Se $y = \text{arctg}(u(x))$, então $y' = \frac{u'(x)}{1 + u^2(x)}$.

[22] Se $y = \text{arccotg}(u(x))$, então $y' = -\frac{u'(x)}{1 + u^2(x)}$.

[23] Se $y = \text{arcsec}(u(x))$, então $y' = \frac{u'(x)}{|u(x)|\sqrt{u^2(x) - 1}}$, $|u(x)| > 1$.

[24] Se $y = \text{arccosec}(u(x))$, então $y' = -\frac{u'(x)}{|u(x)|\sqrt{u^2(x) - 1}}$, $|u(x)| > 1$.

4.12 Funções Hiperbólicas

As derivadas das funções hiperbólicas são calculadas diretamente, pois todas elas envolvem exponenciais. Por exemplo, seja $y = \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$; derivando, temos: $y' = \cosh(x)$.

Tabela

Seja $u(x)$ derivável. Usando a regra da cadeia, temos:

[25] Se $y = \sinh(u(x))$, então $y' = \cosh(u(x)) u'(x)$.

[26] Se $y = \cosh(u(x))$, então $y' = \sinh(u(x)) u'(x)$.

[27] Se $y = \tanh(u(x))$, então $y' = \operatorname{sech}^2(u(x)) u'(x)$.

[28] Se $y = \operatorname{cotgh}(u(x))$, então $y' = -\operatorname{cosech}^2(u(x)) u'(x)$.

[29] Se $y = \operatorname{sech}(u(x))$, então $y' = -\tanh(u(x)) \operatorname{sech}(u(x)) u'(x)$.

[30] Se $y = \operatorname{cosech}(u(x))$, então $y' = -\operatorname{cotgh}(u(x)) \operatorname{cosech}(u(x)) u'(x)$.

Exemplo 4.12.

Calcule as derivadas y' , sendo:

[1] $y = e^{tg(x)}$.

Fazendo $u(x) = tg(x)$, temos $y = e^{u(x)}$; usando a tabela: $y' = u'(x) e^{u(x)}$ e:

$$y' = \sec^2(x) e^{tg(x)}.$$

[2] $y = \ln(\ln(x))$.

Fazendo $u(x) = \ln(x)$, temos $y = \ln(u(x))$; logo: $y' = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{x \ln(x)}$.

[3] $y = x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Então $y' = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)'$.

Fazendo $u(x) = \frac{1}{x}$, temos que $\cos\left(\frac{1}{x}\right) = \cos(u(x))$; como $\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, temos:

$$y' = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

[4] $y = \cos(\sin(x))$.

Fazendo $u(x) = \sin(x)$, temos $y = \cos(u(x))$; usando a tabela:

$$y' = -u'(x) \operatorname{sen}(u(x)) = -\cos(x) \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x)).$$

[5] $y = \operatorname{arccotg}(3x^2).$

Fazendo $u(x) = 3x^2$, temos $y = \operatorname{arccotg}(u(x))$; usando a tabela:

$$y' = -\frac{u'(x)}{1+u^2(x)} = -\frac{6x}{1+9x^4}.$$

[6] $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right).$

Fazendo $u(x) = \frac{1}{x}$, temos $y = \operatorname{arctg}(u(x))$; usando a tabela:

$$y' = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

[7] $y = \operatorname{sen}(\ln(x)).$

Fazendo $u(x) = \ln(x)$, temos $y = \operatorname{sen}(u(x))$; usando a tabela:

$$y' = u'(x) \cos(u(x)) = \frac{\cos(\ln(x))}{x}.$$

[8] $y = \ln(\operatorname{sen}^2(x)).$

Fazendo $u(x) = \operatorname{sen}^2(x)$, temos $y = \ln(u(x))$; usando a tabela:

$$y' = \frac{u'(x)}{u(x)} = 2 \cotg(x).$$

[9] $y = \ln\left(\cos\left(\frac{x-1}{x}\right)\right).$

Fazendo $u(x) = \cos\left(\frac{x-1}{x}\right)$, temos $y = \ln(u(x))$; usando a tabela:

$$y' = \frac{u'(x)}{u(x)} = -\frac{1}{x^2} \operatorname{tg}\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

[10] $y = \operatorname{arcsec}(\ln(x)).$

Fazendo $u(x) = \ln(x)$, temos $y = \operatorname{arcsec}(u(x))$; usando a tabela:

$$y' = \begin{cases} \frac{1}{x \ln(x) \sqrt{\ln^2(x) - 1}} & \text{se } x > e \\ -\frac{1}{x \ln(x) \sqrt{\ln^2(x) - 1}} & \text{se } 0 < x < e^{-1}. \end{cases}$$

[11] Calcule a área do triângulo determinado pelos eixos coordenados e pela reta tangente à curva $y = \frac{1}{x}$ no ponto $x = 2$.

A reta tangente à curva $y = f(x) = x^{-1}$ no ponto $x = 2$ é: $y - \frac{1}{2} = f'(2)(x - 2)$. Como $f'(2) = -\frac{1}{4}$, a equação da reta tangente é: $4y + x - 4 = 0$. Se $x = 0$, então $y = 1$; se $y = 0$, então $x = 4$. A altura do triângulo é igual a 1 e a base é igual a 4. Logo, a área do triângulo é: $A = 2 \text{ u.a.}$

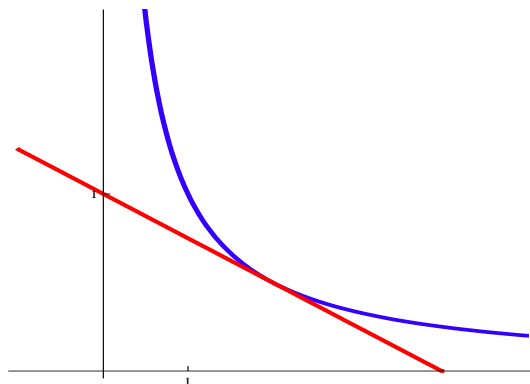


Figura 4.22:

[12] Uma partícula move-se ao longo da curva $y = 1 - 2x^2$. Quando $x = 3$ a partícula escapa pela tangente à curva. Determine a equação da reta de escape.

A equação da reta tangente à curva no ponto de abscissa 3 é $y - f(3) = f'(3)(x - 3)$, onde $f(x) = 1 - 2x^2$; logo, $f'(x) = -4x$ e $f'(3) = -12$; a equação é: $y + 12x - 19 = 0$.

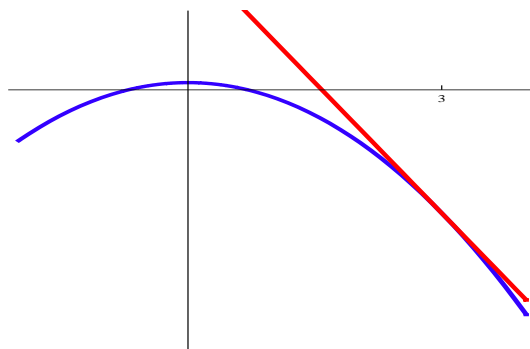


Figura 4.23:

4.13 Derivação Implícita

Seja $F(x, y) = 0$ uma equação nas variáveis x e y .

Definição 4.5. A função $y = f(x)$ é definida implicitamente pela equação $F(x, y) = 0$, quando

$$F(x, f(x)) = 0.$$

Em outras palavras, quando $y = f(x)$ satisfaz à equação $F(x, y) = 0$.

Exemplo 4.13.

[1] Seja a equação $F(x, y) = 0$, onde $F(x, y) = x^3 + y - 1$; a função $y = f(x) = 1 - x^3$ é definida implicitamente pela equação $F(x, y) = 0$, pois:

$$F(x, f(x)) = x^3 + (1 - x^3) - 1 = 0.$$

[2] Seja a equação $F(x, y) = 0$, onde $F(x, y) = y^4 + x - 1$; a função $y = f(x) = \sqrt[4]{1 - x}$ é definida implicitamente pela equação $F(x, y) = 0$, pois:

$$F(x, f(x)) = (\sqrt[4]{1 - x})^4 + x - 1 = 0.$$

[3] Seja a equação $F(x, y) = 0$, onde $F(x, y) = x^2 + y^2 - 25$; esta equação define implicitamente uma família de funções; por exemplo $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, $f(x) = -\sqrt{25 - x^2}$; em geral,

$$y = f_c(x) = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2} & \text{se } -5 \leq x \leq c \\ -\sqrt{25 - x^2} & \text{se } 5 \geq x > c, \end{cases}$$

para cada $c \in (-5, 5)$.

[4] Seja $F(x, y) = 0$, onde $F(x, y) = y^2 - 3y - x - 7$; então, as funções:

$$f(x) = \frac{3 \pm \sqrt{4x + 37}}{2}$$

são definidas implicitamente pela equação $F(x, y) = 0$, pois:

$$F(x, f(x)) = F(x, \frac{3 \pm \sqrt{4x + 37}}{2}) = 0.$$

Observemos que nada garante que uma função definida implicitamente seja contínua, derivável, etc. Na verdade, nem sempre uma equação $F(x, y) = 0$ define implicitamente alguma função. Por exemplo, considere a seguinte equação:

$$x^3 y^6 + x^3 \operatorname{tg}(x y^2) + \ln(x + y) + \operatorname{sen}(x) = 0.$$

4.14 Cálculo da Derivada de uma Função Implícita

Podemos calcular a derivada de uma função definida implicitamente sem necessidade de explicitá-la.

Para isto usaremos novamente a regra da cadeia. Suponha que $F(x, y) = 0$ define implicitamente uma função derivável $y = f(x)$. Através de exemplos mostraremos que podemos calcular y' sem conhecer y .

Exemplo 4.14.

[1] Seja $y = f(x)$ uma função derivável definida implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = 1$. Calcule y' .

Como $y = f(x)$, temos $x^2 + (f(x))^2 = 1$. Derivando em relação a x ambos os lados da igualdade e usando a regra da cadeia, obtemos:

$$(x^2)' + ((f(x))^2)' = (1)' \implies 2x + 2f(x)f'(x) = 0 \implies x + f(x)f'(x) = 0.$$

Então, $f'(x) = -\frac{x}{f(x)} = -\frac{x}{y}$. Logo,

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

[2] Verifique que a função $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ é definida implicitamente por $x^2 + y^2 = 1$ e calcule f' .

É imediato que a função $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ é definida implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = 1$ e:

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

4.14.1 Método de Cálculo da Função Implícita

Dada uma equação que define y implicitamente como uma função derivável de x , calcula-se y' do seguinte modo:

1. Deriva-se ambos os lados da equação em relação a x , termo a termo. Ao fazê-lo, tenha em mente que y é uma função de x e use a regra da cadeia, quando necessário, para derivar as expressões nas quais figure y .
2. O resultado será uma equação onde figura não somente x e y , mas também y' . Expresse y' em função de x e y .
3. Tal processo é chamado explicitar y' .

Exemplo 4.15.

Calcule y' se $y = f(x)$ é uma função derivável, definida implicitamente pelas equações dadas:

$$[1] \quad x^3 - 3x^2y^4 + y^3 = 6x + 1.$$

Note que $x^3 - 3x^2y^4 + y^3 = 6x + 1$ é igual a $x^3 - 3x^2(f(x))^4 + (f(x))^3 = 6x + 1$.

Derivando ambos os lados da equação, obtemos: $(x^3)' - (3x^2(f(x))^4)' + ((f(x))^3)' = (6x + 1)'$; então,

$$3x^2 - 6x(f(x))^4 - 12x^2f'(x)(f(x))^3 + 3f'(x)(f(x))^2 = 6.$$

Logo, $3x^2 - 6xy^4 - 12x^2y'y^3 + 3y'y^2 = 6$. Expressando y' em função de x e y :

$$y' = \frac{2 - x^2 + 2xy^4}{y^2(1 - 4x^2y)}.$$

$$[2] \quad x^2 + xy + x\sin(y) = y\sin(x).$$

Derivando ambos os lados $2x + y + xy' + \sin(y) + x\cos(y)y' = y'\sin(x) + y\cos(x)$. Expressando y' em função de x e y :

$$y' = \frac{y\cos(x) - 2x - y - \sin(y)}{x + x\cos(y) - \sin(x)}.$$

$$[3] \quad \sin(x + y) = y^2\cos(x).$$

Derivando ambos os lados $(1 + y')\cos(x + y) = 2yy'\cos(x) - y^2\sin(x)$. Expressando y' em função de x e y :

$$y' = \frac{y^2\sin(x) + \cos(x + y)}{2y\cos(x) - \cos(x + y)}.$$

O processo de derivar implicitamente pode ser usado somente se a função determinada pela forma implícita é derivável. Mas, para os exemplos e exercícios, sempre consideraremos esta exigência satisfeita.

[4] Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função implícita definida por:

$$y^2 = x^2(x + 2),$$

no ponto $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}})$.

Derivando a equação implicitamente:

$$2yy' = x(3x + 4).$$

Expressando y' em função de x e y :

$$y' = \frac{3x^2 + 4x}{2y};$$

lembrando que $x = -\frac{1}{2}$, $y' = f'(x)$ e $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = f(-\frac{1}{2}) = y$, temos que:

$$f'(-\frac{1}{2}) = -\frac{5}{2\sqrt{6}}$$

é o coeficiente angular da reta tangente no ponto $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}})$ e a equação desta reta é

$$4\sqrt{6}y + 10x - 1 = 0.$$

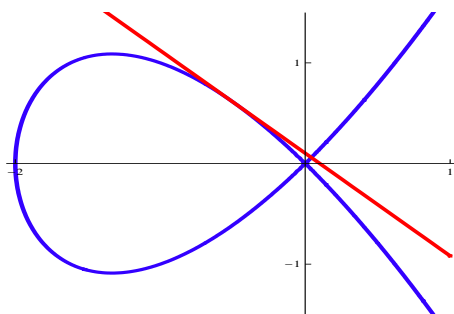


Figura 4.24:

[5] Determine a equação da reta tangente e a equação da reta normal ao gráfico da função implícita definida por: $(x^2 + y^2)(y^2 + x(x + 1)) = 4xy^2$ no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Derivando a equação implicitamente

$$2y'y(2y^2 + 2x^2 - 3x) = -(4xy^2 + 4x^3 + 3x^2 - 3y^2).$$

Lembrando que $x = \frac{1}{2}$, $y' = f'(x)$ e $y = \frac{1}{2}$, temos que $f'(\frac{1}{2}) = 2$ é o coeficiente angular da reta tangente no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e a equação desta reta é $2y - 4x + 1 = 0$. A equação da reta normal é $4y + 2x - 3 = 0$.

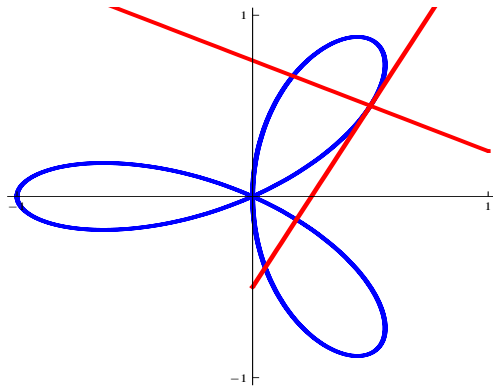


Figura 4.25:

[6] Determine a equação da reta tangente e a equação da reta normal ao gráfico da função implícita definida por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

em qualquer ponto; (a e b constantes não nulas).

Derivando a equação implicitamente:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0.$$

Expressando y' em função de x e y :

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y};$$

lembrando que $x = x_0$, $y' = f'(x)$ e $y_0 = f(x_0)$, se $y_0 \neq 0$, temos:

$$f'(x_0) = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0},$$

que é o coeficiente angular da reta tangente no ponto (x_0, y_0) e a equação desta reta é:

$$y - y_0 = -\left[\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}\right] (x - x_0). \text{ Ou, equivalentemente,}$$

$$\left[\frac{y_0}{b^2}\right] y + \left[\frac{x_0}{a^2}\right] x = 1$$

A equação da reta normal é:

$$y - y_0 = \left[\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}\right] (x - x_0)$$

se $x_0 \neq 0$.

Estas são as equações da reta tangente e da reta normal num ponto qualquer (x_0, y_0) da elipse. Em particular se $a = b = r$, temos todas as retas tangentes e normais num ponto qualquer (x_0, y_0) de um círculo de raio r .

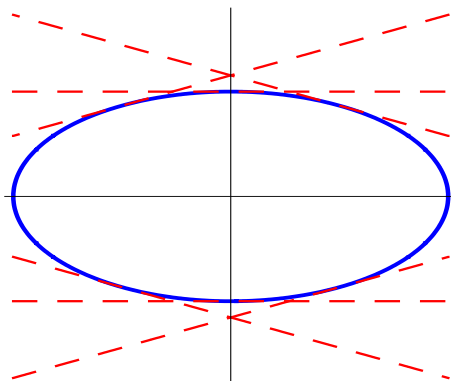


Figura 4.26: A elipse e suas tangentes.

[7] Determine a equação da reta tangente e a equação da reta normal ao gráfico da função implícita definida por:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

em qualquer ponto; (a e b são constantes não nulas).

Derivando a equação implicitamente:

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2yy'}{b^2} = 0.$$

Explicitando y' :

$$y' = \frac{b^2 x}{a^2 y};$$

e lembrando que $x = x_0$, $y' = f'(x)$ e $y_0 = f(x_0)$, se $y_0 \neq 0$, temos:

$$f'(x_0) = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0},$$

que é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto (x_0, y_0) e a equação desta reta é:

$$\left[\frac{y_0}{b^2} \right] y - \left[\frac{x_0}{a^2} \right] x = -1$$

A equação da reta normal é:

$$y - y_0 = - \left[\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0} \right] (x - x_0)$$

se $x_0 \neq 0$. Estas são as equações da reta tangente e da reta normal a uma hipérbole num ponto (x_0, y_0) arbitrário.

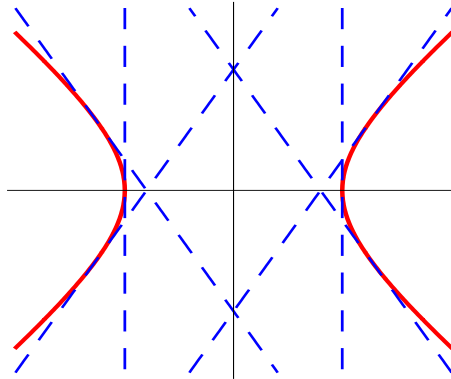


Figura 4.27: A hipérbole e suas tangentes.

[8] Ache a equação da reta tangente ao gráfico das funções implícitas definidas por:

i) $x^3 + y^3 = 6xy$, no ponto $(3, 3)$. (**Folium de Descartes**).

ii) $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$, no ponto $(3, 1)$. (**Lemniscata de Bernoulli**).

i) **Folium de Descartes**: Derivando a equação implicitamente:

$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}.$$

No ponto $(3, 3)$, $y' = -1$ e a equação da reta tangente é:

$$x + y = 6.$$

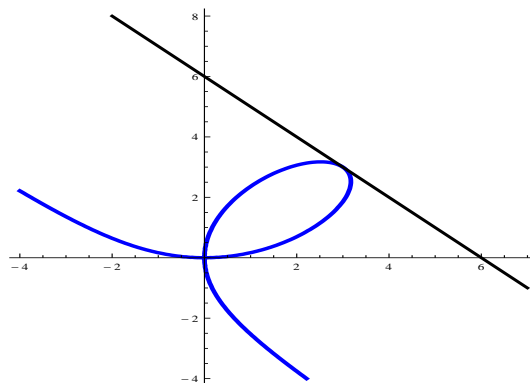


Figura 4.28: Folium de Descartes.

ii) **Lemniscata de Bernoulli:** Derivando a equação implicitamente:

$$y' = -\frac{x(-25 + 4x^2 + 4y^2)}{y(25 + 4x^2 + 4y^2)}.$$

No ponto $(3, 1)$:

$$y' = -\frac{9}{13}$$

e a equação da reta tangente é

$$13y + 9x - 40 = 0.$$

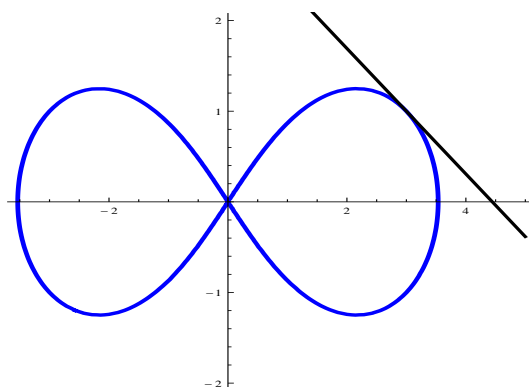


Figura 4.29: Lemniscata de Bernoulli.

4.15 Famílias de Curvas Ortogonais

As famílias de curvas ortogonais são muito utilizadas em diferentes áreas. Na Física, por exemplo, as linhas de força de um campo eletrostático são ortogonais às linhas de potencial constante e as curvas isotérmicas (de igual temperatura) são ortogonais ao fluxo do calor.

Definição 4.6. Duas curvas são ditas ortogonais num ponto de interseção se suas retas tangentes nesse ponto são perpendiculares. Uma família de curvas é ortogonal a outra família de curvas se cada curva de uma família é ortogonal a todas as curvas da outra família.

Exemplo 4.16.

[1] A família de parábolas $y^2 = 4ax$ é ortogonal à família de elipses $2x^2 + y^2 = b^2$.

Derivamos as equações implicitamente e comparamos os coeficientes angulares. Sejam m_1 os coeficientes angulares correspondentes à família de parábolas e m_2 os coeficientes angulares correspondentes à família de elipses. Logo,

$$m_1 = \frac{2a}{y} = \frac{y}{2x} \quad \text{e} \quad m_2 = -\frac{2x}{y}$$

e $m_1 \cdot m_2 = -1$.

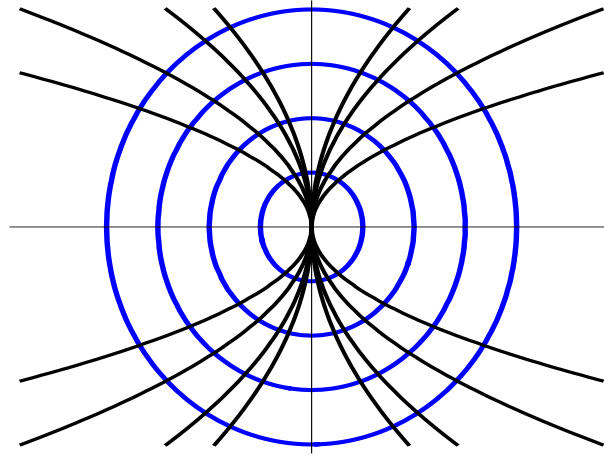


Figura 4.30:

[2] A família de círculos $x^2 + y^2 = ax$ é ortogonal à família de círculos $x^2 + y^2 = by$.

Derivamos as equações implicitamente e comparamos os coeficientes angulares. Sejam m_1 os coeficientes angulares correspondentes à família $x^2 + y^2 = ax$ e m_2 os coeficientes angulares correspondentes à família $x^2 + y^2 = by$. Logo,

$$m_1 = \frac{a - 2x}{2y} = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \quad \text{e} \quad m_2 = \frac{2x}{b - 2y} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

e $m_1 \cdot m_2 = -1$.

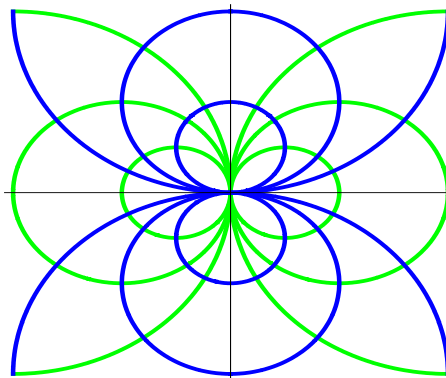


Figura 4.31:

4.16 Derivadas de Ordem Superior

Definição 4.7. Seja f uma função derivável.

1. Se a derivada f' é uma função derivável, então sua derivada é chamada derivada segunda de f e é denotada por:

$$(f')' = f''.$$

2. Se f'' é uma função derivável, então sua derivada é chamada derivada terceira de f e é denotada por:

$$(f'')' = f'''.$$

3. Em geral, se a derivada de ordem $(n - 1)$ de f é uma função derivável, sua derivada é chamada derivada n -ésima de f e é denotada por:

$$(f^{(n-1)})' = f^{(n)}.$$

Notações: $f^{(0)} = f$, $f' = f^{(1)}$, $f'' = f^{(2)}$, $f''' = f^{(3)}$, etc.

Exemplo 4.17.

[1] Sendo $f(x) = x^4 + 2x^3 + x - 1$, calcule $f^{(n)}$.

n	1	2	3	4	5	6	7
$f^{(n)}(x)$	$4x^3 + 6x^2 + 1$	$12x^2 + 12x$	$24x + 12$	24	-0	0	0

Logo, $f^{(n)}(x) = 0$, se $n \geq 5$.

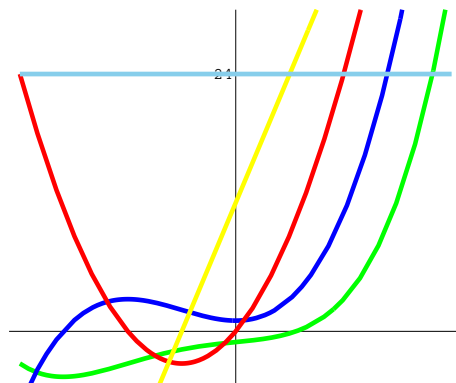


Figura 4.32: Gráficos de $y = f(x)$ (verde) e suas derivadas.

Em geral, se f é uma função polinomial de grau n , então, $f^{(n)}(x) = n! a_n$ e $f^{(p)}(x) = 0$ para $p > n$.

[2] Sendo $f(x) = \frac{1}{x}$, calcule $f^{(n)}$.

n	1	2	3	4	5	6
$f^{(n)}(x)$	$-x^{-2}$	$2x^{-3}$	$-6x^{-4}$	$24x^{-5}$	$-120x^{-6}$	$720x^{-7}$

Logo:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

[3] Sendo $f(x) = \sqrt{e^x}$, calcule $f^{(n)}$.

n	1	2	3	4	5	6	7
$f^{(n)}(x)$	$\frac{\sqrt{e^x}}{2}$	$\frac{\sqrt{e^x}}{4}$	$\frac{\sqrt{e^x}}{8}$	$\frac{\sqrt{e^x}}{16}$	$\frac{\sqrt{e^x}}{32}$	$\frac{\sqrt{e^x}}{64}$	$\frac{\sqrt{e^x}}{128}$

Logo:

$$f^{(n)}(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2^n}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

[4] Sendo $f(x) = \text{sen}(x)$, calcule $f^{(n)}$.

$$f'(x) = \cos(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(4)}(x) = \text{sen}(x) = \text{sen}\left(x + \frac{4\pi}{2}\right)$$

$$f^{(2)}(x) = -\text{sen}(x) = \text{sen}\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$$

$$f^{(5)}(x) = \cos(x) = \text{sen}\left(x + \frac{5\pi}{2}\right)$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos(x) = \text{sen}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$f^{(6)}(x) = -\text{sen}(x) = \text{sen}\left(x + \frac{6\pi}{2}\right).$$

Logo:

$$f^{(n)}(x) = \text{sen}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

[5] Seja $y = a + x + bx^2 + cx^2 \ln(x)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Verifique que $x^3 y^{(3)} - x^2 y'' + x y' = x$.

Derivando: $y' = cx + 2cx \ln(x) + 2bx + 1$, $y'' = 2b + 3c + 2c \ln(x)$ e $y^{(3)} = \frac{2c}{x}$; então:

$$x^3 \frac{2c}{x} - x^2 (2b + 3c + 2c \ln(x)) + x (cx + 2cx \ln(x) + 2bx + 1) = x.$$

[6] Se $y = e^x (Ax + B)$ satisfaz à equação $3y^{(3)} - 6y'' - 2y' + 4y = xe^x$, determine o valor das constantes A e B .

Calculando as derivadas:

$$y' = e^x (Ax + A + B), \quad y'' = e^x (Ax + 2A + B) \quad \text{e} \quad y^{(3)} = e^x (Ax + 3A + B);$$

logo a equação fica: $-e^x (Ax + 5A + B) = xe^x$ da qual obtemos $A = -1$ e $B = 5$.

[7] Calcule $f^{(3)}(9)$, se $f(x) = xg(\sqrt{x})$, $g'(3) = 6$, $g''(3) = 1$ e $g^{(3)}(3) = 2$.

$$f'(x) = g(\sqrt{x}) + \frac{\sqrt{x}}{2} g'(\sqrt{x}), \quad f''(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}} (3g'(\sqrt{x}) + \sqrt{x}g''(\sqrt{x}))$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{1}{8\sqrt{x^3}} (-3g'(\sqrt{x}) + 3\sqrt{x}g''(\sqrt{x}) + xg^{(3)}(\sqrt{x}));$$

$$\text{logo, } f^{(3)}(9) = \frac{1}{24}.$$

Observação 4.4.

Em geral, nada garante que quando calculamos sucessivamente as derivadas de uma função, estas sejam funções deriváveis.

[7] Seja $f(x) = x^2|x|$. Então,

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -3x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Logo $f'(x) = 3x|x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$; analogamente temos que $f''(x) = 6|x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$; mas f'' não é derivável no ponto $x_0 = 0$. Verifique.

Definição 4.8. A função $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita de **de classe C^k** ($0 \leq k \leq +\infty$) em A , se f possui as derivadas até a ordem k e $f^{(k)}$ é contínua em A .

Como $f^{(0)} = f$, se f é de classe C^0 , então f é contínua.

Exemplo 4.18.

[1] As funções polinomiais são de classe C^∞ em \mathbb{R} .

[2] As funções exponenciais são de classe C^∞ em \mathbb{R} .

[3] As função logarítmicas são de classe C^∞ em $(0, +\infty)$.

[4] A função $f(x) = x^2|x|$ do exemplo [7] é de classe C^1 em \mathbb{R} e não é de classe C^2 .

4.17 Aproximação Linear

É intuitivo pensar que uma função derivável restrita a um pequeno intervalo contido em seu domínio "comporta-se" como uma função polinomial do primeiro grau.

Por exemplo, consideremos $y = f(x) = x^2$. Estudando f num pequeno intervalo contendo $x = 1$, por exemplo $I = [0.99, 1.01]$, obtemos:

x	$f(x)$
0.99	0.9801
0.999	0.998001
1	1
1.001	1.0002001
1.01	1.0201

A reta tangente ao gráfico de f no ponto $x = 1$ é dada por $y = 2x - 1$; seu coeficiente angular é 2. Determinemos os coeficientes angulares das retas passando pelos pontos $(0.999, f(0.999))$, $(1, f(1))$ e $(1.001, f(1.001))$, $(1, f(1))$, respectivamente:

$$m_1 = \frac{f(1) - f(0.999)}{1 - 0.999} = 1.9990 \quad \text{e} \quad m_2 = \frac{f(1.001) - f(1)}{1.001 - 1} = 2.0010.$$

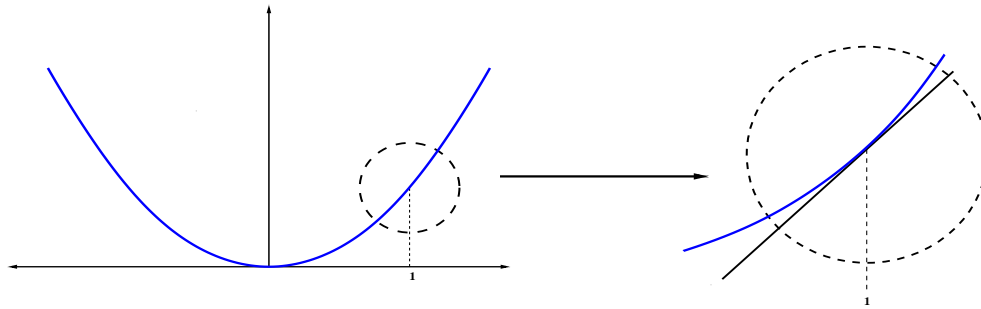


Figura 4.33:

m_1 e m_2 são valores bastante próximos de 2. Observe que se $|x - 1| \rightarrow 0$ (x perto de 1), então $f(x) = x^2$ fica próxima de $y = 2x - 1$. De fato:

$$\lim_{x \rightarrow 1} |f(x) - y| = \lim_{x \rightarrow 1} |x^2 - 2x + 1| = 0.$$

Isto nos leva a estabelecer a seguinte definição:

Definição 4.9. Seja $y = f(x)$ uma função derivável em x_0 . A aproximação linear de f em torno de x_0 é denotada por $l(x)$ e definida por:

$$l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

se $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ pequeno.

A função $l(x)$ também é chamada linearização de f ao redor do ponto x_0 . A proximidade de $f(x)$ e $l(x)$ nos permitirá fazer algumas aplicações. A notação para $f(x)$ próxima a $l(x)$ é $f(x) \simeq l(x)$.

O erro da aproximação é $E(x) = f(x) - l(x)$ e satisfaz à seguinte condição:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{E(x)}{x - x_0} \right| = \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| = 0.$$

Exemplo 4.19.

Suponha que não dispomos de calculadora ou de outro instrumento de cálculo e precisamos resolver os seguintes problemas:

[1] Se $f(x) = \frac{1}{(1+2x)^4}$ representa a temperatura num arame, calcule a temperatura $f(0.01)$.

[2] Se $f(t) = e^{0.3t}$ representa o crescimento de uma população de bactérias, calcule a população de bactérias para $t = 20.012$.

[3] Calcule, aproximadamente $(1.001)^7 - 2\sqrt[3]{(1.001)^4} + 3$.

Soluções:

[1] Vamos determinar $l(x) = f(0) + f'(0)x$. Derivando: $f'(x) = -\frac{8}{(1+2x)^5}$; então:

$$\frac{1}{(1+2x)^4} \simeq l(x) = 1 - 8x, \quad \text{no intervalo } (-\varepsilon, \varepsilon),$$

tal que $\varepsilon > 0$ (pequeno). Como $0.01 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, temos, $f(0.01) \simeq l(0.01) = 0.92$ graus.

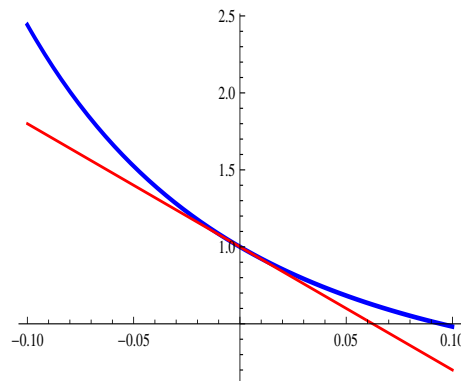


Figura 4.34: Exemplo [1].

[2] Vamos determinar $l(x) = f(20) + f'(20)(x - 20)$, com $f(20) \simeq 403.42$. Derivando, obtemos: $f'(t) = 0.3 e^{0.3t}$; então:

$e^{0.3t} \simeq 403.42 + 121.02(t - 20)$, no intervalo $(20 - \varepsilon, 20 + \varepsilon)$,
tal que $\varepsilon > 0$ (pequeno). Como $20.012 \in (20 - \varepsilon, 20 + \varepsilon)$, se $t = 20.012$, então,

$$e^{0.3 \times 20.012} \simeq 403.42 + 121.02 \times 0.012 = 404.87.$$

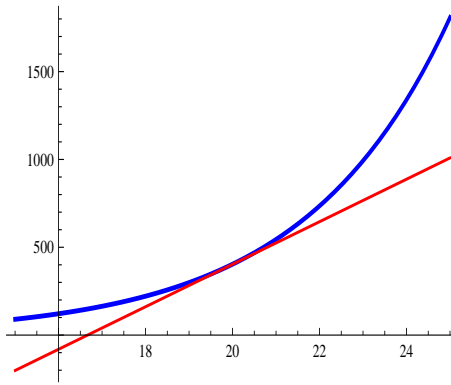


Figura 4.35: Exemplo [2].

[3] Considere a função $f(x) = x^7 - 2\sqrt[3]{x^4} + 3$ e $x = 1.001$. Então, para $x_0 = 1$, temos $f(1) = 2$, $f'(x) = 7x^6 - \frac{8}{3}\sqrt[3]{x}$ e $f'(1) = \frac{13}{3}$; logo,

$$l(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = \frac{1}{3}(13x - 7),$$

para todo x próximo de 1. Em particular, para $x = 1.001$,

$$(1.001)^7 - 2\sqrt[3]{(1.001)^4} + 3 \simeq \frac{1}{3}(13 \times (1.001) - 7) \simeq 2.00433.$$

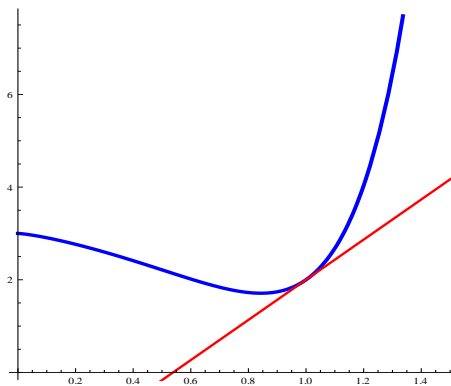


Figura 4.36: Exemplo [3].

[4] Considere a função logística $L(t) = \frac{A}{1 + B e^{-Ct}}$. Determinemos sua aproximação linear, no ponto t_0 :

Derivando: $L'(t) = \frac{A B C e^{-Ct}}{(1 + B e^{-Ct})^2}$; logo,

$$l(t) = \rho(t_0) (B + e^{Ct_0} + B C (t - t_0)),$$

onde, $\rho(t_0) = \frac{A e^{Ct_0}}{(B + e^{Ct_0})^2}$.

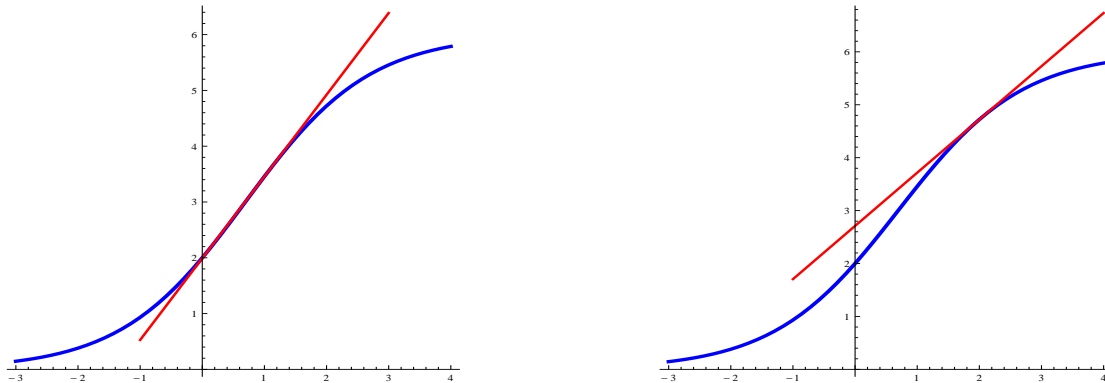


Figura 4.37: Desenhos para $t_0 = 1$ e $t_0 = 2$, respectivamente.

[5] Calcule o valor aproximado do volume de uma esfera, construída de uma folha de aço de 0.05 cm de espessura sendo seu raio interno igual a 2 cm .

O volume de uma esfera é $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Seja $r_0 = 2$; então, a linearização do volume é:

$$V(r) \simeq \frac{16}{3} \times (3r - 4) \pi.$$

Logo, $V(2.05) \simeq 11.46 \pi \text{ cm}^3$. O verdadeiro volume da esfera é $V = 11.48 \pi \text{ cm}^3$. Note que o erro cometido é: $E(2.05) = V - l(2.05) = 0.06335543 \text{ cm}^3$.

4.18 Aproximação de Ordem Superior

De forma análoga a aproximação linear podemos definir aproximação quadrática, aproximação cúbica, etc. É possível verificar que o erro destas aproximações é cada vez menor ao redor de um pequeno intervalo.

Definição 4.10. Seja $f \in C^3$. A aproximação quadrática e a aproximação cúbica de f em torno de x_0 são denotadas e definidas por:

$$q(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

$$c(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3.$$

se $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ pequeno.

Exemplo 4.20.

[1] A proporção de lâmpadas de sódio que falham após t horas de uso é dada por:

$$P(t) = 1 - \frac{10000}{(t + 100)^2}.$$

Determine a proporção de lâmpadas que falham após 99 horas de uso.

Vimos que a aproximação linear de $P = P(t)$ ao redor de 100 é

$$l(t) = \frac{1}{400}(t + 200).$$

Determinemos a outras aproximações, ao redor de 100. Calculemos :

$$P''(t) = -\frac{60000}{(t + 100)^4} \quad \text{e} \quad P^{(3)}(t) = \frac{240000}{(t + 100)^5},$$

logo:

$$q(t) = \frac{5}{16} + \frac{t}{160} - \frac{3t^2}{160000}$$

$$c(t) = \frac{3}{16} + \frac{t}{100} - \frac{9t^2}{160000} + \frac{t^3}{8000000}.$$

Logo, $q(99) = 0.74748125$ e $c(99) = 0.7474811250$.

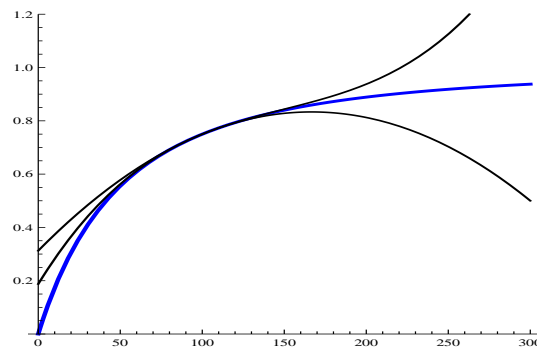


Figura 4.38: Gráficos de $P(t)$ (azul), $q(t)$ e $c(t)$.

[2] Calcule, aproximadamente $(1.1)^2 \times \sqrt{10 - 1.1^2}$.

Considere a função $f(x) = x^2 \sqrt{10 - x^2}$ e $x = 1.1$. Então, para $x_0 = 1$, temos $f(1) = 3$, logo:

$$q(x) = -\frac{14}{27} + \frac{37x}{27} + \frac{58x^2}{27}$$

$$c(x) = \frac{50}{243} - \frac{65x}{81} + \frac{350x^2}{81} - \frac{176x^3}{243}.$$

e $q(1.1) = 3.58815$ e $c(1.1) = 3.5838$.

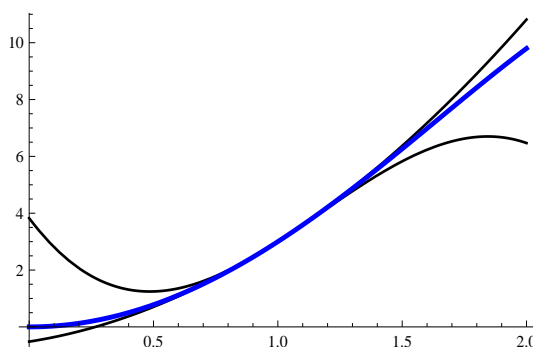


Figura 4.39: Gráficos de $f(x)$ (azul), $q(x)$ e $c(x)$.

Para outras aproximações, veja o último exercício do capítulo.

4.19 Velocidade e Aceleração

Da Física elementar sabemos que a velocidade percorrida por um móvel em linha reta é dada pelo quociente da distância percorrida pelo tempo transcorrido. Usaremos a definição de derivada para determinar a velocidade instantânea de um móvel que se move ao longo de qualquer trajetória derivável.

Suponha que uma partícula move-se ao longo do gráfico da função $u = u(t)$. Se $[a, b]$ é um pequeno intervalo contido no domínio de u , a velocidade média da partícula no intervalo $[a, b]$ é:

$$v_{ab} = \frac{\text{distância}}{\text{tempo}} = \frac{u(b) - u(a)}{b - a}.$$

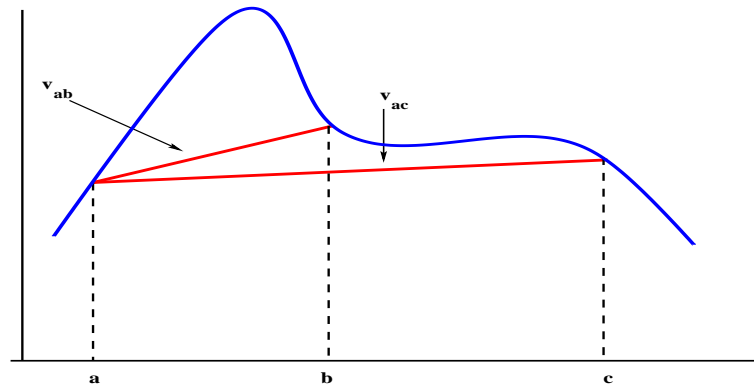


Figura 4.40:

v_{ab} é o coeficiente angular da reta passando por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. v_{ab} não dá informação sobre a velocidade da partícula no tempo $t = t_0$. Se estamos interessados na velocidade instantânea em $t = t_0$, consideremos o intervalo $[t_0, t_0 + h]$, $h > 0$; então:

$$v_h = \frac{u(t_0 + h) - u(t_0)}{h}.$$

Analogamente para $h < 0$.

Definição 4.11. A velocidade instantânea de uma partícula que se move ao longo do gráfico da função derivável $u = u(t)$ em $t = t_0$, é:

$$v(t_0) = u'(t)|_{t=t_0}$$

De forma análoga definimos a aceleração média: $a_{ab} = \frac{v(b) - v(a)}{b - a}$.

Definição 4.12. A aceleração instantânea de uma partícula que se move ao longo do gráfico da função duas vezes derivável $u = u(t)$ em $t = t_0$, é:

$$a(t_0) = v'(t)|_{t=t_0} = u''(t)|_{t=t_0}$$

O movimento harmônico simples $s = s(t)$ é caracterizado por $a(t) = -k s(t)$ ($k > 0$) e o movimento harmônico amortecido por $a(t) = k v(t) + p s(t)$ ($k, p \in \mathbb{R}$).

Exemplo 4.21.

[1] Uma partícula move-se ao longo da curva $u(t) = t^3 - 5t^2 + 7t - 3$. Calcule a aceleração no instante em que a velocidade é zero.

Se $u(t) = t^3 - 5t^2 + 7t - 3$, então $v(t) = 3t^2 - 10t + 7$; se $v(t) = 0$ temos que $t = \frac{7}{3}$ ou $t = 1$. A aceleração no instante t é $a(t) = 6t - 10$; logo $a(\frac{7}{3}) = 4$ ou $a(1) = -4$.

[2] Uma sonda é lançada para cima verticalmente, sendo a distância acima do solo no instante t dada por $s(t) = t(1000 - t)$.

i) Determine em que instante e com que velocidade a sonda atinge o solo.

ii) Qual é a altura máxima que a sonda atinge?

i) A sonda atinge o solo quando $s(t) = t(1000 - t) = 0$ ou seja quando $t = 0$ ou $t = 1000$; a sonda atinge o solo após 1000 seg e a velocidade é $v(t) = s'(t) = 1000 - 2t$ e $v(1000) = -1000$ m/seg. O sinal negativo é porque a sonda está caindo.

ii) Se $v(t) = 0$, então $t = 500$ e $s(500) = 250000$ m.

[3] Um ponto move-se ao longo do gráfico de $y = x^2 + 1$ de tal modo que sua abscissa x varia com uma velocidade constante de 3 cm/seg. Qual é a velocidade da ordenada y quando $x = 4$ cm?

Sejam $x = x(t)$ e $y = y(t)$ a abscissa e a ordenada no instante t , respectivamente. Seja t_0 o instante tal que $x(t_0) = 4$. Queremos calcular a velocidade de y no instante t_0 ; em outras palavras, queremos calcular $\frac{dy}{dt}$ para $t = t_0$. Usando a regra da cadeia:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}.$$

O ponto tem velocidade constante igual a 3; logo, $\frac{dx}{dt} = 3$ e $\frac{dy}{dt} = 6x$. Para $x(t_0) = 4$ temos que $\frac{dy}{dt} = 24$ cm/seg.

[4] Um homem de 1.80 m de altura afasta-se de um farol situado a 4.5 m do solo, com uma velocidade de 1.5 m/seg. Quando ele estiver a 6 m do farol, com que velocidade sua sombra estará crescendo neste ponto e qual o comprimento da sombra?

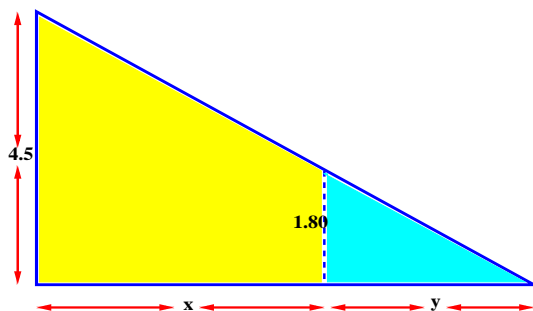


Figura 4.41:

Seja y o comprimento da sombra e x a distância entre o homem e o ponto do solo acima do qual está o farol. Pela semelhança de triângulos: $\frac{4.5}{x+y} = \frac{1.8}{y}$; logo, $y = \frac{1.8x}{2.7}$; então:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

Como $\frac{dx}{dt} = 1.5$, temos: $\frac{dy}{dt} = 1 \text{ m/seg}$ e o comprimento da sombra é $y = 4 \text{ m}$.

4.20 A Derivada como Taxa de Variação

A velocidade de uma partícula que se move ao longo do gráfico da função derivável $u = u(t)$ no tempo t é $v(t) = u'(t)$ e representa a razão do deslocamento por unidade de variação de tempo. $u'(t)$ expressa a taxa de variação de $u(t)$ por unidade de tempo:

$$u'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}.$$

Se $y = f(x)$ é função derivável, então $f'(x)$ é a taxa de variação de y em relação a x .

A interpretação da derivada como taxa de variação se aplica em diversas áreas da ciência.

Por exemplo, se $y = f(t)$ mede a concentração de glóbulos vermelhos no sangue no instante t ,

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

mede a taxa de variação média da concentração de glóbulos vermelhos durante o intervalo de tempo $[t, t+h]$ e $f'(a)$ mede a taxa de variação instantânea de glóbulos vermelhos no instante $t = a$.

Exemplo 4.22.

[1] Uma partícula move-se ao longo do gráfico de $y = x^3 + 1$, de modo que quando $x = 6$ a abscissa cresce a uma velocidade de 2 cm/seg . Qual é a velocidade de crescimento da ordenada nesse instante?

Seja $x = x(t)$ a abscissa no instante t e $y = x^3 + 1$; devemos calcular:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

Temos: $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ e $\frac{dx}{dt} = 2$; logo, $\frac{dy}{dt} \Big|_{x=6} = 6x^2 \Big|_{x=6} = 216$. A ordenada cresce a uma razão de 216 cm/seg

[2] Um ponto move-se ao longo da elipse de equação $x^2 + 2y^2 = 6$. Determine os pontos da elipse que satisfazem à equação $\frac{dx}{dt} = -\frac{dy}{dt}$.

Se $x = x(t)$ e $y = y(t)$ são a abscissa e a ordenada do ponto no instante t , derivando implicitamente a equação da elipse: $2x \frac{dx}{dt} + 4y \frac{dy}{dt} = 0$ e usando a condição dada:

$$2x \frac{dx}{dt} + 4y \frac{dy}{dt} = 2(x - 2y) \frac{dx}{dt} = 0;$$

logo, $x = 2y$. Da equação da elipse obtemos: $y = \pm 1$ e os pontos são: $(2, 1)$ e $(-2, -1)$.

[3] O tronco de uma árvore tem formato cilíndrico cujo diâmetro cresce à razão de $\frac{1}{4} \text{ cm/ano}$ e sua altura cresce à razão de 1 m/ano (m =metros). Determine a taxa de variação do volume do tronco quando o diâmetro é 3 cm e sua altura é 50 m .

Seja $r = r(t)$ o raio no instante t e $h = h(t)$ a altura no instante t . O volume é $V(t) = \pi r^2 h$; devemos calcular $\frac{dV}{dt}$; derivando implicitamente:

$$\frac{dV}{dt} = \pi \left(2r h \frac{dr}{dt} + r^2 \frac{dh}{dt} \right);$$

o raio é a metade do diâmetro: $r = \frac{3}{2}$, $h = 5000$; logo, $2 \frac{dr}{dt} = \frac{1}{4}$ e $\frac{dh}{dt} = 100$; então:

$$\frac{dV}{dt} = 2100 \pi \text{ cm}^3/\text{ano}.$$

[4] Uma partícula move-se ao longo da curva de equação $y = \sqrt{x}$. Quando a partícula passa pelo ponto $(4, 2)$, sua abscissa cresce à razão de 3 cm/seg . Com que velocidade está variando a distância da partícula à origem nesse instante?

Sejam $x = x(t)$ e $y = y(t)$ a ordenada e a abscissa no instante t e $p^2 = x^2 + y^2$ o quadrado da distância da origem ao ponto (x, y) . Derivando implicitamente ambos os lados:

$$2p \frac{dp}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt};$$

logo, $\frac{dp}{dt} = \frac{1}{p} \left(x + \frac{1}{2} \right) \frac{dx}{dt}$, pois $y = \sqrt{x}$. Logo $\frac{dp}{dt} \Big|_{(4,2)} = \frac{27\sqrt{5}}{20} \text{ cm/seg}$.

[5] Um reservatório de água está sendo esvaziado. A quantidade de água no reservatório, em litros, t horas após o escoamento ter começado é dada por $V(t) = 50(80 - t)^2$. Calcule:

i) A taxa de variação do volume da água, após 8 horas de escoamento.

ii) A quantidade de água que sai do reservatório, nas primeiras 5 horas de escoamento.

i) A taxa de variação é $\frac{dV}{dt} = -100(80 - t)$; calculando em $t = 8$, temos que:

$\frac{dV}{dt} = -7200 \text{ l/h}$. O sinal negativo é porque o volume da água está diminuindo com o tempo, já que o reservatório está sendo esvaziado.

ii) $V(0) - V(5) = 38750$ litros.

[6] De um funil cônico a água escoa a uma velocidade de $3 \text{ dm}^3/\text{seg}$. Se o raio da base do funil é de 12 dm e a altura é de 24 dm , calcule a velocidade com a qual o nível de água está descendo, quando o nível estiver a 6 dm do topo.

Sejam r o raio do círculo que forma o nível da água e h a altura no tempo t , respectivamente. $r = r(t)$, $h = h(t)$ e $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$ é o volume do cone de raio r e altura h .

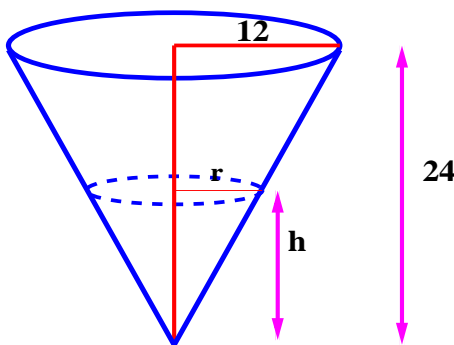


Figura 4.42:

Pela semelhança de triângulos, temos: $\frac{r}{12} = \frac{h}{24}$; então $2r = h$ e $V = \frac{1}{12}\pi h^3$.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \frac{dh}{dt} = \frac{1}{4}\pi h^2 \frac{dh}{dt}.$$

Mas, $\frac{dV}{dt} = -3$, pois o volume está diminuindo e $h = 24 - 6 = 18$; resolvendo a equação $\frac{dV}{dt} = -3$, obtemos: $\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{27\pi} \text{ dm/seg}$.

[7] Dois lados paralelos de um retângulo aumentam a uma velocidade de 4 cm/seg , enquanto os outros dois lados diminuem, de tal modo que o retângulo resultante permanece com área constante de 100 cm^2 . Qual é a velocidade com que o perímetro diminui quando o comprimento do lado que aumenta é de 20 cm ? Quais são as dimensões do retângulo, quando o perímetro deixar de diminuir?

i) Seja x o lado que aumenta e y o lado que diminui no tempo t ; logo $x = x(t)$ e $y = y(t)$; o perímetro é $P = 2(x + y)$ e a área é $A = xy = 100$. Derivando estas expressões em t , temos:

$$\frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right) \quad \text{e} \quad x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = 0.$$

Se $x = 20$, então $y = 5$; como $\frac{dx}{dt} = 4$, da última equação, temos que $\frac{dy}{dt} = -\frac{y}{x} \frac{dx}{dt} = -1$; logo: $\frac{dP}{dt} = 6 \text{ cm/seg}$.

ii) O perímetro deixa de diminuir quando $\frac{dP}{dt} = 0$, o que é equivalente a $\frac{dx}{dt} = -\frac{dy}{dt}$; mas $\frac{dx}{dt} = 4$; então, $4x(t) - 4y(t) = 0$; logo, $x(t) = y(t)$; e o retângulo é um quadrado de área $100 = x^2$; ou seja, um quadrado de 10 cm de lado.

[8] Uma escada de 10 m de comprimento está apoiada numa parede vertical. Se a extremidade inferior da escada começa a deslizar horizontalmente à razão de 0.5 m/seg , com que velocidade o topo da escada percorrerá a parede, quando a extremidade inferior estiver a 6 m do solo?

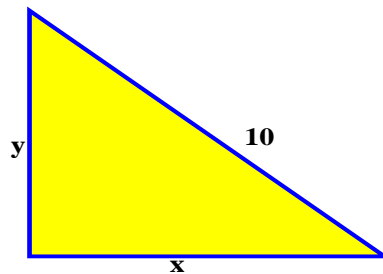


Figura 4.43:

Sejam $x = x(t)$ e $y = y(t)$ os lados do triângulo formado pela parede, a escada e o solo, no instante t . Pelo teorema de Pitágoras $x^2 + y^2 = 100$; derivando implicitamente:

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 0.$$

Devemos calcular $\frac{dy}{dt}$. Como $y = 6$, então $x = \sqrt{100 - 36} = 8$ e $\frac{dx}{dt} = 0.5$; logo,

$$\frac{dy}{dt} = -\left(\frac{x}{y}\right) \frac{dx}{dt} = -\frac{2}{3};$$

a escada está deslizando a uma velocidade de $\frac{2}{3} \text{ m/seg}$.

[9] A dilatação de um disco de cobre aquecido é tal que o raio cresce com a velocidade de 0.01 cm/seg . Com que velocidade cresce a área do disco quando o raio tem 2 cm ?

Sejam $x = x(t)$ o raio e $y = y(t)$ a área do disco no instante t , respectivamente. Então $y = \pi x^2$. Derivando:

$$\frac{dy}{dt} = 2\pi x \frac{dx}{dt};$$

para $x = 2$ e $\frac{dx}{dt} = 0.01$, tem-se: $\frac{dy}{dt} = 0.04 \pi \text{ cm}^2/\text{seg}$. A área do disco cresce com uma velocidade de $0.04 \pi \text{ cm}^2/\text{seg}$.

[10] A lei de Boyle para gases confinados a uma temperatura constante C é $PV = C$, onde V é o volume e P a pressão. Se em certo instante o volume é de 600 cm^3 , a pressão é de 150 k/cm^2 e a pressão cresce à razão de $20 \text{ k/cm}^2/\text{min}$, com que taxa está variando o volume nesse instante?

Sejam $V = V(t)$ o volume e $P = P(t)$ a pressão no instante t , respectivamente. Escrevamos o volume como função da pressão: $V(P) = \frac{C}{P}$.

Usando a regra da cadeia:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{C}{P^2} \frac{dP}{dt} = -\frac{V}{P} \frac{dP}{dt};$$

para $V = 600$, $P = 150$ e $\frac{dP}{dt} = 20$, temos: $\frac{dV}{dt} = -80 \text{ cm}^3/\text{min}$. O volume decresce à razão de $80 \text{ cm}^3/\text{min}$.

[11] (Sistema de Lotka-Volterra) No estudo de ecossistemas, modelos de presa-predador são utilizados para estudar a interação entre as espécies. Se uma população de lobos siberianos é dada por $L = L(t)$ e uma população de cervos por $K = K(t)$, a interação das duas espécies pode ser medida pelo sistema:

$$\begin{cases} \frac{dK}{dt} = aK - bKL \\ \frac{dL}{dt} = -cL + dKL, \end{cases}$$

onde a, b, c e d são constantes positivas. Determine K e L que levem as populações a ficar estáveis para $a = 0.05$, $b = 0.001$, $c = 0.05$ e $d = 0.0001$.

As populações ficam estáveis quando suas taxas de crescimento são nulas; então devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} \frac{dK}{dt} = aK - bKL = K(a - bL) = 0 \\ \frac{dL}{dt} = -cL + dKL = L(-c + dK) = 0, \end{cases}$$

com $K, L \neq 0$; a solução é $L = \frac{a}{b}$ e $K = \frac{c}{d}$; logo, para os valores das constantes dados $L = 50$ e $K = 500$. As populações ficam em equilíbrio quando tem 50 lobos e 500 cervos.

[12] Se uma barra é feita de material homogêneo, então sua densidade é uniforme e é dada pela massa por unidade de comprimento, medida em quilogramas/metros. Se a barra não é homogênea, mas se sua massa é dada por $m = f(x)$ do início ao ponto x da barra, então, a massa entre os pontos x_1 e x_2 é dada por $f(x_2) - f(x_1)$ e sua densidade média é dada por $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. A densidade linear da barra é a taxa de variação da massa em relação ao comprimento e é dada por:

$$\rho = \frac{dm}{dx}.$$

Sabendo que uma barra de comprimento 1 m tem massa dada por $m = f(x) = x^3 + x + 1$, determine a densidade no centro da barra.

$$\rho = \left. \frac{dm}{dx} \right|_{x=0.5} = (3x^2 + 1) \Big|_{x=0.5} = 1.75 \text{ kg/m}.$$

4.21 Exercícios

1. Determine a equação da reta tangente ao gráfico das seguintes funções, no ponto de abscissa dada:

(a) $y = 1 - x^2$, $x = 3$

(k) $y = \ln(x^2)$, $x = 1$

(b) $y = x^3 - 5x + 1$, $x = 1$

(l) $y = \tan(x + 1)$, $x = -1$

(c) $y = x + 4 \ln(x)$, $x = 1$

(m) $y = \sin((x + 1)\pi)$, $x = 0$

(d) $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, $x = 3$

(n) $y = \sqrt[3]{e^x}$, $x = 0$

(e) $y = x^4 + x^3 - x$, $x = 0$

(o) $y = \frac{x}{x^3 + 1}$, $x = 1$

(f) $y = 3x + \sin(x)$, $x = 0$

(p) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $x = 1$

(g) $y = x^{-2}$, $x = -2$

(h) $y = \sqrt{x} + x^{-1}$, $x = 1$

(q) $y = \frac{x^5 - 1}{x^4 + 1}$, $x = -1$

(i) $y = \sqrt{x^2 + 2x}$, $x = 1$

(j) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$, $x = 0$

(r) $y = \frac{1}{x^2(x^4 + 1)}$, $x = 1$

2. Calcule a constante b para que a reta $y + 9x + b = 0$ seja tangente à curva $y = x^{-1}$.
3. Determine as equações das retas tangentes à curva $y = x^2$, nos pontos de abscissa $x = \pm 3$.
4. Determine o ponto onde a curva $y = x^3$ tem tangente paralela à reta tangente à mesma curva no ponto de abscissa $x = 4$. Determine a equação da reta tangente nesse ponto.

5. Determine as equações das retas tangentes e das retas normais às curvas, nos pontos de abscissas dadas:

(a) $y = \operatorname{tg}(-x^2 + 1)$, $x = 1$

(e) $y = \frac{x^5 + 1}{x^4 + 1}$, $x = 1$

(b) $y = e^{-\frac{1}{x}}$, $x = -1$

(f) $y = \operatorname{sen}(e^x)$, $x = \ln(\pi)$

(c) $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$, $x = 0$

(g) $y = \ln(x^2 + 1)$, $x = 1$

(d) $y = \arccos(2x)$, $x = 0$

(h) $y = (4x^3 + 3x + 1)\ln(x)$, $x = 1$

6. Determine os pontos da curva $y = 3x^3 + 14x^2 + 3x + 8$ onde as retas tangentes passando por esses pontos intersectam a origem.

7. Sabendo que as curvas $y = 4x^2$ e $y = -x^{-1}$ tem retas tangentes paralelas com abscissa comum, determine-as.

8. Seja f uma função derivável e $g(x) = f(e^{2x})$. Calcule $g'(0)$ se $f'(1) = 2$.

9. Seja f uma função derivável e $g(x) = x f(x^2)$. Calcule $g'(x)$.

(a) Seja f uma função derivável e $g(x) = e^x f(3x + 1)$. Calcule $g'(0)$ se $f(1) = 2$ e $f'(1) = 3$.

(b) Seja $F(x) = f(g(x))$ em que f e g são funções deriváveis. Se $g(3) = 6$, $g'(3) = 4$ e $f'(6) = 7$, determine $F'(3)$.

10. Determine $f'(x)$ se $u(x)$, $v(x)$ e $w(x)$ são funções deriváveis e:

(a) $f(x) = u(x) v(x) w(x)$

(c) $f(x) = \frac{u(x)}{v(x) w(x)}$

(b) $f(x) = \frac{u(x) w(x)}{v(x)}$

(d) $f(x) = \frac{1}{u(x) v(x) w(x)}$

11. Use [10] para calcular $f'(x)$ se:

(a) $f(x) = (x^2 + x + 1)(x^3 + x)(x + 1)^2$

(c) $f(x) = \left(\frac{x+2}{3x+1}\right)(x^2 + 2)$

(b) $f(x) = (x^5 + x^3 + 1)^3$

(d) $f(x) = \left(\frac{x^3 + 1}{x^2 - 3}\right)(x^4 - 2x^3 + 1)$

12. Usando a regra da cadeia, determine y' , sendo:

(a) $y = (3x + 5)^{50}$

(b) $y = (4x^3 + 3x - 1)^7$

(c) $y = (6 - 3x)^8$

(d) $y = (3x^2 + 4)^5$

(e) $y = \frac{1}{x^3 + 3x^2 - 6x + 4}$

(f) $y = (x^2 + 1)^2(x^3 - 2x)^2$

(g) $y = \sec^2((x^3 - 6)^3)$

(h) $y = \frac{(3x - 6)^{-1}}{(x + 3)^{-2}}$

(i) $y = \left(\frac{3x - 2}{2x + 1}\right)^8$

(j) $y = \frac{1}{x(x + 1)}$

(k) $y = \frac{(x^{-2} + 3x^{-4} + 7x^{-5})^{-8}}{(x^2 + x^{-2})^{-4}(x^{-1})}$

13. Calcule as derivadas das funções:

(a) $y = 5^{x-1}$

(e) $y = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

(h) $y = \ln(\log_{10}(x))$

(b) $y = (10^x + 10^{-x})^2$

(f) $y = \ln(\cosh(x))$

(i) $y = \sen(e^x)$

(c) $y = \log_5(x^2)$

(d) $y = x \log_4(x) - x$

(g) $y = \ln(10^x)$

(j) $y = e^x \sen(\ln((x)))$

14. Usando a derivada de logaritmo, calcule y' :

(a) $y = \sqrt{x^3 + 2}$

(e) $y = \frac{e^x(x^3 - 1)}{\sqrt{2x + 1}}$

(i) $y = (\sen(x))^x$

(b) $y = \left(\frac{x+4}{x+7}\right)^6$

(f) $y = (x^2)^x$

(j) $y = x^{e^x}$

(c) $y = x^{x-1}$

(g) $y = x^{x^2}$

(k) $y = (\cos(x))^{\sen(x)}$

(d) $y = 3^{\ln(x)}$

(h) $y = x^{\frac{1}{x}}$

(l) $y = (\ln(x))^{\ln(x)}$

15. Calcule y' :

(a) $y = \sqrt{1 - \tg^2(x)}$

(g) $y = \sec^3(2x^2)$

(m) $y = \sen\left(\frac{1}{x^2}\right)$

(b) $y = \sqrt{2 - \cos^2(x)}$

(h) $y = \tg(\sqrt{1 - x^2})$

(n) $y = \tg(\sec(x^2))$

(c) $y = \frac{1}{\cos(2x)}$

(i) $y = (\csc(2x) - \cotg(x))^2$

(o) $y = \sec^2\left(\frac{1}{x^2}\right)$

(d) $y = \sen\left(\frac{x}{3}\right)$

(j) $y = \cos^2(\sqrt{x})$

(p) $y = \cotg(\sec(x^2))$

(e) $y = x \cotg(2x)$

(k) $y = \frac{\sen(2x)}{1 + \cos(2x)}$

(q) $y = \log_a(\ln(x))$

(f) $y = \left(1 - \cos^5\left(\frac{x}{3}\right)\right)^2$

(l) $y = \sqrt[3]{\sen(t^2)}$

(r) $y = \ln(\log_a(x))$

16. Verifique que as derivadas das funções hiperbólicas inversas, são:

(a) Se $y = \operatorname{argsenh}(u(x))$, então $y' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u^2(x)}}$.

(b) Se $y = \operatorname{argcosh}(u(x))$, então $y' = \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)-1}}$, $|u(x)| > 1$.

(c) Se $y = \operatorname{argtgh}(u(x))$, então $y' = \frac{u'(x)}{1-u^2(x)}$, $|u(x)| < 1$.

(d) Se $y = \operatorname{argcotgh}(u(x))$, então $y' = \frac{u'(x)}{1-u^2(x)}$, $|u(x)| > 1$.

(e) Se $y = \operatorname{argsech}(u(x))$, então $y' = -\frac{u'(x)}{u(x)\sqrt{1-u^2(x)}}$, $0 < u(x) < 1$.

(f) Se $y = \operatorname{argcosech}(u(x))$, então $y' = -\frac{u'(x)}{|u(x)|\sqrt{u^2(x)+1}}$, $u(x) \neq 0$.

17. Calcule y' :

(a) $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$

(b) $y = (\operatorname{arcsen}(x))^2$

(c) $y = \operatorname{arctg}(x^2)$

(d) $y = \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{x}\right)$

(e) $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

(f) $y = \operatorname{senh}\left(\frac{5}{x}\right)$

(g) $y = \cosh^2(3x) - \operatorname{sen}^2(3x)$

(h) $y = \operatorname{tgh}((4x^2-3)^2)$

(i) $y = \operatorname{sech}(\ln(x))$

(j) $y = x \operatorname{argcosh}(x) - \sqrt{x^2-1}$

(k) $y = \operatorname{argtgh}\left(\frac{x^2}{2}\right)$

(l) $y = \operatorname{argcotgh}(x^2)$

(m) $y = \frac{1}{2} (\operatorname{argcosh}(x^2))^2$

(n) $y = \operatorname{cosech}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

18. Usando derivação implícita, calcule y' :

(a) $x^3 + y^3 = 5$

(b) $x^3 + x^2y + y^2 = 0$

(c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10$

(d) $y^3 = \frac{x-y}{x+y}$

(e) $3\cos^2(x+y) = 7$

(f) $\operatorname{tg}(y) = xy$

(g) $e^y = x+y$

(h) $\ln(y^2+x) = y^3-x^2$

(i) $(x+y)^2 = (x-y)^2$

- (j) $(x^2 - y^2)^2 = y^2 + x^2$ (o) $\ln\left(\frac{y}{x}\right) = e^{\frac{x}{y}}$
 (k) $\operatorname{sen}(xy) = x \cos(y)$ (p) $\cos(yx^2) = \operatorname{sen}(yx^2)$
 (l) $\ln(y - x) = \ln(y + x)$ (q) $xy^2 + 3 \operatorname{tg}(y) = xy$
 (m) $e^{-2x-y} = 5 + \ln(x)$ (r) $x \operatorname{arctg}(y) + y \operatorname{arctg}(x) = 1$
 (n) $\ln(yx) = e^{xy}$

19. Determine os pontos da curva $x^2 + 2xy + 3y^2 = 3$ nos quais as retas tangentes nesses pontos sejam perpendiculares à reta $x + y = 1$.
20. Em que pontos a curva $y^2 = 2x^3$ é ortogonal à reta $4x - 3y + 1 = 0$?
21. A reta $x = a$ intersecta a curva $y = \frac{x^3}{3} + 4x + 3$ num ponto P e a curva $y = 2x^2 + x$ num ponto Q . Para que valor (ou valores) de a as tangentes a essas curvas em P e Q são paralelas?
22. Determine a equação da reta tangente à curva $xy = a$, a constante, no ponto (x_0, y_0) . Verifique que (x_0, y_0) é o ponto médio do segmento de reta determinado pela reta tangente no ponto e os eixos coordenados.
23. Determine a equação da reta tangente à curva $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1$ no ponto (x_0, y_0) . Calcule a distância entre os pontos A e B , onde A e B são as interseções da reta tangente com os eixos coordenados.
24. Verifique que as seguintes famílias de curvas são ortogonais:

- (a) $x + 2y = c, \quad y - 2x = b$
 (b) $y - ce^{-2x} = 0, \quad y^2 - x - b = 0$
 (c) $y - c, x^3 = 0, \quad x^2 + 3y^2 - b = 0$
 (d) $\rho = a \cos(\theta), \quad \rho = b \operatorname{sen}(\theta)$
 (e) $y^2 - \frac{x^3}{c-x} = 0, \quad (x^2 + y^2)^2 - b(2x^2 + y^2) = 0$

25. Determine a segunda derivada de:

- (a) $y = \sqrt[6]{x}$ (d) $y = \operatorname{tg}^2(x)$ (f) $y = \frac{x}{2(x+1)}$
 (b) $y = x^{-5}$ (e) $y = \operatorname{sen}^2(x) + \cos(x)$ (g) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$
 (c) $y = \operatorname{sen}(x^2)$

(h) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$	(j) $y = \cos(\operatorname{sen}(x))$	(m) $y = \sec(\sqrt{x})$
(i) $y = \frac{e^x}{x}$	(k) $y = \ln(\ln(x))$	(n) $y = \operatorname{arcsec}(x^2)$
	(l) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{sen}(x))$	(o) $y = \operatorname{argcotgh}(x^3 + 1)$

26. Calcule as derivadas sucessivas, até a ordem n dada:

(a) $y = 3x^4 - 2x, n = 5$	(k) $y = x \operatorname{cosech}(\ln(x)), n = 4$
(b) $y = 3x^4 - 2x, n = 4$	(l) $y = x \operatorname{argtgh}(x) - \ln(\sqrt{1 - x^2}), n = 5$
(c) $y = \sqrt{3 - x^2}, n = 3$	(m) $y = \cosh^9(x), n = 3$
(d) $y = \frac{1}{x - 1}, n = 4$	(n) $y = \operatorname{argsenh}(e^x), n = 4$
(e) $y = e^{2x+1}, n = 3$	(o) $y = \ln(\operatorname{sech}(x)), n = 5$
(f) $y = \ln(2x), n = 4$	(p) $y = \sinh(\cosh(x)), n = 3$
(g) $y = -2 \cos\left(\frac{x}{2}\right), n = 5$	(q) $y = x (\operatorname{sen}(\ln(x)) - \cos(\ln(x))), n = 3$
(h) $y = \operatorname{sen}(ax), n = 7, a \in \mathbb{R}$	(r) $y = \ln\left(\frac{1 + \operatorname{sen}(x)}{1 - \operatorname{sen}(x)}\right), n = 3$
(i) $y = \ln\left(\frac{1}{x}\right), n = 3$	
(j) $y = x e^x, n = 7$	

27. Seja f uma função duas vezes derivável e $g(x) = f(e^{2x})$. Calcule $g''(x)$.

28. Se $y = x e^{2x}$, mostre que $y'' - 4y = 4e^{2x}$.

29. Para $y = \cos(\alpha x)$ e $y = \operatorname{sen}(\alpha x)$, mostre que $y'' + \alpha^2 y = 0$.

30. Se $y = e^{-x} \cos(2x)$, mostre que $y'' + 2y' + 5y = 0$.

31. Determine α tal que $y = e^{\alpha x}$ verifique a equação: $y'' - 4y = 0$.

32. Seja $y = a e^x + b e^{-x} + c x + x^5$. Verifique que:

$$x^3 y^{(3)} + 5x^2 y'' + (2x - x^3) y' - (2 + x^2) y = 40x^3 - 4x^5.$$

33. Calcule $y''(x)$ se:

(a) $x^4 + y^4 = 16$

(d) $y^2 = x^3(2 - x)$

(b) $x^2 + 6xy + y^2 = 8$

(e) $\text{sen}(y) + \text{sen}(x) + \text{sen}(xy) = x$

(c) $x^2y^2 = (y+1)^2(y-y^2)$

(f) $\cos(y) - \text{sen}(x) = x$

34. Calcule $f^{(3)}(5)$, se $f(x) = \sqrt{x-1}g(x)$, $g(5) = -1$, $g'(5) = \frac{1}{3}$, $g''(5) = 2$ e $g^{(3)}(5) = 10$.

35. Calcule $\phi''(-2)$, se $\phi(x) = \sqrt{1-g(x)}$, $g(-2) = -3$, $g'(-2) = 3$ e $g''(-2) = 5$

36. Determine a linearização no ponto $x_0 = 0$, das seguintes funções:

(a) $\text{sen}(x)$

(d) $\sqrt{x+3}$

(g) $\frac{x}{x^2+1}$

(b) $\cos(x)$

(e) e^{-2x}

(h) $\ln(x^3 + 5x + 5)$

(c) $\text{tg}(x)$

(f) $\sqrt[3]{x+1}$

(i) $(4x^3 + 3x - 1)^7$

37. Calcule aproximadamente:

(a) $\sqrt[3]{0.126}$

(c) $\text{sen}(61^\circ)$

(e) $\sqrt[3]{(8.01)^4} - \frac{1}{\sqrt[3]{8.01}}$

(b) $\sqrt[4]{17}$

(d) $(1.002)^\pi + \text{sen}(1.002 \times \pi)$

(f) $2^{2.002}$

38. Determine as aproximações quadrática e cúbica no ponto $x_0 = 0$, das seguintes funções:

(a) $f(x) = \sqrt{x+3}$

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

(e) $f(x) = \ln(x^3 + 5x + 5)$

(b) $f(x) = e^{-2x}$

(d) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

(f) $f(x) = (4x^3 + 3x - 1)^7$

39. **Polinômio de Taylor de ordem n no ponto x_0 :** Seja f uma função n vezes derivável no ponto x_0 . O polinômio de Taylor de ordem n , ($n = 0, 1, 2, \dots$), no ponto x_0 é denotado por $P_n(x)$ e definido por:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Verifique que o polinômio de Taylor de ordem n , no ponto $x_0 = 0$, das funções:

$$(a) f(x) = \operatorname{sen}(x) \text{ é } P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

$$(b) f(x) = e^x \text{ é } P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{x} \text{ é } P_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k k! (x-1)^k.$$

(d) Esboce o gráfico de f , $P_1(x)$, $P_3(x)$ e $P_5(x)$ no mesmo sistema de coordenadas.

(e) Compare $P_n(x)$ e $l(x)$. Que conclusões pode tirar? É possível utilizar P_n para fazer aproximações de f ?

40. Calcule o valor aproximado do volume de um cubo, se o comprimento de cada aresta varia de 10 cm para 10.1 cm .

41. Influências externas produzem aceleração numa partícula de tal forma que a equação de seu movimento é $y = \frac{4}{t^2} + t$, onde y é o deslocamento e t é o tempo.

(a) Quais são as equações da velocidade e da aceleração da partícula num tempo t ?

(b) Quando a partícula para de mover-se?

42. Um estoque de sangue é guardado num freezer no instante $t = 0$. Após t horas, sua temperatura, em graus centígrados, é $T(t) = 30 + (t+1)^{-1} - 3t^2$. Qual é a velocidade de resfriamento após 10 horas?

43. Deve-se drenar uma piscina. Se Q é o número de litros de água na piscina t minutos após o início da drenagem e $Q(t) = 200(30-t)^2$, qual é a velocidade de escoamento da água após 10 min ?

44. Um corpo em queda livre tem como equação do movimento: $s(t) = \frac{gt^2}{2}$, onde a constante $g = 9.8 \text{ m/seg}^2$, $s(t)$ é a distância, (em metros), percorrida pelo corpo em t segundos, desde o início da queda. Determine a velocidade e a aceleração do corpo em queda livre.

45. Uma partícula lançada verticalmente para cima com velocidade de $a \text{ m/seg}$, atinge a altura de $s(t) = at - 4.9t^2$ após t segundos. Qual deve ser a velocidade inicial para que a partícula atinja 44 m antes de iniciar a queda?

46. O lado de um triângulo equilátero mede a cm e cresce à razão de k cm/h. Com que velocidade crescerá a área do triângulo?
47. Qual é a variação das diagonais de um cubo se os lados crescem a uma razão de 2 cm/seg?
48. O raio da base de um cone cresce à razão de 1 cm/min e sua altura decresce à razão de 2 cm/min. Como variará o volume total do cone quando o raio é 4 cm e sua altura 6 cm?
49. Um balão esférico está sendo inflado. Seu volume cresce à razão de 100 cm³/seg. Determine a razão com que varia o raio no instante em que o diâmetro é de 50 cm.
50. Mostre que a função logística $L = L(t)$ satisfaz à equação $\frac{dL}{dt} = C L \left(1 - \frac{L}{A}\right)$. Se $L = L(t)$ representa o crescimento populacional, quando a população se estabiliza?
51. A redução de oxigênio na água de uma lagoa, devido ao despejo de esgoto, só volta a níveis normais t dias após o despejo do esgoto. Sabendo que a quantidade de oxigênio que permanece, após t dias é dada por:

$$P(t) = 500 \frac{t^2 + 10t + 100}{t^3 + 20t^2 + 200},$$

medido em % do nível normal de oxigênio, determine a velocidade com que a quantidade de oxigênio está sendo reduzida, após 1, 10, 20 e 50 dias após o despejo.

52. Ao meio dia o barco A está 64 km a oeste do barco B . O barco A navega para o leste a 20 km/h e o barco B navega para o norte a 25 km/h. Qual é a taxa de variação da distância entre os barcos às 13 h e 12 min?
53. A frequência da vibração da corda de um violino é dada por

$$f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}},$$

onde L é o comprimento da corda, T é a tensão sobre a corda e ρ é densidade linear de massa da corda. Determine a taxa de variação de f em relação a L (com T e ρ constantes); a taxa de variação de f em relação a T (com L e ρ constantes); a taxa de variação de f em relação a ρ (com L e T constantes) e interprete os resultados.

Capítulo 5

APLICAÇÕES DA DERIVADA

5.1 Variação de Funções

Definição 5.1. Seja f uma função e $x_0 \in \text{Dom}(f)$.

1. f possui um ponto de **máximo relativo** ou de **máximo local** no ponto x_0 , se existe um pequeno intervalo aberto I que contem x_0 tal que:

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \text{para todo } x \in I \cap \text{Dom}(f)$$

A imagem de x_0 , $f(x_0)$, é chamada **valor máximo local** de f .

2. f possui um ponto de **mínimo relativo** ou de **mínimo local** no ponto x_0 , se existe um pequeno intervalo aberto I que contem x_0 tal que:

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \text{para todo } x \in I \cap \text{Dom}(f)$$

A imagem de x_0 , $f(x_0)$, é chamada **valor mínimo local** de f .

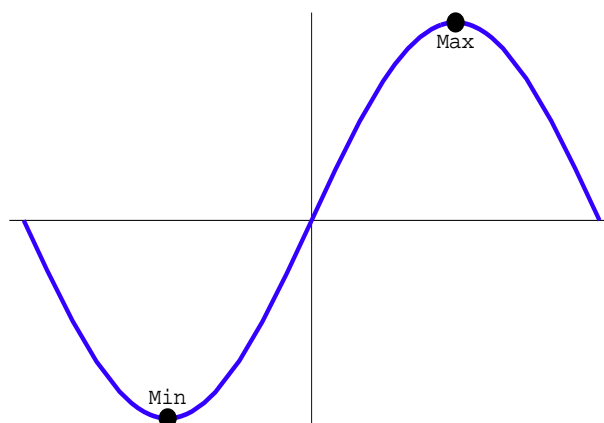


Figura 5.1: Pontos de mínimo e máximo.

Observação 5.1.

Em geral, um ponto de máximo ou de mínimo de uma função f é chamado ponto extremo de f .

Exemplo 5.1.

[1] Seja $f(x) = \text{sen}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

O ponto $x_0 = \frac{\pi}{2}$ é um ponto de máximo relativo, pois $\text{sen}(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $f(\frac{\pi}{2}) = 1$; $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ é um ponto de mínimo relativo, pois $\text{sen}(x) \geq -1$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $f(-\frac{\pi}{2}) = -1$. Observe que $x_0 = \frac{3\pi}{2} + k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, são também pontos extremos de f . De fato :

$$\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + k\pi\right) = -\cos(k\pi) = (-1)^{k+1}.$$

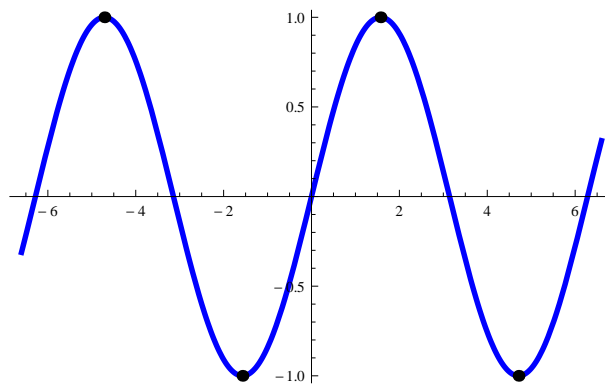


Figura 5.2: Gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$.

[2] Seja $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$; $x_0 = 0$ é um ponto de mínimo relativo, pois $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $f(0) = 0$. Na verdade $x_0 = 0$ é o único ponto extremo de f .

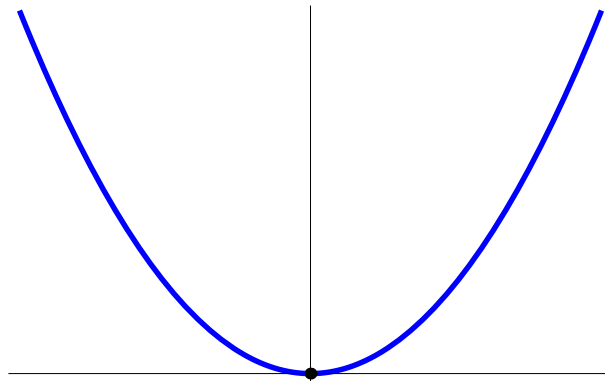


Figura 5.3: Gráfico de $f(x) = x^2$.

[3] Seja $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$; $x_0 = 0$ é um ponto de mínimo relativo, pois $|x| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $f(0) = 0$. Como no exemplo anterior, $x_0 = 0$ é o único ponto extremo de f .

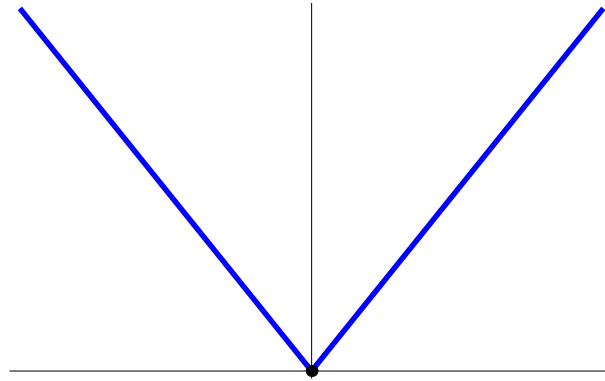


Figura 5.4: Gráfico de $f(x) = |x|$.

[4] Seja $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

1. A função f não possui pontos de máximo ou mínimo relativos em \mathbb{R} .
2. Se f é restrita ao intervalo $(-1, 1]$, então f possui o ponto $x_0 = 1$ de máximo relativo.
3. Se f é restrita ao intervalo $[0, 2]$, então f possui o ponto $x_0 = 2$ de máximo relativo e o ponto $x_0 = 0$ de mínimo relativo.
4. Se f é restrita ao intervalo $(0, 1)$, então f não possui pontos de máximo relativo ou de mínimo relativo.

Estes exemplos nos indicam a importância dos domínios das funções quando queremos determinar pontos extremos.

Proposição 5.1. Se f é uma função derivável no intervalo (a, b) e $x_0 \in (a, b)$ é um extremo relativo de f , então $f'(x_0) = 0$.

A proposição nos indica que num ponto de máximo ou de mínimo relativo de uma função f , a reta tangente ao gráfico de f nesses pontos é paralela ao eixo dos x .

Para a prova veja o apêndice.

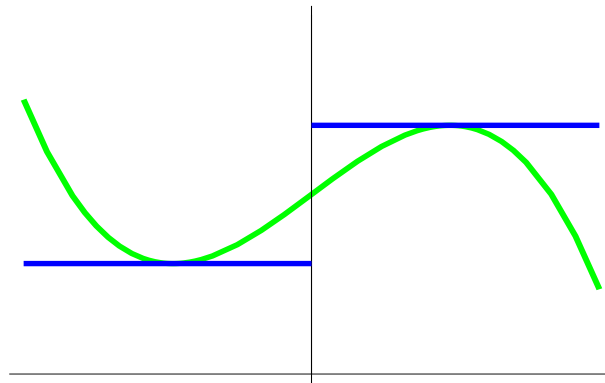


Figura 5.5:

Observação 5.2.

1. A proposição não garante a existência de pontos extremos.
2. Por outro lado, a proposição nos dá uma condição necessária para que um ponto seja extremo.

Exemplo 5.2.

[1] Seja $f(x) = x^3$ é uma função derivável em \mathbb{R} e $f'(x) = 3x^2$; logo $f'(0) = 0$, mas $x_0 = 0$ não é ponto de máximo nem de mínimo relativo de f ; de fato, $f(-1) < f(0) < f(1)$.

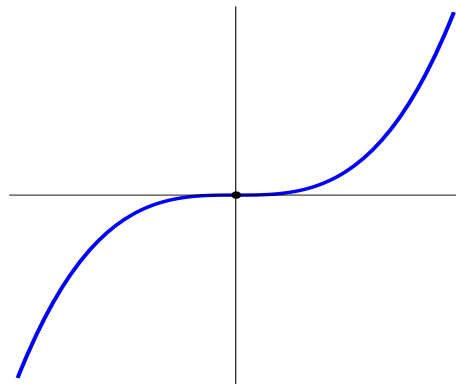


Figura 5.6:

Definição 5.2. Seja f uma função derivável no ponto $x_0 \in \text{Dom}(f)$. Se $f'(x_0) = 0$, x_0 é chamado **ponto crítico de f** .

Pela proposição anterior, todo ponto extremo é ponto crítico. A recíproca é falsa. (Veja exemplo anterior).

Exemplo 5.3.

[1] Calcule os pontos críticos de $f(x) = \text{sen}(x)$.

Para calcular os pontos críticos da função f , devemos resolver a equação: $f'(x) = 0$, ou seja, $\cos(x) = 0$. Então, os pontos $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$, são os pontos críticos.

[2] Seja $f(x) = x^3$; resolvemos $f'(x) = 3x^2 = 0$; então $x = 0$ é o único ponto crítico de f .

[3] Seja $f(x) = x^3 - 3x$; resolvemos $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$; então, $x = 1$ e $x = -1$ são os pontos críticos de f .

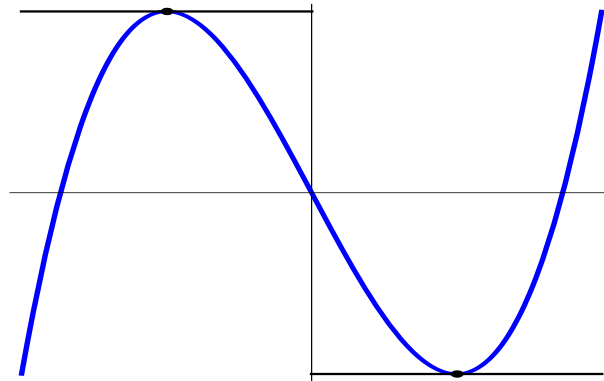


Figura 5.7: Pontos críticos de $f(x) = x^3 - 3x$.

Observação 5.3.

Na verdade um ponto "candidato" a máximo ou mínimo relativo de uma função derivável f sempre deve satisfazer à equação:

$$\boxed{f'(x) = 0}$$

Mais adiante saberemos descartar dos pontos críticos, aqueles que não são extremais.

Definição 5.3.

1. O ponto onde uma função atinge o maior valor (se existe) é chamado máximo absoluto da função. O ponto x_0 é de **máximo absoluto de f** quando para todo $x \in \text{Dom}(f)$, tem-se $f(x_0) \geq f(x)$.
2. O ponto onde uma função atinge o menor valor (se existe) é chamado mínimo absoluto da função. O ponto x_0 é de **mínimo absoluto de f** quando para todo $x \in \text{Dom}(f)$, tem-se $f(x_0) \leq f(x)$.

Um ponto de máximo absoluto é um ponto de máximo local. A recíproca é falsa; análogamente para mínimo absoluto.

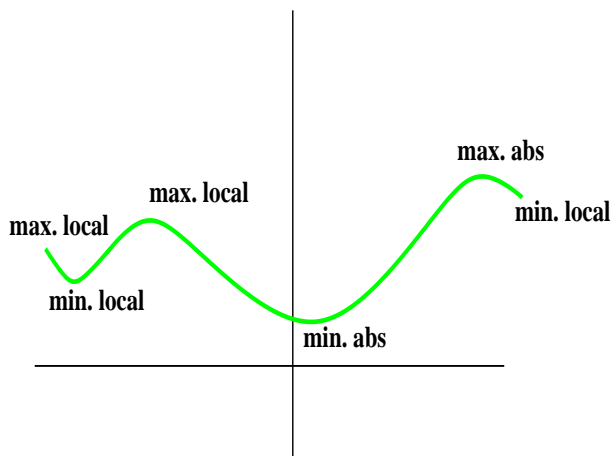


Figura 5.8: Pontos de máximos e mínimos.

Exemplo 5.4.

[1] Seja $f(x) = 2x$ tal que $x \in [0, 2]$.

O ponto $x_0 = 2$ é um ponto de máximo absoluto de f . De fato: $f(x) \leq f(2) = 4$, para todo $x \in [0, 2]$ e $x_0 = 0$ é um ponto de mínimo absoluto de f , pois $f(x) \geq f(0) = 0$, para todo $x \in [0, 2]$. Se f é definida em $(0, 2)$, f não possui máximos nem mínimos.

[2] Seja $f(x) = x^2$ tal que $x \in [-1, 2]$.

Os pontos $x_0 = -1$ e $x_0 = 2$ são pontos de máximos locais, mas $x_0 = 2$ é máximo absoluto de f , pois $f(x) \leq f(2) = 4$, para todo $x \in [-1, 2]$ e $x_0 = 0$ é um mínimo absoluto de f , pois $f(x) \geq f(0) = 0$, para todo $x \in [0, 2]$.

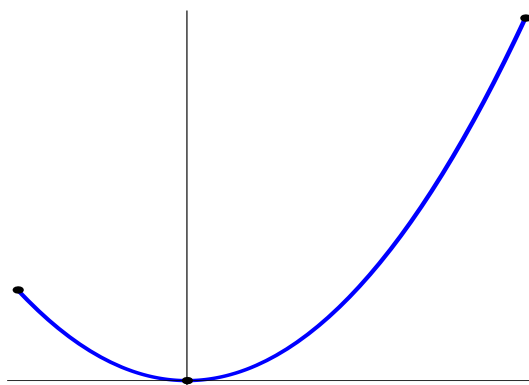


Figura 5.9: Exemplo [2].

O teorema seguinte, devido a Weierstrass, garante a existência de pontos extremos de uma função, sem a hipótese de que a função seja derivável. A prova deste teorema será omitida. Para mais detalhes veja a bibliografia avançada.

Teorema 5.1. (Weierstrass): Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Então existem x_1 e x_2 em $[a, b]$ tais que:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \text{ para todo } x \in [a, b].$$

Observações 5.1.

1. No teorema as hipóteses de que o domínio seja um intervalo do tipo $[a, b]$ e de que a função seja contínua são condições essenciais. De fato, a função contínua $f(x) = x$ não possui pontos de máximo nem de mínimo em qualquer intervalo aberto.
2. A função descontínua $f(x) = \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, não possui ponto de máximo nem de mínimo no intervalo $[-1, 1]$.

Teorema 5.2. (Rolle) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, derivável em (a, b) e tal que $f(a) = f(b)$. Então, existe pelo menos um $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Prova: Se f é uma função constante, então para todo $x \in (a, b)$, $f'(x) = 0$. Se f não é constante, então, pelo Teorema de Weierstrass, possui pontos extremos. Suponha que x_0 é ponto de máximo; então $x_0 \in (a, b)$, pois, caso contrário, por exemplo se $x_0 = b$, teríamos: $f(a) \leq f(x_0) = f(b)$. Mas pela hipótese, $f(a) = f(b)$ e f seria constante; logo, $x_0 \in (a, b)$. Analogamente se x_0 é ponto de mínimo. Portanto, $f'(x_0) = 0$.

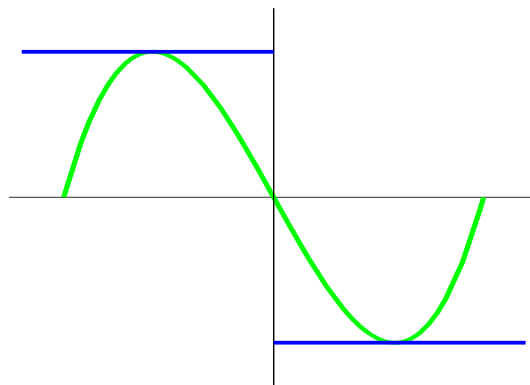


Figura 5.10: Teorema de Rolle.

Exemplo 5.5.

Seja $f(x) = x^m (x-1)^n$ uma função definida no intervalo $[0, 1]$; $m, n \in \mathbb{Z}$. Verifiquemos que existe um único ponto que divide o intervalo $[0, 1]$ na razão $\frac{m}{n}$.

A função é contínua em $[0, 1]$ e derivável em $(0, 1)$; pelo teorema de Rolle, existe pelo menos um $x_0 \in (0, 1)$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Por outro lado, $f'(x) = x^{m-1} (x-1)^{n-1} (m(x-1) + nx)$. $f'(x_0) = 0$ é equivalente a $m(x_0 - 1) + nx_0 = 0$, donde:

$$x_0 = \frac{m}{m+n}.$$

O ponto x_0 divide o intervalo $[0, 1]$ em segmentos de comprimentos x_0 e $1 - x_0$; logo:

$$\frac{x_0}{1 - x_0} = \frac{m}{n}.$$

Teorema 5.3. (Valor Médio): Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b) . Então existe pelo menos um $x_0 \in (a, b)$ tal que:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Em outras palavras, existe um ponto no gráfico de f , onde a reta tangente nesse ponto é paralela à reta secante que liga $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Para a prova do teorema, veja o apêndice.

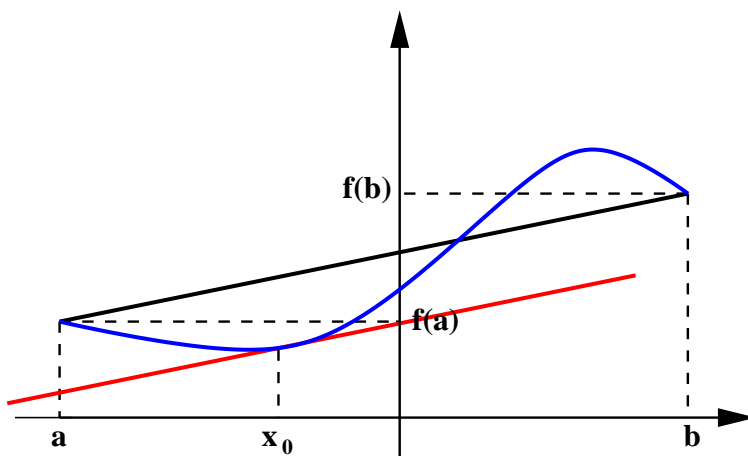


Figura 5.11: Teorema do Valor Médio.

Sabemos que uma função constante tem derivada nula. O Teorema do Valor Médio nos fornece a recíproca desta propriedade, como veremos a seguir.

Corolário 5.4.

1. Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) . Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é constante.
2. Sejam f e g funções contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b) . Se $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$, então $f(x) = g(x) + k$, onde k é uma constante.

Prova:

1. De fato. Sejam $x_1, x_2 \in [a, b]$; suponha que $x_1 < x_2$. Pelo Teorema do Valor Médio, temos que existe $x_0 \in (x_1, x_2)$ tal que $f'(x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1)$. Como, por hipótese, $f'(x) = 0$ para todo x , então $f(x_1) = f(x_2)$. Como x_1 e x_2 são arbitrários, temos que f é constante.
2. Para 2, basta considerar $h(x) = f(x) - g(x)$ e aplicar 1.

Exemplo 5.6.

[1] Suponhamos que um carro percorre uma distância de 180 km em 2 horas. Denotando por $s = s(t)$ a distância percorrida pelo carro após t horas, a velocidade média durante esse período de tempo é:

$$\frac{s(2) - s(0)}{2 - 0} = \frac{180 - 0}{2} = 90 \text{ km/h}.$$

Do Teorema do Valor Médio, temos que o carro deve ter atingido a velocidade de $s'(t_0) = 90 \text{ km/h}$ pelo menos uma vez nesse período de tempo.

[2] Seja $f(x) = 6x^2 - x^3$ definida em $[0, 6]$. Determine $x_0 \in (0, 6)$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Usamos o Teorema de Rolle (f é contínua em $[0, 6]$ e derivável em $(0, 6)$); $f(0) = f(6) = 0$; então, existe $x_0 \in (0, 6)$ tal que $f'(x_0) = 0$; mas $f'(x) = 12x - 3x^2$. $f'(x_0) = 0$ é equivalente a $3x_0(4 - x_0) = 0$; logo, $x_0 = 0$ ou $x_0 = 4$; mas, somente $4 \in (0, 6)$.

[3] Seja $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ definida em $[0, 3]$. Determinar $x_0 \in (0, 3)$ tal que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ seja paralela à secante que liga os pontos $(0, f(0))$ e $(3, f(3))$.

Usamos o Teorema do Valor Médio (f é contínua em $[0, 3]$ e derivável em $(0, 3)$); então existe $x_0 \in (0, 3)$, tal que:

$$f'(x_0) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = 15.$$

Mas $f'(x) = 3x^2 + 4x$; logo, temos $3x_0^2 + 4x_0 = 15$; resolvendo a equação, temos que $x_0 = \frac{5}{3}$ ou $x_0 = -3$; mas, somente $\frac{5}{3} \in (0, 3)$.

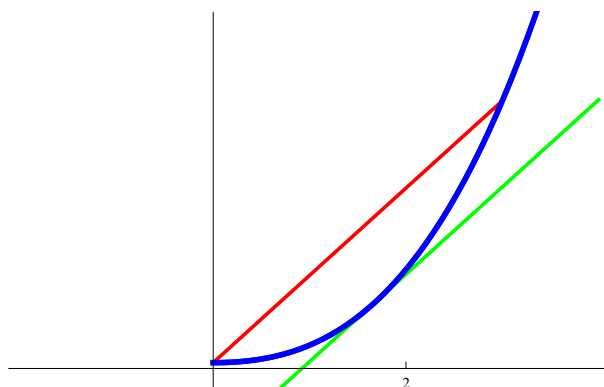


Figura 5.12: Exemplo [3].

[4] Verifique que $|\text{sen}(\beta) - \text{sen}(\alpha)| \leq |\beta - \alpha|$; para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Se $\alpha = \beta$ é evidente. Suponha $\alpha < \beta$; definamos a função $f(x) = \text{sen}(x)$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $x_0 \in (\alpha, \beta)$ tal que $f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$; logo:

$$\cos(x_0) = \frac{\text{sen}(\beta) - \text{sen}(\alpha)}{\beta - \alpha};$$

sabendo que $|\cos(x_0)| \leq 1$, obtemos o resultado.

5.2 Funções Monótonas

Seja $y = f(x)$ uma função definida num domínio D .

Definição 5.4.

1. f é **crescente** em D se para todo $x_0, x_1 \in D$ com $x_0 < x_1$, tem-se $f(x_0) < f(x_1)$.
2. f é **decrescente** em D , se para todo $x_0, x_1 \in D$ com $x_0 < x_1$, tem-se $f(x_0) > f(x_1)$.
3. Em ambos os casos, f é dita monótona.

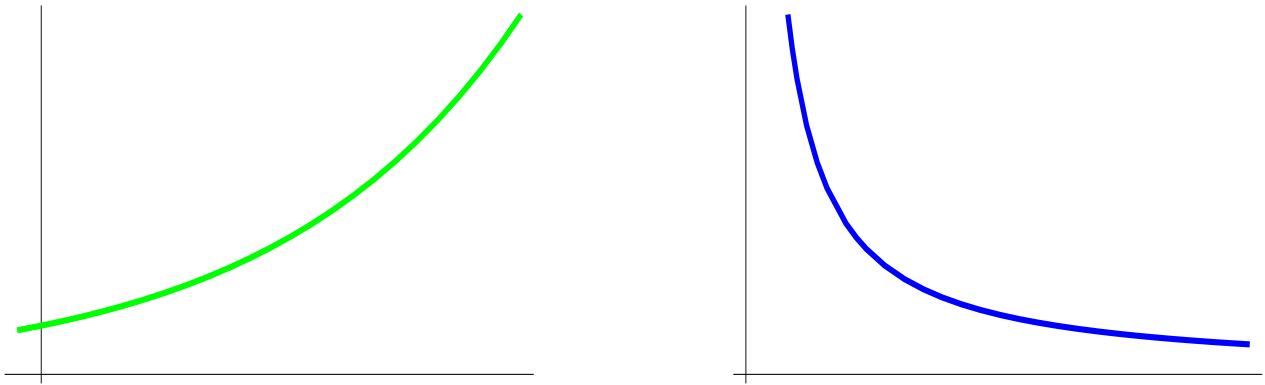


Figura 5.13: Funções crescente e decrescente, respectivamente.

Exemplo 5.7.

[1] Seja $y = f(x) = \frac{1}{x}$; $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

Sejam $x_0, x_1 \in D$ tal que $x_0 < x_1$; então: $\frac{1}{x_1} < \frac{1}{x_0}$. Logo, $f(x_1) < f(x_0)$ e f é monótona decrescente.

[2] Seja $y = f(x) = \sqrt{x}$; $D = [0, +\infty)$.

Sejam $x_0, x_1 \in D$ tal que $x_0 < x_1$; então: $\sqrt{x_0} < \sqrt{x_1}$. Logo, $f(x_0) < f(x_1)$ e f é monótona crescente.

[3] Seja $y = f(x) = x^2$; $D = \mathbb{R}$.

Sejam $x_0, x_1 \in D$ tal que $x_0 < x_1$; então: $x_0^2 < x_1^2$, se $0 \leq x_0$ e $0 < x_1$ e $x_1^2 < x_0^2$, se $x_0 < 0$ e $x_1 \leq 0$. Logo, $f(x_0) < f(x_1)$ em $[0, +\infty)$ e $f(x_1) < f(x_0)$ em $(-\infty, 0)$; f é monótona crescente em $(0, +\infty)$ e monótona decrescente em $(-\infty, 0)$.

O exemplo anterior nos mostra que, em geral, uma função pode ter partes do domínio onde é crescente e partes onde é decrescente.

Proposição 5.2. Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) .

1. Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é crescente em $[a, b]$.
2. Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é decrescente em $[a, b]$.

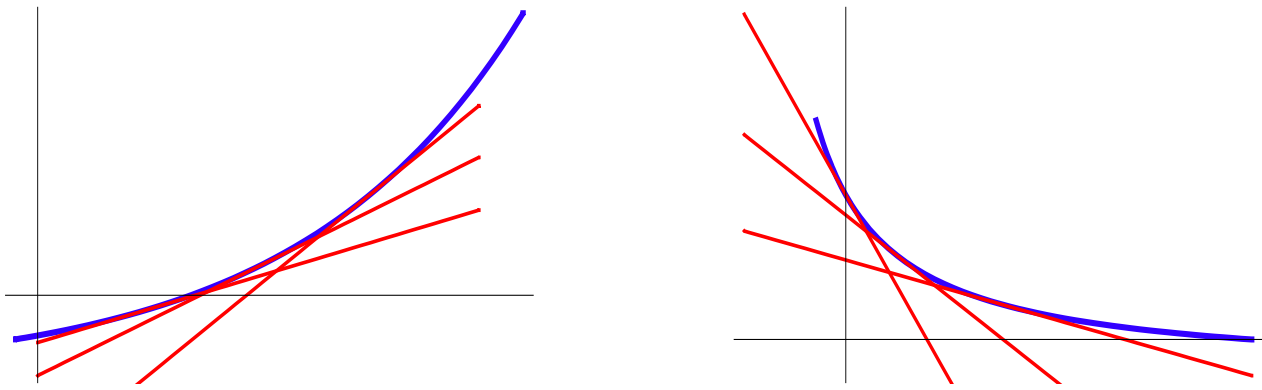


Figura 5.14:

Prova:

1. Sejam $x_0, x_1 \in (a, b)$ tal que $x_0 < x_1$; como f é contínua em $[x_0, x_1]$ e derivável em (x_0, x_1) , pelo Teorema do Valor Médio, existe $x \in (x_0, x_1)$ tal que $f(x_1) - f(x_0) = f'(x)(x_1 - x_0)$. Como $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, temos que $f(x_0) < f(x_1)$.
2. A prova de 2 é análoga.

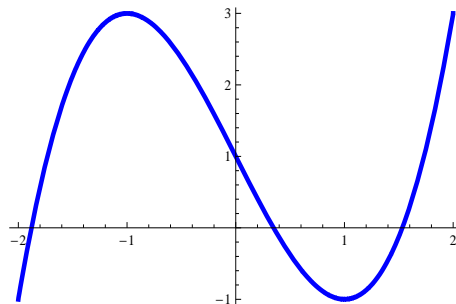
Exemplo 5.8.

[1] Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento de $f(x) = x^2 + 1$.

Derivando f temos $f'(x) = 2x$; logo, $f'(x) > 0$ se, e somente se $x > 0$ e $f'(x) < 0$ se, e somente se $x < 0$. Logo, f é crescente em $(0, +\infty)$ e decrescente em $(-\infty, 0)$; note que $f'(0) = 0$.

[2] Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento de $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Derivando f temos $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$; logo, $f'(x) = 0$ se, e somente se $x = \pm 1$. Logo, f é crescente em $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e decrescente em $(-1, 1)$.

Figura 5.15: Gráfico de $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

[3] Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento de $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Derivando f temos $f'(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$; logo, $f'(x) = 0$ se, e somente se $x = \pm 1$.

Intervalos	$(x-1)(x+1)$	$f(x)$
$0 < x < 1$	< 0	decrescente
$-1 < x < 0$	< 0	decrescente
$x > 1$	> 0	crescente
$x < -1$	> 0	crescente

f é crescente em $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e decrescente em $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

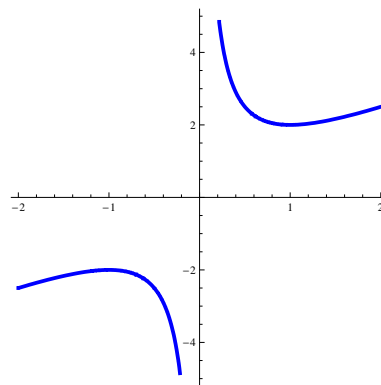


Figura 5.16: Gráfico de $f(x) = x + \frac{1}{x}$

[4] Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento de:

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 + 5.$$

Derivando f temos $f'(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x-2)(x+1)$; logo, $f'(x) = 0$ se, e somente se $x = 0$, $x = 2$ e $x = -1$.

Intervalos	$x(x-2)(x+1)$	$f(x)$
$-1 < x < 0$	> 0	crescente
$0 < x < 2$	< 0	decrescente
$x > 2$	> 0	crescente
$x < -1$	< 0	decrescente

f é crescente em $(-1, 0) \cup (2, +\infty)$ e decrescente em $(0, 2) \cup (-\infty, -1)$.

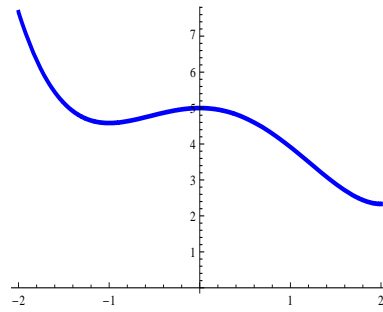


Figura 5.17: Gráfico de $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 + 5$

[5] A função $Q(t) = Q_0 e^{kt}$ ($k \neq 0$) é crescente se $k > 0$ e decrescente se $k < 0$, o que justifica seu nome.

[6] **(Lei de resfriamento de Newton:** A taxa de variação da temperatura $T = T(t)$ de um corpo é proporcional à diferença entre a temperatura ambiente A (constante) e a temperatura $T = T(t)$, isto é:

$$\frac{dT}{dt} = k(A - T(t)), \quad (k > 0).$$

Se $T > A$, então $\frac{dT}{dt} < 0$, de modo que a temperatura $T = T(t)$ é decrescente. Logo, se a temperatura do corpo é maior que a do ambiente, o corpo está resfriando.

Se $T < A$, então $\frac{dT}{dt} > 0$, de modo que a temperatura $T = T(t)$ é crescente. Logo, se a temperatura do corpo é menor que a do ambiente, o corpo está esquentando.

Se $T = A$, então $\frac{dT}{dt} = 0$, de modo que a temperatura T é constante.

[7] **Crescimento populacional inibido:** Considere uma colônia de coelhos com população inicial P_0 numa ilha sem predadores. Seja $P = P(t)$ a população no instante t . Estudos ecológicos mostram que a ilha pode suportar uma quantidade máxima de P_1 indivíduos. Sabemos que este fenômeno é modelado pela função logística que satisfaz à equação:

$$\frac{dP}{dt} = kP(P_1 - P), \quad (k > 0).$$

Se $P_1 > P$, então $\frac{dP}{dt} > 0$, de modo que a população $P = P(t)$ cresce.

Se $P_1 < P$, então $\frac{dP}{dt} < 0$, de modo que a população $P = P(t)$ decresce.

Se $P_1 = P$, então $\frac{dP}{dt} = 0$, de modo que a população $P = P(t)$ fica estável.

5.3 Determinação de Máximos e Mínimos

Teorema 5.5. Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) , exceto possivelmente num ponto x_0 .

1. Se $f'(x) > 0$ para todo $x < x_0$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > x_0$, então x_0 é ponto de máximo de f .

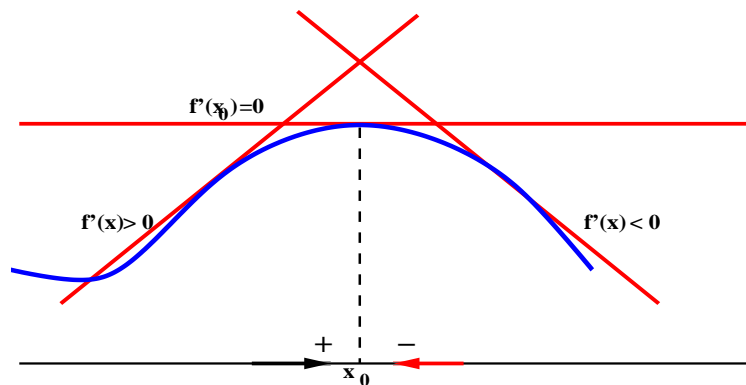


Figura 5.18: Máximo local.

2. Se $f'(x) < 0$ para todo $x < x_0$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > x_0$, então x_0 é ponto de mínimo de f .

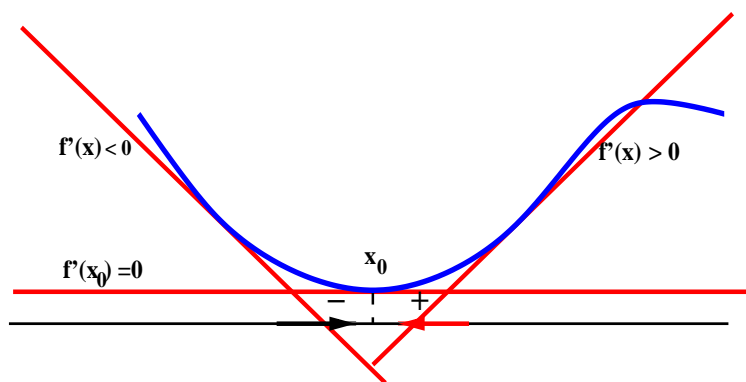


Figura 5.19: Mínimo local.

Prova: 1. Se $f'(x) > 0$ para todo $x < x_0$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > x_0$, então f é crescente em (a, x_0) e decrescente em (x_0, b) ; logo, $f(x) < f(x_0)$ para todo $x \neq x_0$.

A prova de 2. é análoga.

Do teorema 5.5 segue que num ponto de máximo ou de mínimo de uma função contínua nem sempre existe derivada.

Exemplo 5.9.

[1] Seja $f(x) = |x|$, definida em \mathbb{R} ; claramente $x_0 = 0$ é um ponto de mínimo de f , mas $f'(0)$ não existe. De fato. Para todo $x \neq 0$, tem-se:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

[2] $f(x) = x^3$. O ponto crítico é a solução da equação $f'(x_0) = 0$ ou, equivalentemente, $3x_0^2 = 0$; então, $x_0 = 0$. Por outro lado, $f'(x) = 3x^2 > 0$, se $x \neq 0$; logo, $x_0 = 0$ não é ponto de máximo nem de mínimo de f .

[3] $f(x) = x^3 - 3x + 1$. As soluções da equação $f'(x_0) = 0$ são $x_0 = 1$ e $x_0 = -1$. Do exemplo 2 do parágrafo anterior, $f'(x) > 0$, se $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e $f'(x) < 0$, se $x \in (-1, 1)$:

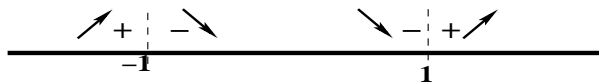


Figura 5.20: Esquematicamente

Então, $x_0 = -1$ é ponto de máximo e $x_0 = 1$ é ponto de mínimo de f .

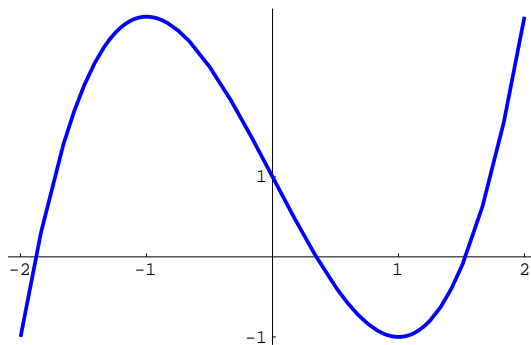


Figura 5.21: Gráfico de $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

[4] $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. f não é derivável em 0.

De fato, $f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ se $x \neq 0$. Por outro lado, $f'(x) < 0$ se $x > 0$ e $f'(x) > 0$ se $x < 0$. Então, $x = 0$ é ponto de máximo e $f(0) = 1$ é o valor máximo.

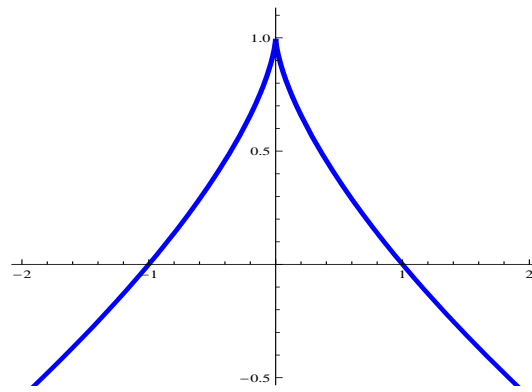


Figura 5.22: Gráfico de $f(x) = 1 - x^{2/3}$.

Teorema 5.6. Seja f uma função duas vezes derivável e x_0 um ponto crítico de f . Se:

1. $f''(x_0) > 0$, então x_0 é um ponto de mínimo relativo de f .
2. $f''(x_0) < 0$, então x_0 é um ponto de máximo relativo de f .

Prova: 1. Como $f'(x_0) = 0$ e:

$$0 < f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0},$$

então existe $\delta > 0$ tal que: $\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$, para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (veja o apêndice);
então, $f'(x) > 0$, se $x > x_0$ e $f'(x) < 0$, se $x_0 > x$. Pelo teorema 5.5, temos que x_0 é um ponto de mínimo local de f .

2. A prova é análoga.

Observações 5.2.

1. Dos teoremas 5.5 e 5.6 temos que os candidatos a pontos de máximos e mínimos são não só **pontos críticos, mas também, podem ser os pontos do domínio onde a função não é derivável.**
2. No caso em que o domínio de f é um intervalo do tipo $[a, b]$, após determinar os pontos de máximo e de mínimo no intervalo (a, b) , devemos calcular os valores da função nos extremos do intervalo e comparar estes valores com os valores máximos e mínimos obtidos anteriormente nos pontos críticos; o maior valor corresponderá ao máximo absoluto e o menor valor ao mínimo absoluto da função e os pontos correspondentes serão, respectivamente, os pontos de máximo e de mínimo absolutos.

3. No caso em que $f''(x_0) = 0$, o teorema 5.6 não afirma nada; quando acontecer isto, recomendamos usar o teorema 5.5.

Exemplo 5.10.

[1] Calcule os pontos extremos de $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Como f é diferenciável em todo ponto, calculemos os pontos críticos de f . $f'(x) = 2ax + b$ e $f'(x) = 0$, se, e somente, se: $x = -\frac{b}{2a}$ que é o ponto crítico de f . $f''(x) = 2a$; então,

$$\begin{aligned} f''(x) &> 0 & \text{se } a > 0 \\ f''(x) &< 0 & \text{se } a < 0. \end{aligned}$$

Logo, o vértice $x = -\frac{b}{2a}$ é um ponto de máximo absoluto de f se $a < 0$ e um ponto de mínimo absoluto se $a > 0$.

[2] Calcule os pontos extremos de $f(x) = \frac{x^6}{4} - \frac{x^4}{2} + 2$ se $x \in [-2, 2]$.

Como f é diferenciável em todo ponto, calculemos os pontos críticos de f :

$$f'(x) = \frac{x^3(3x^2 - 4)}{2}.$$

$f'(x) = 0$ se, e somente, se: $x = 0$, $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ e $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$, que são os pontos críticos de f . A segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{3x^2}{2}(5x^2 - 4) \implies f''\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) > 0 \text{ e } f''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) > 0;$$

logo, $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ e $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ são pontos de mínimo relativo de f . Como $f''(0) = 0$ utilizamos o teorema 5.5: $f'(x) > 0$ se $-\frac{2}{\sqrt{3}} < x < 0$ e $f'(x) < 0$ se $0 < x < \frac{2}{\sqrt{3}}$; logo, $x = 0$ é ponto de máximo relativo de f . Por outro lado $f(2) = f(-2) = 10$, $f(0) = 2$ e $f\left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{46}{27}$; logo, -2 e 2 são pontos de máximo absolutos, $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ e $\frac{2}{\sqrt{3}}$ são pontos de mínimo absolutos. Veja o desenho:

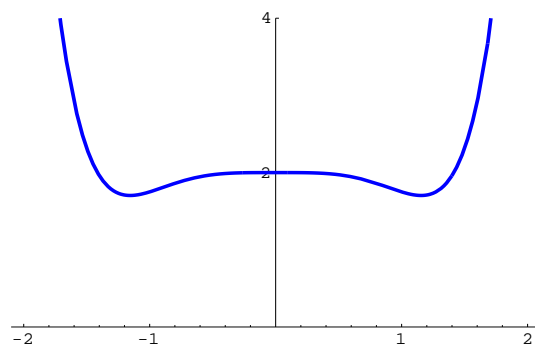


Figura 5.23: Gráfico de $f(x) = \frac{x^6}{4} - \frac{x^4}{2} + 2$.

[3] Calcule os pontos extremos de $f(x) = 6x - 3x^2 + \frac{x^3}{2}$.

Calculemos os pontos críticos de f :

$$f'(x) = 6 - 6x + \frac{3x^2}{2} = \frac{3(x-2)^2}{2}.$$

Logo, $f'(x) = 0$ se, e somente se, $x = 2$, que é o ponto crítico de f . Calculando a segunda derivada de f :

$$f''(x) = 3x - 6 = 3(x - 2).$$

Então $f''(2) = 0$ e o teorema 5.6 não pode ser aplicado; mas usamos o teorema 5.5 para analisar a mudança do sinal da primeira derivada de f . Como $f'(x) \geq 0$, então f é sempre crescente; logo, no ponto $x = 2$ não muda o sinal da primeira derivada de f ; portanto $x = 2$ não é ponto de máximo nem de mínimo relativo de f . Veja o desenho:

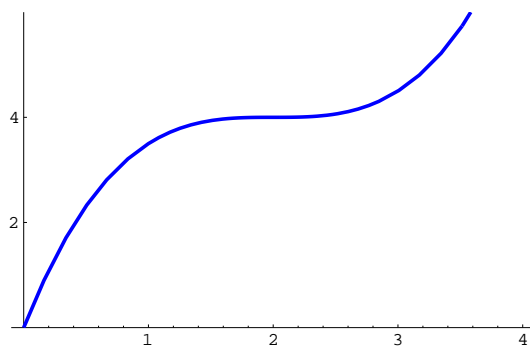


Figura 5.24: Gráfico de $f(x) = 6x - 3x^2 + \frac{x^3}{2}$.

[4] Calcule os pontos extremos de $f(x) = x^4 - \frac{16x^3}{3}$.

Calculemos os pontos críticos de f ; então, $f'(x) = 4x^2(x - 4)$. Logo, $f'(x) = 0$ se $x = 0$ ou $x = 4$. Calculando a segunda derivada de f : $f''(x) = 12x^2 - 32x = 4x(3x - 8)$.

Então $f''(4) > 0$; logo, $x = 4$ é ponto de mínimo relativo de f . $f''(0) = 0$ e o teorema não pode ser aplicado; mas usamos o teorema 5.5 para analisar a mudança do sinal de f' . Como $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in [-1, 1]$, então $x = 0$ não é ponto de máximo nem de mínimo. Veja o desenho:

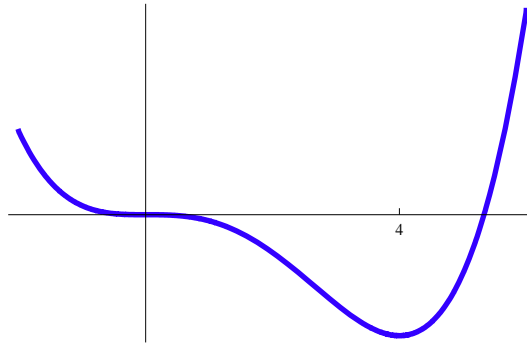


Figura 5.25: Gráfico de $f(x) = x^4 - \frac{16x^3}{3}$.

[5] Calcule os pontos extremos de $f(x) = \sin(2x) - 2\sin(x)$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

Calculemos os pontos críticos de f em $(-\pi, \pi)$. Derivando,

$$f'(x) = 2\cos(2x) - 2\cos(x) = 2(2\cos^2(x) - \cos(x) - 1) = 4(\cos(x) - 1)\left(\cos(x) + \frac{1}{2}\right).$$

Então, os pontos críticos são $x = 0$, $x = -\frac{2\pi}{3}$ e $x = \frac{2\pi}{3}$. Calculando a segunda derivada de f :

$$f''(x) = -4\sin(2x) + 2\sin(x).$$

Logo, $f''(-\frac{2\pi}{3}) < 0$ e $f''(\frac{2\pi}{3}) > 0$; logo, $x = -\frac{2\pi}{3}$ é ponto de máximo relativo e $x = \frac{2\pi}{3}$ é ponto de mínimo relativo de f .

Por outro lado, $f''(0) = 0$, e o teorema não pode ser aplicado; mas, usamos o teorema A para analisar a mudança do sinal de f' . Como $f'(x) < 0$ para todo x pertencente a um intervalo de centro 0 contido em $(-\frac{2\pi}{3}, \pi)$, como, por exemplo, $[-\frac{\pi}{20}, \frac{\pi}{20}]$, então $x = 0$ não é ponto de máximo nem de mínimo. Por outro lado $f(\pm\pi) = 0$; logo, $\frac{2\pi}{3}$ é ponto de mínimo absoluto e $-\frac{2\pi}{3}$ é ponto máximo absoluto. Veja o desenho:

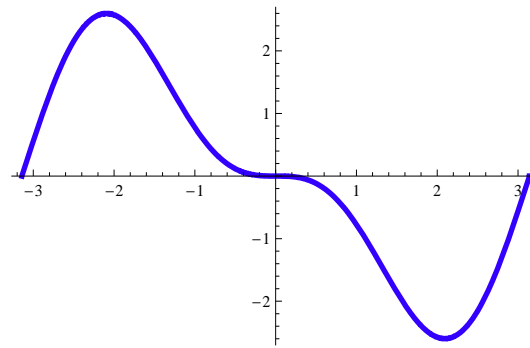


Figura 5.26: Gráfico de $f(x) = \text{sen}(2x) - 2\text{sen}(x)$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

5.4 Concavidade e Pontos de Inflexão de Funções

Seja $y = f(x)$ uma função derivável em D , onde D é um intervalo aberto ou uma reunião de intervalos abertos.

Definição 5.5.

1. f é dita **côncava para cima** em D se $f'(x)$ é crescente em D .
2. f é dita **côncava para baixo** em D se $f'(x)$ é decrescente em D .

Intuitivamente, quando um ponto se desloca ao longo do gráfico de uma função f , da esquerda para a direita e a reta tangente nesse ponto vai girando no sentido anti-horário, isto significa que o coeficiente angular dessa reta tangente cresce à medida que x aumenta. Neste caso a função tem a concavidade voltada para cima.

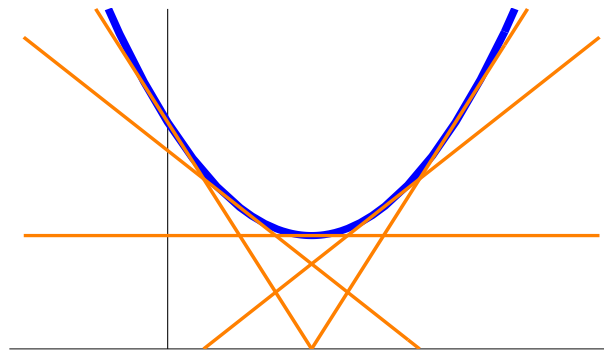


Figura 5.27: Função côncava para cima.

Analogamente, quando um ponto se desloca ao longo do gráfico de uma função f , da esquerda para a direita e a reta tangente nesse ponto vai girando no sentido horário,

isto significa que o coeficiente angular dessa reta tangente decresce à medida que x aumenta. Neste caso a função tem a concavidade voltada para baixo.

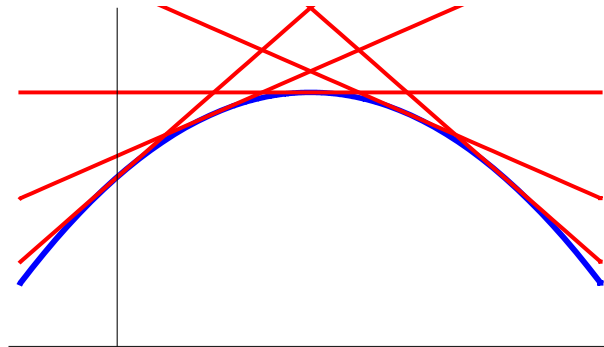


Figura 5.28: Função côncava para baixo.

Não confundir concavidade com crescimento ou decrescimento de uma função. No desenho a seguir, o gráfico de uma função crescente e côncava para cima e o de uma função decrescente e côncava para cima, respectivamente.

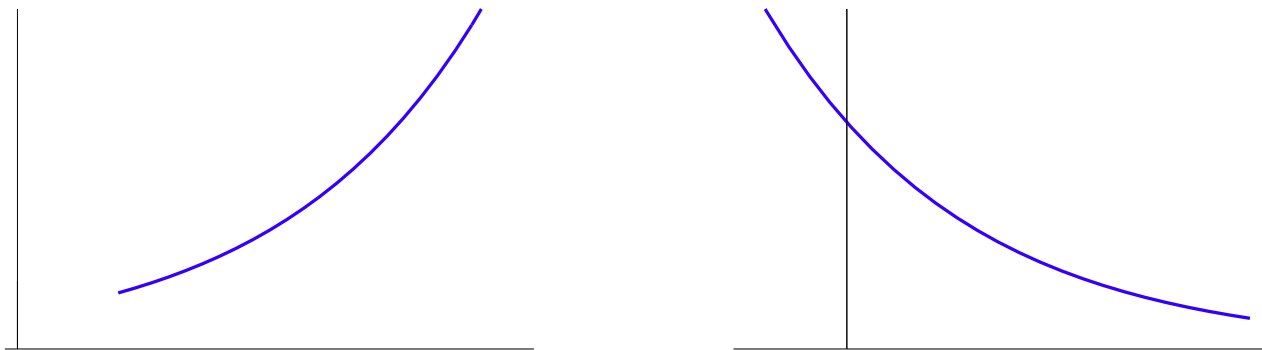


Figura 5.29:

No desenho abaixo, o gráfico de uma função crescente e côncava para baixo e o de uma função decrescente e côncava para baixo, respectivamente.

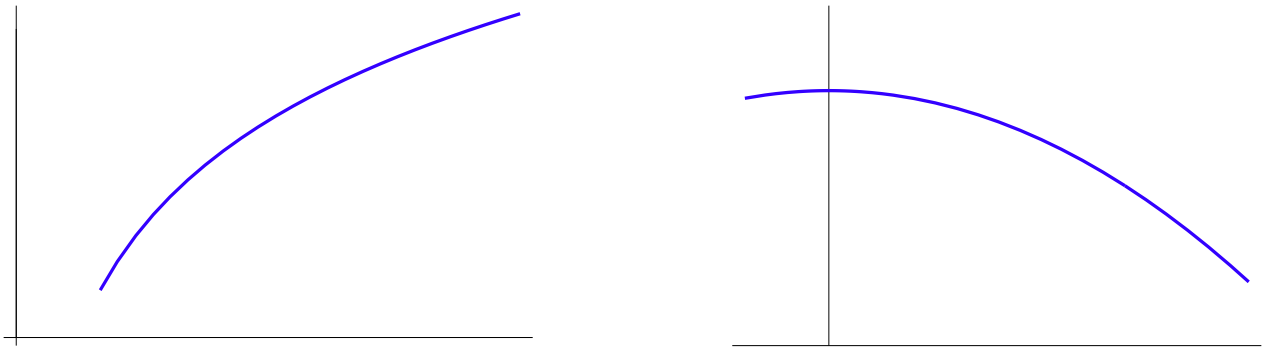


Figura 5.30:

Proposição 5.3. Seja $y = f(x)$ uma função duas vezes derivável em D .

1. Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in D$, então f é côncava para cima em D .
2. Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in D$, então f é côncava para baixo em D .

A prova segue diretamente das definições.

Exemplo 5.11.

Considere a função $f(x) = x^4 - x^2$.

[1] Determine, onde f é côncava para cima.

[2] Determine, onde f é côncava para baixo.

Calculando a segunda derivada:

$$f''(x) = 2(6x^2 - 1).$$

Logo,

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 & \quad \text{se} \quad x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, +\infty\right) \\ f''(x) < 0 & \quad \text{se} \quad x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right). \end{aligned}$$

f é côncava para cima em $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, +\infty\right)$.

f é côncava para baixo em $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

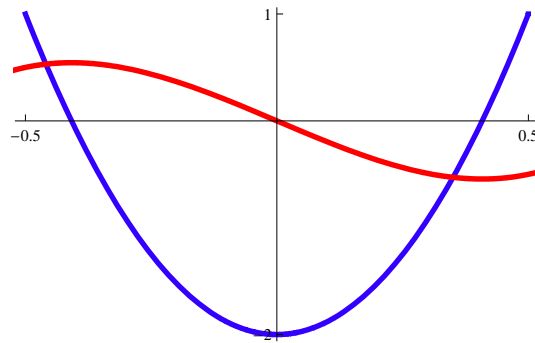


Figura 5.31: Gráficos de f' (vermelho) e f'' (azul).

Definição 5.6. Um ponto $(x_0, f(x_0))$ do gráfico de uma função f é um ponto de **inflexão** de f , se existe um pequeno intervalo $(a, b) \subset D$ tal que $x_0 \in (a, b)$ e:

1. f é côncava para cima em (a, x_0) e côncava para baixo em (x_0, b) , ou
2. f é côncava para baixo em (a, x_0) e côncava para cima em (x_0, b) .

Observações 5.3.

1. Se a função é duas vezes derivável, para obter os pontos x_0 , candidatos a pontos de inflexão, resolvemos a equação:

$$\boxed{f''(x) = 0}.$$

e estudamos o sinal de $f''(x)$ para $x > x_0$ e $x < x_0$ (x_0 solução da equação). $f''(x_0) = 0$ não implica em que x_0 seja abscissa de um ponto de inflexão.

De fato, $f(x) = x^4$, $f''(x) = 12x^2$; logo, $f''(x) = 0$ se $x = 0$ e $x = 0$ é um ponto de mínimo (verifique!). Note que se $f''(x_0) = 0$ e $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, então, x_0 é um ponto de inflexão.

2. Num ponto de inflexão, não necessariamente existe a segunda derivada da função.

De fato, seja $f(x) = x|x|$; se $x > 0$ temos $f''(x) = 2$ e se $x < 0$ temos $f''(x) = -2$; então, 0 é um ponto de inflexão e $f''(0)$ não existe. Como exercício esboce o gráfico de f .

Exemplo 5.12.

[1] Seja $f(x) = x^3$; então: $f''(x) = 6x$. Por outro lado, $f''(x) > 0$ se $x > 0$ e $f''(x) < 0$ se $x < 0$; logo, $x_0 = 0$ é ponto de inflexão de f .

[2] Seja $f(x) = x^4 - x^2$; então: $f''(x) = 2(6x^2 - 1)$.

$$f''(x) > 0 \quad \text{se} \quad x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, +\infty\right)$$

$$f''(x) < 0 \quad \text{se} \quad x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Então $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$ e $x = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ são os pontos de inflexão de f .

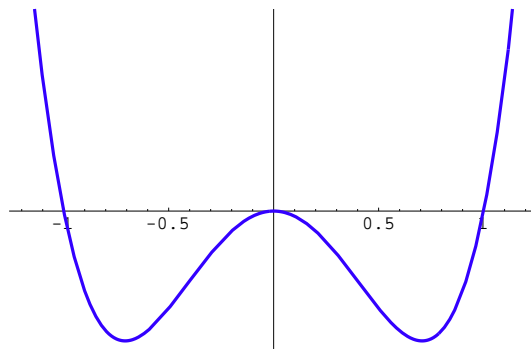


Figura 5.32: Gráfico de $f(x) = x^4 - x^2$.

[3] Seja $f(x) = \text{sen}(2x) - 2\text{sen}(x)$, $-\pi < x < \pi$; então:

$$f''(x) = 2(\text{sen}(x) - 2\text{sen}(2x)) = -2\text{sen}(x)(4\cos(x) - 1)$$

$$f''(x) > 0 \quad \text{se} \quad x \in \left(-\arccos\left(\frac{1}{4}\right), 0\right) \cup \left(\arccos\left(\frac{1}{4}\right), \pi\right).$$

$$f''(x) < 0 \quad \text{se} \quad x \in \left(-\pi, -\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right) \cup \left(0, \arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right).$$

Então $x = 0$, $x = -\arccos(\frac{1}{4})$ e $x = \arccos(\frac{1}{4})$ são os pontos de inflexão de f .

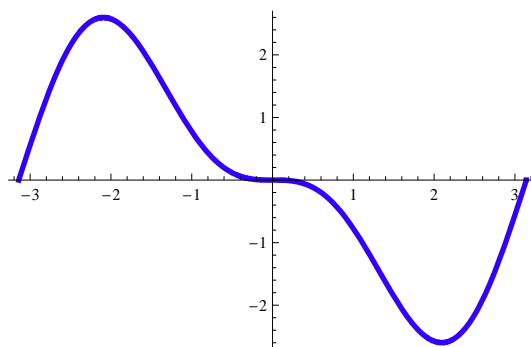


Figura 5.33: Gráfico de $f(x) = \text{sen}(2x) - 2\text{sen}(x)$, $-\pi < x < \pi$.

5.5 Esboço do Gráfico de Funções

Para obter o esboço do gráfico de uma função, siga os seguintes passos:

- Determine o $\text{Dom}(f)$.
- Calcule os pontos de interseção do gráfico com os eixos coordenados.
- Calcule os pontos críticos.
- Determine se existem pontos de máximo e mínimo.
- Estude a concavidade e determine os pontos de inflexão.
- Determine se a curva possui assíntotas.
- Esboço.

Exemplo 5.13.

Esboce o gráfico das seguinte funções:

$$[1] \ y = f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}.$$

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Interseções com os eixos coordenados:** Não possui interceptos.
- Pontos críticos de f :**

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2};$$

logo, resolvendo a equação $f'(x) = 0$, obtemos $x = 2$ e $x = -2$, que são os pontos críticos de f .

d) **Máximos e mínimos relativos de f :**

$$f''(x) = \frac{8}{x^3}.$$

Logo, $f''(2) > 0$ e $f''(-2) < 0$; logo, 2 e -2 são o ponto de mínimo e de máximo relativo de f , respectivamente.

e) **Estudemos a concavidade de f :** Note que $f''(x) \neq 0$. Por outro lado

$$\begin{aligned} f''(x) &> 0 & \text{se } x \in A = (0, +\infty) \\ f''(x) &< 0 & \text{se } x \in B = (-\infty, 0). \end{aligned}$$

f é côncava para cima em A e côncava para baixo em B . O gráfico não possui pontos de inflexão.

f) **Assíntotas.**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4}{x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4}{x} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 4}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 4}{x} = -\infty.$$

g) **Esboço do gráfico:** O gráfico de f passa pelos pontos $(2, 4)$ e $(-2, -4)$ que são os pontos de mínimo e máximo, respectivamente, de f .

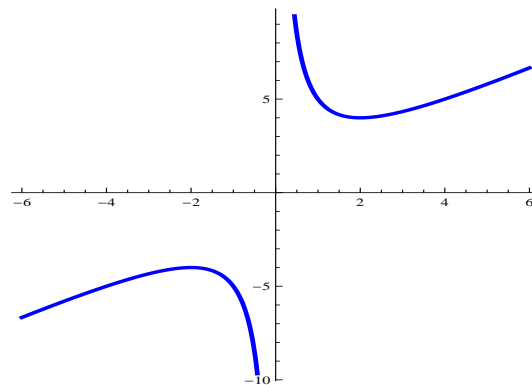


Figura 5.34: Gráfico de $y = \frac{x^2 + 4}{x}$.

$$[2] \quad y = f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{2 + \cos(x)}, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

a) $\operatorname{Dom}(f) = [-\pi, \pi].$

b) **Interseções com os eixos coordenados:** se $y = 0$, então $\text{sen}(x) = 0$ o que implica em $x = \pm\pi$ ou $x = 0$; a curva passa pelos pontos $(0, 0)$, $(-\pi, 0)$ e $(\pi, 0)$.

c) **Pontos críticos de f em $(-\pi, \pi)$:**

$$f'(x) = \frac{2 \cos(x) + 1}{(2 + \cos(x))^2};$$

logo, resolvendo a equação $f'(x) = 0$, obtemos $x = \pm \frac{2\pi}{3}$ que são os pontos críticos de f .

d) **Máximos e mínimos relativos de f em $(-\pi, \pi)$:**

$$f''(x) = \frac{2 \text{sen}(x) (\cos(x) - 1)}{(2 + \cos(x))^3}.$$

Logo, $f''(\frac{2\pi}{3}) < 0$ e $f''(-\frac{2\pi}{3}) > 0$; então $x = \frac{2\pi}{3}$ é ponto de máximo relativo e $x = -\frac{2\pi}{3}$ é ponto de mínimo relativo de f . Por outro lado, $f(-\pi) = f(\pi) = 0$; logo, $\frac{2\pi}{3}$ é ponto de máximo absoluto e $-\frac{2\pi}{3}$ é ponto de mínimo absoluto de f .

e) **Estudemos a concavidade de f em $(-\pi, \pi)$:** $f''(x) = 0$ implica em $\text{sen}(x) = 0$ ou $\cos(x) = 1$; logo, $x_0 = 0$; $x = \pm\pi$. Então,

$$\begin{aligned} f''(x) &> 0 & \text{se } x &\in (-\pi, 0) \\ f''(x) &< 0 & \text{se } x &\in (0, \pi). \end{aligned}$$

f é côncava para cima em $(-\pi, 0)$ e f é côncava para baixo em $(0, \pi)$; logo, $x = 0$ é a abscissa do ponto de inflexão de f .

f) **A curva não possui assíntotas.**

g) **Esboço do gráfico:**

O gráfico de f passa pelos pontos $(0, 0)$, $(-\pi, 0)$, $(\pi, 0)$ $(\frac{2\pi}{3}, f(\frac{2\pi}{3})) = (\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$, que é o ponto de máximo de f ; $(-\frac{2\pi}{3}, f(-\frac{2\pi}{3})) = (-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$, que é o ponto de mínimo de f ; $(0, 0)$ é o ponto de inflexão de f .

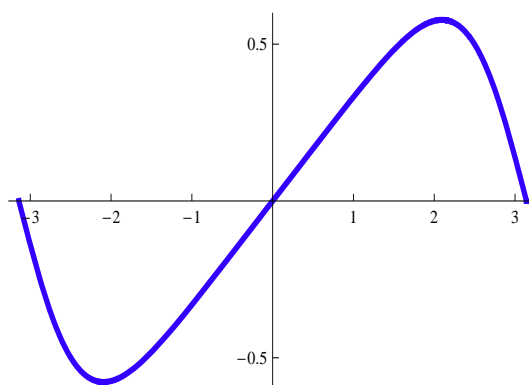


Figura 5.35: Gráfico de $y = \frac{\text{sen}(x)}{2+\cos(x)}$.

[3] $y = f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1 - x^2)$.

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

b) Interseções com os eixos coordenados: Se $x = 0$, então $y = 0$; logo, a curva passa pelo ponto $(0, 0)$. Se $y = 0$, então $x = 0$ ou $x = \pm 1$; logo, a curva passa pelos pontos $(0, 0)$, $(-1, 0)$ e $(1, 0)$.

c) Pontos críticos de f : Se $x \neq 0$; então,

$$f'(x) = \frac{2x(1 - 4x^2)}{3(x^2)^{\frac{2}{3}}}.$$

A função $f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1 - x^2)$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$. Mas não existe $f'(0)$; logo, no ponto $(0, 0)$ do gráfico deve existir uma "cúspide" como foi observado no gráfico do valor absoluto. Se $x \neq 0$, os pontos críticos de f são $x = -\frac{1}{2}$ e $x = \frac{1}{2}$.

d) Máximos e mínimos relativos de f . Se $x \neq 0$; então:

$$f''(x) = -\frac{2(20x^2 + 1)}{9(x^2)^{\frac{2}{3}}}.$$

$f''(-\frac{1}{2}) < 0$ e $f''(\frac{1}{2}) < 0$; logo, $x = -\frac{1}{2}$ e $x = \frac{1}{2}$ são pontos de máximos relativos de f . Se $x = 0$, estudamos o sinal da derivada de f para valores à esquerda e à direita de $x = 0$: $f'(x) > 0$ se $0 < x < \frac{1}{2}$ e $f'(x) < 0$, se $-\frac{1}{2} < x < 0$; logo, $x = 0$ é um ponto de mínimo local de f .

e) Concavidade de f . $f''(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. f é côncava para baixo em $\mathbb{R} - \{0\}$.

f) Assíntotas. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{x^2} (x^2 - 1) = +\infty$. Logo, f não possui assíntotas horizontais e nem verticais.

g) Esboço do gráfico:

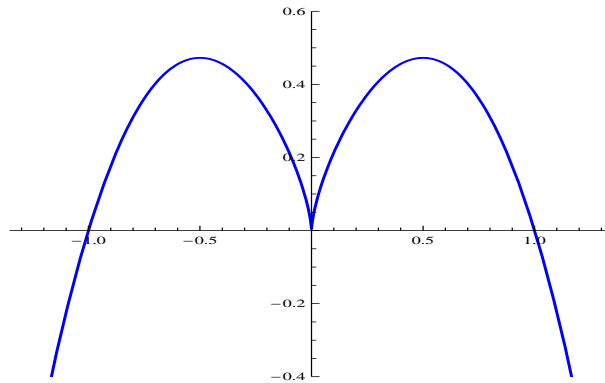


Figura 5.36: Gráfico de $f(x) = x^{2/3}(1-x^2)$.

[4] $y = f(x) = e^{-\frac{(x-a)^2}{b}}$, onde $b > 0$, representa uma família de curvas e é chamada função densidade de probabilidade normal padrão, que tem um papel relevante em Probabilidade e Estatística.

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

b) A curva passa pelo ponto $(0, e^{-\frac{a^2}{b}})$.

c) Pontos críticos de f :

$$f'(x) = -\frac{2(x-a)}{b} e^{-\frac{(x-a)^2}{b}}; \text{ logo, } x = a \text{ é o ponto crítico de } f.$$

d) Máximos e mínimos relativos de f :

$$f''(x) = \frac{2}{b} e^{-\frac{(x-a)^2}{b}} \left[\frac{2(x-a)^2}{b} - 1 \right]. f''(a) < 0; \text{ logo, } a \text{ é ponto de máximo relativo de } f.$$

e) As abscissas dos pontos de inflexão são: $x = a \pm \sqrt{\frac{b}{2}}$

f) Assíntotas: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{b}} = 0$. Logo, $y = 0$ é a assíntota horizontal da curva.

g) Esboço dos gráficos para $a = 0, b = 1, a = b = 1, a = 2, b = 1$ e $a = 1, b = 2$.

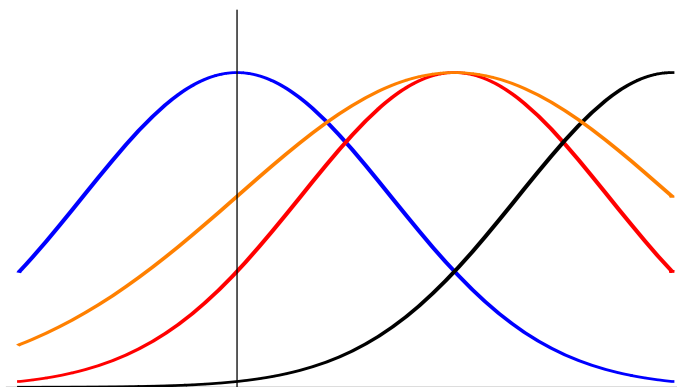


Figura 5.37: Gráfico de $y = e^{-\frac{(x-a)^2}{b}}$.

[5] $y = f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + c}$, ($c \in \mathbb{R}$), que representa uma família de curvas.

a) A solução da equação $x^2 + 2x + c = 0$ é $r_0 = -1 \pm \sqrt{1 - c}$; então, se $c > 1$, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, se $c = 1$, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ e se $c < 1$, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{r_0\}$.

b) Se $x = 0$, então $y = \frac{1}{c}$, se $c \neq 0$. Neste caso, a interseção com o eixo dos y é $(0, \frac{1}{c})$.

c) Pontos críticos:

$$f'(x) = -\frac{2(x+1)}{(x^2 + 2x + c)^2},$$

$f'(x) = 0$ se $x = -1$, ($c \neq 1$). Neste caso, o ponto crítico é $(-1, \frac{1}{c-1})$.

d) Máximos e mínimos:

$f''(x) = \frac{2(3x^2 + 6x + 4 - c)}{(x^2 + 2x + c)^3}$ e $vf''(-1) = -\frac{2}{(c-1)^2} < 0$; logo, $x = -1$ é ponto de máximo relativo se $c \neq 1$.

e) Resolvendo $f''(x) = 0$, obtemos $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3(c-1)}}{3}$. Se $c > 1$, temos dois pontos de inflexão.

f) Assíntotas.

Assíntotas horizontais: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + c} = 0$; então, $y = 0$ é assíntota horizontal.

Assíntotas verticais:

Se $c = 1$, $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x^2 + 2x + 1} = \infty$ e se $c < 1$, $\lim_{x \rightarrow -1 \pm \sqrt{1-c}} \frac{1}{x^2 + 2x + c} = \infty$.

$x = -1$ e $x = -1 \pm \sqrt{1-c}$ são assíntotas verticais da curva, para $c = 1$ e $c < 1$, respectivamente.

g) Esboço dos gráficos:

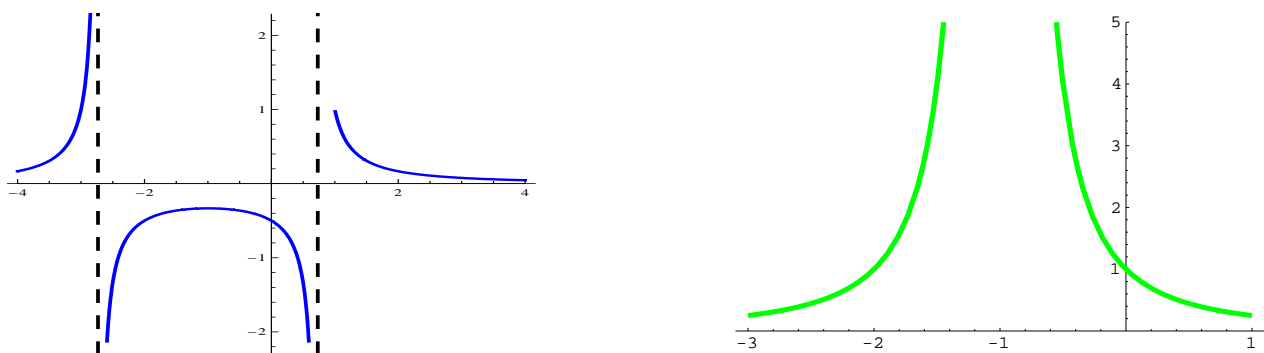


Figura 5.38: Esboço dos gráficos para $c = -2$ e $c = 1$, respectivamente.

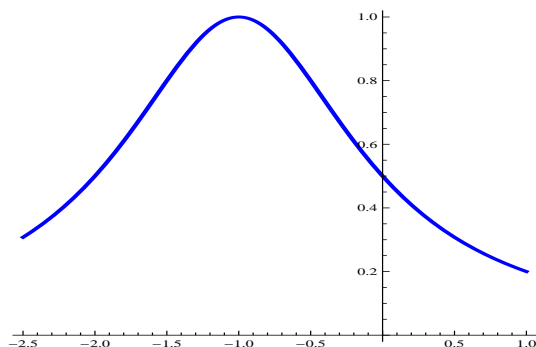


Figura 5.39: Esboço para $c = 2$.

[6] $y = f(x) = \frac{cx}{1 + c^2 x^2}$, ($c \in \mathbb{R}$), que representa uma família de curvas.

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

b) Interseções com os eixos coordenados: $(0, 0)$.

c) Pontos críticos de f :

$f'(x) = -\frac{c(cx - 1)(cx + 1)}{(1 + c^2 x^2)^2}$; se $c \neq 0$, $x = \frac{1}{c}$ e $x = -\frac{1}{c}$ são os pontos críticos de f .

d) Máximos e Mínimos:

$f''(x) = \frac{2c^3 x(c^2 x^2 - 3)}{(1 + c^2 x^2)^3}$; $f''(\frac{1}{c}) = -\frac{c^2}{2}$; logo, $x = \frac{1}{c}$ é ponto de máximo relativo de f e

$f''(-\frac{1}{c}) = \frac{c^2}{2}$; logo, $x = -\frac{1}{c}$ é ponto de mínimo relativo de f . ($c \neq 0$).

e) Pontos de inflexão: $x = 0$, $x = -\frac{\sqrt{3}}{c}$ e $x = \frac{\sqrt{3}}{c}$.

f) Assíntotas: $y = 0$ é assíntota horizontal da curva.

g) Esboço dos gráficos. Observe que a função é ímpar.

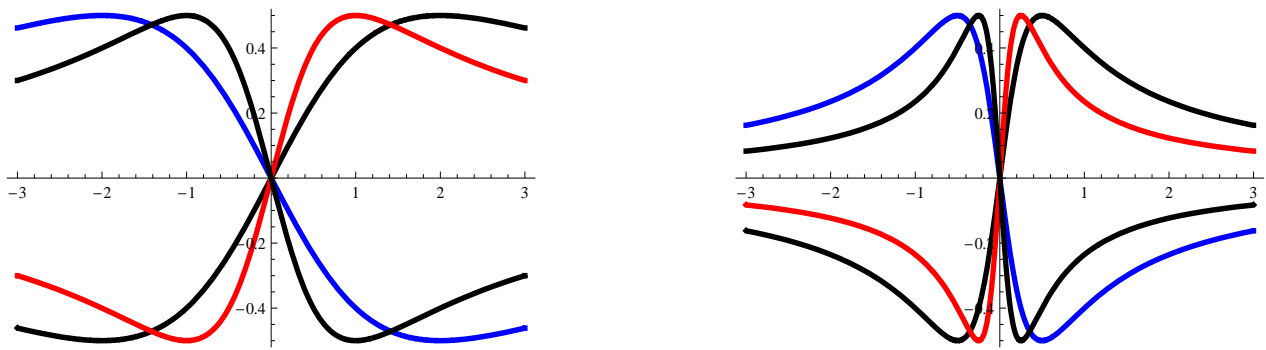


Figura 5.40: Esboço dos gráficos para $c = \pm\frac{1}{2}$, $c = \pm 1$, e $c = \pm 2$, $c = \pm 4$

5.6 Problemas de Otimização

Nesta seção apresentaremos problemas de maximização e minimização aplicados à diversas áreas. O primeiro passo para resolver este tipo de problema é determinar, de forma precisa, a função a ser otimizada. Em geral, obtemos uma expressão de duas variáveis, mas usando as condições adicionais do problema, esta expressão pode ser reescrita como uma função de uma variável derivável e assim poderemos aplicar os teoremas.

Exemplo 5.14.

[1] Determine dois números reais positivos cuja soma é 70 e tal que seu produto seja o maior possível.

Considere $x, y > 0$ tal que $x + y = 70$; logo, $x, y \in [0, 70]$; o produto é: $P = xy$. Esta é a função que devemos maximizar. Como $y = 70 - x$, substituindo em P :

$$P(x) = xy = x(70 - x).$$

$P : [0, 70] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável. Derivando: $P'(x) = 70 - 2x = 2(35 - x)$; o ponto crítico é $x = 35$. Analisando o sinal de P' , é claro que este ponto é ponto de máximo para P e $y = 35$; logo, $P = 1225$ é o produto máximo. Os números são $x = y = 35$. Note que $P(0) = P(70) = 0$.

[2] Determine os pontos da curva $xy = 1$ mais próximos da origem.

Seja (x, y) um ponto da curva e considere: $d((0, 0), (x, y)) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Minimizar d é equivalente a minimizar $d^2((0, 0), (x, y)) = x^2 + y^2$; mas como (x, y) pertence à curva, temos que $y = x^{-1}$; logo, obtemos a seguinte função:

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

Derivando e igualando a zero:

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} = 0,$$

obtem-se $x = \pm 1$. Calculando a segunda derivada de f : $f''(x) = 2 + \frac{6}{x^4}$, que é sempre positiva; logo, $x = \pm 1$ são pontos de mínimo; os pontos mais próximos da origem são $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

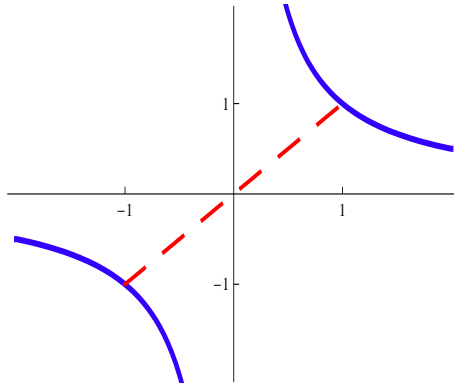


Figura 5.41: Exemplo 1.

[3] Determine as dimensões do retângulo de maior área que pode ser inscrito na elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad a, b > 0.$$

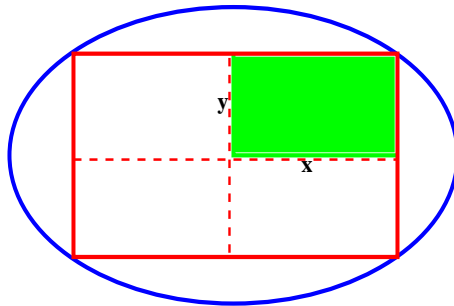


Figura 5.42: Exemplo 2.

Pela simetria da figura, estudaremos o problema no primeiro quadrante e multiplicaremos o resultado por quatro. A área do retângulo é $4xy$, mas otimizaremos o quadrado de área $A = 16x^2y^2$; como $y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, então:

$$A(x) = 16b^2x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \quad x > 0.$$

Derivando e igualando a zero:

$$A'(x) = \frac{32b^2}{a^2} [x(a^2 - 2x^2)] = 0,$$

obtem-se $x = \frac{\sqrt{2}a}{2}$.

Estudando o sinal da derivada de A temos que $x = \frac{\sqrt{2}a}{2}$ é ponto de máximo de A e $y = \frac{\sqrt{2}b}{2}$; logo, a área do maior retângulo que pode ser inscrito na elipse é: $A = 2ab$. As dimensões do retângulo são $2x = \sqrt{2}a$ e $2y = \sqrt{2}b$.

[4] Uma lata cilíndrica sem tampa superior tem volume 5 cm^3 . Determine as dimensões da lata, de modo que a quantidade de material para sua fabricação seja mínima.

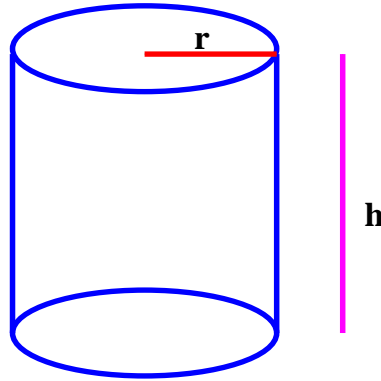


Figura 5.43: Exemplo [4].

Devemos minimizar a área. A área do cilindro e da tampa inferior são: $A_1 = 2\pi r h$ e $A_2 = \pi r^2$, respectivamente, onde r e h são o raio e a altura do cilindro; logo, devemos minimizar:

$$A = A_1 + A_2 = 2\pi r h + \pi r^2.$$

Mas o volume é 5; logo, $5 = V = \pi r^2 h$ e $h = \frac{5}{\pi r^2}$; substituindo h na expressão a minimizar, temos:

$$A(r) = \frac{10}{r} + \pi r^2.$$

Derivando e igualando a zero:

$$A'(r) = -\frac{10}{r^2} + 2\pi r = 0,$$

obtem-se $r = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$.

$$A''(r) = \frac{20}{r^3} + 2\pi > 0;$$

$r = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$ é o ponto de mínimo e $h = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$. Logo, as dimensões da lata são $r = h = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}} \text{ cm}$.

[5] Quadrados iguais são cortados de cada canto de um pedaço retangular de cartolina, medindo 8 cm de largura e 15 cm de comprimento. Uma caixa sem tampa é construída virando os lados para cima. Determine o comprimento dos lados dos quadrados que devem ser cortados para a produção de uma caixa de volume máximo.

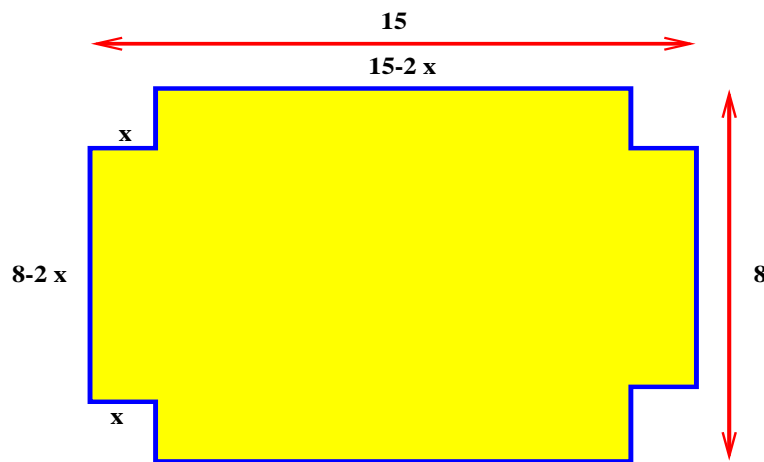


Figura 5.44: Exemplo [5].

A altura da caixa é x ; a largura é $8 - 2x$ e o comprimento é $15 - 2x$, observando que $0 < x < 4$. Logo, devemos maximizar:

$$V(x) = x(8 - 2x)(15 - 2x) = 4x^3 - 46x^2 + 120x.$$

Derivando e igualando a zero:

$$V'(x) = 12x^2 - 92x + 120 = (x - 6)(12x - 20) = 0,$$

obtemos $x = 6$ ou $x = \frac{5}{3}$. Mas, $6 \notin (0, 4)$; então, $x_0 = \frac{5}{3}$ é o único ponto crítico de V ; logo, estudando o sinal de V' , x_0 é ponto de máximo. Então, $x_0 = 1.6 \text{ cm}$ e $V = 90.74 \text{ cm}^3$. (Verifique!).

[6] Calcule as dimensões de um cone circular de volume máximo que pode ser inscrito numa esfera de raio a .

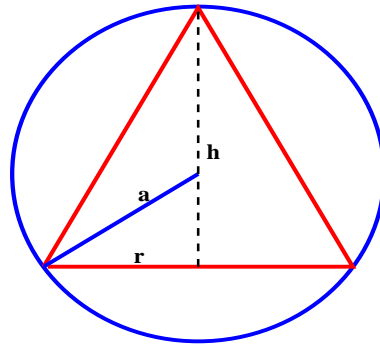


Figura 5.45: Uma vista bidimensional do exemplo [6].

Usando o teorema de Pitágoras temos que $r^2 = a^2 - (h - a)^2 = 2ah - h^2$.

O volume é $V = \frac{r^2 h \pi}{3}$; logo,

$$V(h) = \frac{h \pi}{3} (2ah - h^2),$$

sendo $0 < h < 2a$. Derivando e igualando a zero:

$$V'(h) = \frac{4h\pi}{3} \left(a - \frac{3h}{4}\right) = 0,$$

obtemos $h = 0$ ou $h = \frac{4a}{3}$; $h = 0$ não é solução; então, $h = \frac{4a}{3}$ é o ponto de máximo e $r = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

[7] Um tanque cônico de aço, sem tampa, tem capacidade de 1000 m^3 . Determine as dimensões do tanque que minimiza a quantidade de aço usada na sua fabricação.

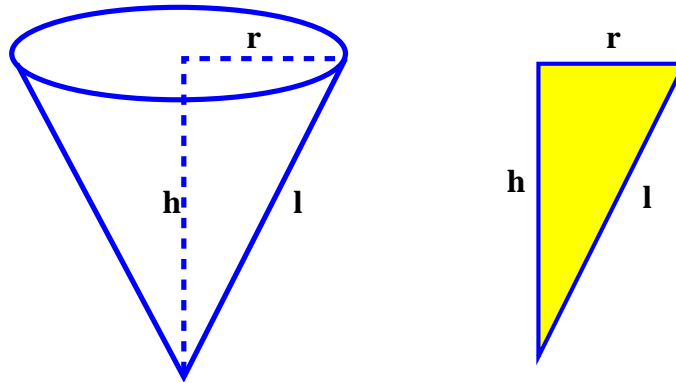


Figura 5.46: Exemplo [7].

A área do cone é: $A_1 = \pi r l = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$, onde na última igualdade usamos o teorema de Pitágoras. Por outro lado, o volume do tanque é de 1000 m^3 ; logo, $1000 = V =$

$\frac{1}{3} \pi r^2 h$ e $h = \frac{3000}{\pi r^2}$; substituindo h na expressão a minimizar:

$$A_1 = \pi r \sqrt{r^2 + \frac{(3000)^2}{\pi^2 r^4}}.$$

Como antes, minimizaremos $A = (A_1)^2$. Logo:

$$A(r) = \pi^2 r^4 + k r^{-2},$$

onde $k = (3000)^2$. Derivando e igualando a zero:

$$A'(r) = 4 \pi^2 r^3 - 2 \frac{k}{r^3} = 0,$$

obtemos $r = \sqrt[6]{\frac{k}{2 \pi^2}}$. Usando o teorema A, temos que $r = \sqrt[6]{\frac{k}{2 \pi^2}}$ é o ponto de mínimo e

$h = \sqrt[6]{\frac{4k}{\pi^2}}$. As dimensões do tanque são $r \cong 8.773 \text{ m}$ e $h \cong 12.407 \text{ m}$ e $A_1 \cong 418.8077 \text{ m}^2$.

[8] Um pescador está a 2 km de um ponto A de uma praia e deseja alcançar um depósito de combustível no ponto B , a 3 km de A . Sua velocidade na água é de 5 km por hora e na terra é de 13 km por hora. Determine o ponto da praia que deve ser alcançado pelo pescador para chegar ao depósito no tempo mínimo.

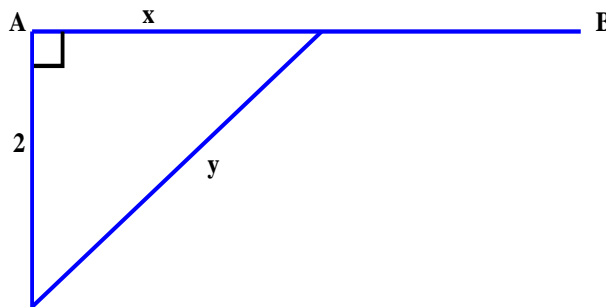


Figura 5.47: Exemplo [8].

No desenho $y = \sqrt{4 + x^2}$. A função a minimizar é:

$$f(x) = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{5} + \frac{3 - x}{13}.$$

Derivando e igualando a zero:

$$f'(x) = -\frac{1}{13} + \frac{x}{5\sqrt{4 + x^2}} = 0,$$

obtemos $x = \frac{5}{6}$ e, calculando a derivada segunda de f :

$$f''(x) = \frac{4}{5(x^2 + 4)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

Logo, $f''(\frac{5}{6}) > 0$ e $x = \frac{5}{6}$ é o ponto procurado.

[9] Uma folha de aço de 10 metros de comprimento e 4 metros de largura é dobrada ao meio para fazer um canal em forma de V de 10 metros de comprimento. Determine a distância entre as margens do canal, para que este tenha capacidade máxima.

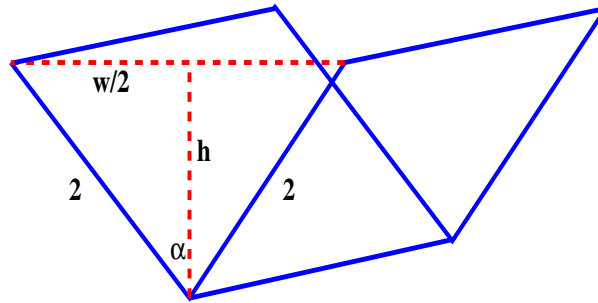


Figura 5.48: Exemplo [9].

Observemos que $\frac{w}{2} = 2 \sin(\alpha)$ e $h = 2 \cos(\alpha)$. Então, podemos escrever a área do triângulo como função de α . De fato,

$$A(\alpha) = \frac{w h}{2} = 2 \sin(2\alpha), \quad \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Derivando $\frac{dA}{d\alpha} = 4 \cos(2\alpha)$ e igualando a zero, obtemos que $\cos(2\alpha) = 0$ se $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Calculando a derivada segunda: $\frac{d^2A}{d\alpha^2} = -8 \sin(2\alpha) < 0$; logo, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ é ponto de máximo e:

$$w = 4 \sin(\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2} \quad \text{metros.}$$

[10] Em que ponto da curva $y = 1 - x^2$, a reta tangente à curva nesse ponto forma no primeiro quadrante um triângulo de área mínima? Determine a área.

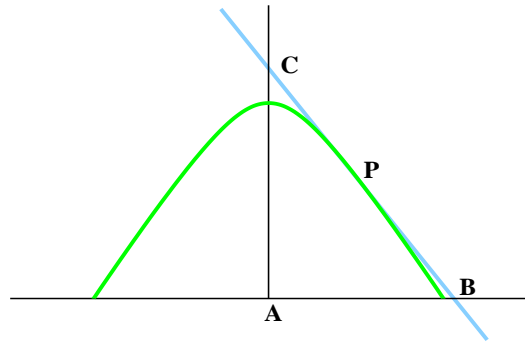


Figura 5.49: Exemplo [10].

Seja $P = (x_0, y_0)$ o ponto procurado. A equação da reta tangente à curva passando pelo ponto P é:

$$y - y_0 = -2x_0(x - x_0).$$

Como $y_0 = 1 - x_0^2$, temos $y = -2x_0x + x_0^2 + 1$. Se $x = 0$, $y = 1 + x_0^2$ e se $y = 0$, $x = \frac{x_0^2 + 1}{2x_0}$.

O triângulo ABC é formado por $A = (0, 0)$, $B = (\frac{x_0^2 + 1}{2x_0}, 0)$ e $C = (0, 1 + x_0^2)$. A área é:

$$A(x_0) = \frac{(x_0^2 + 1)^2}{4x_0}, \quad x_0 > 0.$$

Derivando e igualando a zero:

$$\frac{dA}{dx_0} = \frac{(3x_0^2 - 1)(x_0^2 + 1)}{4x_0^2},$$

obtemos $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Calculando a segunda derivada:

$$\frac{d^2A}{dx_0^2} = \frac{3x_0^4 + 1}{2x_0^3};$$

como para todo $x_0 > 0$, $\frac{d^2A}{dx_0^2}(x) > 0$, $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ é ponto de mínimo. A área é $A(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{4\sqrt{3}}{9}$.

[11] Um fóton (raio de luz) parte de um ponto A para um ponto B sobre um espelho plano, sendo refletido quando passa pelo ponto P . Estabeleça condições para que o caminho \overline{APB} seja o mais curto possível.

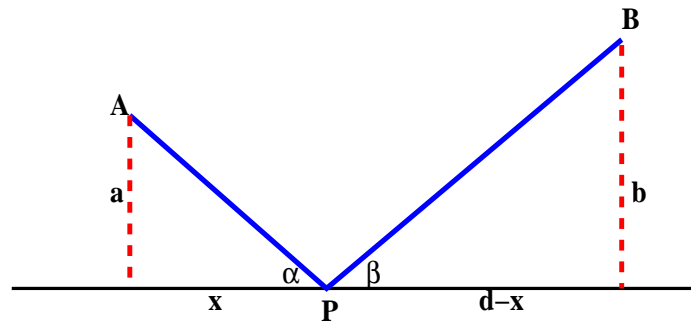


Figura 5.50: Exemplo [11].

Devemos minimizar o comprimento L do percurso:

$$L(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d-x)^2}.$$

Derivando, $\frac{dL}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$ e igualando a zero, obtemos:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}},$$

que é equivalente a $\frac{a}{x} = \frac{b}{d-x}$, donde obtemos que $\alpha = \beta$. Esta é a condição para que o caminho \overline{APB} seja o mais curto. De fato, o ponto crítico $x = \frac{ad}{a+b}$ é de mínimo, pois,

$$\frac{d^2L}{dx^2}(x) = \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{b^2}{((d-x)^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} > 0;$$

em particular, $\frac{d^2L}{dx^2}\left(\frac{ad}{a+b}\right) > 0$.

[12] A luz se propaga de um ponto a outro segundo uma trajetória que requer tempo mínimo. Suponha que a luz tenha velocidade de propagação v_1 no ar e v_2 na água ($v_1 > v_2$). Se a luz vai de um ponto P no ar a um ponto Q na água, que lei determina este percurso?

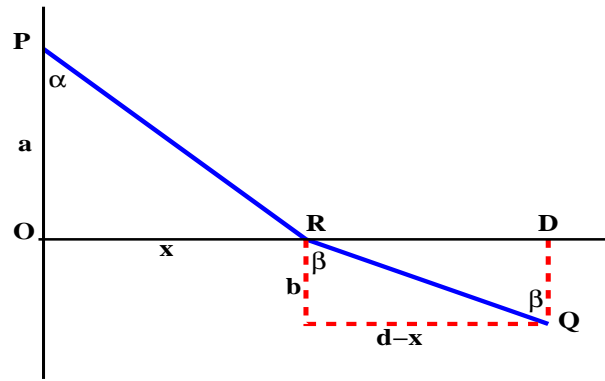


Figura 5.51: Exemplo [12].

Sejam $a = |OP|$, $b = |DQ|$, $d = |OD|$, $x = |OR|$, $\alpha = \angle(OPR)$ e $\beta = \angle(RQD)$. Os tempos necessários para o raio de luz ir de P a R e de R a Q são, respectivamente:

$$T_1 = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} \quad \text{e} \quad T_2 = \frac{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}{v_2}.$$

O tempo total de percurso de P a Q é $T = T_1 + T_2$. Minimizemos $T(x)$, $x \in [0, d]$.

$$\frac{dT}{dx} = \frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{d-x}{v_2 \sqrt{(d-x)^2 + b^2}} = \frac{\text{sen}(\alpha)}{v_1} - \frac{\text{sen}(\beta)}{v_2}.$$

$\frac{dT}{dx} = 0$ se $\frac{\text{sen}(\alpha)}{v_1} = \frac{\text{sen}(\beta)}{v_2}$, equação conhecida como lei de Snell. Para verificar que a condição:

$$\frac{\text{sen}(\alpha)}{v_1} = \frac{\text{sen}(\beta)}{v_2}$$

corresponde ao percurso de tempo mínimo, mostraremos que T é côncava para cima em todo ponto.

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{a^2 v_2 (b^2 + (d-x)^2)^{\frac{3}{2}} + b^2 v_1 (a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}{v_1 v_2 (a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} ((d-x)^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$T''(x) > 0$ para todo x , pois todas as quantidades envolvidas são positivas.

[13] Um quadro de altura a está pendurado em uma parede vertical, de modo que sua borda inferior está a uma altura h acima do nível do olho de um observador. A que distância da parede deve colocar-se o observador para que sua posição seja a mais vantajosa para contemplar o quadro, isto é, para que o ângulo visual seja máximo?

Perfil do problema:

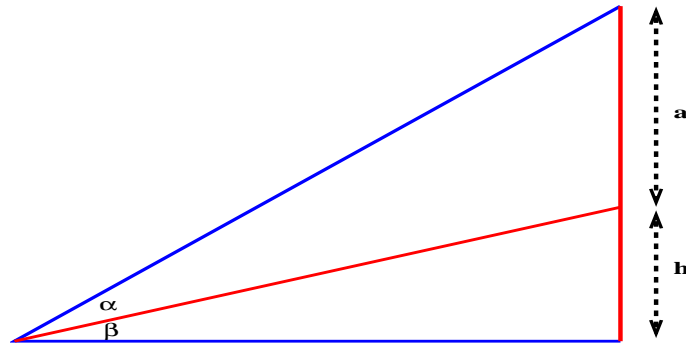


Figura 5.52: Exemplo [13].

Seja $\theta = \alpha + \beta$. Logo, $tg(\alpha) = tg(\theta - \beta) = \frac{tg(\theta) - tg(\beta)}{1 + tg(\theta)tg(\beta)}$. Então, $tg(\theta) = \frac{a+h}{x}$ e $tg(\beta) = \frac{h}{x}$; logo:

$$tg(\alpha) = \frac{a x}{x^2 + a h + h^2}.$$

Maximizemos a seguinte função:

$$f(x) = \frac{a x}{x^2 + a h + h^2}.$$

Derivando f :

$$f'(x) = \frac{a(h^2 + a h - x^2)}{(x^2 + a h + h^2)^2}.$$

O ponto crítico é $x_0 = \sqrt{h(a+h)}$; observe que a e o denominador de f' são positivos; logo, examinemos o numerador de f' .

f é crescente se $x < \sqrt{h(a+h)}$ e f é decrescente se $\sqrt{h(a+h)} < x$; então, x_0 é o ponto de máximo de f . Para que o ângulo visual seja máximo, o observador deve colocar-se à distância de $\sqrt{h(a+h)}$ da parede.

[14] Implante de Vasos Sanguíneos:

Suponha que um cirurgião necessite implantar um vaso sanguíneo numa artéria, a fim de melhorar a irrigação numa certa área. Como as quantidades envolvidas são pequenas, podemos considerar que vasos e artérias tem formato cilíndrico não elástico. Denotemos por A e B o início e o final da artéria e suponhamos que se deseje implantar o vaso num ponto da artéria, de modo que a resistência ao fluxo sanguíneo entre A e B seja a menor possível. A lei de Poiseuille afirma que a resistência R do sangue no vaso é:

$$R = \frac{k d}{r^4},$$

onde d é o comprimento do vaso, r é o raio do vaso e k uma constante positiva que depende da viscosidade do sangue. Nossa estratégia será determinar o melhor ângulo do implante. Para isto, consideremos o seguinte diagrama:

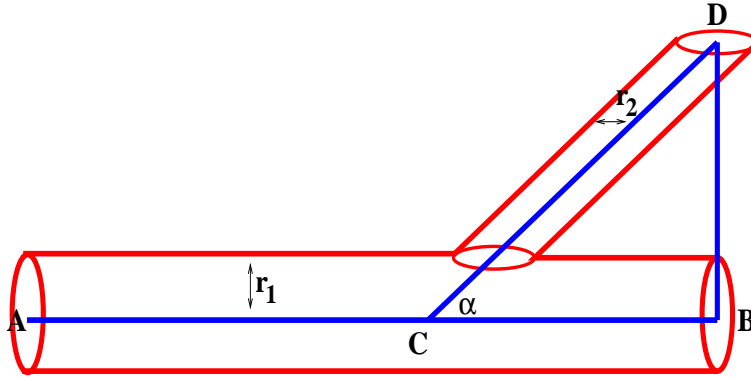


Figura 5.53: .

Sem perda de generalidade, podemos supor que $r_1 > r_2$ e $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Denotemos por d_0 o comprimento do segmento BD , d_1 o comprimento do segmento AC , d_2 o comprimento do segmento CD , x o comprimento do segmento CB e β o ângulo $\angle CAD$:

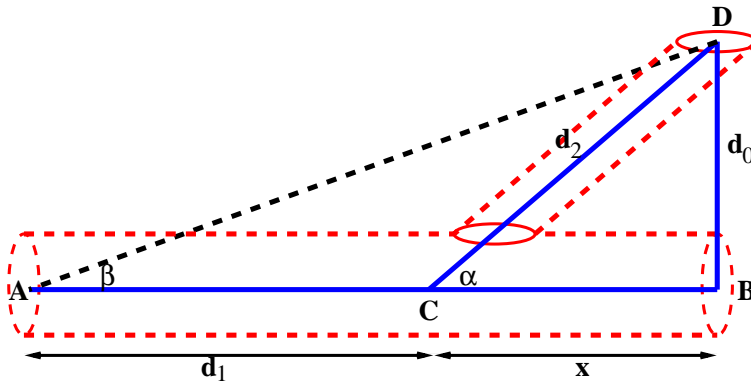


Figura 5.54: Esquema.

A resistência total é:

$$R = k \left[\frac{d_1}{r_1^4} + \frac{d_2}{r_2^4} \right].$$

Observamos que d_0 , r_1 , r_2 e β são constantes. Escrevamos R em função de α . Do desenho:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha) &= \frac{d_0}{d_2}; \quad \text{logo} \quad d_2 = \frac{d_0}{\operatorname{sen}(\alpha)}, \\ \operatorname{tg}(\beta) &= \frac{d_0}{x + d_1} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{d_0}{x}; \end{aligned}$$

$$\text{logo, } d_1 = d_0 \left[\frac{1}{\operatorname{tg}(\beta)} - \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)} \right]. \text{ Então, } R(\alpha) = c_1 \left[c_2 - \frac{\operatorname{cotg}(\alpha)}{r_1^4} + \frac{\operatorname{cosec}(\alpha)}{r_2^4} \right],$$

$$\text{onde } c_1 = k d_0 \text{ e } c_2 = \frac{\operatorname{cotg}(\beta)}{r_1^4}.$$

$$R'(\alpha) = c_1 \operatorname{cosec}(\alpha) \left[\frac{\operatorname{cosec}(\alpha)}{r_1^4} - \frac{\operatorname{cotg}(\alpha)}{r_2^4} \right] = 0;$$

$$\text{então, } \cos(\alpha) = \left[\frac{r_2}{r_1} \right]^4 \text{ e } \alpha_0 = \arccos\left(\frac{r_2^4}{r_1^4}\right) \text{ é o ponto crítico.}$$

$$R''(\alpha) = c_1 \frac{-2 \cos(\alpha) r_2^4 + \cos^2(\alpha) r_1^4 + r_1^4}{r_1^4 r_2^4 \operatorname{sen}^3(\alpha)}.$$

Sabendo que $\operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$, temos que: $R''(\alpha_0) = \frac{c_1}{r_2^4 \sqrt{1 - m^2}} > 0$, onde

$m = \left[\frac{r_2}{r_1} \right]^4$. Logo, o melhor ângulo para fazer o implante é:

$$\alpha_0 = \arccos(m).$$

Por exemplo, supondo que r_1 é 3 vezes r_2 , obtemos $m = \frac{1}{81}$ e $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{81}\right)$.

5.7 Teorema de L'Hôpital

Comumente, ao estudar limites, aparecem expressões indeterminadas. Por exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1},$$

onde a expressão indeterminada é do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$. O teorema de L'Hôpital nos indica um método para fazer desaparecer estas indeterminações e calcular limites de uma forma mais eficiente.

Teorema 5.7. de L'Hôpital

Sejam f e g funções deriváveis num domínio D que pode ser um intervalo aberto ou uma reunião de intervalos abertos, exceto possivelmente num ponto a e $g(x) \neq 0$, para todo $x \neq a$.

1. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

2. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Para a prova do teorema veja o apêndice.

Observação 5.4.

O teorema também é válido para limites laterais e para limites no infinito. Se f' e g' satisfazem às hipóteses do teorema e $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = L$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = L;$$

$$\text{logo; } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = L.$$

Em geral se $f^{(n)}$ e $g^{(n)}$ satisfazem às hipóteses do teorema e $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = L$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = L.$$

Se a função da qual estamos calculando o limite é n vezes derivável, podemos derivar sucessivamente até "eliminar" a indeterminação. Para indicar o tipo de indeterminação, denotamos $(\frac{0}{0})$, $(\frac{\infty}{\infty})$, etc.

Exemplo 5.15.

[1] Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2}$. Primeiramente observamos que o limite apresenta uma indeterminação do tipo $(\frac{\infty}{\infty})$. Aplicando o teorema, derivamos o numerador e o denominador da função racional duas vezes; então:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 4}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2} = 1.$$

[2] Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$. O limite apresenta uma indeterminação do tipo $(\frac{0}{0})$. Aplicando o teorema:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln(a)}{1} = \ln(a).$$

[3] Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$. O limite apresenta uma indeterminação do tipo $(\frac{0}{0})$. Aplicando o teorema:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

5.8 Outros tipos de indeterminações

O teorema de L'Hôpital nos indica somente como resolver indeterminações do tipo $(\frac{0}{0})$ e $(\frac{\infty}{\infty})$. Outros tipos, como $(0 \cdot \infty)$, ∞^0 , $\infty - \infty$, 0^0 e 1^∞ , podem ser resolvidos transformando-os nos tipos já estudados no teorema.

5.8.1 Caso $(0 \cdot \infty)$

[1] Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)$. O limite é uma forma indeterminada do tipo $(0 \cdot \infty)$; então fazemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}.$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$ é uma forma indeterminada do tipo $(\frac{\infty}{\infty})$. Aplicando o teorema:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln(x))'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

[2] Um objeto de massa m é deixado cair a partir do repouso. Sua velocidade após t segundos, tendo em conta a resistência do ar, é dada por: $v = \frac{mg}{c} (1 - e^{-\frac{ct}{m}})$, onde g é aceleração devida à gravidade e $c > 0$. Calculemos $\lim_{m \rightarrow +\infty} v$. O limite é uma forma indeterminada do tipo $(0 \cdot \infty)$; então fazemos:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} v = \frac{g}{c} \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-\frac{ct}{m}}}{\frac{1}{m}},$$

que é uma forma indeterminada do tipo $(\frac{0}{0})$. Aplicando o teorema:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} v = \frac{g}{c} \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-\frac{ct}{m}}}{\frac{1}{m}} = \frac{g}{c} \lim_{m \rightarrow +\infty} ct e^{-\frac{ct}{m}} = gt.$$

Como exercício, interprete este limite.

5.8.2 Caso $(\infty - \infty)$

[1] Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec(x)} \right)$. O limite é uma forma indeterminada do tipo $(\infty - \infty)$; então fazemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec(x) - 1}{x^2 \sec(x)}.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec(x) - 1}{x^2 \sec(x)}$ é uma forma indeterminada do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$. Aplicando o teorema:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec(x) - 1}{x^2 \sec(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg(x)}{2x + x^2 tg(x)}.$$

Observamos que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg(x)}{2x + x^2 tg(x)}$ é uma forma indeterminada do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$ e novamente aplicamos o teorema ao último limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg(x)}{2x + x^2 tg(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2(x)}{2 + 2x tg(x) + x^2 \sec^2(x)} = \frac{1}{2}.$$

[2] Calcule $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\sec(x) - tg(x))$. O limite é uma forma indeterminada do tipo $(\infty - \infty)$; então fazemos:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\sec(x) - tg(x)) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{1}{\cos(x)} - \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 - \sin(x)}{\cos(x)}.$$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 - \sin(x)}{\cos(x)}$ é uma forma indeterminada do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$ e novamente aplicamos o teorema:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 - \sin(x)}{\cos(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cotg(x) = 0.$$

5.8.3 Caso (1^∞)

[1] Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\cot g(x)}$. O limite é uma forma indeterminada do tipo (1^∞) ; fazendo:

$$u(x) = \ln((1+x)^{\cot g(x)}) = \cot g(x) \ln(x+1),$$

temos: $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \cot g(x) \ln(x+1)$. Este limite é uma forma indeterminada do tipo $(0 \cdot \infty)$; então, aplicamos o caso A:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cot g(x) \ln(x+1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\tg(x)};$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\tg(x)}$ é uma forma indeterminada do tipo $(\frac{0}{0})$. Aplicando o teorema:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\tg(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1+x) \sec^2(x)} = 1;$$

logo; $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln((1+x)^{\cot g(x)}) = 1$. Como $\ln(x)$ é uma função contínua em seu domínio, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln((1+x)^{\cot g(x)}) = \ln(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\cot g(x)}) = 1.$$

Da última igualdade: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\cot g(x)} = e$.

[2] Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x$. O limite é uma forma indeterminada do tipo (1^∞) ; então fazemos:

$$u(x) = \ln((1 + \frac{1}{x})^x) = x \ln(1 + \frac{1}{x});$$

então, $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1 + \frac{1}{x})$. O limite é uma forma indeterminada do tipo $(0 \cdot \infty)$; então aplicamos o caso A:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1 + \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}.$$

O limite é uma forma indeterminada do tipo $(\frac{0}{0})$. Aplicando o teorema:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x}.$$

O limite é uma forma indeterminada do tipo $(\frac{\infty}{\infty})$ e novamente aplicamos o teorema:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1.$$

Como $\ln(x)$ é uma função contínua em seu domínio, temos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right) = 1.$$

Da última igualdade: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

5.8.4 Caso (∞^0)

[1] Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x)^{e^{-x}}$. O limite é uma forma indeterminada do tipo (∞^0) ; fazemos:

$$u(x) = \ln((x)^{e^{-x}}) = \frac{\ln(x)}{e^x};$$

então, $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x}$. O limite é uma forma indeterminada do tipo $(\frac{\infty}{\infty})$ e novamente aplicamos o teorema:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x e^x} = 0.$$

Como $\ln(x)$ é uma função contínua em seu domínio, temos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln((x)^{e^{-x}}) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} (x)^{e^{-x}}\right) = 0.$$

Da última igualdade: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x)^{e^{-x}} = 1$.

[2] Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan(x)}$. O limite é uma forma indeterminada do tipo (∞^0) ; fazemos:

$$u(x) = \ln\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan(x)}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\cot(x)};$$

então, $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\cot(x)}$. O limite é uma forma indeterminada do tipo $(\frac{\infty}{\infty})$ e novamente aplicamos o teorema:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\cot(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\csc^2(x)} = 0.$$

Sendo $\ln(x)$ uma função contínua em seu domínio, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{tg(x)}\right) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{tg(x)}\right) = 0.$$

Da última igualdade: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{tg(x)} = e^0 = 1$.

5.8.5 Caso (0^0)

[1] Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$. O limite é uma forma indeterminada do tipo (0^0) ; fazemos:

$$u(x) = \ln(x^x) = x \ln(x);$$

então: $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x)$. O limite é uma forma indeterminada do tipo $(0 \cdot \infty)$ e novamente aplicamos o teorema:

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0.$$

Sendo $\ln(x)$ uma função contínua em seu domínio, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x^x) = \ln(\lim_{x \rightarrow 0} x^x) = 0.$$

Da última igualdade: $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = e^0 = 1$.

[2] Calcule $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos(x))^{\frac{\pi}{2}-x}$. O limite é uma forma indeterminada do tipo (0^0) ; fazemos:

$$u(x) = \ln((\cos(x))^{\frac{\pi}{2}-x});$$

então: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} u(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \ln(\cos(x))$. O limite é uma forma indeterminada do tipo $(0 \cdot \infty)$ e novamente aplicamos o teorema:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} u(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \ln(\cos(x)) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} -\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0.$$

Sendo $\ln(x)$ uma função contínua em seu domínio, temos:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln((\cos(x))^{\frac{\pi}{2}-x}) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos(x))^{\frac{\pi}{2}-x}\right) = 0.$$

Da última igualdade: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos(x))^{\frac{\pi}{2}-x} = e^0 = 1$.

Em geral, nos casos de potências indeterminadas, usamos a função logarítmica $y = \ln(x)$ para poder aplicar o teorema de L'Hôpital. A continuidade da função logarítmica $y = \ln(x)$ e de sua inversa $y = e^x$ permite resolver este tipo de limite.

5.9 Diferencial de uma Função

A diferencial de uma função será introduzida de maneira formal. Ao leitor interessado recomendamos a bibliografia avançada. Seja $y = f(x)$ uma função definida num domínio D e diferenciável no ponto $x_0 \in D$. Denotemos por dx o número (não nulo), tal que $dx + x_0 \in D$.

Definição 5.7.

1. Para cada $x_0 \in D$, a diferencial de $y = f(x)$ no ponto x_0 é denotada por dy ou $df(x_0)$ e definida por $dy = f'(x_0) dx$.
2. O incremento de $y = f(x)$ em x_0 é denotado por Δy e definido por $\Delta y = f(x_0 + dx) - f(x_0)$.

Observações 5.4.

1. Para x_0 fixado, dy é uma função linear sobre o domínio de todos os valores possíveis de dx e Δy é uma função sobre o domínio de todos os valores possíveis de dx .
2. Seja $dx = x - x_0$, então:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y - dy}{x - x_0} = 0.$$

3. Se $f'(x_0) \neq 0$: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{dy} = 1$. temos que dy é uma "boa" aproximação para Δy :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) dx + R(x - x_0),$$

onde $R(x - x_0)$ é uma função tal que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x - x_0)}{x - x_0} = 0$.

4. Compare com Linearização.

Exemplo 5.16.

Seja $y = f(x) = x^2$; $dy = 2x dx$; no ponto x_0 : $dy = 2x_0 dx$ e $f(x_0 + dx) - f(x_0) = 2x_0 dx + (dx)^2$; logo $\Delta y = 2x_0 dx + (dx)^2$. Então:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y - dy}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \frac{x - x_0}{2x_0}\right) = 1.$$

Por outro lado, $x^2 = x_0^2 + 2x_0 dx + R(x - x_0)$, então $\frac{R(x - x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2 - 2x_0 dx}{x - x_0} =$

$$x + x_0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

Proposição 5.4. Sejam $y = f(x)$ e $y = g(x)$ funções definidas num domínio D e diferenciáveis no ponto $x_0 \in D$, então:

1. $d(f + g)(x_0) = d(f)(x_0) + d(g)(x_0)$.
2. $d(fg)(x_0) = g(x_0)d(f)(x_0) + f(x_0)d(g)(x_0)$.

5.10 Exercícios

1. Verifique as condições do teorema de Rolle e determine os x_0 correspondentes à conclusão do teorema:

- (a) $f(x) = x^2 - 7x + 10$, no intervalo $[0, 7]$
- (b) $f(x) = x^2 - 4x$, no intervalo $[-1, 5]$
- (c) $f(x) = x^3 - 5x^2 - 17x + 21$, no intervalo $[-3, 7]$
- (d) $f(x) = \text{sen}(x) + \cos(x)$, no intervalo $[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$

2. Verifique as condições do teorema do valor médio e determine os x_0 correspondentes à conclusão do teorema.

- (a) $f(x) = x^3 - 2x^2$, no intervalo $[1, 3]$
- (b) $f(x) = x^4 - 8x^2$, no intervalo $[-1, 1]$
- (c) $f(x) = x^2 - 5x + 6$, no intervalo $[1, 6]$
- (d) $f(x) = \text{sen}(2x)$, no intervalo $[0, \pi]$

3. Calcule os pontos críticos (se existem) de:

- | | |
|-------------------------------|---|
| (a) $y = 3x + 4$ | (i) $y = \cos(x)$ |
| (b) $y = x^2 - 3x + 8$ | (j) $y = \text{sen}(x) - \cos(x)$ |
| (c) $y = 2 + 2x - x^2$ | (k) $y = e^x - x$ |
| (d) $y = (x - 2)(x + 4)$ | (l) $y = \sqrt[3]{(x^2 - 9)^2}$ |
| (e) $y = 3 - x^3$ | (m) $y = \frac{x}{x^2 - 4}$ |
| (f) $y = x^3 + 2x^2 + 5x + 3$ | (n) $y = 2x - 3 $ |
| (g) $y = x^4 + 4x^3$ | (o) $y = (4x^2 - 3x - 1)^7$ |
| (h) $y = \text{sen}(x)$ | (p) $y = x^m (a - x)^n, n, m \in \mathbb{Z} \text{ e } a > 0$ |

4. Usando a primeira derivada, determine os intervalos de crescimento e/ou decrescimento das seguintes funções:

- | | |
|---|---|
| (a) $f(x) = 6x^4 - 20x^3 - 6x^2 + 72x + 12$ | (i) $y = 3x^2 + 6x + 7$ |
| (b) $f(x) = 4x^3 - 3x$ | (j) $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 2$ |
| (c) $f(x) = e^x - x$ | (k) $y = (x-1)(x-2)(x+3)$ |
| (d) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ | (l) $y = \operatorname{sen}(x) + \frac{x}{2}$ |
| (e) $f(x) = x^2 \ln(x)$ | (m) $y = 2^x$ |
| (f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ | (n) $y = e^{-x}$ |
| (g) $y = 2x - 1$ | (o) $y = xe^{-x}$ |
| (h) $y = 3 - 5x$ | (p) $y = \frac{x^2}{x-1}$ |

5. Calcule os pontos de máximos e de mínimos relativos (se existem) de:

- | | |
|---|---|
| (a) $y = 7x^2 - 6x + 2$ | (j) $y = (x+2)^2(x-1)^3$ |
| (b) $y = 4x - x^2$ | (k) $y = x^2\sqrt{16-x}$ |
| (c) $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 7x + 9$ | (l) $y = x^4 + \frac{4x^3}{3} + 3x^2$ |
| (d) $y = \frac{x^4}{4} + \frac{5}{3}x^3 + 4x^2$ | (m) $y = x - 3 + \frac{2}{x+1}$ |
| (e) $y = \sqrt[3]{6x^2} - 2x$ | (n) $y = x^2\sqrt{3-x^2}$ |
| (f) $y = 5 + \sqrt[5]{(x-2)^7}$ | (o) $y = x^2\sqrt{5+x}$ |
| (g) $y = 3 + \sqrt[3]{(2x+3)^4}$ | (p) $y = \sqrt[3]{x}(x+2)^{-\frac{2}{3}}$ |
| (h) $y = \frac{4x}{x^2+4}$ | (q) $y = (x+2)(x-2)^3$ |
| (i) $y = \frac{x+1}{x^2+2x+1} - 2x$ | (r) $y = 2x^2 + \frac{2}{x^2}$ |

6. Calcule os pontos de inflexão (se existem) e estude a concavidade de:

- | | |
|--|---------------------------------|
| (a) $y = -x^3 + 5x^2 - 6x$ | (e) $y = x^2 - \frac{1}{3x^2}$ |
| (b) $y = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 10x + 9$ | (f) $y = \frac{x^2+9}{(x-3)^2}$ |
| (c) $y = \frac{1}{x+4}$ | (g) $y = e^{-x^2}$ |
| (d) $y = 2xe^{-3x}$ | (h) $y = (x+4)e^{x+4}$ |

(i) $y = \frac{x+1}{x}$

(l) $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$

(j) $y = x\sqrt{1-x^2}$

(m) $y = \cos(\pi x)$

(k) $y = \sin(\pi x)$

(n) $y = e^{x^2-1}$

7. Esboce os gráficos de:

(a) $y = -x^2 + 4x + 2$

(j) $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$

(r) $y = \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 5}$

(b) $y = -x^4 - x^3 - 2x^2$

(k) $y = x^5 - x^3$

(s) $y = (x^2 - 1)^2$

(c) $y = \frac{3x+1}{(x+2)(x-3)}$

(l) $y = x^6 - x^4$

(t) $y = 2x \ln^2(x)$

(d) $y = \ln(x^2 + 1)$

(m) $y = \frac{x+1}{x^2+2x}$

(u) $y = \frac{x(x-1)}{x^2-4}$

(e) $y = \frac{4}{\sqrt{x+2}}$

(n) $y = (x+1)(x-3)^{\frac{2}{3}}$

(v) $y = \frac{x^2}{e^{x^2}}$

(f) $y = \frac{x^2}{x-3}$

(o) $y = \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}$

(w) $y = (x^4 - x^2) \ln(x)$

(g) $y = 2\sqrt{x} - x$

(p) $y = \frac{x^2+2}{x^2-x-2}$

(x) $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^4}$

(h) $y = x^3 - 3x^2$

(q) $y = \frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+2)^2}$

(y) $y = \sqrt[3]{(x-1)^2}$

(i) $y = x + \frac{1}{x}$

8. Determine o valor de k tal que a função $y = x^3 + kx^2 + x + 1$ admita um ponto de inflexão em $x = 1$.

9. Seja $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

(a) Determine o único ponto de inflexão de y .

(b) Verifique que y tem um ponto de máximo e um ponto de mínimo se $b^2 - 3ac > 0$.

10. Seja $y = x^m(1 - x^n)$, onde m, n são números naturais. Verifique:

(a) Se m é par, y tem um ponto de mínimo em $x = 0$.

(b) Se n é par, y tem um ponto de mínimo em $x = 1$.

11. Esboce o gráfico da família de curvas $y = x^4 + x^3 + cx^2$, $c \in \mathbb{R}$.

Problemas de Otimização

1. Determine a área do retângulo máximo, com base no eixo dos x e vértices superiores sobre a parábola $y = 12 - x^2$.
2. Com uma quantidade A de material dada deve-se construir um depósito de base quadrada e paredes verticais. Determine as dimensões que dão o volume máximo.
3. Uma reta passando por $(1, 2)$ corta o eixo dos x em $A = (a, 0)$ e o eixo dos y em $B = (0, b)$. Determine o triângulo AOB de área mínima para a e b positivos.
4. Um cartaz deve conter 50 cm^2 de matéria impressa com duas margens de 4 cm cada, na parte superior e na parte inferior e duas margens laterais de 2 cm cada. Determine as dimensões externas do cartaz de modo que sua área total seja mínima.
5. Faz-se girar um triângulo retângulo de hipotenusa h em torno de um de seus catetos, gerando um cone circular reto. Determine o cone de volume máximo.
6. Determine o ponto da curva $y^2 = 2(1 - x)$ situado a menor distância da origem.
7. Determine o volume do maior cilindro circular reto que pode ser inscrito numa esfera de raio r .
8. Deseja-se construir uma piscina de forma circular, com volume igual a $125\pi \text{ m}^3$. Determine os valores do raio r e da profundidade h (altura), de modo que a piscina possa ser construída com a menor quantidade de material possível.
9. Determine a altura do maior cone que pode ser gerado pela rotação de um triângulo retângulo de hipotenusa igual a 2 cm em torno de um dos catetos.
10. Determine o ponto do eixo dos x cuja soma das distâncias a $(4, -5)$ e $(-2, 3)$ é mínima.
11. Entre todos os retângulos de área dada a , qual o que tem menor perímetro?
12. Determine os catetos de um triângulo retângulo de área máxima sabendo que sua hipotenusa é h .
13. Uma janela tem formato retangular com um semi-círculo no topo. Determine as dimensões da janela de área máxima, se o perímetro é de 12 metros.

14. Determine a área do maior retângulo com lados paralelos aos eixos coordenados e que pode ser inscrito na região limitada pelas curvas $y = \sqrt{1 - x^2}$ e $y = 0$.
15. Para fazer um cilindro circular reto de um retângulo de folha de aço colam-se duas bordas paralelas da folha. Para dar rigidez ao cilindro cola-se um arame de comprimento l ao longo da diagonal do retângulo. Ache a tangente do ângulo formado pela diagonal e o lado não colado, de tal modo que o cilindro tenha volume máximo.
16. Um sólido é construído, colando um cilindro circular reto de altura h e raio r a uma semi-esfera de raio r . Se a área do sólido é 5π , determine r e h para que o volume seja máximo.
17. Suponha que a resistência de uma viga retangular é dada pela fórmula: $R = l h^2$, onde l e h são, respectivamente, a largura e a altura da seção da viga. Determine as dimensões da viga mais resistente que pode ser cortada de um tronco de árvore cilíndrico de raio a .
18. Uma janela tem forma de um retângulo, tendo acima um triângulo equilátero. Sabendo que o perímetro da janela é igual a 4 metros, determine as dimensões do retângulo que proporciona a área máxima para a janela.
19. A diferença de dois números é 20. Determine os números de modo que o produto seja o menor possível.
20. A soma de duas vezes um número e cinco vezes um segundo número é 70. Determine os números de modo que o produto seja o maior possível.
21. Determine as dimensões do retângulo de maior perímetro que pode ser inscrito na elipse centrada $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $a, b \neq 0$.
22. Suponha que numa experiência realizada foram coletados os seguintes pares de dados:
 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$, tais que os x_i não são todos iguais. A teoria subjacente à experiência sugere que os dados devem estar ao longo de uma reta $y = mx$. Devido a erros experimentais, os pontos não são colineares. O problema consiste em determinar a reta que melhor se ajusta aos dados, ou seja, consiste em determinar m de modo que a soma dos desvios verticais seja mínima. O ponto sobre a reta $y = mx$ que está mais próximo (distância vertical) dos pontos dados tem coordenadas (x_i, mx_i) ; logo o quadrado da distância vertical a estes pontos é: $E_i = (mx_i - y_i)^2$, $1 \leq i \leq n$.

(a) Minimize a função: $f(m) = E_1 + E_2 + \dots + E_n = \sum_{i=1}^n (m x_i - y_i)^2$.

(b) Ache a reta que melhor se ajusta aos pontos $(-2, -1)$, $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(3, 1)$ e $(4, 3)$.

23. Se a velocidade de uma onda de comprimento L , em águas profundas, é dada por:

$$v = M \sqrt{\frac{L}{B} + \frac{B}{L}},$$

onde M e B são constantes positivas, qual é o comprimento da onda que minimiza a velocidade?

24. A taxa aeróbica de uma pessoa com x anos de idade é dada por:

$$A(x) = \frac{110 (\ln(x) - 2)}{x},$$

sendo $x \geq 11$. Em que idade a pessoa tem capacidade aeróbica máxima?

25. Com um fio de comprimento $2a$ constroi-se um arco de círculo de modo que a área do segmento circular que determina seja máxima. Qual é o raio?

26. Se uma droga é injetada na corrente sanguínea, sua concentração t minutos depois é dada por $C(t) = k(e^{-2t} - e^{-3t})$, onde k é uma constante positiva.

(a) Em que instante ocorre a concentração máxima?

(b) Que se pode dizer sobre a concentração após um longo período de tempo?

27. Determine o maior comprimento que deve ter uma escada para passar de um corredor de 5 metros de largura a outro, perpendicular, de 8 metros de largura?

28. A vazão de água de uma represa é modelada por:

$$f(t) = \frac{10}{(t-6)^2 + 1},$$

se $0 \leq t \leq 12$ e onde t é o tempo em meses. Determine quando a vazão foi máxima.

29. Usando L'Hôpital, calcule os seguintes limites:

- (a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4x + 3}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 6x + 7}{x^3 + 7x - 1}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^{3x}}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sen}(x) \ln(x)$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \cos(x)) \ln(x)$
- (f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)^{\frac{1}{x}}$
- (g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$
- (h) $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - \cos(x))^x$
- (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-4x}$
- (j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{tg(x^2)}$
- (k) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) \ln(x - 1)$
- (l) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\operatorname{sen}(x)}$
- (m) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{2}{2 + \ln(x)}}$
- (n) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen}(x))^{tg(x)}$
- (o) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$
- (p) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{cosec}(x) - \frac{1}{x})$
- (q) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{senh}(x)}{x}$
- (r) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x)}{x + \ln(x)}$
- (s) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{senh}(x))^{\frac{2}{x}}$
- (t) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{\frac{x^2}{2}} \cos(x))^{\frac{4}{x^4}}$
- (u) $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((x^6 + 3x^5 + 4)^{\frac{1}{6}} - x)$
- (v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x + \ln(x))}$
- (w) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(2x) tg(x)}{3x}$

$$(x) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2x^2}{x^2}$$

$$(y) \lim_{x \rightarrow 0} (\cot g^2(x) - \frac{1}{x^2})$$

$$(z) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x^2 + \ln(x))}$$

Capítulo 6

INTEGRAÇÃO INDEFINIDA

6.1 Introdução

Na primeira parte do capítulo mostraremos como obter uma função conhecendo apenas a sua derivada. Este problema é chamado de integração indefinida.

Definição 6.1. Uma função $F(x)$ é chamada uma **primitiva** da função $f(x)$ no intervalo I se para todo $x \in I$, tem-se:

$$F'(x) = f(x)$$

Muitas vezes não faremos menção ao intervalo I , mas a primitiva de uma função sempre será definida sobre um intervalo.

Exemplo 6.1.

[1] Seja $f(x) = x^3$, então:

$$F(x) = \frac{x^4}{4}$$

é uma primitiva de f em \mathbb{R} , pois $F'(x) = x^3 = f(x)$. Por outro lado, $F(x) = \frac{x^4}{4} + 5$ é também uma primitiva de f em \mathbb{R} , pois $F'(x) = x^3 = f(x)$. Na verdade,:

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + c, \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

é primitiva de f pois $F'(x) = x^3 = f(x)$.

[2] Seja $f(x) = \cos(x)$, então $F(x) = \sin(x) + c$, para todo $c \in \mathbb{R}$ é uma primitiva de f . De fato, $F'(x) = \cos(x) = f(x)$.

[3] Seja:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Não existe função definida em todo \mathbb{R} cuja derivada seja igual a $f(x)$. Por outro lado, considere a seguinte função:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ x - a & x \in [a, b] \\ b - a & x \geq b. \end{cases}$$

$F(x)$ é uma função contínua em todo \mathbb{R} e $F'(x) = f(x)$ se $x \in (a, b)$. Logo, F é uma primitiva de f em (a, b) .

Em geral, uma função f admite uma infinidade de primitivas sobre um intervalo. É o que assegura a seguinte proposição:

Proposição 6.1. Seja F uma primitiva da função f no intervalo I . Então:

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

é também primitiva de f no intervalo I .

A pergunta natural que surge, a seguir, é: se F e G são primitivas de uma função f sobre um intervalo, será que F e G estão relacionadas de alguma forma? A resposta a esta questão é dada pela seguinte proposição:

Proposição 6.2. Se F e G são primitivas de uma função f num intervalo I , então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $G(x) = F(x) + c$, para todo $x \in I$.

Prova: Seja $H(x) = F(x) - G(x)$; então, para todo $x \in I$, temos que:

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Como consequência do Teorema do Valor Médio, para todo $x \in I$, $H(x) = c$; então, para todo $x \in I$, $F(x) - G(x) = c$.

Observação 6.1. Em outras palavras, duas primitivas de uma função diferem por uma constante. Logo, se conhecemos uma primitiva de uma função, conhecemos todas as primitivas da função. De fato, basta somar uma constante à primitiva conhecida para obter as outras.

Exemplo 6.2.

[1] Seja $f(x) = \cos(x)$. Uma primitiva desta função é $F(x) = \sin(x)$; logo, toda primitiva de f é do tipo $G(x) = \sin(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

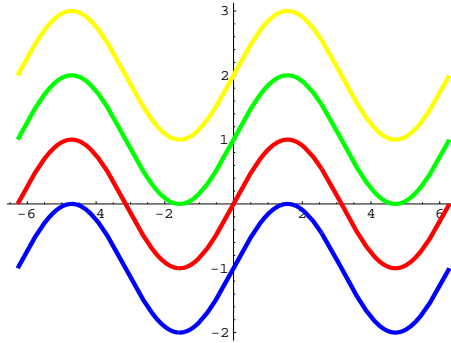


Figura 6.1: Gráficos de f e algumas primitivas de $\cos(x)$.

[2] Seja $f(x) = e^{ax}$, $a \neq 0$. Uma primitiva desta função é $F(x) = \frac{e^{ax}}{a}$; logo, toda primitiva de f é do tipo $G(x) = \frac{e^{ax}}{a} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Definição 6.2. Seja $F(x)$ uma primitiva da função $f(x)$ no intervalo I . A expressão $F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ é chamada a **integral indefinida da função** f e é denotada por:

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

Isto é:

$$\int f(x) dx = F(x) + c \iff F'(x) = f(x)$$

em particular:

$$\int f'(x) dx = f(x) + c.$$

Teorema 6.1. (Linearidade da Integral) Sejam F , G primitivas de f e g , respectivamente, num intervalo e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então, $\alpha F + \beta G$ é uma primitiva de $\alpha f + \beta g$, e:

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$

Prova: Se F e G são primitivas de f e g , respectivamente, então $\alpha F(x) + \beta G(x)$ é primitiva de $\alpha f(x) + \beta g(x)$; logo:

$$\begin{aligned}\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx &= (\alpha F(x) + \beta G(x)) + c = \alpha (F(x) + c_1) + \beta (G(x) + c_2) \\ &= \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx.\end{aligned}$$

Exemplo 6.3.

Calcule as seguintes integrais:

[1] $\int [\sec(x) \operatorname{tg}(x) + \cos(x)] dx.$

[2] $\int [10 e^x + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}] dx.$

[3] $\int \operatorname{sen}^2(x) dx.$

[1] Usando o Teorema, podemos decompor a integral em duas outras integrais:

$$\int [\sec(x) \operatorname{tg}(x) + \cos(x)] dx = \int \sec(x) \operatorname{tg}(x) dx + \int \cos(x) dx.$$

Sabemos que $[\sec(x)]' = \sec(x) \operatorname{tg}(x)$ e $(\operatorname{sen}(x))' = \cos(x)$, então:

$$\int [\sec(x) \operatorname{tg}(x) + \cos(x)] dx = \int \sec(x) \operatorname{tg}(x) dx + \int \cos(x) dx = \sec(x) + \operatorname{sen}(x) + c.$$

[2] Usando o Teorema de linearidade, podemos escrever a integral como:

$$\int [10 e^x + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}] dx = 10 \int e^x dx + \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}.$$

Como $[e^x]' = e^x$ e $\frac{4}{3} [\sqrt[4]{x^3}]' = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, então:

$$\int [10 e^x + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}] dx = 10 e^x + \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + c.$$

[3] Observe que $\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2x))$; logo:

$$\int \operatorname{sen}^2(x) dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2x)) dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + c.$$

Observações 6.1.

1. Assim o processo de integrar se reduz a descobrir uma função conhecendo apenas sua derivada; usando a tabela de derivadas do capítulo anterior, obtemos uma lista de integrais chamadas imediatas. Esta lista pode ser comprovada derivando cada resultado da integral e consultando a tabela de derivada. Por exemplo, na tabela de derivadas do capítulo anterior temos que:

$$(\arctg(x))' = \frac{1}{1+x^2}; \quad \text{então,} \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg(x) + c.$$

2. No entanto, não incluímos como imediatas, por exemplo, integrais do tipo:

$$\int \ln(x) dx,$$

pois não é evidente encontrar uma função que tem como derivada $\ln(x)$. Para resolver este impasse, estudaremos os chamados **métodos de integração**, que nos permitirão calcular integrais não imediatas.

6.2 Tabela

Usaremos como variável independente u .

1. $\int du = u + c$
2. $\int \frac{du}{u} = \ln(|u|) + c$
3. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$
4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln(a)} + c, a > 0, (a \neq 1)$
5. $\int e^u du = e^u + c$
6. $\int \text{sen}(u) du = -\cos(u) + c$
7. $\int \cos(u) du = \text{sen}(u) + c$

$$8. \int \sec^2(u) du = \operatorname{tg}(u) + c$$

$$9. \int \operatorname{cosec}^2(u) du = -\operatorname{cotg}(u) + c$$

$$10. \int \sec(u)\operatorname{tg}(u) du = \sec(u) + c$$

$$11. \int \operatorname{cosec}(u)\operatorname{cotg}(u) du = -\operatorname{cosec}(u) + c$$

$$12. \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arcsen}(u) + c$$

$$13. \int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg}(u) + c$$

$$14. \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \operatorname{arcsec}(u) + c$$

$$15. \int \sinh(u) du = \cosh(u) + c$$

$$16. \int \cosh(u) du = \sinh(u) + c$$

$$17. \int \operatorname{sech}^2(u) du = \operatorname{tgh}(u) + c$$

$$18. \int \operatorname{cosech}^2(u) du = -\operatorname{cotgh}(u) + c$$

$$19. \int \operatorname{sech}(u)\operatorname{tgh}(u) du = -\operatorname{sech}(u) + c$$

$$20. \int \operatorname{cosech}(u) \operatorname{cotgh}(u) du = -\operatorname{cosech}(u) + c$$

$$21. \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{argsenh}(u) + c$$

$$22. \int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \operatorname{argcosh}(u) + c$$

$$23. \int \frac{du}{u\sqrt{1-u^2}} = -\operatorname{argsech}(|u|) + c$$

6.3 Métodos de Integração

Nas próximas seções apresentaremos os métodos mais utilizados que nos permitirão determinar uma grande quantidade de integrais não imediatas. O primeiro a ser estudado se baseia na regra da cadeia.

6.4 Método de Substituição

Sejam F uma primitiva de f num intervalo I e g uma função derivável tal que $F \circ g$ esteja definida. Usando a regra da cadeia; temos, $(F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$. Logo, $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x)) \cdot g'(x)$, então:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + c;$$

fazendo $u = g(x)$, tem-se $du = g'(x) dx$; substituindo na expressão anterior:

$$\boxed{\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + c.}$$

Exemplo 6.4.

Calcule as seguintes integrais:

[1] $\int \frac{2x}{1+x^2} dx$. Fazendo $u = 1+x^2$, então $du = 2x dx$. Substituindo na integral:

$$\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \int \frac{du}{u} = \ln(|u|) + c = \ln(x^2 + 1) + c.$$

[2] $\int \sin^2(x) \cos(x) dx$. Fazendo $u = \sin(x)$, então $du = \cos(x) dx$. Substituindo na integral:

$$\int \sin^2(x) \cos(x) dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{\sin^3(x)}{3} + c.$$

[3] $\int \frac{dx}{(3x+7)^7}$. Fazendo $u = 3x+7$, então $du = 3 dx$ ou, equivalentemente, $\frac{du}{3} = dx$. Substituindo na integral:

$$\int \frac{dx}{(3x+7)^7} = \int \frac{du}{3u^7} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u^7} = -\frac{1}{18u^6} + c = -\frac{1}{18(3x+7)^6} + c.$$

[4] $\int \frac{\sec^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$. Fazendo $u = \sqrt{x}$, então $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$. Substituindo na integral:

$$\int \frac{\sec^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \sec^2(u) du = 2 \operatorname{tg}(u) + c = 2 \operatorname{tg}(\sqrt{x}) + c.$$

[5] $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$. Fazendo $u = \ln(x)$, então $du = \frac{dx}{x}$. Substituindo na integral:

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{(\ln(x))^2}{2} + c.$$

[6] $\int \operatorname{tg}(\alpha x) dx$; $\alpha \in \mathbb{R}$. Reescrevemos a integral fazendo: $\operatorname{tg}(\alpha x) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{\cos(\alpha x)}$.

Se $u = \cos(\alpha x)$, então $du = -\alpha \operatorname{sen}(\alpha x) dx$ ou, equivalentemente, $-\frac{du}{\alpha} = \operatorname{sen}(\alpha x) dx$. Substituindo na integral:

$$\int \operatorname{tg}(\alpha x) dx = \int \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{\cos(\alpha x)} dx = -\frac{1}{\alpha} \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{\alpha} \ln(|u|) + c = -\frac{1}{\alpha} \ln(|\cos(\alpha x)|) + c.$$

[7] $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$; $a \neq 0$. Reescrevemos a integral como: $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\frac{x^2}{a^2} + 1}$.

Fazendo $u = \frac{x}{a}$, então $du = \frac{dx}{a}$. Substituindo na integral:

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}(u) + c = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + c.$$

Muitas vezes, antes de efetuar uma substituição adequada, é necessário fazer algumas manipulações, como, por exemplo, o completamento de quadrados.

[8] Calcule $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$. Completando os quadrados $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 2^2$; então,

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 2^2}.$$

Fazendo $u = x + 1$, teremos $du = dx$. Substituindo na integral:

$$\int \frac{du}{u^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{2}\right) + c = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c.$$

6.5 Outros Tipos de Substituições

A seguir apresentamos alguns exemplos do método de substituição, onde a substituição não é imediata.

Exemplo 6.5.

Calcule as seguintes integrais:

$$[1] \int \frac{x \, dx}{\sqrt{x+1}}. \text{ Fazendo } u = \sqrt{x+1}, \text{ então } x = u^2 - 1 \text{ e } 2 \, du = \frac{dx}{\sqrt{x+1}};$$

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x+1}} = 2 \int (u^2 - 1) \, du = \frac{2u^3}{3} - 2u + c = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - 2\sqrt{x+1} + c.$$

$$[2] \int \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}. \text{ Fazendo } u = 1 + \sqrt[3]{x}, \text{ então } x = (u-1)^3 \text{ e } dx = 3(u-1)^2 \, du;$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}} &= \int \frac{3(u-1)^2}{\sqrt{u}} \, du = 3 \int (u^2 - 2u + 1)u^{-1/2} \, du \\ &= 6 \left(\frac{u^{5/2}}{5} - \frac{2u^{3/2}}{3} + \sqrt{u} \right) + c \\ &= 6 \left(\frac{1}{5} \sqrt{(1+\sqrt[3]{x})^5} - \frac{2}{3} \sqrt{(1+\sqrt[3]{x})^3} + \sqrt{1+\sqrt[3]{x}} \right) + c. \end{aligned}$$

$$[3] \int \frac{x^2 + 1}{\sqrt[3]{x+3}} \, dx.$$

Seja $u = \sqrt[3]{(x+3)}$; então, $x = u^3 - 3$ e $dx = 3u^2 \, du$; $x^2 + 1 = u^6 - 6u^3 + 10$.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 1}{\sqrt[3]{x+3}} \, dx &= 3 \int (u^6 - 6u^3 + 10)u \, du \\ &= 3 \int (u^7 - 6u^4 + 10u) \, du = \frac{3u^8}{8} - \frac{18u^5}{5} + 15u^2 + c \\ &= \frac{3}{40} \sqrt[3]{(x+3)^2} (5x^2 - 18x + 101) + c. \end{aligned}$$

$$[4] \int \frac{dy}{y \sqrt{y^3 - 1}}.$$

Fazendo $u = \sqrt{y^3 - 1}$, $u^2 = y^3 - 1$ e $y^3 = u^2 + 1$. Logo, $2u \, du = 3y^2 \, dy$ e $y^2 \, dy = \frac{2}{3} u \, du$.

$$\int \frac{dy}{y \sqrt{y^3 - 1}} = \int \frac{y^2}{y^3 \sqrt{y^3 - 1}} \, dy = \frac{2}{3} \int \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{2}{3} \arctg(u) + c = \frac{2}{3} \arctg(\sqrt{y^3 - 1}) + c.$$

6.6 Integrais de Produtos e Potências de Funções Trigonométricas

Nos seguintes exemplos, são utilizadas identidades trigonométricas elementares.

Exemplo 6.6.

Calcule as seguintes integrais:

[1] $\int \operatorname{sen}(\alpha x) \operatorname{sen}(\beta x) dx$. Se $\alpha \neq \beta$, utilizamos :

$$\operatorname{sen}(\alpha x) \operatorname{sen}(\beta x) = \frac{\cos((\alpha - \beta)x) - \cos((\alpha + \beta)x)}{2};$$

então:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}(\alpha x) \operatorname{sen}(\beta x) dx &= \frac{1}{2} \int (\cos((\alpha - \beta)x) - \cos((\alpha + \beta)x)) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{sen}((\alpha - \beta)x)}{\alpha - \beta} - \frac{\operatorname{sen}((\alpha + \beta)x)}{\alpha + \beta} \right). \end{aligned}$$

Se $\alpha = \beta$, utilizamos $\operatorname{sen}^2(\alpha x) = \frac{1 - \cos(2\alpha x)}{2}$; então:

$$\int \operatorname{sen}^2(\alpha x) dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2\alpha x)) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha x)}{2\alpha} \right)$$

[2] $\int \operatorname{sen}^2(x) \cos^5(x) dx$. Como $\operatorname{sen}^2(x) \cos^5(x) = \operatorname{sen}^2(x) (1 - \operatorname{sen}^2(x))^2 \cos(x)$, fazendo $u = \operatorname{sen}(x)$, temos $du = \cos(x) dx$ e:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^2(x) \cos^5(x) dx &= \int \operatorname{sen}^2(x) (1 - \operatorname{sen}^2(x))^2 \cos(x) dx = \int u^2 (1 - u^2)^2 du \\ &= \int (u^2 - 2u^4 + u^6) du = \frac{u^3}{3} - \frac{2u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + c \\ &= \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{3} - \frac{2\operatorname{sen}^5(x)}{5} + \frac{\operatorname{sen}^7(x)}{7} + c. \end{aligned}$$

[3] $\int \operatorname{tg}^3(x) dx$. Fatorando $\operatorname{tg}^3(x) = \operatorname{tg}(x) \operatorname{tg}^2(x) = \operatorname{tg}(x) (\sec^2(x) - 1)$;

$$\int \operatorname{tg}^3(x) dx = \int (\operatorname{tg}(x) \sec^2(x) - \operatorname{tg}(x)) dx = \frac{1}{2} (\operatorname{tg}^2(x) + 2 \ln(|\cos(x)|)) + c.$$

[4] $\int \sec(x) dx$.

$$\int \sec(x) dx = \int \sec(x) \left(\frac{tg(x) + \sec(x)}{tg(x) + \sec(x)} \right) dx = \int \frac{\sec(x) tg(x) + \sec^2(x)}{tg(x) + \sec(x)} dx.$$

Fazendo $u = \sec(x) + tg(x)$, temos $du = (\sec(x)tg(x) + \sec^2(x)) dx$.

Substituindo na integral:

$$\int \frac{\sec(x)tg(x) + \sec^2(x)}{tg(x) + \sec(x)} dx = \int \frac{du}{u} = \ln(|u|) + c = \ln(|\sec(x) + tg(x)|) + c.$$

Estes exemplos nos mostram que para determinar a primitiva de uma integral que envolve produtos ou potências de funções trigonométricas é necessário, em primeiro lugar, transformar a função a integrar por meio de identidades trigonométricas conhecidas, para depois usar alguns dos métodos.

6.7 Método de Integração por Partes

Sejam f e g funções deriváveis no intervalo I . Derivando o produto $f \cdot g$:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

ou, equivalentemente, $f(x)g'(x) = (f(x)g(x))' - f'(x)g(x)$. Integrando ambos os lados:

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx;$$

fazendo: $u = f(x)$ e $dv = g'(x) dx$, temos: $du = f'(x) dx$ e $v = g(x)$. Logo:

$$\boxed{\int f(x)g'(x) dx = \int u dv = uv - \int v du}$$

Observação 6.2. Este método de integração nos permite transformar a integração de $u dv$ na integração de $v du$. É importante saber “escolher” a substituição u e dv na integral de partida. Devemos escolher v' tal que permita determinar v . As expressões de u' e v devem ser mais simples que as de u e v' , respectivamente.

Exemplo 6.7.

Calcule as seguintes integrais:

$$[1] \int \ln(x) dx.$$

Façamos $u = \ln(x)$ e $dv = dx$; então, $du = \frac{dx}{x}$ e $v = x$; logo:

$$\int \ln(x) dx = \int u dv = uv - \int v du = x \ln(x) - \int dx = x \ln(x) - x + c.$$

$$[2] \int x e^{2x} dx.$$

Façamos $u = x$ e $dv = e^{2x} dx$; então, $du = dx$ e $v = \frac{e^{2x}}{2}$; logo:

$$\int x e^{2x} dx = \int u dv = uv - \int v du = \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + c.$$

$$[3] \int x^2 \operatorname{sen}(x) dx.$$

Façamos $u = x^2$ e $dv = \operatorname{sen}(x) dx$; então, $du = 2x dx$ e $v = -\cos(x)$; logo:

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x) dx = \int u dv = uv - \int v du = -x^2 \cos(x) + 2 \int x \cos(x) dx.$$

Calculemos agora $\int x \cos(x) dx$, novamente por partes.

Fazendo $u = x$ e $dv = \cos(x) dx$, temos $du = dx$ e $v = \operatorname{sen}(x)$; logo:

$$\int x \cos(x) dx = \int u dv = uv - \int v du = x \operatorname{sen}(x) - \int \operatorname{sen}(x) dx = x \operatorname{sen}(x) + \cos(x).$$

$$\text{Então: } \int x^2 \operatorname{sen}(x) dx = -x^2 \cos(x) + 2(x \operatorname{sen}(x) + \cos(x)) + c.$$

$$[4] \int e^{ax} \operatorname{sen}(bx) dx; a, b \neq 0.$$

Façamos $u = e^{ax}$ e $dv = \operatorname{sen}(bx) dx$; então, $du = a e^{ax} dx$ e $v = -\frac{\cos(bx)}{b}$; logo:

$$\int e^{ax} \operatorname{sen}(bx) dx = \int u dv = uv - \int v du = \frac{-e^{ax} \cos(bx)}{b} + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos(bx) dx. \quad (6.1)$$

Calculemos $\int e^{ax} \cos(bx) dx$, novamente integrando por partes. Fazendo $u = e^{ax}$ e

$dv = \cos(bx) dx$, temos $du = a e^{ax} dx$ e $v = \frac{\operatorname{sen}(bx)}{b}$; logo:

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx = \int u dv = uv - \int v du = \frac{e^{ax} \operatorname{sen}(bx)}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \operatorname{sen}(bx) dx. \quad (6.2)$$

Denotemos por $I = \int e^{ax} \operatorname{sen}(bx) dx$. Então, de 6.1 e 6.2, temos:

$$I = \frac{a e^{ax} \operatorname{sen}(bx)}{b^2} - \frac{e^{ax} \cos(bx)}{b} - \frac{a^2}{b^2} I$$

Pois a última integral é exatamente a integral procurada e podemos passá-la ao outro lado da igualdade:

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) I = \frac{a e^{ax} \operatorname{sen}(bx)}{b^2} - \frac{e^{ax} \cos(bx)}{b} \implies I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \operatorname{sen}(bx) - b \cos(bx)].$$

Logo,

$$\int e^{ax} \operatorname{sen}(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \operatorname{sen}(bx) - b \cos(bx)] + c.$$

[5] $\int x^3 \cos(x^2) dx$. Aqui usamos os dois métodos:

Substituição: seja $t = x^2$; então, $dt = 2x dx$ ou $\frac{dt}{2} = x dx$;

$$\int x^3 \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int t \cos(t) dt.$$

Integrando por partes, fazemos $u = t$ e $dv = \cos(t) dt$; então, $du = dt$ e $v = \operatorname{sen}(t)$:

$$\begin{aligned} \int x^3 \cos(x^2) dx &= \frac{1}{2} \int t \cos(t) dt = \frac{1}{2} \int u dv = \frac{1}{2} (uv - \int v du) \\ &= \frac{1}{2} (t \operatorname{sen}(t) - \int \operatorname{sen}(t) dt) = \frac{1}{2} (\cos(x^2) + x^2 \operatorname{sen}(x^2)) + c. \end{aligned}$$

[6] $\int x^3 e^{x^2} dx$. Aqui usamos, novamente, os dois métodos:

Substituição: seja $t = x^2$; então, $dt = 2x dx$ ou $\frac{dt}{2} = x dx$;

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int t e^t dt.$$

Integrando por partes: fazemos $u = t$ e $dv = e^t dt$; então, $du = dt$ e $v = e^t$:

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} \int t e^t dt = \frac{1}{2} \int u dv = \frac{1}{2} (uv - \int v du) = \frac{1}{2} (t e^t - \int e^t dt) \\ &= \frac{1}{2} (t e^t - e^t) = \frac{e^{x^2}}{2} (x^2 - 1) + c. \end{aligned}$$

[7] $\int x^3 \operatorname{sen}(2x^2) dx$. Aqui usamos, novamente, os dois métodos:

Substituição: seja $t = 2x^2$; então, $dt = 4x dx$ ou $\frac{dt}{4} = x dx$ e $x^2 = \frac{t}{2}$;

$$\int x^3 \operatorname{sen}(2x^2) dx = \frac{1}{8} \int t \operatorname{sen}(t) dt.$$

Integrando por partes: fazemos $u = t$ e $dv = \operatorname{sen}(t) dt$; então, $du = dt$ e $v = -\cos(t)$:

$$\begin{aligned} \int x^3 \operatorname{sen}(2x^2) dx &= \frac{1}{8} \int t \operatorname{sen}(t) dt = \frac{1}{8} \int u dv = \frac{1}{8} (uv - \int v du) \\ &= \frac{1}{8} (\operatorname{sen}(2x^2) - 2x^2 \cos(2x^2)) + c. \end{aligned}$$

6.8 Método de Substituição Trigonométrica

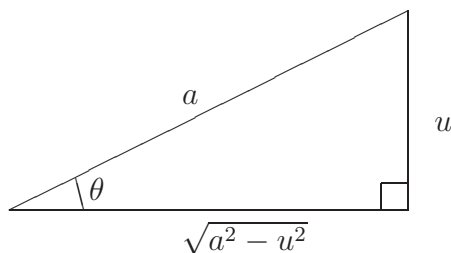
Este método é usado quando a expressão a integrar envolve alguns dos seguintes tipos de radicais:

$$\sqrt{a^2 - u^2}, \sqrt{a^2 + u^2}, \sqrt{u^2 - a^2},$$

onde $a > 0$.

6.8.1 Caso 1: $\sqrt{a^2 - u^2}$

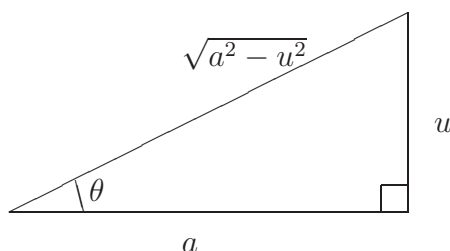
Para $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, seja $u = a \operatorname{sen}(\theta)$; então, $du = a \cos(\theta) d\theta$. Logo $\sqrt{a^2 - u^2} = a \cos(\theta)$.



$$\begin{aligned} u &= a \operatorname{sen}(\theta) \\ du &= a \cos(\theta) d\theta \\ \sqrt{a^2 - u^2} &= a \cos(\theta) \end{aligned}$$

6.8.2 Caso 2: $\sqrt{a^2 + u^2}$

Para $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, seja $u = a \operatorname{tg}(\theta)$; então, $du = a \sec^2(\theta) d\theta$. Logo $\sqrt{a^2 + u^2} = a \sec(\theta)$.



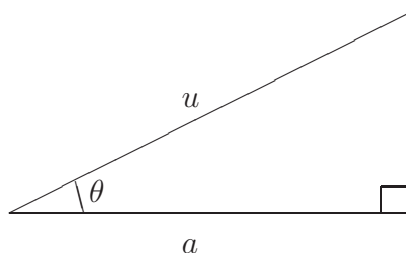
$$u = a \operatorname{tg}(\theta)$$

$$du = a \sec^2(\theta) d\theta$$

$$\sqrt{a^2 + u^2} = a \sec(\theta)$$

6.8.3 Caso 3: $\sqrt{u^2 - a^2}$

Para $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$, seja $u = a \sec(\theta)$; então, $du = a \sec(\theta) \operatorname{tg}(\theta) d\theta$. Logo $\sqrt{u^2 - a^2} = a \operatorname{tg}(\theta)$.



$$u = a \sec(\theta)$$

$$du = a \sec(\theta) \operatorname{tg}(\theta) d\theta$$

$$\sqrt{u^2 - a^2} = a \operatorname{tg}(\theta)$$

Exemplo 6.8.

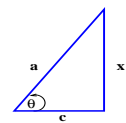
Calcule as seguintes integrais:

$$[1] \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Seja $x = a \operatorname{sen}(\theta)$; então, $dx = a \cos(\theta) d\theta$; $(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ e $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos(\theta)$.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= a^2 \int \cos^2(\theta) d\theta = a^2 \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2\theta)}{2} \right) d\theta = \frac{a^2}{2} \left(\theta + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} \right) \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\theta + \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) \right). \end{aligned}$$

$x = a \operatorname{sen}(\theta)$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$; então, $\theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)$; estamos no caso 1:



onde $c = \sqrt{a^2 - x^2}$; logo, $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{x}{a}$ e $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$.

Substituindo no resultado da integral:

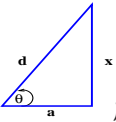
$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2} \right) + c.$$

$$[2] \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 3)^3}}.$$

Seja $x = \sqrt{3} \operatorname{tg}(\theta)$; então, $dx = \sqrt{3} \sec^2(\theta) d\theta$; $(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$.

Em tal caso $\sqrt{(x^2 + 3)^3} = (\sqrt{3} \sec(\theta))^3$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 3)^3}} = \int \frac{\sqrt{3} \sec^2(\theta)}{3^{\frac{3}{2}} \sec^3(\theta)} d\theta = \frac{1}{3} \int \frac{d\theta}{\sec(\theta)} = \frac{1}{3} \int \cos(\theta) d\theta = \frac{1}{3} \operatorname{sen}(\theta) + c.$$

Estamos no caso 2:  ; onde $a = \sqrt{3}$ e $d = \sqrt{x^2 + 3}$. Logo, $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$.

Substituindo:

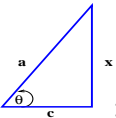
$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 3)^3}} = \frac{x}{3\sqrt{x^2 + 3}} + c.$$

$$[3] \int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}}.$$

Seja $x = \frac{4}{3} \operatorname{sen}(\theta)$; então, $dx = \frac{4}{3} \cos(\theta) d\theta$; $(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$.

Neste caso, $\sqrt{16 - 9x^2} = 4 \cos(\theta)$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}} = \frac{1}{3} \int d\theta = \frac{\theta}{3} + c.$$

Estamos no caso 1:  ; onde $c = \frac{\sqrt{16 - 9x^2}}{3}$; logo, $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{3x}{4}$; então, $\theta = \operatorname{arcsen}(\frac{3x}{4})$.

Substituindo no resultado da integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}} = \frac{1}{3} \operatorname{arcsen}(\frac{3x}{4}) + c.$$

$$[4] I = \int \frac{dx}{9x^2 - 1}.$$

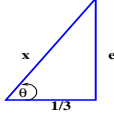
Reescrevendo a integral:

$$I = \int \frac{dx}{9(x^2 - \frac{1}{9})}.$$

Seja $x = \frac{1}{3} \sec(\theta)$; então, $dx = \frac{1}{3} \sec(\theta) \operatorname{tg}(\theta) d\theta$; $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ ou $(\pi < \theta < \frac{3\pi}{2})$.

Neste caso, $x^2 - \frac{1}{9} = \frac{1}{9} (\sec^2(\theta) - 1) = \frac{1}{9} \tan^2(\theta)$:

$$\int \frac{dx}{9x^2 - 1} = \frac{1}{3} \int \frac{\sec(\theta)}{\tan(\theta)} d\theta = \frac{1}{3} \int \operatorname{cosec}(\theta) d\theta = \frac{1}{3} \ln(|\operatorname{cosec}(\theta) - \cotg(\theta)|) + c.$$

Estamos no caso 3: ; onde $e = \sqrt{x^2 - \frac{1}{9}}$; logo, $\operatorname{cosec}(\theta) = \frac{3x}{\sqrt{9x^2 - 1}}$ e $\cotg(\theta) = \frac{1}{\sqrt{9x^2 - 1}}$. Substituindo no resultado da integral:

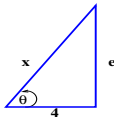
$$\int \frac{dx}{9x^2 - 1} = \frac{1}{3} \ln(|\operatorname{cosec}(\theta) - \cotg(\theta)|) + c = \frac{1}{6} \ln\left(\left|\frac{3x - 1}{3x + 1}\right|\right) + c.$$

[5] $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 16}}.$

Seja $x = 4 \sec(\theta)$; então, $dx = 4 \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta$; ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$).

Neste caso $\sqrt{x^2 - 16} = 4 \tan(\theta)$ e:

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 16}} = \frac{1}{64} \int \frac{d\theta}{\sec^2(\theta)} = \frac{1}{128} (\theta + \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)) + c.$$

Estamos no caso 3: ; onde $e = \sqrt{x^2 - 16}$; logo, $\operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) = \frac{4 \sqrt{x^2 - 16}}{x^2}$.

Para calcular θ , devemos ter cuidado, pois $\sqrt{x^2 - 16}$ é definida para $x > 4$ e $x < -4$.

Se $x > 4$, então $\sec(\theta) = \frac{x}{4} > 1$ e $\theta = \operatorname{arcsec}(\frac{x}{4})$, onde $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Se $x < -4$, então $\sec(\theta) = \frac{x}{4} < -1$ e $\theta = \operatorname{arcsec}(\frac{x}{4})$, onde $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

Mas $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ e $\sec(2\pi - \theta) = \sec(\theta)$; logo, para $x < -4$, $\theta = 2\pi - \operatorname{arcsec}(\frac{x}{4})$, onde $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$; substituindo no resultado da integral:

i) $x > 4$: $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 16}} = \frac{1}{128} \left(\operatorname{arcsec}(\frac{x}{4}) + \frac{4 \sqrt{x^2 - 16}}{x^2} \right) + c.$

ii) $x < -4$: $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 16}} = \frac{1}{128} \left(-\operatorname{arcsec}(\frac{x}{4}) + \frac{4 \sqrt{x^2 - 16}}{x^2} \right) + c_1$, onde $c_1 = \frac{\pi}{64} + c.$

[6] $\int \frac{dx}{(5 - 4x - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

Primeiramente completamos os quadrados: $5 - 4x - x^2 = 9 - (x+2)^2$; fazendo $u = x+2$, temos $du = dx$. Substituindo na integral:

$$\int \frac{dx}{(5 - 4x - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{du}{(9 - u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Seja $u = 3 \operatorname{sen}(\theta)$; então $du = 3 \cos(\theta) d\theta$; $(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ e $(9 - u^2)^{\frac{3}{2}} = 27 \cos^3(\theta)$.

$$\int \frac{dx}{(5 - 4x - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{9} \int \sec^2(\theta) d\theta = \frac{\operatorname{tg}(\theta)}{9} + c.$$

Estamos no caso 1: $\operatorname{tg}(\theta) = \frac{u}{\sqrt{9 - u^2}} = \frac{x+2}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}$. Substituindo no resultado da integral:

$$\int \frac{dx}{(5 - 4x - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x+2}{9\sqrt{5 - 4x - x^2}} + c.$$

$$[7] \int \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 8x + 5}} dx.$$

Completando os quadrados: $4x^2 + 8x + 5 = 4(x+1)^2 + 1$; fazendo $u = x+1$, temos $du = dx$. Substituindo na integral:

$$\int \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 8x + 5}} dx = \int \frac{(u-1)}{\sqrt{4u^2 + 1}} du.$$

Seja $u = \frac{\operatorname{tg}(\theta)}{2}$; então $du = \frac{1}{2} \sec^2(\theta) d\theta$ e $\sqrt{4u^2 + 1} = \sec(\theta)$:

$$\int \frac{(u-1)}{\sqrt{4u^2 + 1}} du = \frac{1}{4} \int (\operatorname{tg}(\theta) \sec(\theta) - 2\sec(\theta)) d\theta = \frac{1}{4} \sec(\theta) - \frac{1}{2} \ln(|\sec(\theta) + \operatorname{tg}(\theta)|) + c.$$

Estamos no caso 2: $\operatorname{tg}(\theta) = 2u = 2(x+1)$ e $\sec(\theta) = \sqrt{4x^2 + 8x + 5}$. Substituindo no resultado da integral:

$$\int \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 8x + 5}} dx = \frac{1}{4} \sqrt{4x^2 + 8x + 5} - \frac{1}{2} \ln(|\sqrt{4x^2 + 8x + 5} + 2(x+1)|) + c.$$

6.9 Método para Integração de Funções Racionais

Um polinômio $P(x)$ de coeficientes reais pode ser sempre expresso como um produto de fatores lineares e/ou quadráticos. Naturalmente esta decomposição depende essencialmente do grau de $P(x)$.

- i) $P(x) = (x - a_1)(x - a_2).....(x - a_n)$ ou
 ii) $P(x) = (x - a)^r(x - b_1).....(x - b_s)$ ou
 iii) $P(x) = (ax^2 + bx + c)(x - d_1).....(x - d_l)$ ou
 iv) $P(x) = (ax^2 + bx + c)^r(x - d_1).....(x - d_l)$.

Exemplo 6.9.

$$[1] P(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1).$$

$$[2] P(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = (x + 1)^2(x + 2).$$

$$[3] P(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = (x^2 + 1)(x - 1).$$

$$[4] P(x) = x^8 + x^7 - 9x^6 + 3x^5 - 33x^4 + 3x^3 - 35x^2 + x - 12 = (x^2 + 1)^5(x - 3)(x + 4).$$

Seja uma função racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$. A decomposição de uma função racional em frações mais simples, depende do modo em que o polinômio $Q(x)$ se decompõe em fatores lineares e/ou quadráticos. Se numa função racional o grau de $P(x)$ é maior ou igual ao grau de $Q(x)$, então podemos dividir os polinômios. De fato, se $\text{grau}(P(x)) \geq \text{grau}(Q(x))$ então

$$P(x) = Q(x)A(x) + R(x),$$

onde $\text{grau}(R(x)) < \text{grau}(Q(x))$; então:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Logo, basta estudar o caso em que:

$$\text{grau}(P(x)) < \text{grau}(Q(x)),$$

pois, caso contrário efetuamos a divisão dos polinômios.

6.9.1 Caso 1: $Q(x)$ se decompõe em fatores lineares distintos.

Então:

$$\boxed{Q(x) = (x - a_1)(x - a_2).....(x - a_n)}$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$ são distintos dois a dois; então

$$\boxed{f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - a_1)} + \frac{A_2}{(x - a_2)} + + \frac{A_n}{(x - a_n)}}$$

onde A_1, A_2,A_n são constantes a determinar.

$$\int f(x) dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = A_1 \int \frac{dx}{(x-a_1)} + A_2 \int \frac{dx}{(x-a_2)} + \dots + A_n \int \frac{dx}{(x-a_n)}.$$

Calculemos $I = \int \frac{dx}{(x-a_i)}.$

Fazendo $u = x - a_i$; então, $I = \int \frac{du}{u} = \ln(|u|) + c = \ln(|x - a_i|) + c$; logo:

$$\boxed{\int f(x) dx = A_1 \ln(|x - a_1|) + A_2 \ln(|x - a_2|) + \dots + A_n \ln(|x - a_n|) + c}$$

onde A_1, A_2, \dots, A_n são constantes a determinar.

Exemplo 6.10.

Calcule as seguintes integrais:

$$[1] \text{ I} = \int \frac{x^3 + 5x^2 - x - 22}{x^2 + 3x - 10} dx.$$

Observe que $\text{grau}(P(x)) > \text{grau}(Q(x))$. Dividindo os polinômios:

$$\frac{x^3 + 5x^2 - x - 22}{x^2 + 3x - 10} = (x + 2) + \frac{3x - 2}{x^2 + 3x - 10}.$$

A seguir, aplicamos o método à última parcela da direita:

$$\text{I} = \int (x + 2) dx + \int \frac{3x - 2}{x^2 + 3x - 10} dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \int \frac{3x - 2}{x^2 + 3x - 10} dx.$$

Calculemos $\int \frac{3x - 2}{x^2 + 3x - 10} dx.$

Fatorando: $x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2)$; temos:

$$\frac{3x - 2}{x^2 + 3x - 10} = \frac{A_1}{x + 5} + \frac{A_2}{x - 2} = \frac{A_1(x - 2) + A_2(x + 5)}{x^2 + 3x - 10}.$$

Comparando os numeradores: $3x - 2 = A_1(x - 2) + A_2(x + 5)$. As raízes do polinômio $Q(x)$ são $x = 2$ e $x = -5$; agora substituímos cada raiz na última expressão. Se $x = 2$ teremos $4 = 7A_2$ e $A_2 = \frac{4}{7}$. Se $x = -5$, então $-17 = -7A_1$ e $A_1 = \frac{17}{7}$. Logo, podemos decompor a fração inicial em:

$$\frac{3x - 2}{x^2 + 3x - 10} = \frac{17}{7(x + 5)} + \frac{4}{7(x - 2)}.$$

Então, pelo Caso 1: $\int \frac{3x - 2}{x^2 + 3x - 10} dx = \frac{17}{7} \ln(|x + 5|) + \frac{4}{7} \ln(|x - 2|).$

A integral procurada é:

$$\mathbf{I} = \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{17}{7} \ln(|x+5|) + \frac{4}{7} \ln(|x-2|) + c.$$

$$[2] \mathbf{I} = \int \frac{5x^3 - 6x^2 - 68x - 16}{x^3 - 2x^2 - 8x} dx.$$

Note que $\text{grau}(P(x)) = \text{grau}(Q(x))$. Dividindo os polinômios:

$$5x^3 - 6x^2 - 68x - 8x = 5(x^3 - 2x^2 - 8x) + (4x^2 - 28x - 16).$$

$$\text{Então: } \frac{5x^3 - 6x^2 - 68x - 16}{x^3 - 2x^2 - 8x} = 5 + \frac{4x^2 - 28x - 16}{x^3 - 2x^2 - 8x}.$$

$$\mathbf{I} = \int 5 dx + \int \frac{4x^2 - 28x - 16}{x^3 - 2x^2 - 8x} dx = 5x + \int \frac{4x^2 - 28x - 16}{x^3 - 2x^2 - 8x} dx.$$

$$\text{Aplicando o método à última parcela da direita, calculemos } \mathbf{II} = \int \frac{4x^2 - 28x - 16}{x^3 - 2x^2 - 8x} dx.$$

Primeiro observemos que $x^3 - 2x^2 - 8x = x(x-4)(x+2)$:

$$\frac{4x^2 - 28x - 16}{x^3 - 2x^2 - 8x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-4} + \frac{A_3}{x+2} = \frac{A_1(x-4)(x+2) + A_2x(x+2) + A_3x(x-4)}{x^3 - 2x^2 - 8x}.$$

Comparando os numeradores:

$$4x^2 - 28x - 16 = A_1(x+2)(x-4) + A_2x(x+2) + A_3x(x-4);$$

as raízes do polinômio $Q(x)$ são $x=0$, $x=4$ e $x=-2$; agora substituímos cada raiz na última expressão.

Se $x=0$, então, $A_1=2$; se $x=4$ então, $A_2=-\frac{8}{3}$ e se $x=-2$, então, $A_3=\frac{14}{3}$. A fração inicial pode ser decomposta em:

$$\frac{4x^2 - 28x - 16}{x^3 - 2x^2 - 8x} = \frac{2}{x} - \frac{8}{3(x-4)} + \frac{14}{3(x+2)}.$$

Pelo Caso 1, temos: $\mathbf{II} = 2 \ln(|x|) - \frac{8}{3} \ln(|x-4|) + \frac{14}{3} \ln(|x+2|) + c$.

A integral procurada é:

$$\mathbf{I} = 5x + 2 \ln(|x|) - \frac{8}{3} \ln(|x-4|) + \frac{14}{3} \ln(|x+2|) + c.$$

Nos exemplos anteriores a forma de determinar os coeficientes é equivalente a resolver um sistema de equações. Consideremos o exemplo [2]:

$$4x^2 - 28x - 16 = A_1(x+2)(x-4) + A_2x(x+2) + A_3x(x-4).$$

Ordenando o segundo membro em potências de x , temos:

$$4x^2 - 28x - 16 = (A_1 + A_2 + A_3)x^2 + (-2A_1 + 2A_2 - 4A_3)x - 8A_1.$$

Comparando os polinômios e sabendo que dois polinômios são iguais se e somente se os coeficientes dos termos do mesmo grau são iguais, temos que resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 &= 4 \\ 2A_1 - 2A_2 + 4A_3 &= 28 \\ 8A_1 &= 16, \end{cases}$$

que tem como solução: $A_1 = 2$, $A_2 = -\frac{8}{3}$ e $A_3 = \frac{14}{3}$.

$$[3] \int \frac{du}{u^2 - a^2}, \quad a \neq 0.$$

$\text{grau}(P(u)) < \text{grau}(Q(u))$; e $u^2 - a^2 = (u - a)(u + a)$; aplicando o método:

$$\frac{1}{u^2 - a^2} = \frac{A_1}{u - a} + \frac{A_2}{u + a} = \frac{A_1(u + a) + A_2(u - a)}{u^2 - a^2}.$$

Comparando os numeradores: $1 = A_1(u + a) + A_2(u - a)$; as raízes do polinômio $Q(u)$ são $u = a$ e $u = -a$; agora substituímos cada raiz na última expressão. Se $u = a$, então, $A_1 = \frac{1}{2a}$ e se $u = -a$, então, $A_2 = -\frac{1}{2a}$. A fração inicial pode ser decomposta em:

$$\frac{1}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a(u - a)} - \frac{1}{2a(u + a)}.$$

Pelo Caso 1, temos:

$$\boxed{\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} (\ln(|u - a|) - \ln(|u + a|)) + c = \frac{1}{2a} \ln\left(\left|\frac{u - a}{u + a}\right|\right) + c}$$

Aplicamos esta última fórmula para completamento de quadrados.

Exemplo 6.11.

Calcule as seguintes integrais:

$$[1] \int \frac{dx}{x^2 - 4x}.$$

Como $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$: $\int \frac{dx}{x^2 - 4x} = \int \frac{dx}{(x - 2)^2 - 4}$.

Fazendo $u = x - 2$, temos $du = dx$. Substituindo:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4x} = \int \frac{du}{u^2 - 4} = \frac{1}{4} \ln\left(\left|\frac{u - 2}{u + 2}\right|\right) + c = \frac{1}{4} \ln\left(\left|\frac{x - 4}{x}\right|\right) + c,$$

onde as últimas igualdades são obtidas pela fórmula anterior.

[2] $\int \frac{dx}{5 - x^2 - 4x}$.

Completando os quadrados $5 - x^2 - 4x = 9 - (x + 2)^2$ e fazendo $u = x + 2$, temos $du = dx$. Substituindo:

$$\int \frac{dx}{5 - x^2 - 4x} = - \int \frac{du}{u^2 - 9} = -\frac{1}{6} \ln\left(\left|\frac{u - 3}{u + 3}\right|\right) + c = -\frac{1}{6} \ln\left(\left|\frac{x - 1}{x + 5}\right|\right) + c,$$

onde as últimas igualdades são obtidas pela fórmula anterior.

6.9.2 Caso 2: $Q(x)$ se decompõe em fatores lineares, alguns deles repetidos.

Seja $x - a_i$ o fator linear de $Q(x)$ de multiplicidade r e r a maior potência da fatoração. Então, a cada fator linear repetido associamos uma expressão do tipo:

$$\boxed{\frac{B_1}{(x - a_i)} + \frac{B_2}{(x - a_i)^2} + \dots + \frac{B_r}{(x - a_i)^r}}$$

onde B_1, B_2, \dots, B_r são constantes a determinar. Em tal caso, integrando esta expressão obtemos:

$$\boxed{B_1 \ln(|x - a_i|) - \frac{B_2}{x - a_i} + \dots + \frac{B_r}{(1 - r)(x - a_i)^{r-1}}}$$

Os fatores lineares não repetidos são tratados como no caso 1.

Exemplo 6.12.

Calcule as seguintes integrais:

[1] $\int \frac{3x^2 + 4x + 2}{x^3 + 2x^2 + x} dx$.

Como $\text{grau}(P(x)) < \text{grau}(Q(x))$ e $x^3 + 2x^2 + x = x(x + 1)^2$. O fator $(x + 1)$ tem multiplicidade 2 e o fator x é como no caso 1.

$$\frac{3x^2 + 4x + 2}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{A_1}{x} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}.$$

Comparando os numeradores: $3x^2 + 4x + 2 = A_1(x+1)^2 + B_1x(x+1) + B_2x$. As raízes do polinômio $Q(x)$ são: $x = 0$ e $x = -1$; agora, substituímos cada raiz na última expressão. Se $x = 0$, então $A_1 = 2$ e se $x = -1$, então $B_2 = -1$. Falta determinar B_1 . Para calcular o valor da constante B_1 , formamos o sistema de equações, obtido da comparação dos coeficientes dos polinômios. $3x^2 + 4x + 2 = (A_1 + B_1)x^2 + (2A_1 + B_2 + B_1)x + A_1$; então:

$$\begin{cases} A_1 + B_1 &= 3 \\ 2A_1 + B_2 + B_1 &= 4 \\ A_1 &= 2 \end{cases}$$

Como sabemos os valores de A_1 e B_2 obtemos, facilmente, $B_1 = 1$; então:

$$\frac{3x^2 + 4x + 2}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2};$$

$$\text{logo, } \int \frac{3x^2 + 4x + 2}{x^3 + 2x^2 + x} dx = \ln(|x^3 + x^2|) + \frac{1}{x+1} + c.$$

$$[2] \int \frac{x^3 + 3x - 1}{x^4 - 4x^2} dx.$$

Como $\text{grau}(P(x)) < \text{grau}(Q(x))$; $x^4 - 4x^2 = x^2(x-2)(x+2)$. O fator x tem multiplicidade 2 e os fatores $x-2$, $x+2$ são como no caso 1.

$$\frac{x^3 + 3x - 1}{x^4 - 4x^2} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2}.$$

Comparando os numeradores:

$x^3 + 3x - 1 = A_1x^2(x+2) + A_2x^2(x-2) + B_1x(x+2)(x-2) + B_2(x-2)(x+2)$; as raízes do polinômio $Q(x)$ são: $x = 0$, $x = 2$ e $x = -2$. Agora substituímos cada raiz na última expressão. Se $x = 0$, então $B_2 = \frac{1}{4}$; se $x = 2$, então $A_1 = \frac{13}{16}$ e se $x = -2$, então $A_2 = \frac{15}{16}$. Falta determinar B_1 . Para calcular o valor da constante B_1 , formamos o sistema de equações obtido da comparação dos coeficientes dos polinômios.

$$x^3 + 3x - 1 = (A_1 + A_2 + B_1)x^3 + (2A_1 - 2A_2 + B_2)x^2 + \dots;$$

note que o coeficiente da potência cúbica nos dá o valor de B_1 . De fato, sendo $A_1 + A_2 + B_1 = 1$, então $B_1 = -\frac{3}{4}$.

$$\frac{x^3 + 3x - 1}{x^4 - 4x^2} = \frac{13}{16(x-2)} + \frac{15}{16(x+2)} - \frac{3}{4x} + \frac{1}{4x^2};$$

logo:

$$\int \frac{x^3 + 3x - 1}{x^4 - 4x^2} dx = \frac{13}{16} \ln(|x-2|) + \frac{15}{16} \ln(|x+2|) - \frac{3}{4} \ln(|x|) - \frac{1}{4x} + c.$$

6.9.3 Caso 3: $Q(x)$ se decompõe em fatores lineares e fatores quadráticos irredutíveis, sendo que os fatores quadráticos não se repetem

A cada fator quadrático $ax^2 + bx + c$ de $Q(x)$ associamos uma expressão do tipo:

$$\boxed{\frac{Cx + D}{ax^2 + bx + c}}$$

onde C, D são constantes a determinar. Os fatores lineares são tratados como no caso 1 e 2.

Exemplo 6.13.

Calcule as seguintes integrais:

[1] Calcule $I = \int \frac{8x^2 + 3x + 20}{x^3 + x^2 + 4x + 4} dx$.

Primeiramente observamos que $\text{grau}(P(x)) < \text{grau}(Q(x))$. Fatorando $x^3 + x^2 + 4x + 4 = (x+1)(x^2 + 4)$. O único fator quadrático irredutível é $x^2 + 4$; o fator $x+1$ é como no caso 1.

$$\frac{8x^2 + 3x + 20}{x^3 + x^2 + 4x + 4} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}.$$

Comparando os numeradores:

$8x^2 + 3x + 20 = A_1(x^2 + 4) + (Cx + D)(x+1) = (A_1 + C)x^2 + (C + D)x + 4A_1 + D$. A raiz real do polinômio $Q(x)$ é $x = -1$; agora substituímos esta raiz na última expressão. Se $x = -1$, então $A_1 = 5$. Formamos o sistema de equações, obtido da comparação dos coeficientes dos polinômios: $A_1 + C = 8$, logo $C = 3$ e $C + D = 3$ implica em $D = 0$.

$$\frac{8x^2 + 3x + 20}{x^3 + x^2 + 4x + 4} = \frac{5}{x+1} + \frac{3x}{x^2 + 4}.$$

Portanto:

$$\mathbf{I} = 5 \ln(|x+1|) + 3 \int \frac{x}{x^2+4} dx = \ln(|(x+1)^5 \sqrt{(x^2+4)^3}|) + c,$$

onde a última integral é resolvida usando substituição simples.

[2] Calcule $\mathbf{I} = \int \frac{2x^2 + 5x + 4}{x^3 + x^2 + x - 3} dx$.

Primeiramente observamos que $\text{grau}(P(x)) < \text{grau}(Q(x))$. Fatorando $x^3 + x^2 + x - 3 = (x-1)(x^2 + 2x + 3)$. O único fator quadrático irredutível é $x^2 + 2x + 3$. O fator $x-1$ é como no caso 1.

$$\frac{2x^2 + 5x + 4}{x^3 + x^2 + x - 3} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 3}.$$

Comparando os numeradores:

$2x^2 + 5x + 4 = A_1(x^2 + 2x + 3) + (Cx + D)(x-1) = (A_1 + C)x^2 + (2A_1 - C + D)x + 3A_1 - D$; a raiz real do polinômio $Q(x)$ é $x = 1$; substituindo esta raiz na última expressão: Se $x = 1$, então $A_1 = \frac{11}{6}$. Formamos o sistema de equações, obtido da comparação dos coeficientes dos polinômios: $A_1 + C = 2$; logo $C = \frac{1}{6}$ e $3A_1 - D = 4$; logo $D = \frac{3}{2}$. Então:

$$\frac{2x^2 + 5x + 4}{x^3 + x^2 + x - 3} = \frac{11}{6(x-1)} + \frac{1}{6} \left(\frac{x+9}{x^2 + 2x + 3} \right);$$

logo:

$$\mathbf{I} = \frac{11}{6} \ln(|x-1|) + \frac{1}{6} \int \frac{x+9}{x^2 + 2x + 3} dx,$$

onde a última integral é resolvida usando substituições; de fato: $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$. Então, considere $u = x + 1$; logo $du = dx$ e:

$$\int \frac{x+9}{x^2 + 2x + 3} dx = \int \frac{u+8}{u^2 + 2} du = \int \frac{u}{u^2 + 2} du + \int \frac{8}{u^2 + 2} du.$$

A segunda integral é imediata, pois:

$$\int \frac{8}{u^2 + 2} du = \frac{8}{\sqrt{2}} \arctg\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + c_1 = \frac{8}{\sqrt{2}} \arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + c_1.$$

Na primeira integral fazemos $t = u^2 + 2$; logo $\frac{dt}{2} = u du$:

$$\int \frac{u}{u^2 + 2} du = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln(|t|) + c_2 = \frac{1}{2} \ln(|x^2 + 2x + 3|) + c_2$$

e:

$$I = \frac{11}{6} \ln(|x-1|) + \frac{1}{12} \ln(|x^2+2x+3|) + \frac{2\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + c.$$

[3] Calcule $I = \int \frac{3x^3 + 11x - 16}{(x^2 + 1)(x^2 + 4x + 13)} dx$.

Observemos que $\operatorname{grau}(P(x)) < \operatorname{grau}(Q(x))$; $x^2 + 1$ e $x^2 + 4x + 13$ são fatores quadráticos irredutíveis. Temos:

$$\frac{3x^3 + 11x - 16}{(x^2 + 1)(x^2 + 4x + 13)} = \frac{C_1x + D_1}{x^2 + 1} + \frac{C_2x + D_2}{x^2 + 4x + 13}.$$

Comparando os numeradores:

$$3x^3 + 11x - 16 = (C_1 + C_2)x^3 + (4C_1 + D_1 + D_2)x^2 + (13C_1 + 4D_1 + C_2)x + (13D_1 + D_2).$$

Formando o sistema de equações, obtido da comparação dos coeficientes dos polinômios:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 & = 3 \\ 4C_1 + D_1 + D_2 & = 0 \\ 13C_1 + 4D_1 + C_2 & = 11 \\ 13D_1 + D_2 & = -16 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema: $C_1 = 1$, $D_1 = -1$, $C_2 = 2$ e $D_2 = -3$; logo:

$$\frac{3x^3 + 11x - 16}{(x^2 + 1)(x^2 + 4x + 13)} = \frac{x-1}{x^2+1} + \frac{2x-3}{x^2+4x+13}.$$

Integrando, após a decomposição da função integranda, obtemos quatro integrais, a primeira é resolvida por substituição simples, a segunda é imediata, a terceira e quarta são resolvidas por completamento de quadrados.

$$I = \ln((x^2 + 4x + 13)\sqrt{x^2 + 1}) - \frac{7}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{3}\right) - \operatorname{arctg}(x) + c.$$

6.9.4 Caso 4: $Q(x)$ se decompõe em fatores lineares e fatores quadráticos irredutíveis, sendo que alguns dos fatores quadráticos se repetem

Se um fator quadrático $ax^2 + bx + c$ de $Q(x)$ tem multiplicidade k , a esse fator quadrático associamos uma expressão do tipo:

$$\boxed{\frac{C_1 x + D_1}{a x^2 + b x + c} + \frac{C_2 x + D_2}{(a x^2 + b x + c)^2} + \dots + \frac{C_k x + D_k}{(a x^2 + b x + c)^k}}$$

onde C_i, D_i são constantes a determinar, $i = 1, \dots, k$. Os outros fatores são tratados como nos casos 1, 2 e 3.

Exemplo 6.14.

Calcule as seguintes integrais:

[1] Calcule $\int \frac{x^3 + x + 2}{x(x^2 + 1)^2} dx$.

Primeiramente observamos que $\text{grau}(P(x)) < \text{grau}(Q(x))$ e $x^2 + 1$ é o único fator quadrático irredutível, de multiplicidade 2.

$$\frac{x^3 + x + 2}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{C_1 x + D_1}{x^2 + 1} + \frac{C_2 x + D_2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Comparando os numeradores:

$x^3 + x + 2 = (A + C_1)x^4 + D_1 x^3 + (2A + C_1 + C_2)x^2 + (D_1 + D_2)x + A$. Formando e resolvendo o sistema de equações obtido da comparação dos coeficientes dos polinômios e lembrando que $Q(x)$ tem uma raiz real $x = 0$, obtemos, $A = 2, C_1 = -2, D_1 = 1, C_2 = -2$ e $D_2 = 0$.

Logo: $\frac{x^3 + x + 2}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{2}{x} - \frac{2x - 1}{x^2 + 1} - \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$. Calculando as integrais correspondentes:

$$\int \frac{x^3 + x + 2}{x(x^2 + 1)^2} dx = \ln\left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right) + \arctg(x) + \frac{1}{x^2 + 1} + c.$$

[2] Calcule $I = \int \frac{x^5 + x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 8x + 4}{(x^2 + 2)^3} dx$.

Primeiramente observamos que $\text{grau}(P(x)) < \text{grau}(Q(x))$ e $x^2 + 2$ é o único fator quadrático irredutível, de multiplicidade 3.

$$\frac{x^5 + x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 8x + 4}{(x^2 + 2)^3} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2)^2} + \frac{Ex + F}{(x^2 + 2)^3}.$$

Formando e resolvendo o sistema de equações obtido da comparação dos coeficientes dos polinômios; obtemos, $A = 1, B=1, E = 4$ e $C = D = F = 0$. Logo:

$$I = \int \frac{x}{x^2 + 2} dx + \int \frac{dx}{x^2 + 2} + 4 \int \frac{x}{(x^2 + 2)^3} dx,$$

e:

$$I = \ln(\sqrt{x^2 + 2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{(x^2 + 2)^2} + c.$$

6.10 Mudança: Tangente do Ângulo Médio

Se a função integranda envolve expressões do tipo: $a + b \operatorname{sen}(x)$, $a + b \cos(x)$ ou combinações destas, utilizamos a mudança $u = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$; logo:

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2} \text{ e } dx = \frac{2du}{1+u^2}.$$

Por exemplo:

$$\int \frac{dx}{a + b \operatorname{sen}(x)} = \int \frac{2du}{a(1+u^2) + 2bu},$$

$$\int \frac{dx}{a + b \cos(x)} = \int \frac{2du}{a(1+u^2) + b(1-u^2)}.$$

Exemplo 6.15.

[1] Calcule $\int \frac{dx}{2 + \operatorname{sen}(x)}$. Neste caso $a = 2$ e $b = 1$; logo:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2 + \operatorname{sen}(x)} &= \int \frac{du}{u^2 + u + 1} = \int \frac{du}{\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}(2u+1)}{3}\right) + c \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}\left(2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right)}{3}\right) + c. \end{aligned}$$

[2] Calcule $\int \frac{dx}{1 - \cos(x) + \operatorname{sen}(x)}$.

Utilizando as mudanças: $\frac{dx}{1 - \cos(x) + \operatorname{sen}(x)} = \frac{du}{u(u+1)} = \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du$; logo:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 - \cos(x) + \operatorname{sen}(x)} &= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du \\ &= \ln\left(\frac{u}{u+1}\right) + c = \ln\left(\frac{1 - \cos(x)}{1 - \cos(x) + \operatorname{sen}(x)}\right) + c. \end{aligned}$$

6.11 Aplicações da Integral Indefinida

6.11.1 Obtenção de Famílias de Curvas

Seja $y = f(x)$ uma função derivável. O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$ é $f'(x)$. Inversamente, se um coeficiente angular é dado por

$m = f'(x)$, por integração determina-se uma família de funções: $y = f(x) + c$, onde c é uma constante arbitrária.

Exemplo 6.16.

[1] Obtenha a equação de uma família de curvas, sabendo que o coeficiente angular da reta tangente à cada curva, num ponto, é igual a menos duas vezes a abscissa do ponto. Obtenha a equação da curva que passa pelo ponto $(1, 1)$.

Temos $y' = -2x$; integrando:

$$y = - \int 2x \, dx = -x^2 + c.$$

No ponto $(1, 1)$, tem-se $1 = y(1) = -1 + c$; então, $c = 2$ e $y = -x^2 + 2$.

[2] Em todos os pontos de uma curva $y = f(x)$ tem-se que $y'' = x^2 - 1$. Obtenha a equação da curva, se esta passa pelo ponto $(1, 1)$ e a reta tangente nesse ponto é paralela à reta $x + 12y = 13$. Temos $y'' = x^2 - 1$; integrando:

$$y' = \int (x^2 - 1) \, dx = \frac{x^3}{3} - x + c.$$

O coeficiente angular da reta: $x + 12y = 13$ é $-\frac{1}{12}$ e a reta tangente à curva no ponto $(1, 1)$ é paralela a esta reta: $-\frac{1}{12} = y'(1) = \frac{1}{3} - 1 + c$; logo, $c = \frac{7}{12}$ e $y' = \frac{x^3}{3} - x + \frac{7}{12}$.

Integrando novamente: $y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} + \frac{7x}{12} + c$ (vermelho). Usando o fato de que $y(1) = 1$ temos $c = \frac{5}{6}$ e

$$y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} + \frac{7x}{12} + \frac{5}{6} \quad (\text{azul}).$$

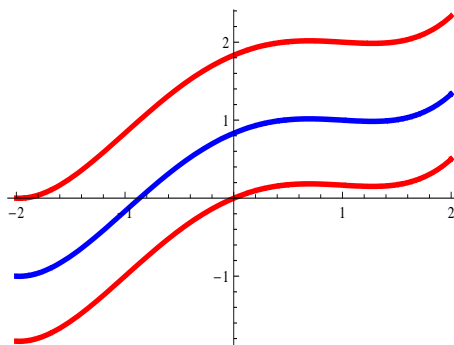


Figura 6.2: Exemplo [2].

6.12 Outras aplicações

Exemplo 6.17.

[1] A taxa de produção de uma mina de cobre t anos após a extração ter começado foi calculada como $R(t) = 50 t e^{0.1t}$ mil toneladas por ano. Determine a produção total de cobre ao final do ano t .

Seja $P = P(t)$ a produção total ao final do ano t ; então, a taxa de produção é $P' = P'(t)$; logo, $P'(t) = R(t) = 50 t e^{0.1t}$; integrando:

$$P(t) = 50 \int t e^{0.1t} dt + c = 5000 e^{0.1t} (0.1 t - 1) + c.$$

Ao final do ano zero a produção é zero; logo, $P(0) = 0$, donde obtemos $c = 5000$; portanto, a produção total de cobre ao final do ano t é dada por:

$$P(t) = 5000 e^{0.1t} (0.1 t - 1) + 5000.$$

[2] A temperatura de um líquido é 75° . Coloca-se o líquido em um depósito cuja temperatura, mantida constante é igual a 25° . Passados 5 minutos a temperatura do líquido é 50° . Sabendo que a velocidade de resfriamento é proporcional à diferença que existe entre a temperatura do líquido e a do depósito, qual é a temperatura do líquido após 15 minutos?

Seja $T = T(t)$ a temperatura do líquido no instante t , $T(0) = 75^\circ$ e $T(5) = 50^\circ$. A velocidade de resfriamento é proporcional à diferença que existe entre a temperatura do líquido e a do depósito. Então, $T'(t) = k (T(t) - 25)$, $k > 0$. Devemos determinar $T(t)$.

$\int \frac{T'(t)}{T(t) - 25} dt = k \int dt + c$. Como $dT = T'(t) dt$, então:

$$\int \frac{T'(t)}{T(t) - 25} dt = \int \frac{dT}{T - 25} = \ln(T(t) - 25);$$

logo, $\ln(T(t) - 25) = k t + c$; então:

$$\begin{cases} \ln(T(0) - 25) = \ln(50) = c \\ \ln(T(5) - 25) = \ln(25) = 5k + \ln(50), \end{cases}$$

donde $k = -\frac{1}{5} \ln(2)$; logo, $\ln(T(t) - 25) = \ln(50 \times 2^{-\frac{t}{5}})$ e $T(t) = 25 + 50 \times 2^{-\frac{t}{5}}$; então:

$$T(15) = 31^\circ 15'.$$

[3] **(Lei de resfriamento de Newton):** A taxa de variação da temperatura $T = T(t)$ de um corpo é proporcional à diferença entre a temperatura ambiente A (constante) e a temperatura $T = T(t)$, isto é:

$$\frac{dT}{dt} = k(A - T(t)), \quad (k > 0). \quad (*)$$

Para determinar T , integramos $(*)$ em relação a t :

$$\int \frac{dT}{T - A} = -k \int dt + c; \quad \text{obtendo} \quad \ln(T - A) = -k t + c;$$

logo, $T(t) = A + C e^{-kt}$. Se a temperatura inicial é $T(0) = T_0$; então, $C = T_0 - A$ e:

$$T(t) = A + (T_0 - A) e^{-kt}.$$

[4] **(Crescimento populacional inibido):** Considere uma colônia de coelhos com população inicial N_0 numa ilha sem predadores. Se a população $N = N(t)$ é pequena, ela tende a crescer a uma taxa proporcional a si mesma; mas, quando ela se torna grande, há uma competição crescente por alimento e espaço e N cresce a uma taxa menor. Estudos ecológicos mostram que a ilha pode suportar uma quantidade máxima de N_1 indivíduos, se a taxa de crescimento da população N é conjuntamente proporcional a N e a $N_1 - N$; logo:

$$\frac{dN}{dt} = k N (N_1 - N), \quad (k > 0). \quad (**)$$

Para determinar N , integramos $(**)$ em relação a t , aplicando o método de frações parciais:

$$\int \frac{dN}{N(N_1 - N)} = k \int dt + c; \quad \text{logo,} \quad \frac{1}{N_1} \left[\int \frac{dN}{N} + \int \frac{dN}{N_1 - N} \right] = k t + c;$$

e:

$$\ln\left(\frac{N}{N_1 - N}\right) = k t N_1 + c_1.$$

Como $N(0) = N_0$, $c_1 = \ln\left(\frac{N_0}{N_1 - N_0}\right)$; então,

$$\ln\left(\frac{N}{N_1 - N}\right) = N_1 k t + \ln\left(\frac{N_0}{N_1 - N_0}\right);$$

logo, $\frac{N}{N_1 - N} = \frac{N_0 e^{N_1 k t}}{N_1 - N_0}$ donde:

$$N(t) = \frac{N_0 N_1}{N_0 + (N_1 - N_0) e^{-N_1 k t}},$$

que é uma função logística de população limite N_1 .

6.13 Exercícios

1. Calcule as seguintes integrais usando a tabela e, em seguida, derive seus resultados para conferir as respostas:

$$(a) \int x(x+3)(x+1) dx$$

$$(k) \int tg^2(x) dx$$

$$(b) \int (3x^2 + 5)^3 dx$$

$$(l) \int \sqrt{x}(\sqrt{2} - \sqrt{x})^2 dx$$

$$(c) \int \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}} dx$$

$$(m) \int 10^x dx$$

$$(d) \int (x^{\frac{2}{3}} + 1)^2 dx$$

$$(n) \int \frac{e^x + 4}{e^x} dx$$

$$(e) \int \sqrt{x}(x - \sqrt{x} + 1) dx$$

$$(o) \int 5e^{ax} dx$$

$$(f) \int \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 2)}{x^{\frac{2}{3}}} dx$$

$$(p) \int (9t^2 - \frac{1}{\sqrt{t}^3}) dt$$

$$(g) \int \frac{(x^3 - x^2)^2}{\sqrt{x}} dx$$

$$(q) \int (\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}}{3}) dx$$

$$(h) \int \frac{1}{x^2 + 7} dx$$

$$(r) \int x^3 \sqrt[4]{x} dx$$

$$(i) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$$

$$(s) \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$$

$$(j) \int \frac{dx}{\sqrt{8 - x^2}}$$

$$(t) \int \frac{(x^5 + 2x^2 - 1)dx}{x^4}$$

2. Calcule as seguintes integrais usando o método de substituição:

$$(a) \int \frac{x}{\sqrt[5]{x^2 - 1}} dx$$

$$(f) \int \frac{4x^2}{\sqrt{x^3 + 8}} dx$$

$$(b) \int \frac{3x}{x^2 + 1} dx$$

$$(g) \int \frac{6x}{(5 - 3x^2)^2} dx$$

$$(c) \int \sqrt{x+5} dx$$

$$(h) \int \frac{dy}{(b + ay)^3}$$

$$(d) \int \frac{dy}{\sqrt{b - ay}}$$

$$(i) \int x^3 \sqrt{a + bx^4} dx$$

$$(e) \int y(b - ay^2) dy$$

$$(j) \int \frac{\ln(x) + 2}{x} dx$$

- | | |
|--|--|
| (k) $\int \operatorname{sen}(2x) \cos^2(2x) dx$ | (s) $\int \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{(5 - \cos(\theta))^3} d\theta$ |
| (l) $\int \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$ | (t) $\int \frac{x+3}{(x^2+6x)^2} dx$ |
| (m) $\int \frac{\cos(ax) dx}{\sqrt{b + \operatorname{sen}(ax)}}$ | (u) $\int \frac{dx}{x \ln(x)}$ |
| (n) $\int \frac{1}{x(\ln(x))^2} dx$ | (v) $\int \frac{e^{\operatorname{arcsen}(x)}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ |
| (o) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} dx$ | (w) $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln(x))}{x} dx$ |
| (p) $\int x^2 e^{x^3} dx$ | (x) $\int \frac{\cos(\sqrt{x+1})}{\sqrt{1+x}} dx$ |
| (q) $\int \frac{\operatorname{arcsen}(y)}{2\sqrt{1-y^2}} dy$ | (y) $\int \frac{x^5}{\sqrt[3]{x^6+4}} dx$ |
| (r) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+16} dx$ | (z) $\int 3^x \cos(3^x) dx$ |

3. Calcule as seguintes integrais, usando as substituições dadas:

- | | |
|--|--|
| (a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}, \text{ use } x = \sqrt{2} \sec(t)$ | (d) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ use } x = \operatorname{sen}(t)$ |
| (b) $\int \frac{dx}{e^x+1}, \text{ use } x = -\ln(t)$ | (e) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}, \text{ use } z = 1 + \sqrt{x}$ |
| (c) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}, \text{ use } t = \sqrt{x+1}$ | (f) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^{\frac{1}{3}}}}, \text{ use } z = 1 + \sqrt[3]{x}$ |

4. Calcule as seguintes integrais usando o método de integração por partes:

- | | |
|--|---|
| (a) $\int x e^x dx$ | (f) $\int \arccos(2x) dx$ |
| (b) $\int x^2 \operatorname{sen}(x) dx$ | (g) $\int 3^x \cos(x) dx$ |
| (c) $\int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx$ | (h) $\int x \operatorname{arctg}(x) dx$ |
| (d) $\int e^{-t} \cos(\pi t) dt$ | (i) $\int \sec^3(x) dx$ |
| (e) $\int \operatorname{sen}(\ln(x)) dx$ | (j) $\int (x-1) e^{-x} dx$ |

(k) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx$

(s) $\int x^2 \sinh(x) dx$

(l) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(t) $\int x \operatorname{argsinh}(2x) dx$

(m) $\int x \operatorname{cosec}^2(x) dx$

(u) $\int x^4 e^{-x} dx$

(n) $\int x \sec(x) \operatorname{tg}(x) dx$

(v) $\int \frac{x \operatorname{arcsen}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(o) $\int x^3 \operatorname{sen}(5x) dx$

(w) $\int x \sec^2(x) dx$

(p) $\int x^4 \cos(2x) dx$

(x) $\int \ln^3(x) dx$

(q) $\int x^4 e^x dx$

(y) $\int \sqrt{x} \ln(x) dx$

(r) $\int (x^5 - x^3 + x) e^{-x} dx$

(z) $\int x \sqrt{x+1} dx$

5 Calcule as seguintes integrais usando primeiramente o método de substituição e depois, integração por partes:

(a) $\int \sqrt{1+x^2} dx$

(d) $\int e^{\sqrt{x}} dx$

(b) $\int x^{11} \cos(x^4) dx$

(e) $\int \operatorname{sen}(\sqrt{x}) dx$

(c) $\int \cos(\ln(x)) dx$

(f) $\int x^5 e^{x^2} dx$

6 Calcule as seguintes integrais que envolvem potências de funções trigonométricas:

(a) $\int \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^4(x)} dx$

(e) $\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{tg}^2(x)} dx$

(b) $\int \operatorname{tg}^5(x) \sec^3(x) dx$

(f) $\int (\cot g^2(2x) + \cot g^4(2x)) dx$

(c) $\int \operatorname{sen}^2(x) \cos^2(x) dx$

(g) $\int \frac{\cos^4(x)}{\operatorname{sen}^6(x)} dx$

(d) $\int \frac{\operatorname{sen}^5(x)}{\sqrt{\cos(x)}} dx$

(h) $\int \operatorname{sen}^4(ax) dx$

$$(i) \int \operatorname{sen}^3(y) \cos^4(y) dy$$

$$(j) \int \frac{\operatorname{sen}^4(x)}{\cos^6(x)} dx$$

5. Calcule as seguintes integrais, usando substituição trigonométrica:

$$(a) \int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2} dx$$

$$(j) \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$(b) \int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}$$

$$(k) \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$(c) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{5-x^2}}$$

$$(l) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$$

$$(d) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7}}$$

$$(m) \int \frac{7x^3}{(4x^2+9)^{\frac{3}{2}}} dx$$

$$(e) \int \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}}$$

$$(n) \int (\sqrt{1+x^2} + 2x) dx$$

$$(f) \int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}} dx$$

$$(o) \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx$$

$$(g) \int \frac{(16-9x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^6} dx$$

$$(p) \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} dx$$

$$(h) \int \frac{dx}{(4x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(q) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$$

$$(i) \int \sqrt{x^2+2} dx$$

6. Usando primeiramente o método de substituição simples, seguido do método de substituição trigonométrica, calcule as seguintes integrais:

$$(a) \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{(25-\cos^2(x))^{\frac{3}{2}}} dx \quad (b) \int \frac{dx}{x((\ln(x))^2-4)^{\frac{3}{2}}} \quad (c) \int \frac{\cos(x)}{\sqrt{4+\operatorname{sen}^2(x)}} dx$$

7. Completando os quadrados e usando substituição trigonométrica, calcule as seguintes integrais:

$$(a) \int \frac{dx}{\sqrt{-3+8x-4x^2}}$$

$$(e) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x-1}}$$

$$(i) \int \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+4}} dx$$

$$(b) \int \frac{x}{\sqrt{1-x+3x^2}} dx$$

$$(f) \int \frac{5x+3}{\sqrt{4x^2+3x+1}} dx$$

$$(j) \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+6x+34}} dx$$

$$(c) \int \frac{2x}{(x^2+3x+4)^2} dx$$

$$(g) \int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$$

$$(d) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+5}}$$

$$(h) \int \frac{1-2x}{\sqrt{2x-x^2+3}} dx$$

8. Calcule as seguintes integrais, usando frações parciais:

$$(a) \int \frac{dx}{x^3 + 8}$$

$$(b) \int \frac{4dx}{x^4 - 1}$$

$$(c) \int \frac{x^5 + 4x^3}{(x^2 + 2)^3} dx$$

$$(d) \int \frac{x^3 + 3x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$(e) \int \frac{dx}{x^4 + x^2}$$

$$(f) \int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$(g) \int \frac{x^4 + 8x^3 - x^2 + 2x + 1}{(x^2 + x)(x^3 + 1)} dx$$

$$(h) \int \frac{dx}{x^3(x^2 + 1)}$$

$$(i) \int \frac{x + 1}{(x^2 + 4x + 5)^2} dx$$

$$(j) \int \frac{x^3 + x + 1}{x(1 + x^2)} dx$$

$$(k) \int \frac{x^3 + 1}{(x^2 - 4x + 5)^2} dx$$

$$(l) \int \frac{dx}{(x + 1)(x^2 + x + 1)^2}$$

$$(m) \int \frac{dx}{x^8 + x^6}$$

$$(n) \int \frac{3x + 1}{x^2 - x + 1} dx$$

$$(o) \int \frac{dx}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x}$$

$$(p) \int \frac{x}{x^4 - 1} dx$$

$$(q) \int \frac{5x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^4 + 9x^2} dx$$

$$(r) \int \frac{x^5 + 4x^3 + 3x^2 - x + 2}{x^5 + 4x^3 + 4x} dx$$

$$(s) \int \frac{2x + 2}{x(x^2 + 2x + 2)^2} dx$$

$$(t) \int \frac{dx}{x^3 + 3x^2 + 7x + 5}$$

$$(u) \int \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 6x^2 + 5x} dx$$

$$(v) \int \frac{3x^3 + x^2 + x - 1}{x^4 - 1} dx$$

9. Calcule as seguintes integrais:

$$(a) \int \cos(x) \ln(\sin(x)) dx$$

$$(b) \int x 5^x dx$$

$$(c) \int x^5 \cos(x^3) dx$$

$$(d) \int \operatorname{tg}(x) \sec^3(x) dx$$

$$(e) \int \cos(3x) \cos(4x) dx$$

$$(f) \int \frac{x}{\sqrt{(x^2 + 4)^5}} dx$$

$$(g) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 8}}$$

$$(h) \int e^t \sqrt{9 - e^{2t}} dt$$

$$(i) \int \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2 + 4} dx$$

$$(j) \int \frac{x - 3}{(x^2 + 2x + 4)^2} dx$$

$$(k) \int \frac{x^4 + 1}{x(x^2 + 1)} dx$$

$$(l) \int \frac{\sin(x) \cos^2(x)}{5 + \cos^2(x)} dx$$

$$(m) \int \frac{x^2}{(x+1)^3} dx$$

$$(n) \int \frac{dx}{4x^2 + 12x - 7}$$

$$(o) \int \frac{2x+3}{x^3+3x} dx$$

$$(p) \int \frac{3x^2 - 4x + 5}{(x-1)(x^2+1)} dx$$

$$(q) \int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}} dx$$

$$(r) \int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$$

$$(s) \int \frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{x^2+4}}$$

$$(t) \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x-2}}$$

$$(u) \int \frac{dx}{1+2\sin(x)\cos(x)+\sin^2(x)}$$

$$(v) \int \frac{2\cos^2(\frac{x}{2})}{x+\sin(x)} dx$$

$$(w) \int \frac{1-tg^2(x)}{\sec^2(x)+tg(x)} dx$$

$$(x) \int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x-1}} dx$$

10. Calcule as seguintes integrais:

$$(a) \int \frac{dx}{\sin(x) - \cos(x)}$$

$$(b) \int \frac{dx}{\sin(x) + \cos(x)}$$

$$(c) \int \frac{dx}{3 + \cos(x)}$$

$$(d) \int \frac{\cos(x) dx}{\sin(x) - \cos(x)}$$

11. Verifique, utilizando exemplos, se é verdadeiro ou falso que se $P = P(x)$ é um polinômio de grau n , então: $\int P(x) e^x dx = \sum_{i=0}^n (-1)^i P^{(i)}(x) e^x$.

12. Em todos os pontos de uma curva $y = f(x)$ tem-se que $y'' = \cos(2x) - \sin(x)$. Obtenha a equação da curva, se esta passa pelo ponto $(0, 1)$ e a reta tangente nesse ponto é perpendicular à reta $y - x = 0$.

13. Em alguns estudos, a degradação ambiental produzida por detritos tóxicos é modelada pela equação de Haldane:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{as}{b + cs + s^2},$$

onde $a, b, c > 0$, $S = S(t)$ é a concentração do substrato (a substância do resíduo na qual as bactérias agem). Determine $S = S(t)$.

Qual é a probabilidade dos circuitos continuarem funcionando após 600 horas?

Capítulo 7

INTEGRAÇÃO DEFINIDA

7.1 Introdução

Neste capítulo introduziremos a noção de integral definida, cuja origem foi a formalização matemática da idéia do cálculo de áreas de regiões planas delimitadas pelos gráficos de funções.

Observemos que somente "sabemos" calcular, efetivamente, a área de regiões limitadas por segmentos de retas como retângulos, triângulos ou composições destes.

Como motivação, começaremos com um problema.

Problema: Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas.. Calcule a área da região plana R delimitada pelo gráfico das funções contínuas:

$$y = f(x) \quad \text{e} \quad y = g(x), \quad a \leq x \leq b.$$

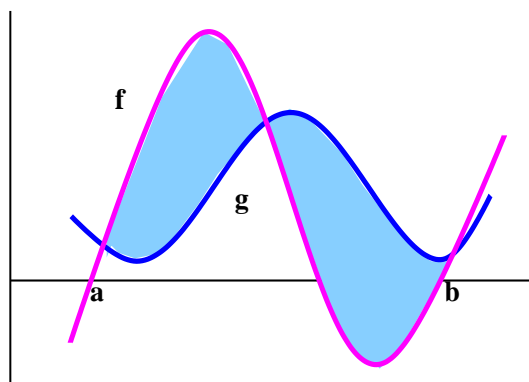


Figura 7.1: Área da região dada no problema.

Solução do Problema: O subconjunto $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset [a, b]$ é chamado de **partição de ordem n do intervalo $[a, b]$** se:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Subdividamos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, escolhendo os pontos da partição P . Formemos os seguintes subintervalos:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n].$$

Denotemos qualquer destes subintervalos por $[x_{i-1}, x_i]$, i variando de 1 até n . Seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ o comprimento do subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, i variando de 1 até n . Note que estes subintervalos não tem necessariamente o mesmo comprimento. Para cada i , variando de 1 até n , consideremos o retângulo R_i limitado pelas retas $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, $y = f(c_i)$ e $y = g(c_i)$, onde $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

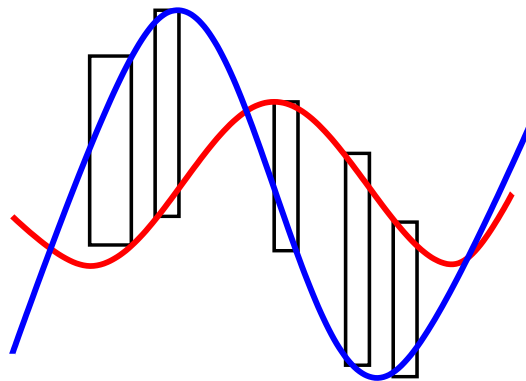


Figura 7.2: Subdivisão da região.

Obtemos assim n retângulos R_i . É intuitivo que a soma das áreas dos n retângulos é uma "aproximação" da área da região R . Se n é muito grande ou, equivalentemente, se n cresce, então Δx_i ou seja a base do retângulo correspondente é muito pequena e a soma das áreas dos n retângulos aproxima-se cada vez mais da área da região R .

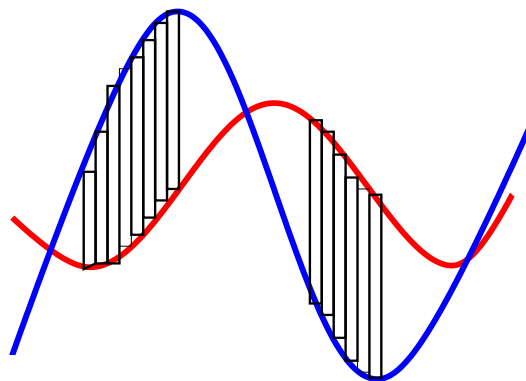


Figura 7.3: Subdivisão da região.

A área de cada R_i é $|f(c_i) - g(c_i)| \times \Delta x_i$ (base por altura); a soma S_n das áreas dos n retângulos é:

$$S_n = \sum_{i=1}^n |f(c_i) - g(c_i)| \Delta x_i.$$

S_n é chamada soma de Riemann da função $|f - g|$. Denotemos por $|\Delta x_i|$ o maior dos Δx_i . A área de uma região plana R delimitada pelo gráfico das funções contínuas $y = f(x)$, $y = g(x)$ definidas no intervalo $[a, b]$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$ é:

$$A(R) = \lim_{|\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |f(c_i) - g(c_i)| \Delta x_i.$$

É possível provar, com rigor matemático que este limite sempre existe e é igual a área de R ; mais ainda, este limite não depende da escolha da partição do intervalo $[a, b]$ ou da escolha dos pontos c_i .

Para mais detalhes veja a bibliografia intermediária e avançada.

Exemplo 7.1.

[1] Calcule a área da região limitada pelo gráfico da função $y = f(x) = x^2$, o eixo dos x e pelas retas $x = 0$ e $x = 1$.

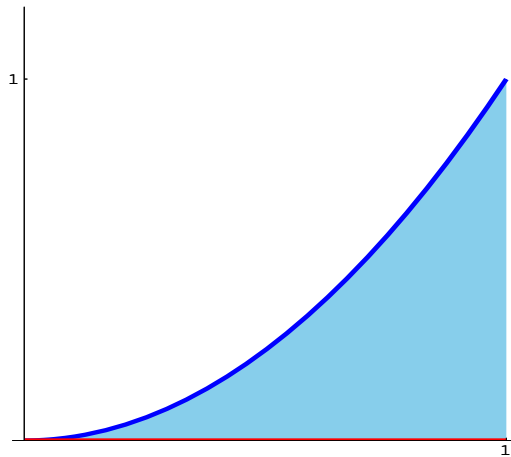


Figura 7.4: Área limitada por $y = f(x) = x^2$.

O intervalo de integração é $[0, 1]$, $f(x) = x^2$ e $g(x) = 0$; então:

$$h(x) = |f(x) - g(x)| = x^2.$$

a) Consideremos a seguinte partição de ordem 4 de $[0, 1]$:

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{4} < x_2 = \frac{1}{2} < x_3 = \frac{3}{4} < x_4 = 1;$$

$\Delta x_i = \frac{1}{4}$, para cada i . Os subintervalos são:

$$\left[0, \frac{1}{4}\right], \quad \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \quad \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \text{ e } \left[\frac{3}{4}, 1\right].$$

Se escolhermos $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{1}{4}$, $c_3 = \frac{1}{2}$ e $c_4 = \frac{3}{4}$, então, $h(c_1) = 0$, $h(c_2) = \frac{1}{16}$, $h(c_3) = \frac{1}{4}$, $h(c_4) = \frac{9}{16}$; logo:

$$S_4 = \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{9}{16} = \frac{7}{32}.$$

Se escolhermos $c_1 = \frac{1}{4}$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = \frac{3}{4}$ e $c_4 = 1$:

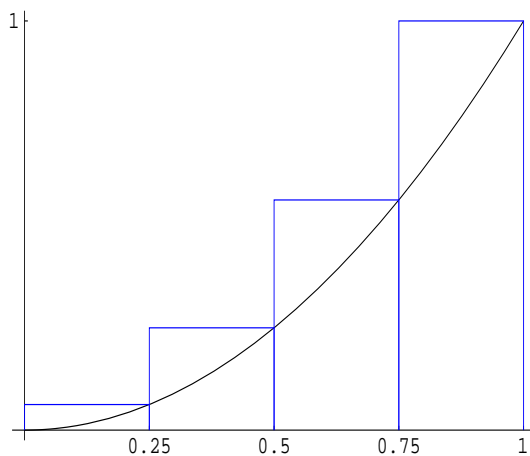


Figura 7.5: Partição da região.

$h(c_1) = \frac{1}{16}$, $h(c_2) = \frac{1}{4}$, $h(c_3) = \frac{9}{16}$, $h(c_4) = 1$; logo:

$$S_4 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{9}{16} + \frac{1}{4} \times 1 = \frac{15}{32}.$$

É intuitivo que

$$\frac{7}{32} \leq A(R) \leq \frac{15}{32}.$$

b) Consideremos a seguinte partição de ordem n :

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < x_2 = \frac{2}{n} < x_3 = \frac{3}{n} < \dots < x_n = \frac{n}{n} = 1.$$

$$\Delta x_i = \frac{1}{n}.$$

Se escolhermos $c_1 = \frac{1}{n}, c_2 = \frac{2}{n}, c_3 = \frac{3}{n}, \dots, c_n = \frac{n}{n}$:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \times \frac{2^2}{n^2} + \frac{1}{n} \times \frac{3^2}{n^2} + \dots + \frac{1}{n} \times \frac{n^2}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2] \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}. \end{aligned}$$

Se escolhermos $c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{n}, c_3 = \frac{2}{n}, \dots, c_n = \frac{n-1}{n}$:

$$S_n = \frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2] = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.$$

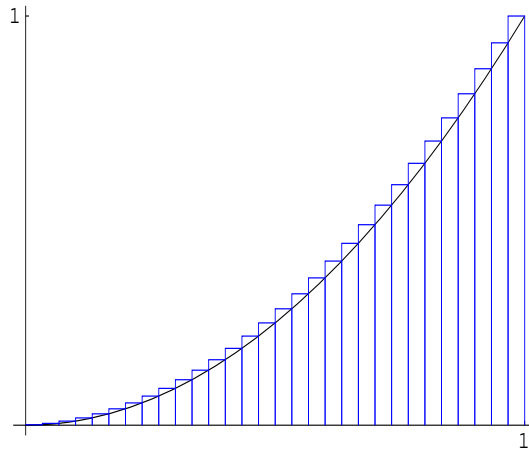


Figura 7.6: Nova partição da região.

Então:

$$\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \leq A(R) \leq \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Por outro lado:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3};$$

então:

$$A(R) = \frac{1}{3}.$$

[2] Calcule a área da região limitada pelos gráficos das funções $f(x) = x^3$, $g(x) = 9x$ e pelas retas $x = 0$ e $x = 3$.

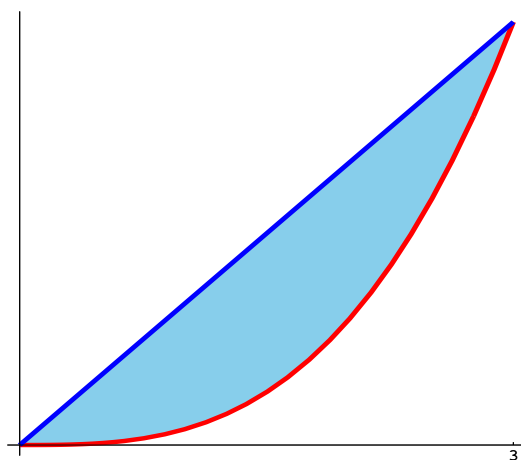


Figura 7.7: Área limitada por $f(x) = x^3$, $g(x) = 9x$ e pelas retas $x = 0$ e $x = 3$.

O intervalo de integração é $[0, 3]$; então:

$$h(x) = |f(x) - g(x)| = 9x - x^3,$$

se $x \in [0, 3]$.

a) Consideremos a seguinte partição de ordem 6 de $[0, 3]$:

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{2} < x_2 = 1 < x_3 = \frac{3}{2} < x_4 = 2 < x_5 = \frac{5}{2} < x_6 = 3;$$

$\Delta x_i = \frac{1}{2}$, para cada i .

Se escolhermos $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = 1$, $c_4 = \frac{3}{2}$, $c_5 = 2$ e $c_6 = \frac{5}{2}$, obtemos:

$$h(c_1) = 0, h(c_2) = \frac{35}{8}, h(c_3) = 8, h(c_4) = \frac{81}{8}, h(c_5) = 10 \text{ e } h(c_6) = \frac{55}{8}$$

e:

$$S_6 = \frac{1}{2} \left[\frac{35}{8} + 8 + \frac{81}{8} + 10 + \frac{55}{8} \right] = \frac{315}{16}.$$

b) Consideremos a seguinte partição de ordem n :

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{3}{n} < x_2 = \frac{6}{n} < x_3 = \frac{9}{n} < \dots < x_n = \frac{3n}{n} = 3.$$

$\Delta x_i = \frac{3}{n}$. Seja $c_i = \frac{3i}{n}$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Logo:

$$h(c_1) = 3^3\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\right), h(c_2) = 3^3\left(\frac{2}{n} - \frac{8}{n^3}\right), h(c_3) = 3^3\left(\frac{3}{n} - \frac{27}{n^3}\right), h(c_4) = 3^3\left(\frac{4}{n} - \frac{64}{n^3}\right).$$

Em geral:

$$h(c_i) = 3^3\left[\frac{i}{n} - \frac{i^3}{n^3}\right],$$

e:

$$S_n = \sum_{i=1}^n h(c_i) \times \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 3^3 \left[\frac{i}{n} - \frac{i^3}{n^3} \right] \times \frac{3}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{3^4}{n^2} \left[i - \frac{i^3}{n^2} \right].$$

Lembrando que

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

temos:

$$S_n = \frac{81}{4} \left[1 - \frac{1}{n^2} \right].$$

Então, a área procurada é:

$$A(R) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{81}{4} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{81}{4}.$$

7.2 Integral Definida

Definição 7.1. Sejam f uma função definida no intervalo $[a, b]$, P uma partição qualquer do intervalo $[a, b]$ e c_i um ponto qualquer em cada subintervalo definido pela partição. A **integral definida de f de a até b** é denotada por:

$$\int_a^b f(x) dx$$

e definida por:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

se o limite existe.

Observação 7.1.

1. Se o limite da definição existe, é independente das escolhas feitas, como no caso da definição de área. Portanto, deve ter sempre um único valor.
2. Se f é **contínua e não negativa** em $[a, b]$ a definição de integral definida coincide com a definição de área da região R delimitada pelo gráfico de f , pelas retas $x = a$, $x = b$ e pelo eixo dos x ($y = 0$):

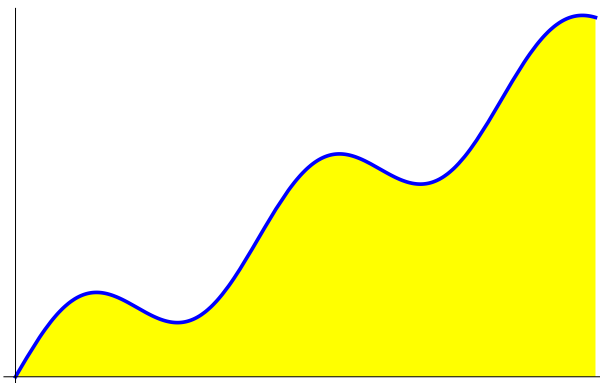


Figura 7.8: A região R .

$$R = \{(x, y) / a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Neste caso teremos:

$$A(R) = \int_a^b f(x) dx$$

3. Os números a e b são chamados limites inferior e superior de integração.

Definição 7.2. Uma função f definida em $[a, b]$ é dita **integrável em** $[a, b]$ se sua integral definida existe.

Algumas das provas deste capítulo serão omitidas, pois fogem do objetivo destas notas. Um leitor interessado pode recorrer à bibliografia indicada.

Teorema 7.1. Se a função f é contínua em $[a, b]$, então é integrável em $[a, b]$.

Observemos que a recíproca deste teorema é falsa. Por exemplo, considere a função:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{se } x \in (1, 2]. \end{cases}$$

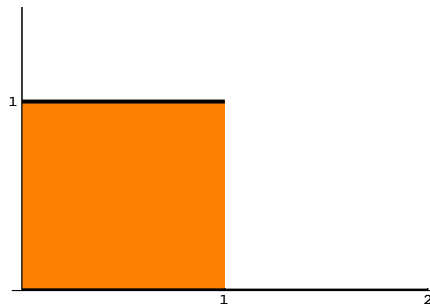


Figura 7.9: Gráfico de f .

f é descontínua, mas a região limitada pelo gráfico de f , possui área igual a 1 no intervalo $[0, 1]$ e zero no intervalo $(1, 2]$; logo, f é integrável.

Proposição 7.1. Se f e g são funções integráveis em $[a, b]$, então:

1. **Linearidade da Integral.** $\alpha f + \beta g$ é função integrável em $[a, b]$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e:

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

2. **Monotonicidade da Integral.** Se $f(x) \geq g(x)$ em $[a, b]$; então,

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

3. $|f|$ é integrável e:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

4. Sejam $a < c < b$ e f uma função integrável em $[a, c]$ e $[c, b]$ respectivamente. Então f é integrável em $[a, b]$ e:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Para a prova, veja o apêndice. Até agora conhecemos a definição e as propriedades mais importantes da integral definida. Mostraremos, a seguir, como calculá-la.

7.3 Teorema Fundamental do Cálculo

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Definamos a função:

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Por exemplo, se $f(x) = \cos(x)$, então:

$$g(x) = \int_0^x \cos(t) dt = \sin(x);$$

por outro lado observe que, $g'(x) = \cos(x) = f(x)$. Este fato pode ser generalizado. É o que estabelece o seguinte teorema.

Teorema 7.2. (Fundamental do Cálculo). Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. A função:

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt$$

é derivável em (a, b) , e:

$$g'(x) = f(x), \text{ ou, } g'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

7.4 Construção de Primitivas

Este resultado implica que toda função contínua possui uma primitiva. Veja o apêndice.

Existem funções integráveis que não possuem primitivas (não podem ser contínuas). Por exemplo, a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0; \end{cases}$$

f não é derivada de nenhuma função:

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt = 0, \quad \text{para todo } x.$$

Corolário 7.3. Se f é uma função integrável em $[a, b]$ e admite uma primitiva $F(x)$ em $[a, b]$, então:

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)}$$

Observação 7.2. O corolário nos diz que para calcular a integral definida de uma função, basta procurar uma primitiva da função e avaliá-la nos limites de integração. A integral definida é um número real.

Notação:

$$F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Corolário 7.4. Na hipótese do corolário anterior, temos:

$$1. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$2. \int_a^a f(x) dx = 0.$$

Corolário 7.5. Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}$ derivável; I e J são intervalos tais que $\alpha(J) \subset I$. Então:

$$g(x) = \int_a^{\alpha(x)} f(t) dt$$

é derivável e:

$$g'(x) = f(\alpha(x)) \alpha'(x)$$

Exemplo 7.2.

[1] A primitiva de $\int \sin(x^6) dx$ é:

$$F(x) = \int_0^x \sin(t^6) dt.$$

De fato, $F'(x) = \sin(x^6)$.

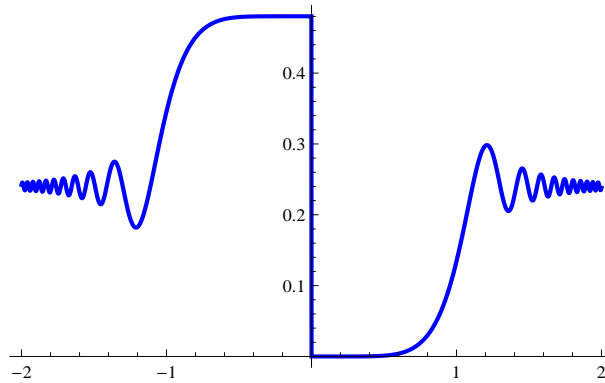


Figura 7.10: Gráfico de $F = F(x)$.

[2] A primitiva de $\int e^{-x^2} dx$ é:

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

[3] Calcule $\int_0^1 \left[10 e^x + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right] dx$.

Usando a linearidade, podemos escrever a integral como:

$$\int_1^2 \left[10 e^x + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right] dx = 10 \int_1^2 e^x dx + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}.$$

Como:

$$F_1(x) = \int e^x dx = e^x, \text{ e } F_2(x) = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} = \int x^{-1/4} dx = \frac{4(\sqrt[4]{x^3})}{3}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left[10e^x + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right] dx &= 10 \int_1^2 e^x dx + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} = 10 F_1(x) \Big|_1^2 + F_2(x) \Big|_1^2 \\ &= 10 (F_1(2) - F_1(1)) + \frac{4}{3} (F_2(2) - F_2(1)) \\ &= 10 (e^2 - e) + \frac{4}{3} (\sqrt[4]{8} - 1). \end{aligned}$$

[4] Calcule $\int_e^{e^2} \ln(x) dx$.

Utilizamos integração por partes:

$$\begin{aligned} u &= \ln(x) & dv &= dx \\ du &= \frac{dx}{x} & v &= x; \end{aligned}$$

então: $F(x) = \int \ln(x) dx = x \ln(x) - x$; logo:

$$\int_e^{e^2} \ln(x) dx = F(x) \Big|_e^{e^2} = e^2.$$

[5] Calcule $\int_{-1}^1 |\operatorname{sen}(\pi x)| dx$.

Observamos que $\operatorname{sen}(\pi x) \geq 0$ se $0 \leq x \leq 1$ e $\operatorname{sen}(\pi x) \leq 0$ se $-1 \leq x \leq 0$.

$$\int \operatorname{sen}(\pi x) dx = -\frac{\cos(\pi x)}{\pi} + c.$$

Logo, $F(x) = -\frac{\cos(\pi x)}{\pi}$, então:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |\operatorname{sen}(\pi x)| dx &= \int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x) dx - \int_{-1}^0 \operatorname{sen}(\pi x) dx = F(x) \Big|_0^1 - F(x) \Big|_{-1}^0 \\ &= (F(1) - F(0)) - (F(0) - F(-1)) \\ &= \frac{4}{\pi}. \end{aligned}$$

[6] Calcule $\int_0^1 x\sqrt{2x^2+3} dx$.

Se $u = 2x^2 + 3$, então $\frac{du}{4} = x dx$.

$$\int x\sqrt{2x^2+3} dx = \frac{1}{4} \int \sqrt{u} du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{(2x^2+3)^3}}{6} + c.$$

Logo, $F(x) = \frac{\sqrt{(2x^2+3)^3}}{6}$; então,

$$\int_0^1 x\sqrt{2x^2+3} dx = F(1) - F(0) = \frac{5\sqrt{5}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

[7] Seja:

$$f(x) = \begin{cases} \int_a^b t^x dt & \text{se } x \neq -1 \\ \ln\left(\frac{b}{a}\right) & \text{se } x = -1. \end{cases}$$

Verifique se f é contínua em -1 .

Calculando diretamente: $\int t^x dt = \frac{t^{x+1}}{x+1} + c$. Logo, $F(x) = \frac{t^{x+1}}{x+1}$; então:

$$\int_a^b t^x dt = F(b) - F(a) = \frac{b^{x+1} - a^{x+1}}{x+1}.$$

Por outro lado, aplicando L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} (b^{x+1} \ln(b) - a^{x+1} \ln(a)) \\ &= f(-1); \end{aligned}$$

logo, f é contínua em -1 .

7.5 Integral Definida e os Métodos de Integração

Método de Substituição

Se $u = g(x)$, então $du = g'(x) dx$; logo,

$$\boxed{\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du}$$

Integração por Partes

$$\boxed{\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x) f'(x) dx}$$

Exemplo 7.3.

[1] No exemplo [4] da página anterior, fizemos $u = 2x^2 + 3$; logo, $\frac{du}{4} = x dx$. Se: $x = 0$, então $u = 3$; se $x = 1$, então $u = 5$. Assim:

$$\int_0^1 x \sqrt{2x^2 + 3} dx = \frac{1}{4} \int_3^5 \sqrt{u} du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{6}{2}} \Big|_3^5 = \frac{5\sqrt{5}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

[2] Calcule $\int_0^1 \frac{e^x dx}{e^{2x} + 4e^x + 4}$.

Fazamos $u = e^x$, então $e^{2x} + 4e^x + 4 = u^2 + 4u + 4 = (u + 2)^2$. Se $x = 0$, então $u = 1$; se $x = 1$, então $u = e$. Utilizando frações parciais:

$$\int_0^1 \frac{e^x dx}{e^{2x} + 4e^x + 4} = \int_1^e \frac{du}{(u + 2)^2} = -\frac{1}{u + 2} \Big|_1^e = \frac{e - 1}{3(e + 2)}.$$

[3] Calcule $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$.

Se $u = \sqrt{x} + 1$, então $\sqrt{x} = u - 1$ e $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$; logo, $2(u - 1) du = dx$. Se: $x = 0$, então, $u = 1$; se $x = 4$, então, $u = 3$. Assim:

$$\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} = 2 \int_1^3 \frac{(u - 1)}{u} du = 2 \left(u - \ln(|u|) \right) \Big|_1^3 = 4 - 2 \ln(3).$$

[4] Calcule $\int_1^4 x \ln(x) dx$.

Usando o método de integração por partes temos: $u = \ln(x)$ e $dv = x dx$; então, $du = \frac{1}{x} dx$ e $v = \frac{x^2}{2}$. Assim

$$\int x \ln(x) dx = \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4}.$$

Logo:

$$\int_1^4 x \ln(x) dx = \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^4 = 16 \ln(2) - \frac{15}{4}.$$

[5] Calcule $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(2t) e^{\operatorname{sen}(t)} dt$.

Como $\operatorname{sen}(2t) = 2 \operatorname{sen}(t) \cos(t)$, fazemos $x = \operatorname{sen}(t)$; logo, $dx = \cos(t) dt$. Se $t = 0$, então $x = 0$; se $t = \frac{\pi}{2}$, então $x = 1$. Assim:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(2t) e^{\operatorname{sen}(t)} dt = 2 \int_0^1 x e^x dx.$$

Integrando por partes: $u = x$ e $dv = e^x dx$, então $du = dx$ e $v = e^x$; logo:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(2t) e^{\operatorname{sen}(t)} dt = 2 \int_0^1 x e^x dx = 2 x e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 e^x dx = 2 (x e^x - e^x) \Big|_0^1 = 2.$$

[6] Calcule $\int_{\sqrt{3}}^3 \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 9}}$.

Usaremos o método de substituição trigonométrica.

Seja $x = 3 \operatorname{tg}(\theta)$; observamos que $3 \operatorname{tg}(\theta) = \sqrt{3}$ e $3 \operatorname{tg}(\theta) = 3$, implicam em $\theta = \frac{\pi}{6}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$; $dx = 3 \sec^2(\theta) d\theta$; então, $\frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 9}} = \frac{\operatorname{cosec}(\theta)}{3} d\theta$.

$$\int_{\sqrt{3}}^3 \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 9}} = \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{cosec}(\theta) d\theta = \frac{1}{3} \ln \left[\frac{2 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2}} \right].$$

[7] Verifique que $\int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} dx = \frac{a}{2}$, sendo f tal que o integrando seja definido.

Seja $I = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} dx$. Fazendo $u = a - x$, então $du = -dx$:

$$I = - \int_a^0 \frac{f(a-u)}{f(a-u) + f(u)} du = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(a-x) + f(x)} dx;$$

logo,

$$2I = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} dx + \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(a-x) + f(x)} dx = \int_0^a dx = a.$$

[8] Usemos [7] para calcular $\int_0^2 \frac{x^2}{x^2 - 2x + 2} dx$.

$$\int_0^2 \frac{x^2}{x^2 - 2x + 2} dx = 2 \int_0^2 \frac{x^2}{2x^2 - 4x + 4} dx = 2 \int_0^2 \frac{x^2}{x^2 + (x-2)^2} dx = 2.$$

Consideramos $f(x) = x^2$ em [5].

[9] Calcule $\int_0^1 x \arctg(x) dx$.

Integrando por partes $u = \arctg(x)$, $dv = x dx$; então, $du = \frac{dx}{x^2 + 1}$ e $v = \frac{x^2}{2}$;

$$\int_0^1 x \arctg(x) dx = \frac{x^2 \arctg(x)}{2} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 1} dx.$$

Agora calculamos:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 1} dx.$$

Integramos a função racional. Logo,

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \left[1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right] dx = x - \arctg(x) \Big|_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Então:

$$\int_0^1 x \arctg(x) dx = \frac{x^2 \arctg(x)}{2} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{4} (\pi - 2).$$

[10] Calcule $\frac{d}{dx} \int_0^x (2t^2 - t + 1) dt$. A função $f(t) = 2t^2 - t + 1$ é contínua em \mathbb{R} , pelo teorema anterior:

$$\frac{d}{dx} \int_0^x (2t^2 - t + 1) dt = 2x^2 - x + 1.$$

[11] Calcule $\frac{dy}{dx}$ se $y = \int_3^{x^2} (5t + 7)^{25} dt$.

Como $f(t) = (5t + 7)^{25}$ é contínua em \mathbb{R} ; $\alpha(x) = x^2$ é derivável em \mathbb{R} e $Im(\alpha) \subset Dom(f)$. Pelo corolário anterior:

$$\frac{dy}{dx} = f(\alpha(x)) \alpha'(x) = 2x f(x^2) = 2x (5x^2 + 7)^{25}.$$

[12] Calcule y' se $y = \int_{-x}^0 \sqrt{t^2 + 1} dt + \int_0^{3x+2} \sqrt{t^2 + 1} dt$.

Como $f(t) = \sqrt{t^2 + 1}$ é contínua em \mathbb{R} , $\alpha_1(x) = -x$ e $\alpha_2(x) = 3x + 2$ são funções deriváveis tais que $Im(\alpha_1), Im(\alpha_2) \subset Dom(f)$, pelo corolário anterior:

$$y' = -f(\alpha_1(x)) \alpha_1'(x) + f(\alpha_2(x)) \alpha_2'(x) = \sqrt{x^2 + 1} + 3 \sqrt{(3x + 2)^2 + 1}.$$

[13] Seja:

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}, \quad x \neq 0.$$

Mostre que $F(x)$ é constante em $(-\infty, 0)$ e em $(0, +\infty)$. Calcule tais constantes.

i) Seja $G(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$; então, $F(x) = G(x) + G\left(\frac{1}{x}\right)$.

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$G'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{e} \quad F'(x) = G'(x) - \frac{1}{x^2} G'\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

($x \neq 0$). Logo $F'(x) = 0$ e $F(x) = c_1$ se $x > 0$ e $F(x) = c_2$ se $x < 0$.

ii) $c_1 = F(1) = 2 \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$; analogamente, $c_2 = -\frac{\pi}{2}$.

[14] A função :

$$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt,$$

é chamada de **Fresnel** e aparece no estudo da difração de ondas de luz. Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x)}{x^3}.$$

O limite apresenta uma indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$; aplicamos L'Hôpital,

$$S'(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right); \quad \text{logo,} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{S'(x)}{3x^2} = \frac{\pi}{6}.$$

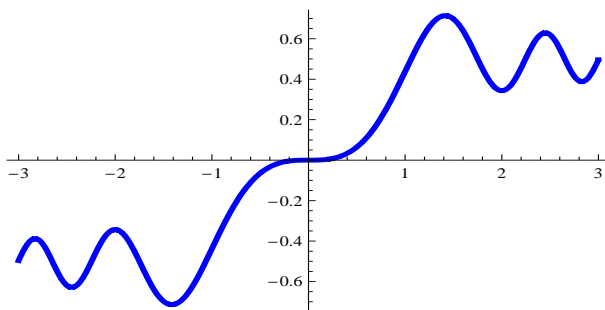


Figura 7.11: Gráfico de $S(x)$.

[15] A função:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

é chamada **função erro**. Calcule a derivada de:

i) $x \operatorname{erf}(x)$.

ii) $\operatorname{erf}(\sqrt{x})$.

i) Pela regra do produto:

$$\frac{d}{dx}(x \operatorname{erf}(x)) = \operatorname{erf}(x) + x \frac{d}{dx} \operatorname{erf}(x) = \operatorname{erf}(x) + \frac{2x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

ii) $f(t) = e^{-t^2}$ e $\alpha(x) = \sqrt{x}$; então, $f(\alpha(x)) = e^{-x}$ e $\alpha'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Logo:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} f(\alpha(x)) \alpha'(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}}.$$

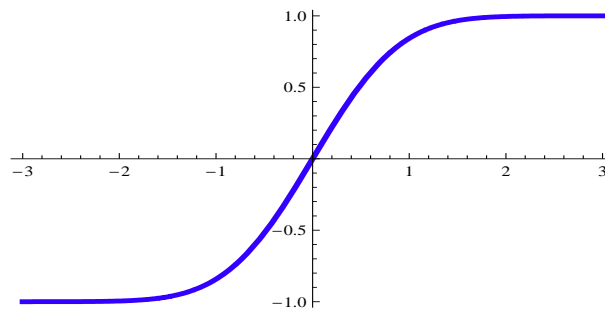
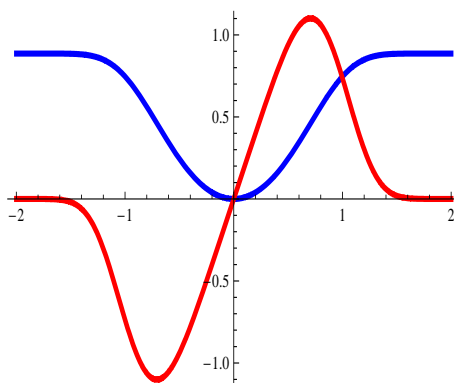


Figura 7.12: Gráfico de $\operatorname{erf}(x)$.

[16] Calcule g' se $g(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$.

Denotemos por $f(t) = e^{-t^2}$ e $\alpha(x) = x^2$; então, $f(\alpha(x)) = f(x^2) = e^{-x^4}$; logo: $g'(x) = 2x e^{-x^4}$.

Figura 7.13: Gráfico de g e g' .

[17] Se $x \operatorname{sen}(\pi x) = \int_0^{x^2} f(t) dt$, onde f é uma função contínua, calcule $f(4)$.

Derivando a ambos os lados da igualdade:

$$\frac{d}{dx} [x \operatorname{sen}(\pi x)] = \frac{d}{dx} \left[\int_0^{x^2} f(t) dt \right]; \quad \operatorname{sen}(\pi x) - \pi x \cos(\pi x) = 2 f(x^2) x.$$

Para $x = 2$, temos: $\operatorname{sen}(2\pi) - 2\pi \cos(2\pi) = 4 f(4)$, logo $-2\pi = 4 f(4)$. Então, $f(4) = -\frac{\pi}{2}$.

Aplicação

Seja f uma função integrável sobre $[-a, a]$. Se f é uma função par:

$$a) \quad \boxed{\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx}$$

Se f é uma função ímpar:

$$b) \quad \boxed{\int_{-a}^a f(x) dx = 0}$$

De fato:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = - \int_0^{-a} f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

Façamos a seguinte substituição $u = -x$, então:

$$- \int_0^{-a} f(x) dx = \int_0^a f(-u) du.$$

Se f é uma função par, segue a) e se f é uma função ímpar, segue b).

Exemplo 7.4.

[1] Calcule $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{tg(x)}{x^6 + 4x^4 + 1} dx$. A função é ímpar, logo:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{tg(x)}{x^6 + 4x^4 + 1} dx = 0.$$

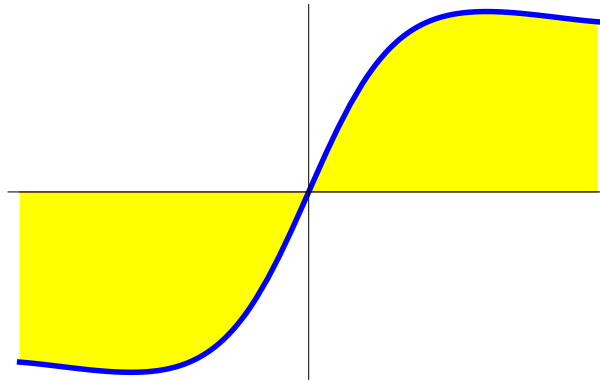


Figura 7.14: Gráfico da função $f(x) = \frac{tg(x)}{x^6 + 4x^4 + 1}$.

[2] Calcule $\int_{-1}^1 (x^2 + \cos(\pi x) + 1) dx$.

A função $f(x) = x^2 + \cos(\pi x) + 1$ é par, logo:

$$\int_{-1}^1 (x^2 + \cos(\pi x) + 1) dx = 2 \int_0^1 (x^2 + \cos(\pi x) + 1) dx = \frac{8}{3}.$$

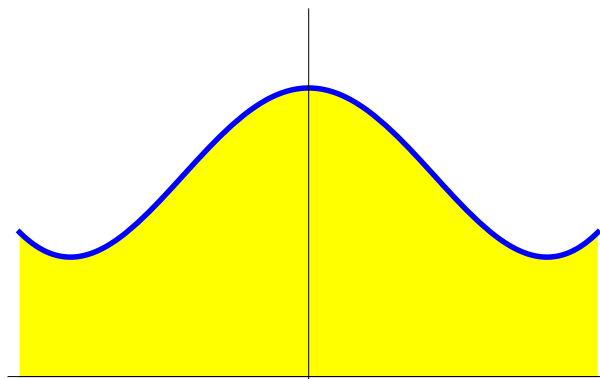


Figura 7.15: Gráfico da função $f(x) = x^2 + \cos(\pi x) + 1$.

7.6 Exercícios

1. Calcule as seguintes integrais usando o método de substituição:

$$(a) \int_{-1}^3 \sqrt{2x+3} \, dx$$

$$(b) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^2(x)}{\tan^3(x)} \, dx$$

$$(c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2e^{2x} + \cos(x)}{e^{2x} + \sin(x)} \, dx$$

$$(d) \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\sec^2(2x)}{\sqrt{1 + \tan(2x)}} \, dx$$

$$(e) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x) \cos(x) \, dx$$

$$(f) \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} \, dx$$

$$(g) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x) \ln(\cos(x)) \, dx$$

$$(h) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2(x)}{e^{\tan(x)}} \, dx$$

$$(i) \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$$

$$(j) \int_0^1 (2x-1)^{100} \, dx$$

$$(k) \int_0^3 \frac{dx}{2x+3}$$

$$(l) \int_2^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln(x)}}$$

$$(m) \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} \, dx$$

$$(n) \int_0^1 e^x \sin(e^x) \, dx$$

$$(o) \int_1^3 \frac{x-2}{(3x^2-12x+1)^4} \, dx$$

$$(p) \int_0^1 x^2 e^{x^3} \, dx$$

$$(q) \int_1^2 \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}} \, dx$$

$$(r) \int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$(s) \int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

$$(t) \int_3^8 \frac{\sin(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}} \, dx$$

$$(u) \int_0^a (x-a) \sqrt{2ax-x^2} \, dx$$

$$(v) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{6-5\sin(x)+\sin^2(x)} \, dx$$

$$(w) \int_1^2 \frac{\sin(\ln(x))}{x} \, dx$$

$$(x) \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^6+4}} \, dx$$

2. Calcule as seguintes integrais usando o método de integração por partes:

$$(a) \int_0^1 x e^{-x} \, dx$$

$$(c) \int_0^{\pi} 3^x \cos(x) \, dx$$

$$(b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin(3x) \, dx$$

$$(d) \int_0^1 x^4 e^{-x} \, dx$$

- (e) $\int_2^4 x \ln(\sqrt{x}) dx$
- (f) $\int_0^1 \operatorname{arctg}(x) dx$
- (g) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$
- (h) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{cosec}^2(x) dx$
- (i) $\int_0^1 \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx$
- (j) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sec(x) \operatorname{tg}(x) dx$
- (k) $\int_1^4 \ln(\sqrt{x}) dx$
- (l) $\int_1^{e^\pi} \cos(\ln(x)) dx$
- (m) $\int_0^1 (x^2 - 1) e^x dx$
- (n) $\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$
- (o) $\int_1^e \ln^3(x) dx$
- (p) $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos(\sqrt{x}) dx$
- (q) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sec^2(x) dx$
- (r) $\int_0^1 \operatorname{arcsen}(x) dx$
- (s) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^3(x) dx$
- (t) $\int_{-\pi}^{\pi} x \cos(x) dx$
- (u) $\int_1^2 \sqrt{x} \ln(x) dx$
- (v) $\int_0^{\frac{1}{2}} x \operatorname{arcsen}(2x) dx$
- (w) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) dx$
- (x) $\int_{-1}^0 x \sqrt{x+1} dx$

3. Calcule as seguintes integrais:

- (a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \ln(\operatorname{sen}(x)) dx$
- (b) $\int_0^1 x 5^x dx$
- (c) $\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^5 \cos(x^3) dx$
- (d) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}(x) \sec^3(x) dx$
- (e) $\int_0^{\pi} \cos(3x) \cos(4x) dx$
- (f) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2+4)^5}}$
- (g) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$
- (h) $\int_0^{\ln(3)} e^t \sqrt{9-e^{2t}} dt$
- (i) $\int_2^3 \frac{(x^2+2x) dx}{x^3+3x^2-4}$
- (j) $\int_0^1 \frac{(x-3) dx}{(x^2+4x+3)^2}$
- (k) $\int_1^2 \frac{(x^4+1) dx}{x(x^2+1)}$
- (l) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{sen}(x) \cos^2(x)) dx}{5+\cos^2(x)}$

$$(m) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x+1)^3}$$

$$(n) \int_1^2 \frac{dx}{4x^2 + 12x - 7}$$

$$(o) \int_1^3 \frac{(2x+3) dx}{x^3 + 3x}$$

$$(p) \int_2^3 \frac{(3x^2 - 4x + 5) dx}{(x-1)(x^2+1)}$$

$$(q) \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$$

$$(r) \int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{x+1}$$

$$(s) \int_0^8 \sqrt[3]{x}(x-1) dx$$

$$(t) \int_3^{11} \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$$

$$(u) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

$$(v) \int_2^4 \frac{(2x^2+1)dx}{(x+1)^2(x+2)}$$

$$(w) \int_0^a x \sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}} dx$$

$$(x) \int_0^\pi \frac{x dx}{4 - \cos^2(x)}$$

4. Calcule as seguintes derivadas:

$$(a) \frac{d}{dx} \int_0^x (t^2 + 1)^{\frac{1}{3}} dt$$

$$(b) \frac{d}{dx} \int_0^x t \operatorname{sen}(t) dt$$

$$(c) \frac{d}{dx} \int_1^x t \ln(t) dt$$

$$(d) \frac{d}{dx} \int_0^x \sqrt{1+t^4} dt$$

$$(e) \frac{d}{dx} \int_x^{e^x} \sqrt{1+t^2} dt$$

$$(f) \frac{d}{dx} \int_2^{x^2} \operatorname{sen}(t^2) dt$$

$$(g) \frac{d}{dx} \int_0^x (2^t + t^2) dt$$

$$(h) \frac{d}{dx} \int_0^{x^3} \frac{t}{\sqrt{1+t^3}} dt$$

5. Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e suponha que $\int_a^x f(t) dt = x$, para todo $x \in [a, b]$. Determine f e a .

6. A seguinte função é utilizada em Engenharia Elétrica:

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} dt; \quad (x > 0).$$

Determine os pontos extremos e esboce seu gráfico.

7. O número $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ é chamado valor médio da função f no intervalo $[a, b]$. Calcule o valor médio das funções nos intervalos indicados:

- (a) $f(x) = \operatorname{sen}^2(x); [0, \pi]$ (d) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}; [0, 1]$
 (b) $f(x) = 5\cos(x); [-\pi, \pi]$ (e) $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{\operatorname{sen}(x)}}; [0, \frac{\pi}{2}]$
 (c) $f(x) = \ln(x); [1, 2]$ (f) $f(x) = x^2 e^x; [0, 1]$

8. Diga qual das integrais é maior, sem calculá-las:

(a) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$ ou $\int_0^1 x dx$

(b) $\int_1^2 e^{x^2} dx$ ou $\int_1^2 e^x dx$.

9. Seja $a > 0$ e suponha que f é uma função contínua no intervalo $[-a, a]$. Defina g em $[-a, a]$ por:

$$g(x) = \int_0^{-x} f(t) dt + \int_0^x f(-t) dt,$$

para todo $x \in [-a, a]$.

(a) Verifique que $g'(x) = 0$, para todo $x \in [-a, a]$.

(b) Use a parte a) para verificar que $g(x) = 0$, para todo $x \in [-a, a]$.

(c) Conclua que: $\int_{-x}^0 f(t) dt = \int_0^x f(-t) dt$.

10. Calcule as seguintes integrais sem utilizar métodos de integração:

(a) $\int_{-10}^{10} \left[x^5 - 6x^9 + \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{(x^6 + x^4 + x^2 + 1)^4} \right] dx,$ (b) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^7 + x^5 + x^3})}{x^4 + \cos(x)} dx$

11. Verifique que para todo $n, m \in \mathbb{Z}$:

(a) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx) \cos(nx) dx = 0$

(b) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ \pi & \text{se } n = m \end{cases}$

(c) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ \pi & \text{se } n = m \end{cases}$

12. Calcule $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$, onde $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{se } x \leq 0 \\ 1 - \cos(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$
13. Seja $g(x) = \int_{\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)} f(t) dt$, onde $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $\alpha_i : J \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções deriváveis ($i = 1, 2$); I e J intervalos tais que $\alpha_i(J) \subset I$. Verifique que:
- $$g'(x) = f(\alpha_2(x)) \alpha_2'(x) - f(\alpha_1(x)) \alpha_1'(x).$$
14. Calcule $g'(x)$ se $g(x) = \int_{x^2+1}^{x^2+x} 2^{-t^2} dt$.
15. Calcule $g'(\frac{1}{2})$ se $g(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{t} dt$.
16. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Sabendo que $\int_{-3}^3 f(t) dt = 4$, calcule $\int_1^4 f(5-2x) dx$
17. Seja $f(x) = \int_0^x \frac{e^{t^2}}{1+t^2} dt$. Verifique que f é uma função contínua ímpar e que $f(x) \geq x$, para todo $x > 0$.
18. Esboce o gráfico de $f(x) = \int_0^x 2t e^{-t^2} dt$

Capítulo 8

APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA

8.1 Aceleração, velocidade e posição

A relação entre aceleração, velocidade e a posição de uma partícula pode ser obtida utilizando diretamente o Teorema Fundamental do Cálculo.

Suponhamos que uma partícula move-se ao longo do gráfico da função com segunda derivada contínua $x = x(t)$ com velocidade $v = v(t)$, de classe C^1 e aceleração, $a = a(t)$ em cada instante t .

A aceleração da partícula é: $a(t) = \frac{dv}{dt}$. Pelo Teorema:

$$\int_{t_0}^t a(s) ds = \int_{t_0}^t \frac{dv}{ds} ds = v(t) - v(t_0);$$

então:

$$(1) \quad v(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds + v(t_0).$$

Logo, conhecendo a aceleração e a velocidade inicial da partícula, podemos obter a velocidade em cada instante t . A velocidade da partícula é: $v(t) = \frac{dx}{dt}$. Pelo Teorema:

$$\int_{t_0}^t v(s) ds = \int_{t_0}^t \frac{dx}{ds} ds = x(t) - x(t_0);$$

então:

$$(2) \quad x(t) = \int_{t_0}^t v(s) ds + x(t_0).$$

$D(t) = x(t) - x(t_0)$ é chamado o deslocamento da partícula. Logo, conhecendo a velocidade e a posição inicial da partícula, podemos obter sua posição em cada instante t .

Um dos movimentos mais simples é quando a partícula tem aceleração constante: $a(t) = a_0$, para todo t .

É comum nas aplicações considerar que o tempo inicial seja $t_0 = 0$. Denotando a velocidade e posição inicial respectivamente por $v(0) = v_0$ e $x(0) = x_0$, obtemos:

De (1), temos:

$$v(t) = \int_0^t a_0 \, ds = a_0 t + v_0$$

e de (2), temos:

$$x(t) = \int_0^t v(s) \, ds + x_0 = \int_0^t (a_0 s + v_0) \, ds + x_0$$

Logo,

$$x(t) = \frac{a_0}{2} t^2 + v_0 t + x_0.$$

Neste caso, conhecendo a velocidade e a posição inicial da partícula obtemos sua trajetória.

No deslocamento vertical de uma partícula, escolhemos o eixo dos y do sistema de coordenadas para a posição. Consideramos para cima a parte positiva do eixo dos y . O efeito da gravidade na partícula é diminuir a altura bem como a sua velocidade. Desprezando a resistência do ar, a aceleração é constante $a(t) = -g$, onde $g = -9.8 \, m/seg^2$ é a aceleração gravitacional na superfície da terra. Então:

$$v(t) = -9.8 t + v_0 \quad \text{e} \quad x(t) = -4.9 t^2 + v_0 t + x_0,$$

$x(t)$ medido em metros.

Exemplo 8.1.

[1] A velocidade de um foguete é de $1000 \, km/h$ após os primeiros $30 \, seg$ de seu lançamento. Determine a distância percorrida pelo foguete.

Primeiramente, fazemos a conversão de km/h para m/seg multiplicando pela fração $\frac{1000}{3600}$, donde obtemos:

$$a_0 = \frac{1000 \times 1000}{30 \times 3600} \, m/seg^2 = 9.259 \, m/seg^2.$$

$v_0 = 0$; logo $v(t) = 9.259t$ e obtemos:

$$D(30) = 9.259 \times \frac{900}{2} = 4166.5 \text{ m.}$$

O foguete nos primeiros 30 *seg* percorre uma distância de 4166.5 *m*.

[2] Se uma bola é jogada diretamente para cima a partir do chão com velocidade inicial de 96 *m/seg*. Determine seu deslocamento.

Primeiramente, $x_0 = 0$ e $v_0 = 96$; logo, $v(t) = -9.8t + 96$. A bola atinge sua altura máxima quando $v = 0$; então, a altura máxima é atingida no tempo: $t = \frac{96}{9.8} \cong 9.79 \text{ seg}$. Logo,

$$x(9.79) = -4.9 \times (9.79)^2 + 96 \times 9.79 = 470.2 \text{ m.}$$

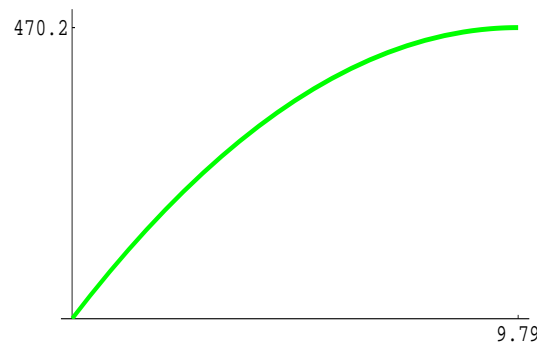


Figura 8.1: .

8.2 Cálculo de Áreas

O cálculo da área de uma região plana pode ser feito via integral definida. A seguir, estudaremos as situações mais comuns.

Teorema 8.1. Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas. A área de uma região plana R delimitada pelo gráfico das funções contínuas $y = f(x)$, $y = g(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$ é:

$$A(R) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Se $f(x) \geq 0$ e $g(x) = 0$, para todo $x \in [a, b]$, então:

$$A(R) = \int_a^b f(x) dx$$

onde:

$$R = \{(x, y) / a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

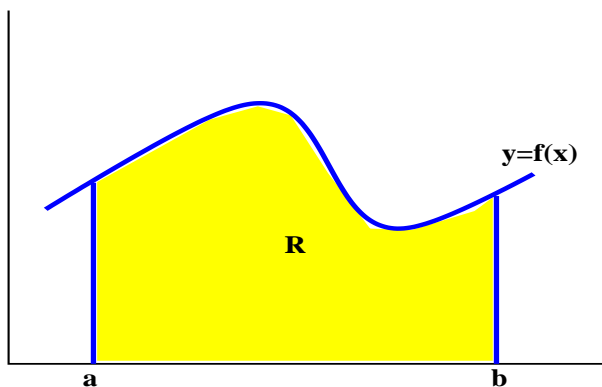


Figura 8.2: $R = \{(x, y) / a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Se $f(x) \leq 0$ e $g(x) = 0$, para todo $x \in [a, b]$, então:

$$A(R) = - \int_a^b f(x) dx$$

onde

$$R = \{(x, y) / a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq 0\}$$

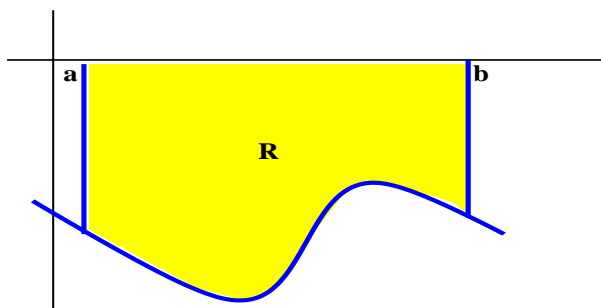


Figura 8.3: $R = \{(x, y) / a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq 0\}$

Se $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in [a, b]$, então:

$$A(R) = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

onde

$$R = \{(x, y) / a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

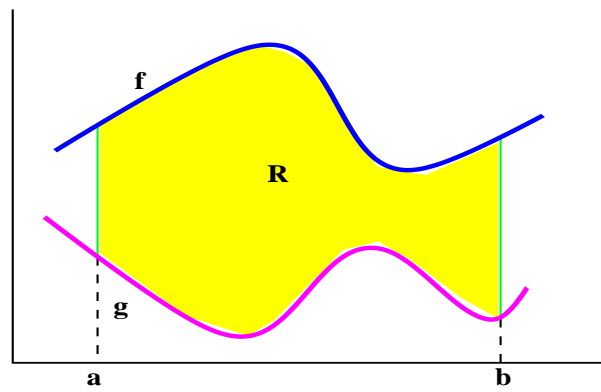


Figura 8.4: $R = \{(x, y) / a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$.

Se $f(x) \geq g(x)$, $a \leq x \leq c$ e $g(x) \geq f(x)$, $c \leq x \leq b$; então, $R = R_1 \cup R_2$, onde:

$$R_1 = \{(x, y) / a \leq x \leq c, g(x) \leq y \leq f(x)\} \quad \text{e}$$

$$R_2 = \{(x, y) / c \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

$$A(R) = \int_a^c [f(x) - g(x)] dx + \int_c^b [g(x) - f(x)] dx$$

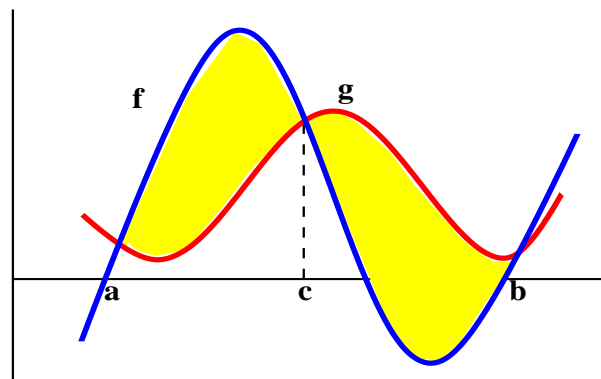


Figura 8.5: $R = R_1 \cup R_2$.

Exemplo 8.2.

[1] Se em 1970, foram utilizados 20.3 bilhões de barris de petróleo no mundo todo e se a demanda mundial de petróleo cresce exponencialmente a uma taxa de 9% ao ano, então a demanda $A(t)$ anual de petróleo no tempo t é $A(t) = 20.3 e^{0.09t}$ ($t = 0$ em 1970). Se a demanda continua crescendo a uma taxa de 9% ao ano, qual será a quantidade de petróleo consumida entre os anos de 1970 e 2012?

A quantidade de petróleo utilizada nesse período de tempo é a área sob a curva de demanda entre $t = 0$ e $t = 42$.

$$20.3 \int_0^{42} e^{0.09t} dt = 225.56 e^{0.09t} \Big|_0^{42} = 9657.4.$$

Logo, foram consumidos 9657.4 barris de petróleo.

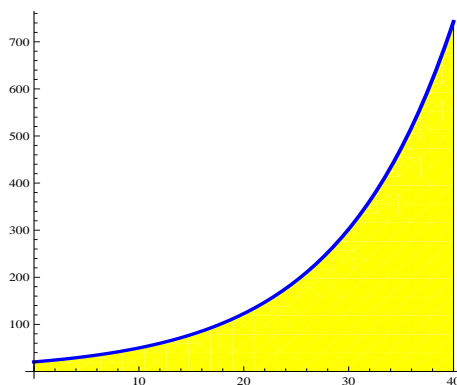


Figura 8.6: A região do exemplo [1].

[2] Calcule a área da região limitada pelo eixo dos x e pelo gráfico de $y = 4 - x^2$.

Neste problema $g = 0$ e não são dados claramente os intervalos de integração; mas, as interseções com os eixos são os pontos: $(0, 4)$, $(2, 0)$ e $(-2, 0)$.

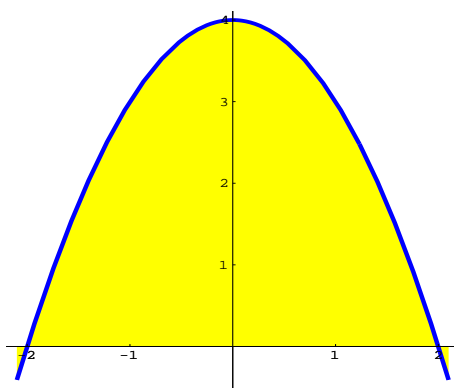


Figura 8.7: A região do exemplo [2].

Logo, $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -2 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$. Usando o fato de que a função é par:

$$A = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = 2 \int_0^2 (4 - x^2) dx = 2 \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{32}{3} \text{ u.a.}$$

[3] Calcule a área da região limitada pelo eixo dos x e pelo gráfico de $y = 4x^4 - 5x^2 + 1$.

Determinemos a interseção da curva com os eixos coordenados:

i) Fazendo $x = 0$; então, $y = 1$; o ponto de interseção é $(0, 1)$.

ii) Fazendo $y = 0$; então, $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$, clarametente $x = -1$ e $x = 1$ são raízes do polinômio; logo, $4x^4 - 5x^2 + 1 = (x - 1)(x + 1)(4x^2 - 1)$; os pontos de interseção são $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(-\frac{1}{2}, 0)$.

É fácil verificar que $x = 0$ é ponto de máximo local e $x = \pm\sqrt{\frac{5}{8}}$ são pontos de mínimo local de f . Logo, $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ onde:

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}, \quad 4x^4 - 5x^2 + 1 \leq y \leq 0\};$$

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq y \leq 4x^4 - 5x^2 + 1\} \text{ e}$$

$$R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad 4x^4 - 5x^2 + 1 \leq y \leq 0\}.$$

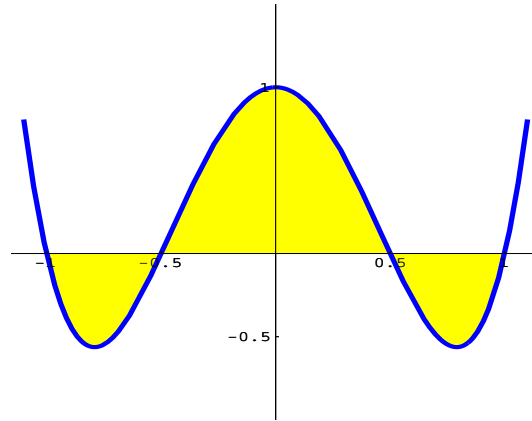


Figura 8.8: Gráfico de $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$.

Logo, $A = - \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (4x^4 - 5x^2 + 1) dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (4x^4 - 5x^2 + 1) dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 (4x^4 - 5x^2 + 1) dx$.

A função y é par. Usando a simetria da região, calculamos a área da região no primeiro e quarto quadrantes e multiplicamos o resultado por 2:

$$A = 2 \left[\int_0^{\frac{1}{2}} (4x^4 - 5x^2 + 1) dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 (4x^4 - 5x^2 + 1) dx \right] = 1 \text{ u.a.}$$

[4] Calcule a área da região limitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = x + 2$.

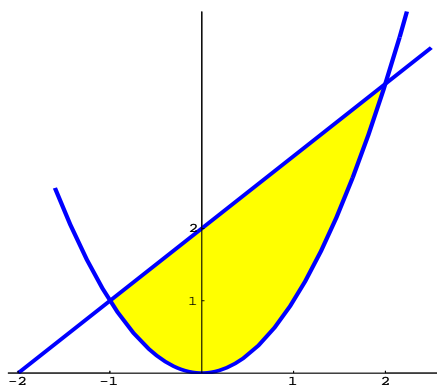


Figura 8.9: A região do exemplo [4].

Novamente neste problema não são dados, claramente, os intervalos de integração.

i) Calculemos as interseções dos gráficos; em outras palavras, resolvamos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2, \end{cases}$$

ou seja, resolvamos $x^2 - x - 2 = 0$; temos: $x = -1$ e $x = 2$. Os pontos de interseção são $(-1, 1)$ e $(2, 4)$.

ii) Notemos que $x + 2 \geq x^2$ se $x \in [-1, 2]$; logo:

$$A = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2} \text{ u.a.}$$

[5] Calcule a área da região limitada pelos gráficos de $y = x^2 - x^4$ e $y = x^2 - 1$.

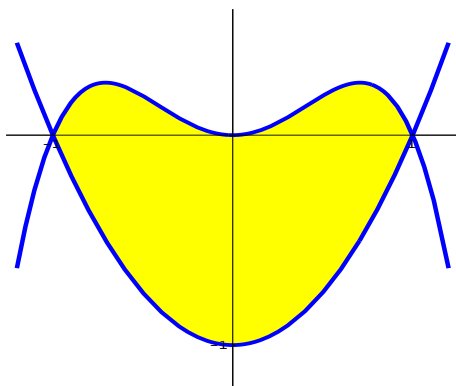


Figura 8.10: A região do exemplo [5].

i) Calculemos as interseções dos gráficos; em outras palavras, resolvamos o seguinte

sistema de equações:

$$\begin{cases} y = x^2 - x^4 \\ y = x^2 - 1, \end{cases}$$

ou seja, resolvamos $x^4 - 1 = 0$; temos: $x = -1$ e $x = 1$. Os pontos de interseção são $(-1, 0)$ e $(1, 0)$.

ii) Notemos que $x^2 - x^4 \geq x^2 - 1$ se $x \in [-1, 1]$; utilizando a simetria da região:

$$A = \int_{-1}^1 (-x^4 + 1) dx = 2 \int_0^1 (-x^4 + 1) dx = \frac{8}{5} u.a.$$

[6] Calcule a área da região limitada pelos gráficos das seguintes curvas: $y^2 = ax$, $ay = x^2$, $y^2 = -ax$ e $ay = -x^2$ se $a > 0$. As curvas são parábolas.

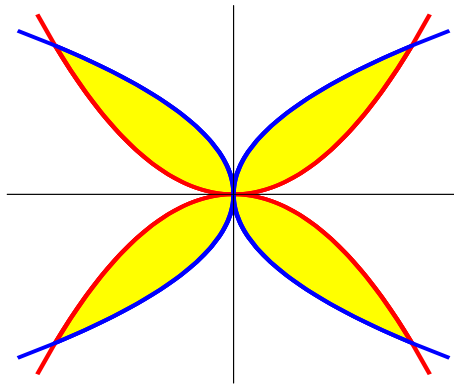


Figura 8.11: A região do exemplo [6].

Pela simetria da região, podemos calcular a área da região situada no primeiro quadrante e multiplicar o resultado por 4.

i) Observemos primeiro que $y^2 = ax$ não é função de x .

ii) Calculemos a interseção das curvas, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} y^2 = ax \\ x^2 = ay. \end{cases}$$

Então, $x^4 = a^2 y^2$; logo $x^4 - a^3 x = 0$, cujas raízes: $x = 0$ e $x = a$ são os limites de integração.

iii) A região no primeiro quadrante, cuja área queremos calcular é limitada superiormente pela função $y = \sqrt{ax}$ e inferiormente por $y = ax^2$, logo:

$$A = 4 \int_0^a \left[\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a} \right] dx = 4 \left[\frac{2\sqrt{a^2 x^2 - x^3}}{3a} \right] \Big|_0^a = \frac{4a^2}{3} u.a.$$

[7] Calcule a área da região limitada pelas curvas: $y = x^2 - x^4$ e $y = x^3 - x$.

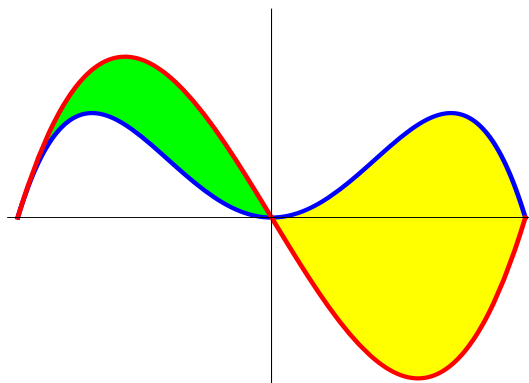


Figura 8.12: A região do exemplo [7].

i) Calculemos as interseções das curvas:
$$\begin{cases} y = x^2 - x^4 \\ y = x^3 - x. \end{cases}$$

Então, temos os pontos $x = 0, x = -1$ e $x = 1$.

ii) Determinamos a área de cada região:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(x, y) / -1 \leq x \leq 0, x^2 - x^4 \leq y \leq x^3 - x\}, \\ R_2 &= \{(x, y) / 0 \leq x \leq 1, x^3 - x \leq y \leq x^2 - x^4\}. \end{aligned}$$

Denotemos por: $A(R) = A(R_1) + A(R_2)$, temos:

$$A(R) = \int_{-1}^0 [-x - x^2 + x^3 + x^4] dx + \int_0^1 [x + x^2 - x^3 - x^4] dx = \frac{1}{2} \text{ u.a.}$$

Observação Importante

Muitas vezes os problemas ficam mais simples de resolver se integramos em relação a y e não em relação a x . Podemos repetir o processo de partição num intervalo que fica no eixo dos y e a obtenção das somas de Riemann.

Seja R a região plana limitada pela direita pela função $x = M(y)$, pela esquerda por $x = N(y)$ e pelas retas $y = c$ e $y = d$.

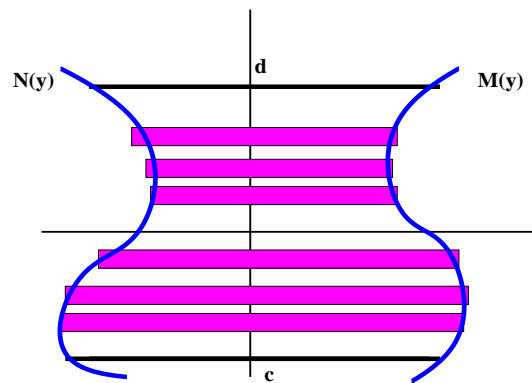


Figura 8.13: .

Não é difícil provar que se as funções $M(y)$ e $N(y)$ são contínuas em $[c, d]$, então:

$$A = \int_c^d [M(y) - N(y)] dy$$

Por isso, para resolver os problemas de área é sempre indicado fazer o desenho da região correspondente.

Exemplo 8.3.

[1] Calcule a área da região limitada pelas curvas $y^2 = 2x$ e $y = x - 4$.

i) As interseções das curvas são $(2, -2)$ e $(8, 4)$.

ii) Sejam $x = M(y) = y + 4$ e $x = N(y) = \frac{y^2}{2}$.

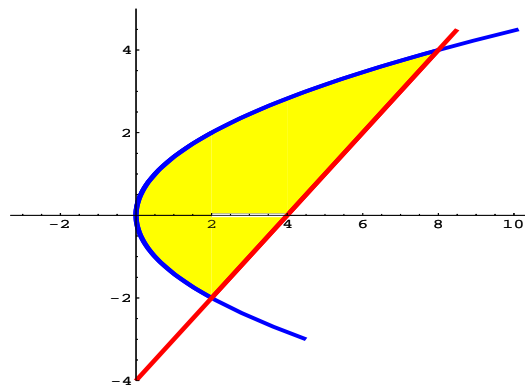


Figura 8.14: A região do exemplo [1].

Então:

$$A = \int_{-2}^4 \left[y + 4 - \frac{y^2}{2} \right] dy = \left[\frac{y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{6} \right] \Big|_{-2}^4 = 18 \text{ u.a.}$$

Sugerimos ao aluno fazer este problema integrando em relação a x , para "sentir" as dificuldades.

[2] Calcule a área da região limitada pelas curvas $2y^2 = x + 4$ e $y^2 = x$.

i) As interseções das curvas são $(4, 2)$ e $(4, -2)$.

ii) Sejam $x = M(y) = y^2$ e $x = N(y) = 2y^2 - 4$.

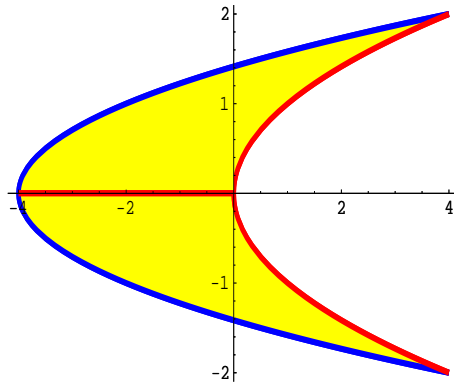


Figura 8.15: A região do exemplo [2].

Então, pela simetria:

$$A = \int_{-2}^2 [4 - y^2] dy = 2 \int_0^2 [4 - y^2] dy = \frac{32}{3} \text{ u.a.}$$

Exemplos Diversos

[1] Calcule a área da região limitada pelos gráficos de $y = \sin(x)$ e $y = \sin(2x)$, $0 \leq x \leq \pi$.

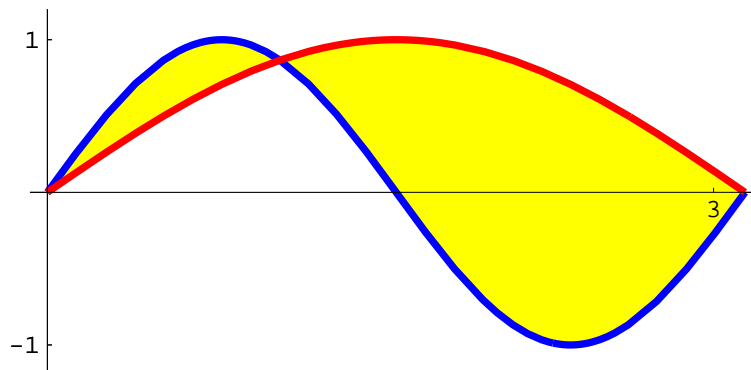


Figura 8.16: A região do exemplo [1].

Resolvendo $\text{sen}(x) = \text{sen}(2x) = 2 \text{sen}(x) \cos(x)$ para $x \in [0, \pi]$, temos que $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ e $x = \pi$. A interseção das curvas ocorre em $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $(\pi, 0)$. Dividamos a região em duas:

$$R_1 = \{(x, y) / 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}, \text{sen}(x) \leq y \leq \text{sen}(2x)\},$$

$$R_2 = \{(x, y) / \frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi, \text{sen}(2x) \leq y \leq \text{sen}(x)\}.$$

Então, $A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} [\text{sen}(2x) - \text{sen}(x)] dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} [\text{sen}(x) - \text{sen}(2x)] dx = \frac{5}{2} u.a.$

[2] Calcule a área da região limitada pelo gráfico das curvas: $y = x^2 - x^4$ e $y = x - x^4$.

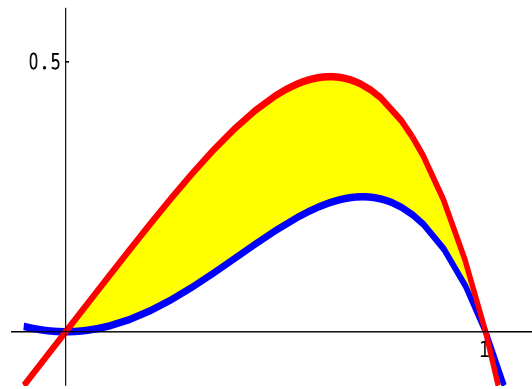


Figura 8.17: A região do exemplo [2].

Determinemos o intervalo de integração, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - x^4 = x^2(1 - x^2) \\ y = x - x^4 = x(1 - x^3). \end{cases}$$

Logo, $x = 0$ e $x = 1$; então, o intervalo de integração é $[0, 1]$.

$$A = \int_0^1 [x - x^4 - (x^2 - x^4)] dx = \int_0^1 [x - x^2] dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{6} u.a.$$

[3] Calcule a área comum a $x^2 + y^2 \leq 4x$ e $x^2 + y^2 \leq 4$.

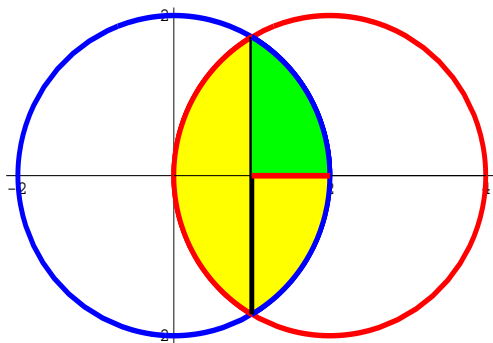


Figura 8.18: A região do exemplo [3].

Determinamos o intervalo de integração, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 4x. \end{cases}$$

Então, $x = 1$ e $y = \pm\sqrt{3}$. A equação $x^2 + y^2 = 4x$ corresponde a um círculo de raio 2 centrado em $(2, 0)$; de fato, completando os quadrados obtemos: $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. Pela simetria da região, calculamos somente a área da região:

$$\{(x, y) / 0 \leq y \leq \sqrt{3}, 1 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}\}$$

no primeiro quadrante (em verde) e multiplicamos o resultado por quatro. Integrando em relação a y :

$$A = 4 \int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4 - y^2} - 1) dy = 4 \left[\frac{y}{2} \sqrt{4 - y^2} - y \right] \Big|_0^{\sqrt{3}} = \left[\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3} \right] u.a.$$

[4] Calcule a área da região limitada pelos gráficos das curvas: $x = 2y - y^2$ e $y - x - 2 = 0$.

Determinemos o intervalo de integração, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + y^2 = 0 \\ y - x - 2 = 0. \end{cases}$$

Então, $y = -1$ e $y = 2$. A interseção das curvas ocorre em $(-3, -1)$ e $(0, 2)$.

$$A = \int_{-1}^2 (y - y^2 + 2) dy = \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + 2y \right] \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2} u.a.$$

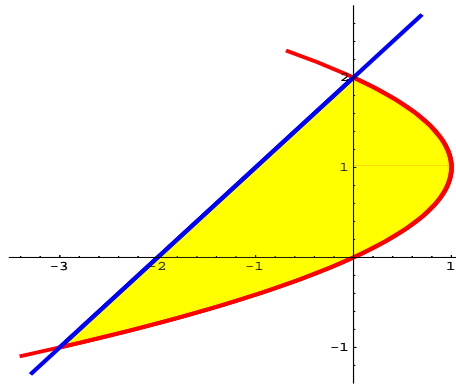


Figura 8.19: A região do exemplo [4].

[5] Calcule a área da região limitada pelos gráficos das seguintes curvas: $y = 7x^2 - 6x - x^3$ e $y = 4x$.

$y = 7x^2 - 6x - x^3 = x(1-x)(x-6)$; a curva intersecta o eixo dos x nos pontos $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(6, 0)$. Por outro lado, considerando $y = 7x^2 - 6x - x^3$, temos $y' = 14x - 6 - 3x^2$ e $y'' = 14 - 6x$; então, os pontos críticos:

$$\frac{7 + \sqrt{3}}{3} \quad \text{e} \quad \frac{7 - \sqrt{3}}{3}$$

são, respectivamente, de máximo local e de mínimo local. Para obter as interseções das curvas, resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} y = 7x^2 - 6x - x^3 \\ y = 4x; \end{cases}$$

logo, $7x^2 - 10x - x^3 = -x(x-2)(x-5) = 0$; as curvas se intersectam nos pontos de abscissas $x = 0$, $x = 2$ e $x = 5$.

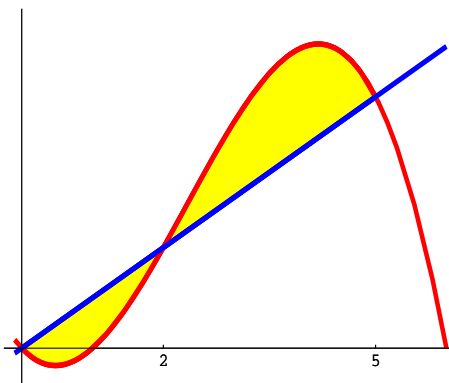


Figura 8.20: A região do exemplo [5].

A região é subdividida em duas regiões R_1 e R_2 , onde:

$$R_1 = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 2, 7x^2 - 6x - x^3 \leq y \leq 4x\},$$

$$R_2 = \{(x, y) / 2 \leq x \leq 5, 4x \leq y \leq 7x^2 - 6x - x^3\}.$$

Logo:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (10x - 7x^2 + x^3) dx + \int_2^5 [7x^2 - 10x - x^3] dx \\ &= 5x^2 - \frac{7x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 - 5x^2 + \frac{7x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \Big|_2^5 \\ &= \frac{16}{3} + \frac{63}{4} = \frac{253}{12} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

[6] Calcule a área da região limitada pelos gráficos das seguintes curvas: $y = x^2 - 4x + 4$ e $y = 10 - x^2$.

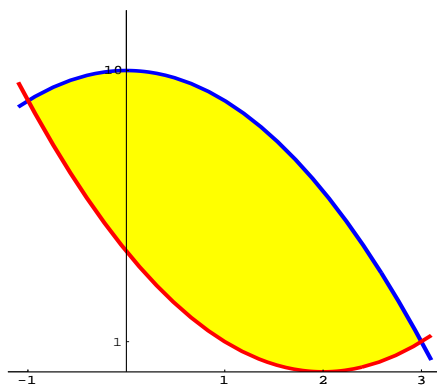


Figura 8.21: A região do exemplo [6].

As curvas se intersectam nos pontos de abscissas $x = -1$ e $x = 3$; então:

$$A = \int_{-1}^3 (10 - x^2 - x^2 + 4x - 4) dx = \int_{-1}^3 (6 + 4x - 2x^2) dx = \frac{64}{3} \text{ u.a.}$$

[7] Calcule a área limitada pela curva $(y - 2)^2 = x - 1$, pela tangente a esta curva no ponto de ordenada $y = 3$ e pelo eixo dos x .

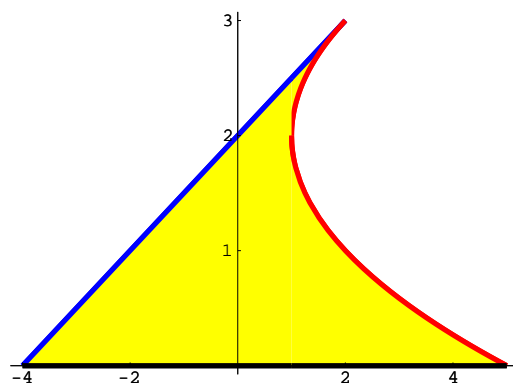


Figura 8.22: A região do exemplo [7].

Se $y_0 = 3$, então $x_0 = 2$. A equação da reta tangente no ponto $(2, 3)$ é a equação da reta tangente é $y = y'(x_0)(x - 2) + 3$; para obter y' , derivamos implicitamente em relação a x a equação $(y - 2)^2 = x - 1$; temos: $2(y - 2)y' = 1$. No ponto $(2, 3)$, temos: $y'(2) = \frac{1}{2}$; logo, $2y - x - 4 = 0$. Integrando em relação a y , teremos: $x = M(y) = (y - 2)^2 + 1$, $x = N(y) = 2y - 4$ e

$$A = \int_0^3 ((y - 2)^2 + 1 - (2y - 4)) dy = \int_0^3 (y^2 - 6y + 9) dy = 9 \text{ u.a.}$$

[8] Determine a área da região limitada pela curva:

$$\frac{x^2}{a^2} + \sqrt[3]{\frac{y^2}{b^2}} = 1;$$

$a, b > 0$.

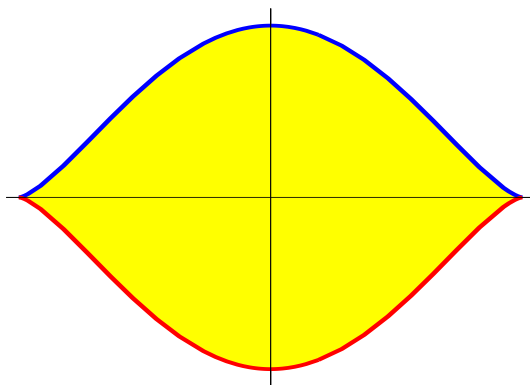


Figura 8.23: A região do exemplo [8].

As interseções com os eixos são $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ e $(0, -b)$. Como a curva é simétrica em relação aos eixos coordenados, podemos calcular a área da região situada no

primeiro quadrante e multiplicar o resultado por 4. Então, consideramos:

$$y = \frac{b}{a^3} \sqrt{(a^2 - x^2)^3},$$

no primeiro quadrante. A área desta região é:

$$A = \frac{b}{a^3} \int_0^a \sqrt{(a^2 - x^2)^3} dx;$$

fazendo a mudança de variáveis: $x = a \operatorname{sen}(t)$, temos $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ e $dx = a \cos(t) dt$:

$$A = \frac{b}{a^3} \int_0^a \sqrt{(a^2 - x^2)^3} dx = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(t) dt;$$

usando a identidade $\cos^4(t) = \frac{3}{8} + \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{\cos(4t)}{8}$,

$$A = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(t) dt = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{3}{8} + \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{\cos(4t)}{8} \right] dt = \frac{3\pi ab}{16} u.a.$$

A área pedida é: $A = 4S = \frac{3\pi ab}{4} u.a.$

[9] Calcule a soma das áreas limitadas pela curva $y = x \operatorname{sen}\left(\frac{x}{a}\right)$ e o eixo dos x , sabendo que $x \in [0, n\pi a]$, sendo $n, a \in \mathbb{N}$.

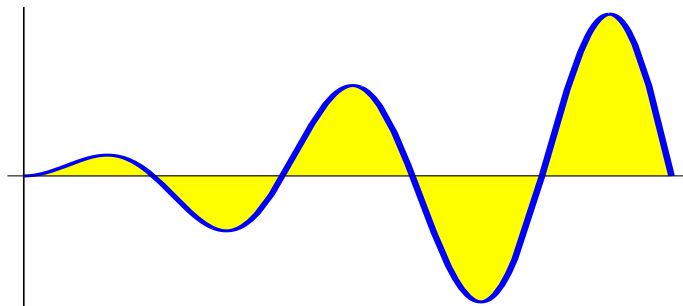


Figura 8.24: A região do exemplo [9].

$$A = \int_0^{a\pi} x \operatorname{sen}\left(\frac{x}{a}\right) dx - \int_{a\pi}^{2a\pi} x \operatorname{sen}\left(\frac{x}{a}\right) dx + \dots + (-1)^{n+1} \int_{(n-1)a\pi}^{na\pi} x \operatorname{sen}\left(\frac{x}{a}\right) dx.$$

Vemos que $A = A_0 + \dots + A_{n-1}$, onde A_k é a área limitada pela curva, o eixo dos x , se $ka\pi \leq x \leq (k+1)a\pi$ e $k = 0, 1, \dots, n-1$, ou seja,

$$A_k = \int_{ka\pi}^{(k+1)a\pi} x \operatorname{sen}\left(\frac{x}{a}\right) dx,$$

considerando: $A_k = \left| \int_{ka\pi}^{(k+1)a\pi} x \operatorname{sen}\left(\frac{x}{a}\right) dx \right|$, se k é ímpar. Integrando por partes temos:

$$A_k = \int_{ka\pi}^{(k+1)a\pi} x \operatorname{sen}\left(\frac{x}{a}\right) dx = (2k+1) a^2 \pi \cos(k\pi).$$

Logo, $A = a^2 \pi (1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)) = a^2 n^2 \pi \text{ u.a.}$, pois, $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$ é soma de termos de uma P.A.

[10] Calcule a área da região limitada pela astróide $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$, $a > 0$.

As interseções da curva com os eixos coordenados são $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, a)$ e $(0, -a)$. Pela simetria da curva, calculamos a área da região no primeiro quadrante e multiplicamos o resultado por 4.

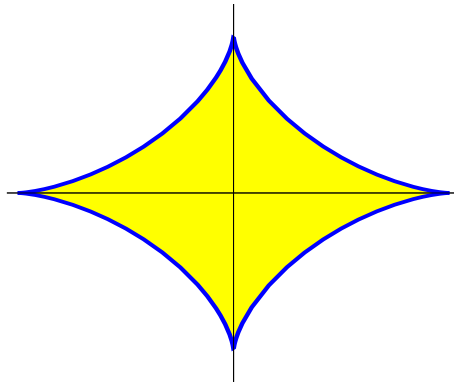


Figura 8.25: A região do exemplo [10].

Seja $y = (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{x^2})^{\frac{3}{2}}$; logo,

$$A = 4 \int_0^a [\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{x^2}]^{\frac{3}{2}} dx.$$

Fazendo a mudança $x = a \operatorname{sen}^3(t)$, obtemos $y = a \cos^3(t)$, $dx = 3a \operatorname{sen}^2(t) \cos(t) dt$; então,

$$(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{x^2})^{\frac{3}{2}} dx = 3a^2 \cos^4(t) \operatorname{sen}^2(t) dt = 3a^2 \cos^4(t) (1 - \cos^2(t)) dt;$$

logo:

$$A = \frac{3a^2}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-2\cos(4t) + \cos(2t) + 2 - \cos(6t)] dt = \frac{3a^2}{8} \pi \text{ u.a.}$$

[11] Determine a área da região limitada por: $y = x^2$, $y = 2 - x^2$ e $y = 2x + 8$.

A região D a qual devemos calcular sua área é:

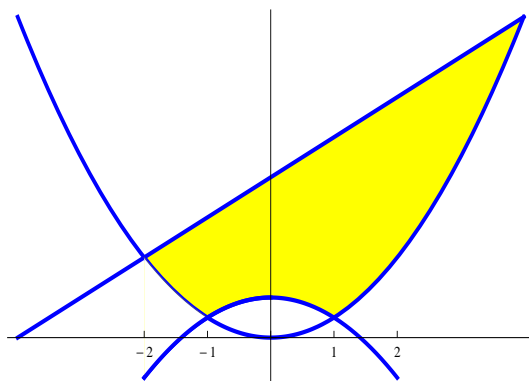


Figura 8.26: A região D do exemplo [1].

Para calcular a área de D , vamos a calcular a área da região D_1 à esquerda e subtraímos a área da região D_2 à direita:

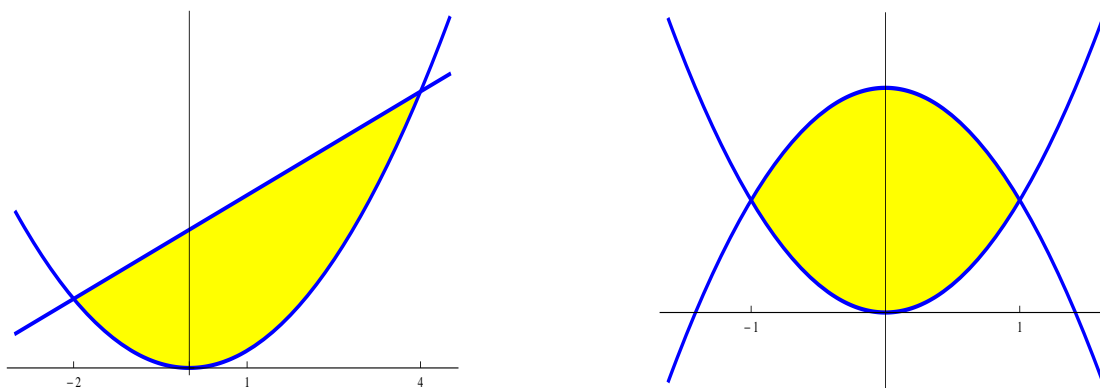


Figura 8.27: As regiões A_1 e A_2 do exemplo [1].

A região $D_1 = \{(x, y) / -2 \leq x \leq 4, x^2 \leq y \leq 2x + 8\}$; logo sua área é:

$$A(D_1) = \int_{-2}^4 [2x + 8 - x^2] dx = 36 \text{ u.a.}$$

A região $D_2 = \{(x, y) / -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$; logo sua área é:

$$A(D_2) = \int_{-1}^1 [2 - 2x^2] dx = 2 \int_0^1 [2 - 2x^2] dx = \frac{8}{3} \text{ u.a.}$$

Finalmente a área pedida é:

$$A(D_1) - A(D_2) = \frac{100}{3} \text{ u.a.}$$

[12] Determine a área da região limitada por: $y = \sqrt{x-2}$, $x + y = 2$ e $x + 2y = 5$.

A região D a qual devemos calcular sua área é:

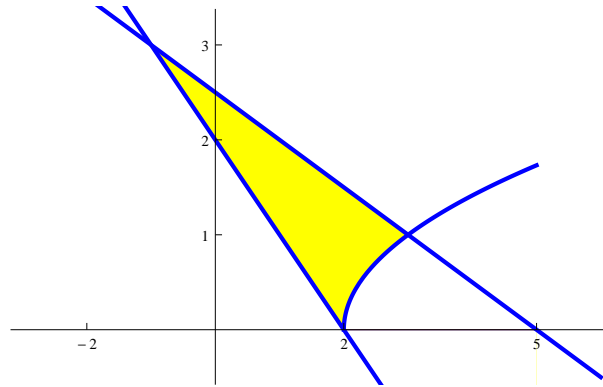


Figura 8.28: A região D do exemplo [2].

Para calcular a área de D , vamos a calcular a área da região D_1 à esquerda e subtraímos a área da região D_2 à direita:

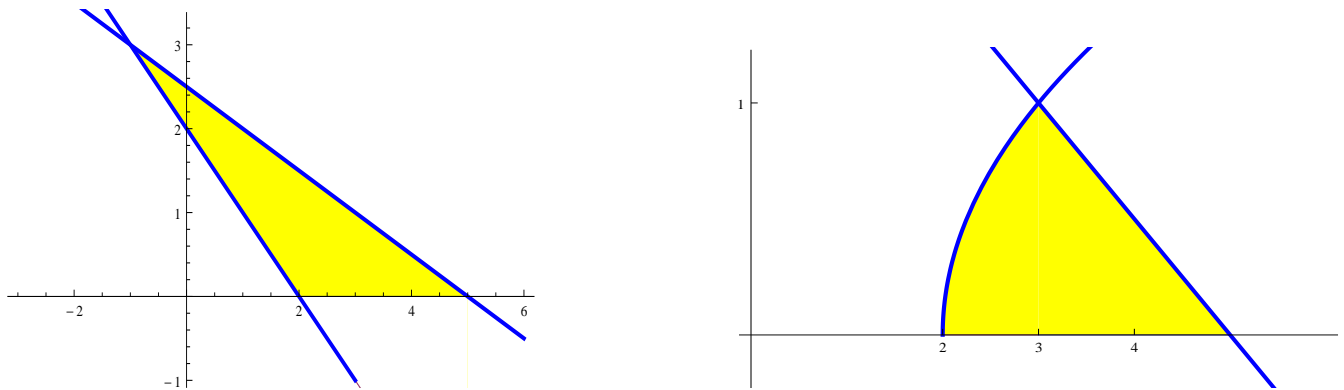


Figura 8.29: As regiões D_1 e D_2 do exemplo [2].

Para determinar a área da região D_1 , primeiramente resolvamos o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \implies y = 3.$$

Escrevendo $x = M(y) = 5 - 2y$ e $x = N(y) = 2 - y$, então a área de D_1 é:

$$A(D_1) = \int_0^3 [M(y) - N(y)] dy = \int_0^3 [3 - y] dy = \frac{9}{2} u.a.$$

Para calcular a área de D_2 , resolvamos o sistema:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x-2} \\ x + 2y = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} y^2 = x - 2 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \implies y^2 + 2y - 3 = 0 \implies y = 1.$$

Escrevendo $x = M(y) = 5 - 2y$ e $x = N(y) = y^2 + 2$, então a área da D_2 é:

$$A(D_2) = \int_0^1 [M(y) - N(y)] dy = \int_0^1 [3 - 2y - y^2] dy = \frac{5}{3} u.a.$$

Finalmente, a área pedida é:

$$A = A(D_1) - A(D_2) = \frac{17}{6} u.a.$$

8.3 Volume de Sólidos de Revolução

Se giramos uma região plana em torno de uma reta, obtemos o que é chamado um sólido de revolução. A reta em torno da qual a região é girada chama-se eixo de revolução. Por exemplo, considere a seguinte região no plano:

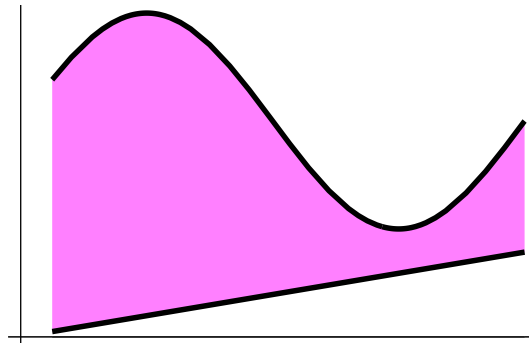


Figura 8.30:

Girando a região em torno do eixo dos x , obtemos:

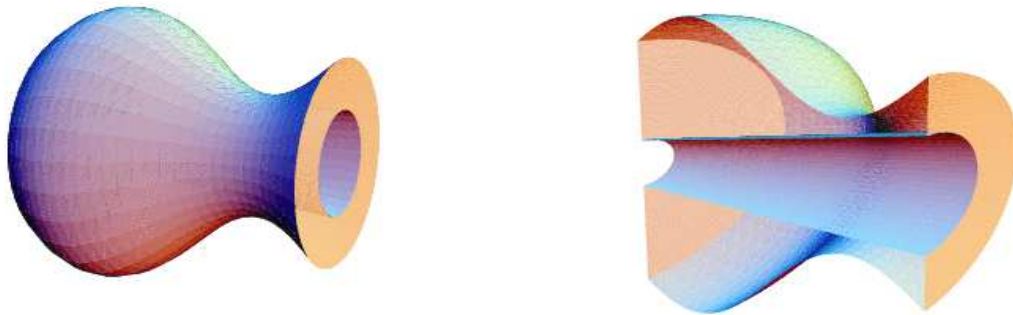


Figura 8.31: Sólido gerado pela região.

Exemplo 8.4.

[1] Seja R a região limitada pelas curvas $y = x$, $x = \pm 1$ e o eixo dos x . Se giramos a região R em torno do eixo dos x , obtemos:

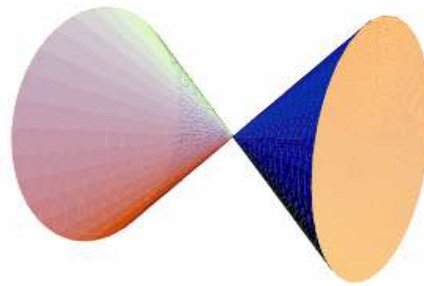
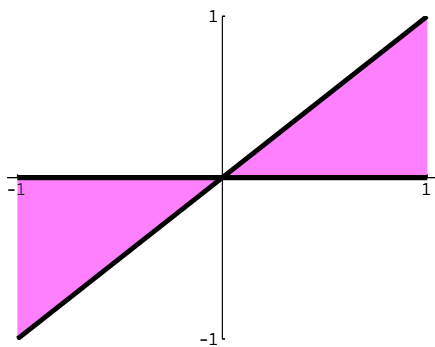


Figura 8.32: A região e o sólido, respectivamewnte.

[2] Seja R a região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 1$. Se giramos a região R em torno do eixo dos y , obtemos

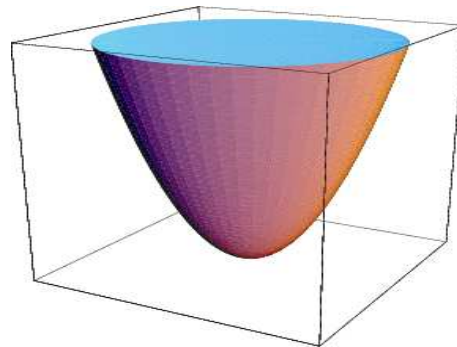
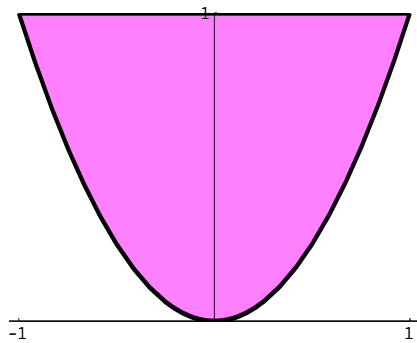


Figura 8.33: A região e o sólido, respectivamente.

[3] Seja R a região limitada pelo gráfico de $y = \sin(x)$ para $x \in [0, 2\pi]$ e o eixo dos x . Se giramos a região R em torno do eixo dos x obtemos o sólido do desenho à esquerda e se giramos a região R em torno do eixo dos y , obtemos o sólido do desenho à direita:

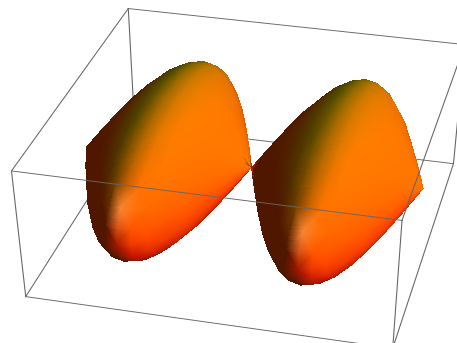
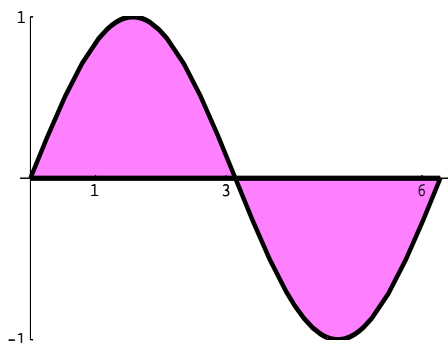


Figura 8.34: A região e o sólido, respectivamente.

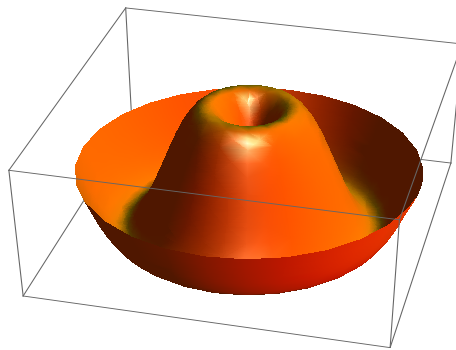


Figura 8.35:

[4] Seja R a região limitada pelos gráficos de $y = x^2$, $x = 1$, $x = 2$ e pelo eixo dos x . Se giramos a região R em torno do eixo dos x , obtemos:

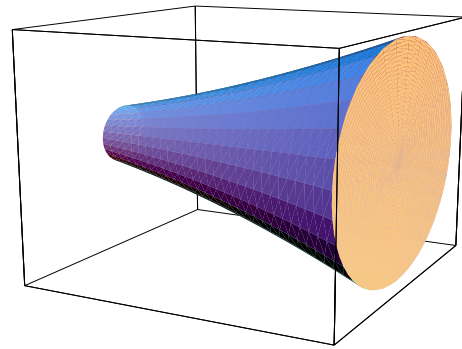
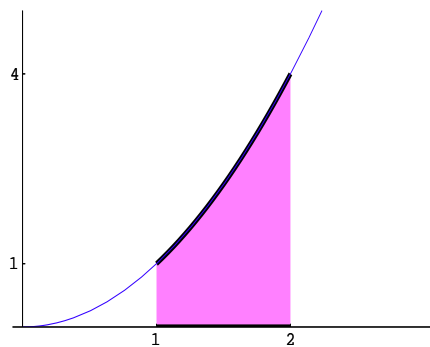


Figura 8.36: A região e o sólido, respectivamente.

8.3.1 Cálculo do Volume dos Sólidos

Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$ e a região:

$$R = \{(x, y) / a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

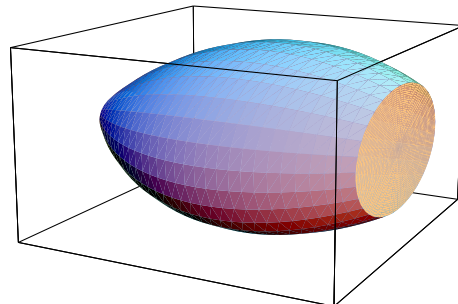
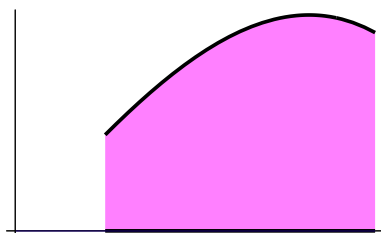


Figura 8.37: A região e o sólido, respectivamente.

Fazendo girar a região R ao redor do eixo dos x , obtemos um sólido de revolução S . Considere a seguinte partição do intervalo $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Como antes, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ é o comprimento de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, i variando de 1 até n . Em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, escolha c_i , i variando de 1 até n . Seja R_i o retângulo de altura $f(c_i)$ e base Δx_i , i variando de 1 até n .

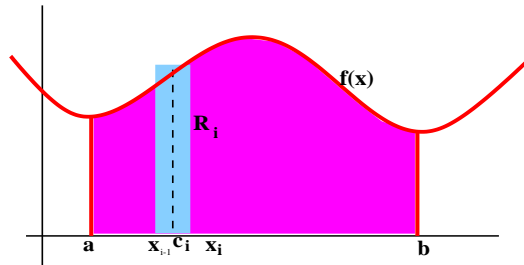


Figura 8.38:

Girando R_i em torno do eixo dos x obtemos um cilindro circular reto C_i de volume $f(c_i)^2 \times \Delta x_i \pi$.

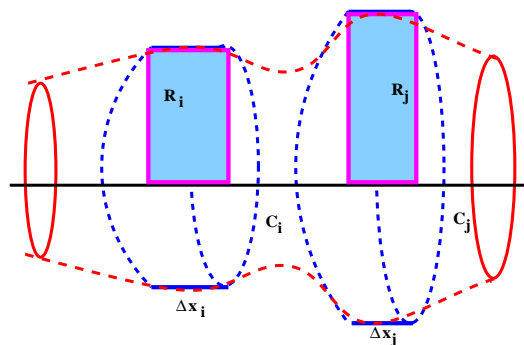


Figura 8.39:

A soma dos volumes dos n cilindros é:

$$V_n = \pi \sum_{i=1}^n f(c_i)^2 \Delta x_i.$$

V_n é uma aproximação do volume do sólido de revolução, quando Δx_i aproxima-se de 0, ou, equivalentemente, se n cresce. Intuitivamente estamos “preenchendo” o sólido de revolução por cilindros de altura pequena, dos quais sabemos efetivamente calcular o volume. Seguindo o mesmo raciocínio utilizado quando definimos área de uma região plana, temos:

$$V(S) = \lim_{|\Delta x_i| \rightarrow 0} \pi \sum_{i=1}^n f(c_i)^2 \Delta x_i = \pi \int_a^b f(x)^2 dx,$$

se o limite existe.

É possível demonstrar que este limite sempre existe e é independente das escolhas feitas. Se a função f é negativa em algum subconjunto de $[a, b]$, o sólido de revolução obtido a partir da região limitada pelo gráfico de f , o eixo dos x e as retas $x = a$ e $x = b$ coincide com o sólido de revolução obtido a partir da região limitada pelo gráfico de $|f|$, o eixo dos x e as retas $x = a$ e $x = b$. O fato de que o integrando $f(x)^2 \geq 0$, implica em que seja válida a mesma fórmula para ambos os casos.

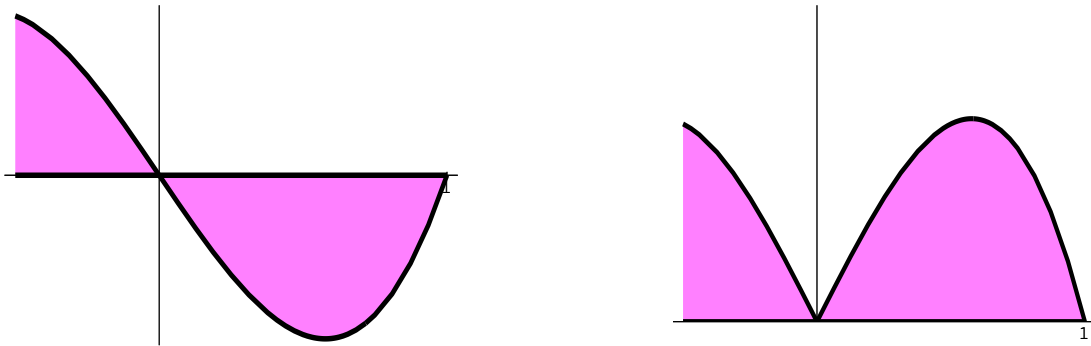


Figura 8.40: A região e o sólido, respectivamente.

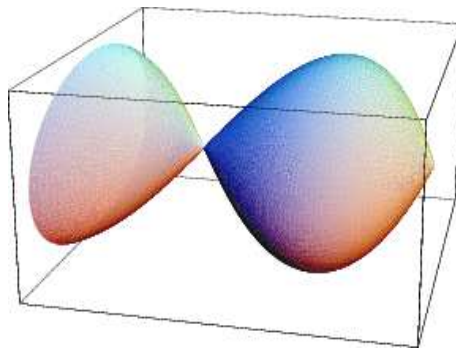


Figura 8.41:

Proposição 8.1. Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$ e a região:

$$R = \{(x, y) / a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Considere o sólido de revolução S obtido girando a região ao redor do eixo dos x . Então o volume $V(S)$ do sólido S é:

$$V(S) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

Em geral, este processo, pode ser feito para qualquer região limitada pelos gráficos de funções contínuas.

Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas tais que $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$ e a região:

$$R = \{(x, y) / a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

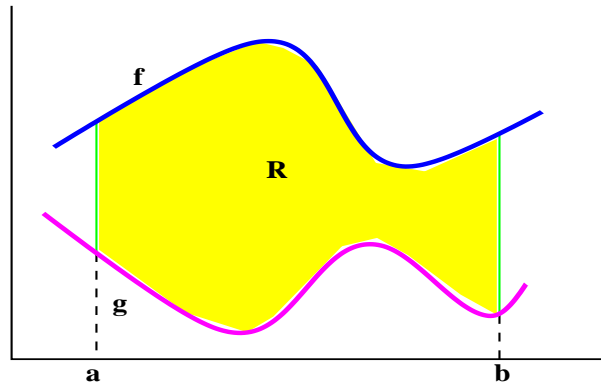


Figura 8.42: $R = \{(x, y) / a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$.

O volume do sólido de revolução S obtido girando R em torno do eixo dos x é:

$$V(S) = \pi \int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2] dx$$

De forma análoga, sejam $M, N : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas tais que $M(y) \geq N(y)$ para todo $y \in [c, d]$ e a região:

$$R = \{(x, y) / c \leq y \leq d, N(y) \leq x \leq M(y)\}$$

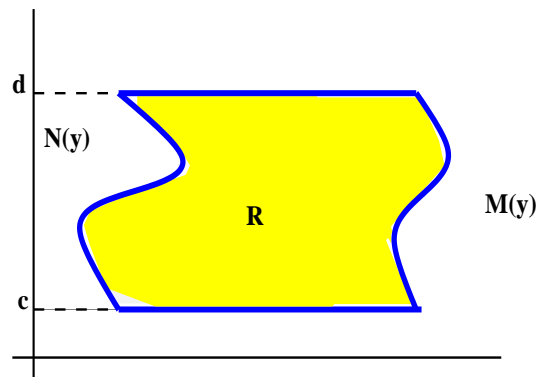


Figura 8.43: $R = \{(x, y) / c \leq y \leq d, N(y) \leq x \leq M(y)\}$.

O volume do sólido de revolução obtido girando R ao redor dos eixo dos y é:

$$V(S) = \pi \int_c^d [M(y)^2 - N(y)^2] dy$$

Em particular, para a reta $x = N(y) = 0$, ou seja, o eixo dos y .

$$V(S) = \pi \int_c^d M(y)^2 dy$$

Exemplo 8.5.

[1] Calcule o volume do sólido de revolução obtido girando em torno do eixo dos x a região limitada pela curva $y = \sin(x)$, $x \in [0, 2\pi]$ e o eixo dos x .

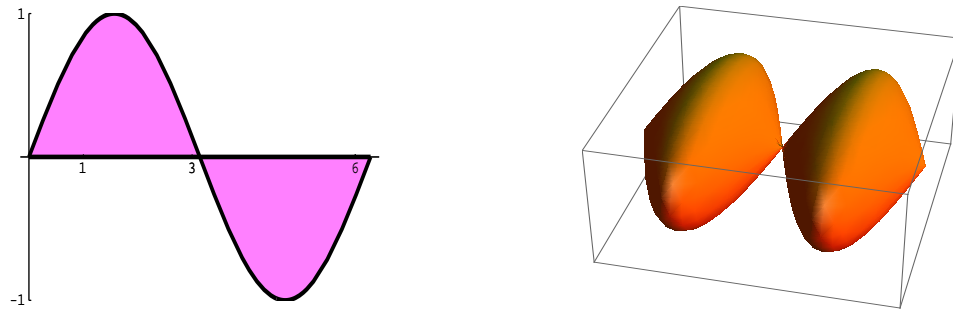


Figura 8.44: Região e o sólido do exemplo [1].

Pela simetria do sólido, calculamos o volume da metade do sólido e multiplicamos o resultado por 2:

$$V(S) = 2\pi \int_0^\pi \sin^2(x) dx = \pi^2 u.v.$$

[2] Calcule o volume do sólido de revolução obtido girando em torno do eixo dos x a região limitada pela curva $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, $x \in [-b, b]$ e o eixo dos x , ($a, b > 0$).

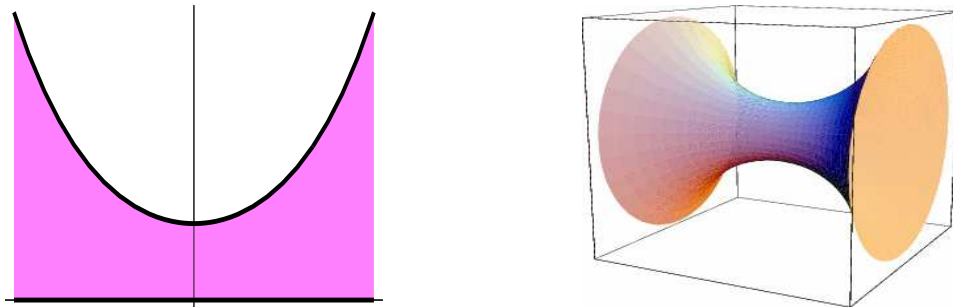


Figura 8.45: Região e o sólido do exemplo [2].

Pela simetria do sólido, calculamos o volume da metade do sólido e multiplicamos o resultado por 2:

$$\begin{aligned} V(S) &= 2 a^2 \pi \int_0^b \cosh^2\left(\frac{x}{a}\right) dx = \frac{a^2 \pi}{2} \int_0^b \left[e^{2x/a} + e^{-2x/a} + 2 \right] dx \\ &= \frac{a^2 \pi}{2} \left[2b + a \sinh\left(\frac{2b}{a}\right) \right] u.v. \end{aligned}$$

[3] Calcule o volume do sólido de revolução obtido girando em torno do eixo dos x a região limitada pela curva $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \leq x \leq a$ e o eixo dos x .

$$V(S) = \pi \int_{-a}^a [\sqrt{a^2 - x^2}]^2 dx = \frac{4 \pi a^3}{3} u.v.$$

Observe que o volume de revolução é o de uma esfera de raio a .

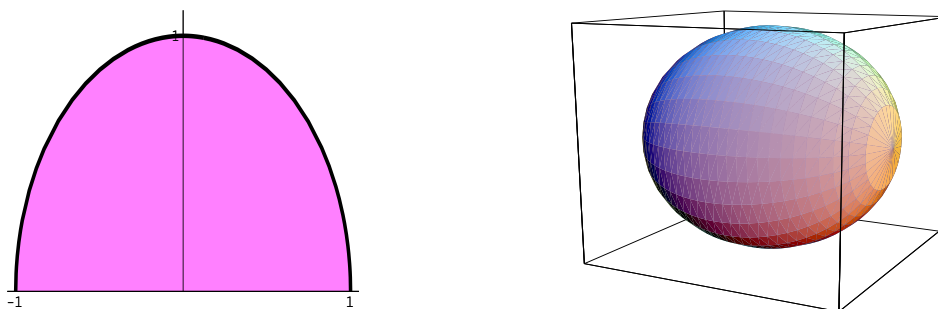


Figura 8.46: Região e o sólido do exemplo [3].

[4] Calcule o volume do sólido de revolução obtido girando em torno do eixo dos x a região limitada pelos gráficos de $4y = 13 - x^2$ e $2y = x + 5$.

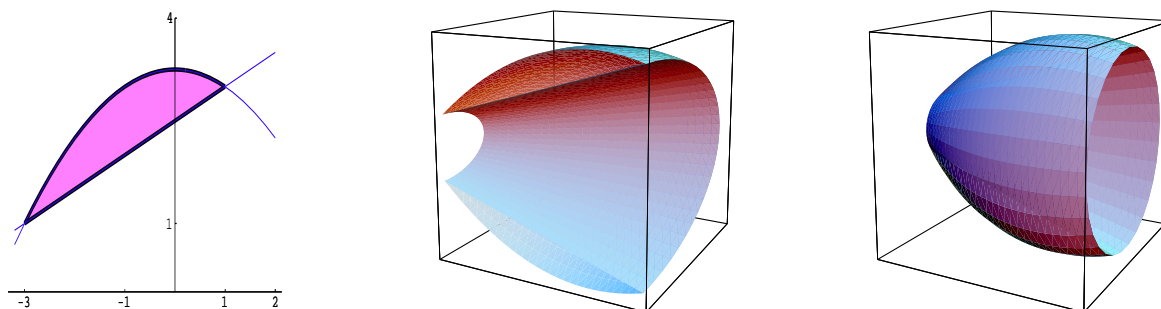


Figura 8.47: Região e o sólido do exemplo [4]

Os limites de integração são $x = -3$ e $x = 1$.

$$V(S) = \pi \int_{-3}^1 \left(\left[\frac{13 - x^2}{4} \right]^2 - \left[\frac{x + 5}{2} \right]^2 \right) dx = \frac{\pi}{16} \int_{-3}^1 [69 - 30x^2 + x^4 - 40x] dx = \frac{64\pi}{5} u.v.$$

[5] Calcule o volume do sólido de revolução obtido girando em torno do eixo dos y a região limitada pelo gráfico de $(x - b)^2 + y^2 = a^2$, $0 < a < b$.

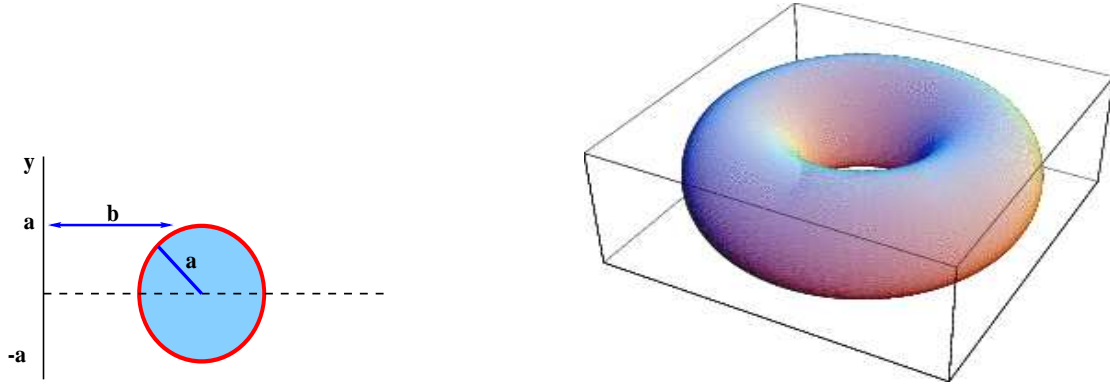


Figura 8.48: Região e o sólido do exemplo [5].

Sejam $M(y) = b + \sqrt{a^2 - y^2}$ e $N(y) = b - \sqrt{a^2 - y^2}$. Os limites de integração são $y = -a$ e $y = a$; então:

$$V(S) = \pi \int_{-a}^a [(M(y))^2 - (N(y))^2] dy = 4b\pi \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy.$$

Note que $2 \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy$ é a área da região limitada por um círculo de raio a ; logo, $V(S) = 2\pi^2 a^2 b$. A superfície de revolução obtida é chamada toro.

[6] Calcule o volume do sólido de revolução obtido girando em torno do eixo dos x a região limitada pelo gráfico de $y = e^x$, $-1 \leq x \leq 1$ e o eixo dos x .

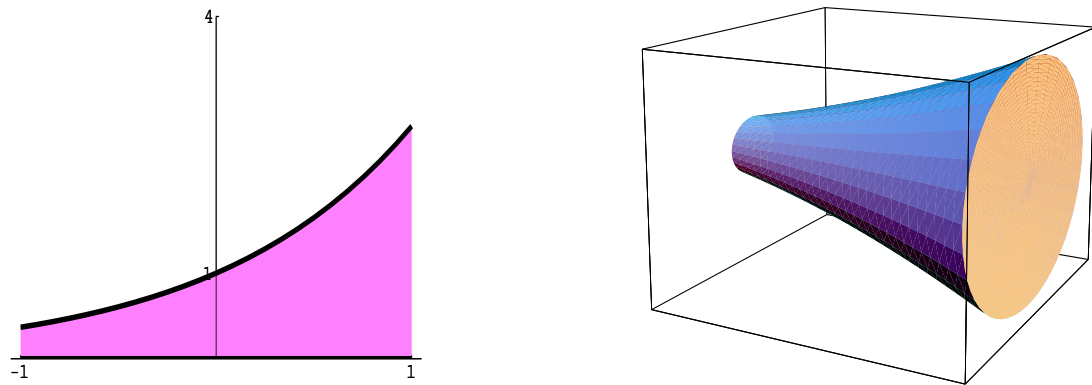


Figura 8.49: Região e o sólido do exemplo [5].

$$V(S) = \pi \int_{-1}^1 e^{2x} dx = \frac{\pi (e^2 - e^{-2})}{2} u.v.$$

8.4 Outros Eixos de Revolução

Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$ e R a região limitada pelo gráfico de f , pelas retas $x = a$, $x = b$ e $y = l$. Considere o sólido de revolução S obtido girando a região ao redor da reta $y = l$. Então, o volume $V(S)$ do sólido S é:

$$V(S) = \pi \int_a^b (f(x) - l)^2 dx$$

Analogamente, se a região R é determinada pelo gráfico da função contínua $x = N(y) \geq 0$, $y \in [c, d]$ e pelas retas $y = c$, $y = d$ e $x = r$, então o volume do sólido de revolução obtido girando R ao redor da reta $x = r$ é:

$$V(S) = \pi \int_c^d [N(y) - r]^2 dy$$

Exemplo 8.6.

[1] Calcule o volume do sólido de revolução obtido girando em torno da reta $y = 4$, a região limitada pela curva $y = x^2$, $1 \leq x \leq 2$ e pela reta $y = -1$.

O sólido de revolução é gerado pela região:

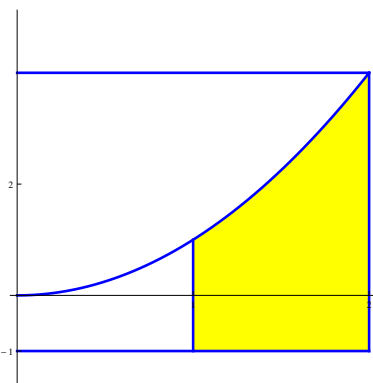
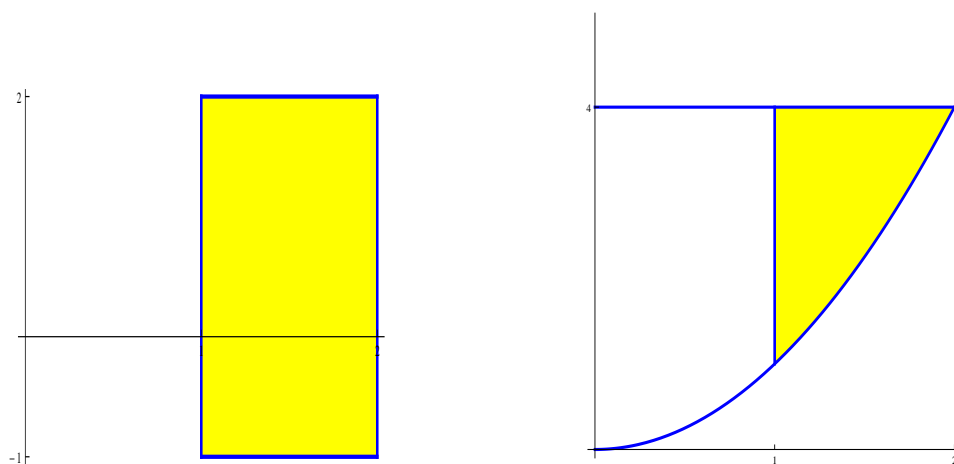


Figura 8.50: A região do exemplo [1].

Vamos a calcular o volume pedido, subtraindo ao volume do cilindro gerado pela região à esquerda, o volume do sólido gerado pela região à direita:

Figura 8.51: As regiões D_1 e D_2 , do exemplo [1].

$$V(S) = \pi \left[\int_1^2 5^2 dx - \int_1^2 (x^2 + 1)^2 dx \right] = \pi \left[25 - \frac{19}{3} \right] = \frac{56\pi}{3} \text{ u.v.}$$

[2] Calcule o volume do sólido de revolução obtido girando em torno da reta $x = -1$ a região limitada pelo gráfico de $x = \frac{y^2}{2} + 1$ e pelas retas $y = \pm 2$.



Figura 8.52: Região e o sólido do exemplo [2].

Os limites de integração são $y = \pm 2$.

$$V(S) = \pi \int_{-2}^2 \left[\frac{y^2}{2} + 1 - (-1) \right]^2 dy = \frac{\pi}{4} \int_{-2}^2 [y^2 + 4]^2 dy = \pi \left[4y + \frac{2y^3}{3} + \frac{y^5}{20} \right] \Big|_{-2}^2 = \frac{448\pi}{15} \text{ u.v.}$$

[3] Calcule o volume do sólido de revolução obtido girando em torno da reta $x = 6$ a região limitada pelo gráfico de $4x = y^2$ e pela reta $x = 4$.

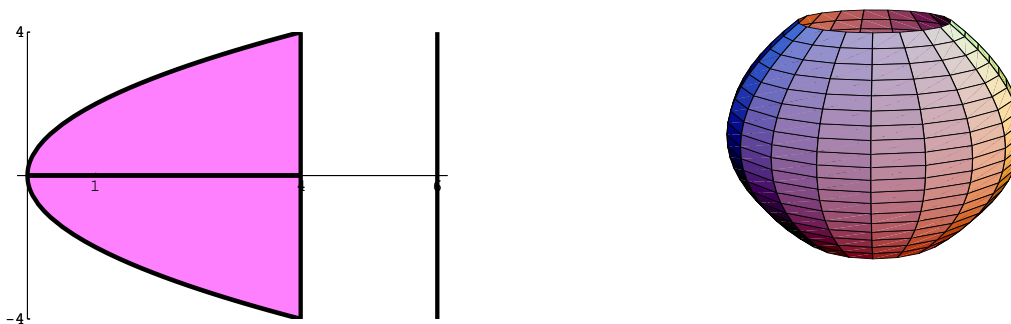


Figura 8.53: Região e o sólido do exemplo [3].

Os limites de integração são $y = \pm 4$.

$$V(S) = \pi \int_{-4}^4 \left[\left(\frac{1}{4}y^2 - 6 \right)^2 - (4 - 6)^2 \right] dy = \frac{\pi}{16} \int_{-4}^4 [y^4 - 48y^2 + 512] dy = \frac{768\pi}{5} u.v.$$

[4] Determine o valor de $a > 0$ tal que se a região limitada pelas curvas $y = 1 + \sqrt{x} e^{x^2}$, $y = 1$ e $x = a$, girar em torno da reta $y = 1$, o sólido gerado tenha volume igual a 2π . Para obter a , devemos resolver a equação:

$$2\pi = \pi \int_0^a x e^{2x^2} dx \quad (*).$$

Fazendo $u = 2x^2$, $du = 4x dx$ em (*), obtemos:

$$2 = \frac{1}{4} \int_0^{2a^2} e^u du = \frac{e^{2a^2} - 1}{4},$$

donde $9 = e^{2a^2}$ e $a = \sqrt{\ln(3)}$.

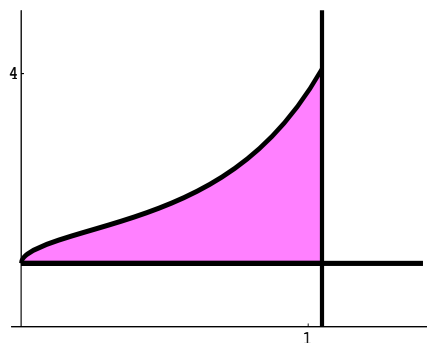


Figura 8.54: A região do exemplo [4].

8.5 Método das Arruelas

Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ função contínua tal que $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$ e a região:

$$R = \{(x, y) / 0 \leq a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Fazendo girar a região R ao redor do eixo dos y , obtemos um sólido de revolução S . Se $a > 0$, o sólido possui um espaço vazio internamente.

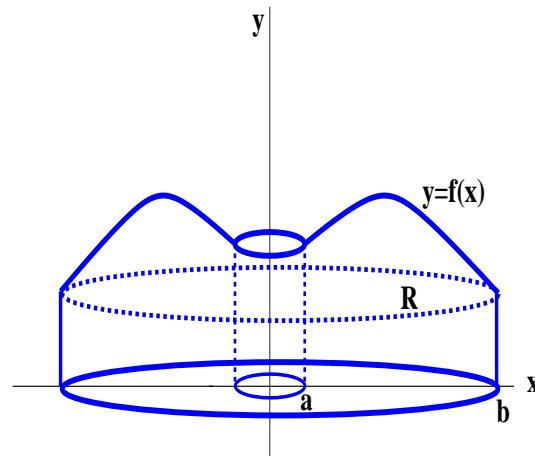


Figura 8.55:

Como antes, considere a seguinte partição do intervalo $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ é o comprimento de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, i variando de 1 até n . Em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, escolha $c_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$, o ponto médio do subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, i variando de 1 até n . Seja R_i o retângulo de altura $f(c_i)$ e base Δx_i , i variando de 1 até n . Fazendo girar R_i em torno do eixo dos y obtemos uma arruela cilíndrica A_i de raio médio c_i e altura $f(c_i)$.

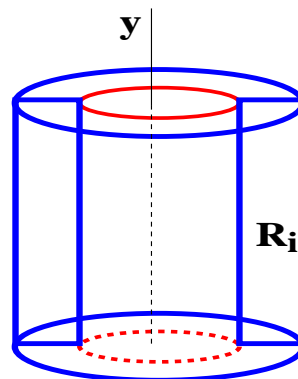


Figura 8.56:

O volume de A_i é $2\pi c_i f(c_i) \Delta x_i$. A soma dos volumes dos n cilindros é:

$$V_n = 2\pi \sum_{i=1}^n c_i f(c_i) \Delta x_i.$$

V_n é uma aproximação do volume do sólido de revolução, quando Δx_i aproxima-se de 0, ou equivalentemente, se n cresce. Intuitivamente estamos “fatiando” o sólido de revolução por inúmeras arruelas de altura pequena, das quais sabemos efetivamente calcular o volume. Seguindo o mesmo raciocínio anterior, temos:

$$V(S) = \lim_{|\Delta x_i| \rightarrow 0} 2\pi \sum_{i=1}^n c_i f(c_i) \Delta x_i = 2\pi \int_a^b x f(x) dx,$$

se o limite existe. É possível demonstrar que este limite sempre existe e é independente das escolhas feitas. Em geral, este processo pode ser feito para qualquer região limitada pelos gráficos de funções contínuas. Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas tais que $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, $a \geq 0$ e a região $R = \{(x, y) / a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$.

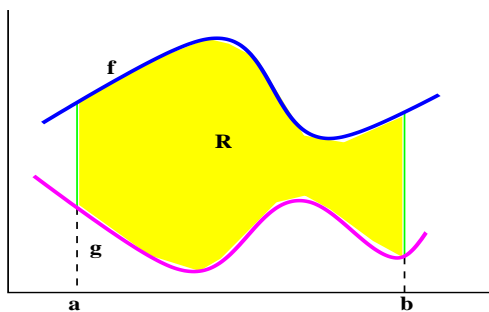


Figura 8.57: $R = \{(x, y) / a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$

O volume do sólido de revolução S obtido girando R em torno do eixo dos y é:

$$V(S) = 2\pi \int_a^b x (f(x) - g(x)) dx$$

Exemplo 8.7.

[1] Calcule o volume do sólido de revolução obtido girando em torno do eixo dos y a região limitada pelo gráfico de $y = \sin(x)$, $0 \leq x \leq \pi$ e o eixo dos x .

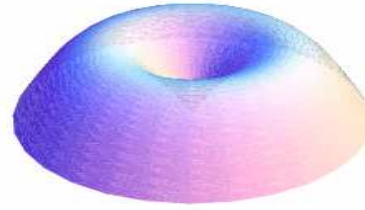
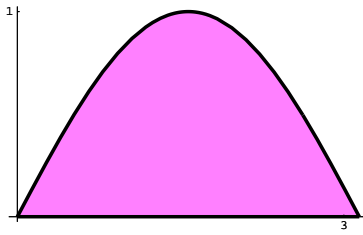


Figura 8.58: Região e o sólido do exemplo [1].

O volume é: $V = 2\pi \int_0^\pi x \sin(x) dx = 2\pi^2 u.v.$

[2] Calcule o volume do sólido de revolução obtido girando em torno do eixo dos y a região limitada pela curva $y = \cos(x)$; $\frac{\pi}{2} \leq x \leq 4\pi$ e o eixo dos x .

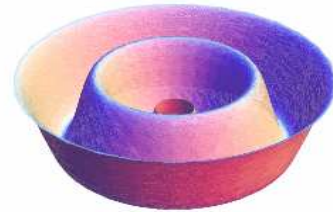
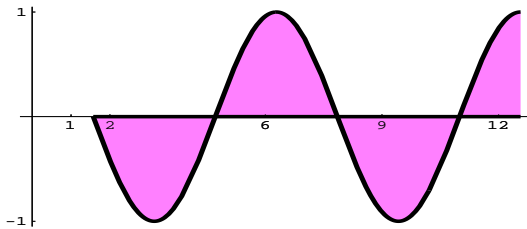


Figura 8.59: Região e o sólido do exemplo [2].

O volume é $V = 2\pi V_1$, onde:

$$V_1 = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x \cos(x) dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} x \cos(x) dx - \int_{\frac{5\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{2}} x \cos(x) dx + \int_{\frac{7\pi}{2}}^{4\pi} x \cos(x) dx.$$

Como $\int x \cos(x) dx = \cos(x) + x \sin(x) + c$, então, $V = 2\pi \left(1 + \frac{31\pi}{2}\right) u.v.$

[3] Calcule o volume do sólido de revolução obtido girando em torno do eixo dos y a região limitada pelas curvas $y = 1 - x^6$ e $y = x^4 - 1$, $0 \leq x \leq 1$.

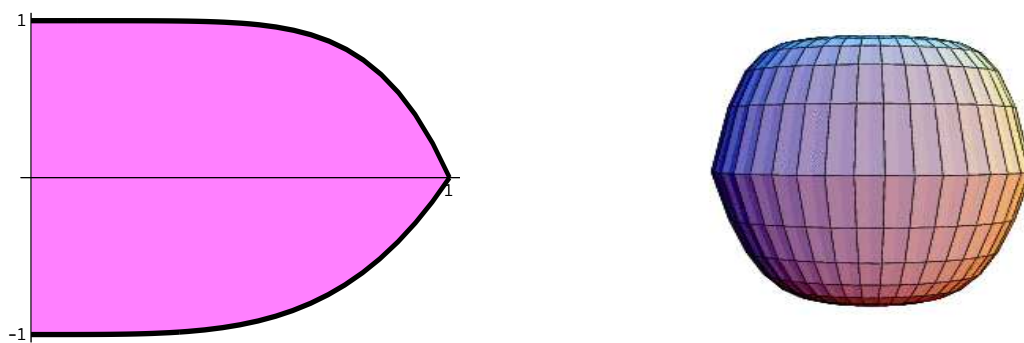


Figura 8.60: Região e o sólido do exemplo [3].

$$V = 2\pi \int_0^1 x(2 - x^6 - x^4) dx = \frac{17\pi}{12} u.v.$$

[4] Calcule o volume do sólido de revolução obtido girando em torno do eixo dos y a região limitada pela curva $y = (x - 1)^2$, $0 \leq x \leq 2$ e o eixo dos x .

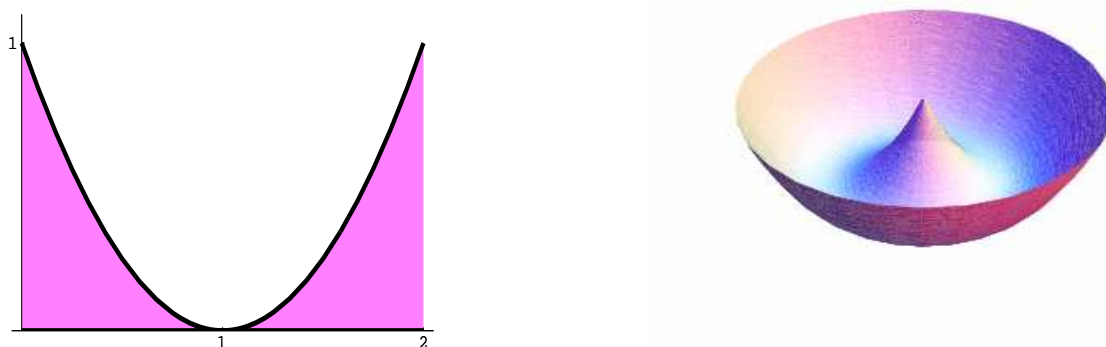


Figura 8.61: Região e o sólido do exemplo [4].

$$V = 2\pi \int_0^2 x(x-1)^2 dx = \frac{4\pi}{3} u.v.$$

8.6 Cálculo do Comprimento de Arco

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. A porção AB do gráfico de f , compreendida entre os pontos: $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$ é chamado **arco**. Nosso interesse é medir o comprimento deste arco. Se a curva é uma reta, para calcular o comprimento de arco s da reta, compreendido entre os pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, usamos o Teorema de Pitágoras e obtemos:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (f(x_2) - f(x_1))^2}.$$

Generalizando esta idéia para o gráfico da função contínua f , fazemos uma partição de ordem n do intervalo $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$; denotamos por $Q_i = (x_i, f(x_i))$, $1 \leq i \leq n$.

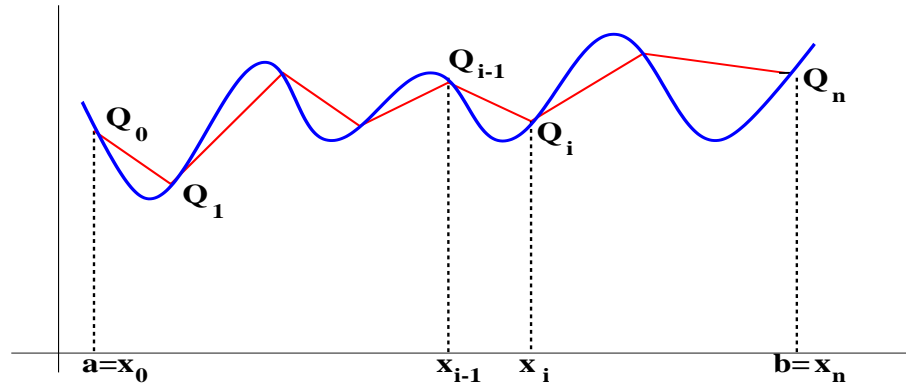


Figura 8.62:

Ligando cada Q_{i-1} a Q_i ($1 \leq i \leq n$) por um segmento de reta, obtemos uma linha poligonal formada pela reunião dos segmentos de reta. Como sabemos calcular o comprimento de cada segmento de reta, sabemos calcular o comprimento da poligonal. Intuitivamente, o comprimento da poligonal é bastante próximo do comprimento do arco da curva; então:

$$L_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

é o comprimento da poligonal. Aplicando o Teorema do Valor Médio a f em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, vemos que existe $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1})$, para cada i de 1 até n ; logo,

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(c_i)(x_i - x_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \Delta x_i, \end{aligned}$$

onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Novamente observamos que quando n cresce muito, Δx_i aproxima-se de zero e L_n aproxima-se do comprimento do arco. Se para cada partição do intervalo $[a, b]$, os c_i são escolhidos como antes, temos que o comprimento do arco AB da curva é:

$$L_{AB} = \lim_{|\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \Delta x_i.$$

Se $f'(x)$ é uma função contínua em $[a, b]$, é possível provar que o limite anterior sempre existe e é igual a L , para qualquer escolha da partição e dos c_i . Em tal caso, temos que:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Se a curva é o gráfico de uma função $x = g(y)$ definida no intervalo $[c, d]$, com as hipóteses anteriores, temos que:

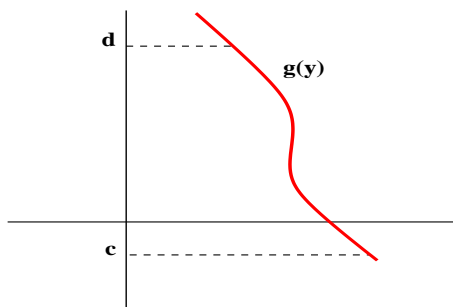


Figura 8.63:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy$$

Exemplo 8.8.

[1] Calcule o comprimento de arco da curva $y = \sqrt[3]{x^2}$ entre os pontos $(8, 4)$ e $(27, 9)$. Temos que:

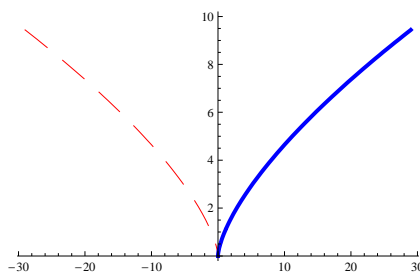


Figura 8.64: Gráfico de $y = x^{2/3}$.

Então:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}, \quad f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \quad \text{e} \quad \sqrt{1 + (f'(x))^2} = \frac{\sqrt{9x^{\frac{2}{3}} + 4}}{3\sqrt[3]{x}};$$

logo: $L = \frac{1}{3} \int_8^{27} \frac{\sqrt{9x^{\frac{2}{3}} + 4}}{\sqrt[3]{x}} dx$. Seja $u = 9\sqrt[3]{x^2} + 4$; logo, $du = \frac{6}{\sqrt[3]{x}} dx$.

$$L = \frac{1}{18} \int_{40}^{85} \sqrt{u} du = \frac{5}{27} (17\sqrt{85} - 16\sqrt{10}) \text{ u.c.}$$

(u.c. unidades de comprimento.)

[2] Calcule o comprimento de arco da curva $y = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2}$ tal que $1 \leq x \leq 2$.

Primeiramente: $y' = f'(x) = x^3 - \frac{1}{4x^3}$; logo, $1 + (y')^2 = (x^3 + \frac{1}{4x^3})^2$ e $\sqrt{1 + (y')^2} = x^3 + \frac{1}{4x^3}$; então:

$$L = \int_1^2 \left[x^3 + \frac{1}{4x^3} \right] dx = \left. \frac{2x^6 - 1}{8x^2} \right|_1^2 = \frac{123}{32} \text{ u.c.}$$

[3] Calcule o comprimento de arco da catenária $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ no intervalo $[-b, b]$, tal que $(a, b > 0)$.

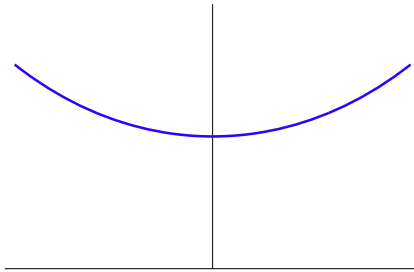


Figura 8.65: Gráfico da catenária.

$y' = \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$; logo, $\sqrt{1 + y'^2} = \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$; então:

$$L = \int_{-b}^b \cosh\left(\frac{x}{a}\right) dx = 2a \sinh\left(\frac{b}{a}\right) \text{ u.c.}$$

[4] Calcule o comprimento de arco da curva $y = \ln(\cos(x))$ tal que $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

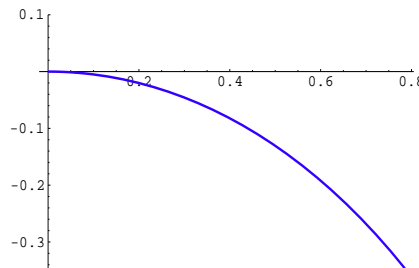


Figura 8.66: Gráfico de $y = \ln(\cos(x))$.

$y' = -tg(x)$. Logo, $\sqrt{1 + (y')^2} = \sec(x)$. Então:

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec(x) dx = \ln(\sec(x) + tg(x)) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(\sqrt{2} + 1) \text{ u.c.}$$

8.7 Definição de Logaritmo Natural

Definição 8.1. A função $\ln : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por:

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

$\ln(x)$ é chamado logaritmo natural de x .

Proposição 8.2. Das propriedades da integral definida e do Teorema Fundamental do Cálculo, segue que:

1. $\ln(1) = 0$
2. $\ln(x) < 0$ se $0 < x < 1$
3. $\ln(x) > 0$ se $x > 1$
4. $[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$
5. A função logarítmica é crescente.

8.7.1 Logaritmo como Área

Seja H_x a região limitada pelo gráfico da função $f(t) = \frac{1}{t}$, o eixo dos x e as retas $t = 1$ e $t = x$.

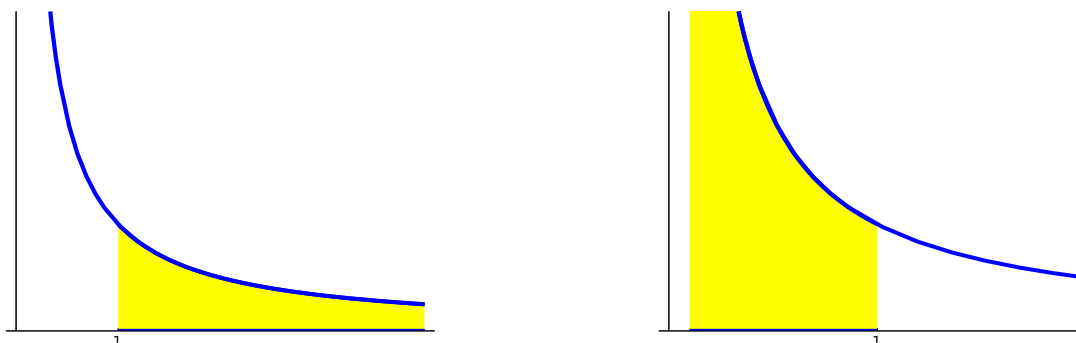


Figura 8.67: A região H_x .

Geometricamente, $\ln(x)$ é definido por

$$\ln(x) = \begin{cases} \text{área}(H_x) & \text{se } 1 \leq x \\ -\text{área}(H_x) & \text{se } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Se $x = 1$, H_x é um segmento de reta; logo, a $\text{área}(H_x) = 0$ e $\ln(1) = 0$. Por outro lado, verifiquemos que $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, para todo $x, y \in (0, +\infty)$. De fato:

$$\ln(xy) = \int_1^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \ln(x) + \int_x^{xy} \frac{dt}{t}.$$

Fazendo $t = xs$, tem-se, $dt = x ds$ e:

$$\int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^y \frac{ds}{s} = \ln(y).$$

$\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$; $x > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. De fato $\ln(x^\alpha) = \int_1^{x^\alpha} \frac{dt}{t}$. Fazendo $t = s^\alpha$, tem-se, $dt = \alpha s^{\alpha-1} ds$ e:

$$\int_1^{x^\alpha} \frac{dt}{t} = \alpha \int_1^x \frac{ds}{s} = \alpha \ln(x).$$

Em particular, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$; $x, y > 0$.

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(xy^{-1}) = \ln(x) + \ln(y^{-1}) = \ln(x) - \ln(y).$$

Podemos agora definir a função exponencial assim: $y = e^x$ se, e somente se $x = \ln(y)$. Todas as propriedades da função exponencial podem ser demonstradas a partir desta definição.

8.8 Trabalho

Consideremos uma partícula de massa m que se desloca ao longo de uma reta sob a influência de uma força F . Da segunda lei de Newton, sabemos que F é dada pelo produto da massa pela sua aceleração a : $F = m \times a$. Se a aceleração é constante, então a força também é constante. O trabalho W realizado pela partícula para deslocar-se ao longo de uma reta, percorrendo uma distância d é dado pelo produto da força pela distância: $W = F \times d$, W medido em J (Joule). Se uma força variável $y = f(x)$ (f função contínua) atua sobre um objeto situado no ponto x do eixo dos x , o trabalho realizado por esta força quando o objeto se desloca de a até b ao longo deste eixo, é dado por:

$$W = \int_a^b f(x) dx$$

W medido em J (Joule).

De fato, suponhamos que a partícula desloca-se ao longo do eixo dos x de $x = a$ até $x = b$. Consideremos a função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Subdividamos o intervalo $[a, b]$ efetuando uma partição de ordem n tal que os subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ tem o mesmo comprimento $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, para $1 \leq i \leq n$. Seja $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$; a força no ponto c_i é $f(c_i)$. Se $\Delta x \rightarrow 0$, a função contínua f restrita ao subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ é quase constante (varia muito pouco); então o trabalho W_i realizado pela partícula para mover-se de x_{i-1} até x_i é: $W_i \cong f(c_i) \times \Delta x$ e o trabalho total W_n , é $W_n \cong \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$. É possível provar, com rigor matemático, que o seguinte limite sempre existe e é igual ao trabalho W realizado pela partícula:

$$W = \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x.$$

E mais ainda, este limite não depende da escolha da partição do intervalo ou da escolha dos pontos c_i .

Exemplo 8.9.

[1] Uma partícula é localizada a uma distância de x cm da origem. Uma força de $(x^4 + 2x^3 + 3x^2)$ N age sobre a partícula quando a mesma se move de $x = 1$ até $x = 2$. Qual é o trabalho realizado pela partícula para deslocar-se?

$$W = \int_1^2 [x^4 + 2x^3 + 3x^2] dx = \frac{207}{10} J.$$

[2] Qual é o trabalho realizado ao se esticar uma mola em 8 cm sabendo que a força de 1 N a estica em 1 cm? (N =Newton)

De acordo com a lei de Hooke, a força de y N que estica em x m a mola é dada por $y = kx$, onde k é uma constante. Como $x = 0.01$ m e y N = 1 N, temos $k = 100$ e $y = 100x$. O trabalho realizado será:

$$W = \int_0^{0.08} 100x dx = 0.32 J.$$

[3] Energia Cinética: O trabalho realizado por uma força f atuando sobre uma partícula de massa m que se move de x_1 até x_2 é W . Usando a segunda lei de Newton, a regra da cadeia e considerando que v_1 e v_2 são as velocidades da partículas em x_1 e x_2 , obtemos:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \frac{mv^2}{2} \Big|_{v_1}^{v_2} = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2},$$

pois, $f = ma = m \frac{dv}{dt} = mv \frac{dv}{dx}$. A expressão $\frac{mv^2}{2}$ é chamada energia cinética do corpo em movimento com velocidade v . Logo, o trabalho realizado por uma força f é igual à variação da energia cinética do corpo e o cálculo desta variação dará o trabalho realizado.

Qualquer fenômeno que possa ser estudado utilizando partições pode ser modelado por integrais definidas. Outras aplicações da integral definida podem ser encontradas nos exercícios.

8.9 Exercícios

8.9.1 Áreas

Calcule a área sob o gráfico de $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$, esboçando cada região, se:

1. $f(x) = 1 - x^2$, $x = -1$, $x = 1$
2. $f(x) = x^3 - x$, $x = -1$, $x = 1$
3. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$, $x = 0$, $x = 2$
4. $f(x) = \frac{x - x^3}{3}$, $x = -1$, $x = 1$
5. $f(x) = \ln(x)$, $x = 1$, $x = e$
6. $f(x) = \cos^2(x)$, $x = 0$, $x = 2\pi$
7. $f(x) = 2\sqrt{x-1}$, $x = 1$, $x = 10$
8. $f(x) = x(x-5)^2$, $x = 0$, $x = 1$
9. $f(x) = \frac{5}{\sqrt{x+2}}$, $x = 0$, $x = 5$
10. $f(x) = x\sqrt{4x^2+1}$, $x = 0$, $x = 2$
11. $f(x) = |x|$, $x = -2$, $x = 6$
12. $f(x) = (x+1)^3 + 1$, $x = -2$, $x = 0$
13. $f(x) = x^2 + 2x$, $x = -1$, $x = 3$
14. $f(x) = x^4 - x^2$, $x = -1$, $x = 1$

Calcule a área das regiões limitadas pelas seguintes curvas:

1. $y = x^2$, $y = 2x + \frac{5}{4}$
2. $y = -x^2 - 4$, $y = -8$
3. $y = 5 - x^2$, $y = x + 3$
4. $x = y^2$, $y = x + 3$, $y = -2$, $y = 3$
5. $y^3 = x$, $y = x$
6. $y = -x^2 - 1$, $y = -2x - 4$
7. $x = y^2 + 1$, $y + x = 7$
8. $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 14$
9. $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$
10. $y = x^2$, $y = x^4$
11. $x = y^2 - 2$, $x = 6 - y^2$
12. $y = x|x|$, $y = x^3$
13. $y = x + 4$, $y = \frac{x^2}{2}$
14. $y^2 - y = x$, $y - y^2 = x$
15. $y = x^2 + 1$, $y = x + 1$
16. $y = x^2$, $y = -x + 2$
17. $y = |x|$, $y = (x+1)^2 - 7$, $x = -4$
18. $y = \ln(|x|)$, $|y| = 3$
19. $y = \cosh(x)$, $y = \sinh(x)$, $x = \pm 1$
20. $y = \ln(x)$, $x = 1$, $y = 4$
21. $y = x^4 - 2x^2$, $y = 2x^2$
22. $y = \cos(x)$, $y = \cos^2(x)$, $0 \leq x \leq \pi$
23. $y = e^x$, $y = e^{2x-1}$, $x = 0$

Calcule a área das regiões limitadas pelas seguintes curvas:

1. $y = x^2 - x$, $y = \operatorname{sen}(\pi x)$, $x = -1$, $x = 1$
2. $y = \operatorname{sen}(x)$, $y = \cos(x)$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$
3. $y = \cos(x)$, $y = 1 - \cos(x)$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$
4. $2y(1 + y^2)^3 - x = 0$, $y = 0$, $y = 1$
5. $y = \frac{8}{x^2}$, $y = x$, $y = 8x$, $x > 0$
6. $y = x(x - 3)$, $y = x(3 - x)$
7. $y = \frac{\sqrt{1-x}}{1+x}$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$
8. $y = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}$, $y = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2} + \operatorname{sen}(2x)$, $0 \leq x \leq \pi$
9. $y(x^2 + 4) = 4(2 - x)$ e os eixos coordenados
10. $y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$ e o eixo dos x
11. $x - \sqrt{4y^2 - y^4} = 0$ e o eixo dos y
12. $y = \frac{1}{(2x + 1)^2}$, $x = 1$, $x = 2$
13. $y = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}$, $x = 0$, $x = 4$
14. $y = e^{-x}$, $y = x + 1$, $x = -1$
15. $y = e^{-x}$, $y = \sqrt{x + 1}$, $x = 1$
16. $y = e^x$, $y = 10^x$, $y = e$
17. $y = -x^3 + 2x^2 + 3x$, $y = -5x$
18. $x^2y = 3$, $4x + 3y - 13 = 0$
19. $x = y(y - 3)^2$, $x = 0$
20. $y = x^4 - 3x^2$, $y = x^2$
21. $x = 1 - y^2$, $x = y^2 - 1$
22. $y = xe^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = c$, onde c é a abscissa do ponto de inflexão da curva

23. $y = x e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = c$, onde c é o máximo

24. $y = \frac{\ln(x)}{x}$, $y = 0$, $x = c$, onde c é o máximo

25. $x^2 - 2y + y^2 = 0$, $x^2 + y^2 = 1$

26. $x = 3y$, $x + y = 0$ e $7x + 3y = 24$

27. $x^2 = 4y$, $y = \frac{8}{x^2 + 4}$

8.9.2 Volumes de Revolução

Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo dos x , da região limitada pelas seguintes curvas:

1. $y = x + 1$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$

2. $y = x^2 + 1$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$

3. $y = x^2$, $y = x^3$

4. $y = \cos(x)$, $y = \sin(x)$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$

5. $x + y = 8$, $x = 0$, $y = 0$

6. $y = x^4$, $y = 1$, $x = 0$

7. $xy = 1$, $x = 2$, $y = 3$

8. $x^2 = y^3$ e $x^3 = y^2$

9. $y = \cos(2x)$, $0 \leq x \leq \pi$

10. $y = x e^x$, $y = 0$ e $x = 1$

11. O triângulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 2)$ e $(4, 2)$

Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo dos y , da região limitada pelas seguintes curvas:

12. $y = \ln(x)$, $y = -1$, $y = 2$, $x = 0$

13. $y = 4 - x^2$, no primeiro quadrante

14. $x = 1 + \sin(y)$, $x = 0$, $y = \pm \frac{5\pi}{2}$

15. $y^2 = 4x, y = 0$ e $x = 4$

16. $y = 1 - \frac{1}{x^4}, x = 1, y = 0$ e $y = \frac{15}{16}$

17. $9x^2 + 16y^2 = 144$

18. $y = x^2 + 1, x = 0$ e $x = 2$

19. $y^2 = x, x = 2y$

20. $y = \sqrt{x^2 + 1}, x = 0$ e $x = 2$

21. $y = \sqrt[4]{4 - x^2}, x = 0$ e $x = 1$

Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno a reta indicada, da região limitada pelas seguintes curvas:

22. $2x + y = 2$ e o eixo do

23. $y = e^x, 1 \leq x \leq 2$; a reta $y = 1$

24. $y = x^4, y = 1$; a reta $y = 2$

25. $y = \sqrt{x}, y = 1$ a reta $y = 1$

26. $y = 4 - x^2$, no primeiro quadrante; a reta $x = 2$

27. $y = 2x - x^2$; a reta $y = 0$

28. $y = 4 - x^2, y = 2$; a reta $y = 2$

29. $y = \sqrt{x}, y = 0$ e $x = 9$; a reta $x = 9$

8.9.3 Comprimento de Arco

Calcule os comprimentos de arco da seguintes curvas, entre os pontos indicados:

1. $y = 5x - 2; (-2, -12)$ e $(2, 8)$

2. $12xy = 4x^4 + 3; (1, \frac{7}{12})$ e $(3, \frac{109}{12})$

3. $x - \frac{y^3}{3} - \frac{1}{4y} = 0; (\frac{7}{12}, 1)$ e $(\frac{67}{24}, 3)$

4. $y = \ln(x); (x, y)$ tal que $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$

5. $y = \frac{1}{6}(x^3 + \frac{3}{x}); (1, \frac{2}{3})$ e $(3, \frac{14}{3})$

6. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$

7. $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{\frac{3}{2}}; (x, y)$ tal que $0 \leq x \leq 1$

8. $y = \int_4^x \sqrt{t-1} dt$, do ponto $(4, 0)$ até $(9, \int_4^9 \sqrt{t-1} dt)$

9. $y = \int_0^x t\sqrt{t^2+2} dt$, do ponto $(0, 0)$ até $(2, \int_0^2 t\sqrt{t^2+1} dt)$

10. $y = \int_1^x \sqrt{t^4+t^2-1} dt$, do ponto $(1, 0)$ até $(3, \int_1^3 \sqrt{t^4+t^2-1} dt)$

11. $y = \sqrt{x^3}$, do ponto $(0, 0)$ até $(1, 1)$

11. $y = \sqrt[3]{x^2}$, do ponto $(0, 0)$ até $(1, 1)$

12. $y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2}$, de $x = 1$ até $x = 3$

13. $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{x}}{2}$, de $x = 1$ até $x = 4$

14. $y = \ln(\sin(x))$, de $x = \frac{\pi}{3}$ até $x = \frac{\pi}{2}$

15. $y = \ln(\sec(x))$, de $x = 0$ até $x = \frac{\pi}{3}$

16. $y = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$, de $x = \frac{1}{8}$ até $x = 1$

17. $y = \ln(\cos(x))$ de $x = 0$ a $x = \frac{\pi}{4}$

18. $y = 2\sqrt{x}$ de $x = 1$ a $x = 2$

19. $y = \arcsen(e^{-x})$ de $x = 0$ a $x = 1$

8.9.4 Logaritmo

1. Verifique que: $\ln(x) = \int_0^{x-1} \frac{du}{u+1}$.

2. Verifique que: $\ln(x) = L(x) + R(x)$, onde $L(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$ e $R(x) = \int_0^{x-1} \frac{u^3}{u+1} du$.

3. Se $x > 1$ e $0 \leq u \leq x-1$, mostre que: $R(x) \leq \frac{1}{4}(x-1)^4$. ($R(x)$ do exercício [2]).

4. Usando os exercícios anteriores conclua que:

$\ln(x) \simeq L(x)$ com $E(x) = |\ln(x) - L(x)| \leq \frac{1}{4}(x-1)^4$. Equivalentemente, $L(x)$ aproxima $\ln(x)$ superiormente, com erro $E(x)$ não superior a $\frac{1}{4}(x-1)^4$.

5. Calcule aproximadamente $\ln(1.2)$ e $E(1.2)$.

6. Repita os exercícios 2, 3, 4 e 5 escrevendo: $\frac{1}{u+1} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - \frac{u^5}{u+1}$.

7. Verifique que: $\ln(x) \leq x - 1$. Quando vale a igualdade?

8. Verifique que $\frac{x}{1+x} \leq \ln(x+1) \leq x$, para todo $x \geq 1$.

8.9.5 Trabalho

1. Uma partícula move-se ao longo do eixo dos x do ponto a até o ponto b sob a ação de uma força $f(x)$, dada. Determine o trabalho realizado, sendo:

(a) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 6x - 1$; $a = 1$, $b = 2$

(b) $f(x) = 8 + 2x - x^2$; $a = 0$, $b = 3$

(c) $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$; $a = 1$, $b = 2$

(d) $f(x) = (x^3 + 2x^2 + 1)(3x^2 + 4)$; $a = 0$, $b = 1$

(e) $f(x) = x^2 \sin(x)$; $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$

(f) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$; $a = 0$, $b = \pi$

(g) $f(x) = e^{-x} \sin(x)$; $a = 0$, $b = 50\pi$

2. Uma bola de ferro é atraída por um ímã com uma força de $12x^{-2} N$ quando a bola está a x metros do ímã. Qual o trabalho realizado para empurrá-la no sentido contrário ao do ímã, do ponto onde $x = 2$ ao ponto onde $x = 6$?

3. Uma partícula está localizada a uma distância de x metros da origem. Uma força de $(x^2 + 2x) N$ é aplicada sobre a partícula. Qual é o trabalho realizado para mover a partícula de $x = 1$ até $x = 3$?

4. Sobre uma partícula que se desloca sobre o eixo dos x atua uma força cuja componente na direção do deslocamento é $f(x) = \frac{2}{x^2}$. Calcule o trabalho realizado pela força quando a partícula se desloca de $x = 1$ até $x = 2$.

5. Uma mola tem comprimento de $25 cm$ e uma força de $54 N$ a estica $1.5 cm$. Qual é o trabalho realizado para esticar a mola de $25 cm$ a $45 cm$?

6. Um ímã atrai uma bola de ferro com uma força de $f(x) = \frac{15}{x^2} N$ quando a bola está a x metros do ímã. Calcule o trabalho realizado para empurrá-la no sentido contrário ao do ímã de um ponto onde $x = 3$ a um ponto onde $x = 5$.

7. Uma mola suportando um carro tem comprimento de $38 cm$ e uma força de $36000 N$ a comprime $1.5 cm$. Calcule o trabalho realizado para comprimi-la de $38 cm$ a $12 cm$.

8. Duas cargas elétricas $e_1 = 100$ e $e_2 = 200$ se encontram no eixo dos x , respectivamente nos pontos $x_0 = 0$ e $x_1 = 1 \text{ cm}$. Calcule o trabalho realizado para mover a segunda carga até o ponto $x_2 = 10 \text{ cm}$. Sugestão: Use a segunda lei de Coulomb.
9. Quando um gás se expande num pistão cilíndrico de raio r , em qualquer instante de tempo a pressão é função do volume $P = P(V)$. A força exercida pelo gás sobre o pistão é o produto da pressão pela área do pistão $F = \pi r^2 P$.

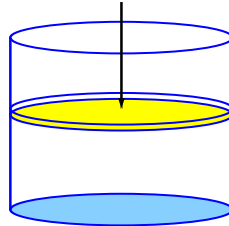


Figura 8.68:

Verifique que o trabalho realizado pelo gás quando o volume se expande de V_1 a V_2 é:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P dV.$$

10. **Centro de massa:** Intuitivamente o centro de massa P de uma lâmina fina é o ponto da lâmina onde, se a levantamos a partir de P paralelamente a um plano horizontal ela permanece paralela (em equilíbrio) em relação ao plano onde foi levantada. $F = \pi r^2 P$.

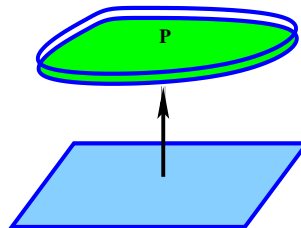


Figura 8.69:

Considere uma lâmina com densidade uniforme no plano dada por:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\},$$

onde f e g são funções contínuas em $[a, b]$. Pesquise na bibliografia e verifique que o centro de massa da lâmina, chamado de centróide de R , é o ponto (\bar{x}, \bar{y}) tal que:

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_a^b x (f(x) - g(x)) dx, \quad \bar{y} = \frac{1}{2A} \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx,$$

onde A é a área de R . Determine o centróide da lâmina R , determinada por:

(a) $y = x, y = x^2$

(c) $y = \cos(2x), y = 0$ e $x = \pm \frac{\pi}{4}$

(b) $y = 3x + 5, y = 0, x = -1$ e $x = 2$

Capítulo 9

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

9.1 Introdução

Na definição de integral definida, consideramos a função integranda contínua num intervalo fechado e limitado. Agora, estenderemos esta definição para os seguintes casos:

Funções definidas em intervalos do tipo:

$$[a, +\infty), (-\infty, b] \text{ ou } (-\infty, +\infty),$$

ou seja para todo $x \geq a$ ou $x \leq b$ ou para todo $x \in \mathbb{R}$, respectivamente.

A função integranda é descontínua em um ponto.

Observação 9.1.

As integrais destas funções são chamadas **integrais impróprias**. As integrais impróprias são de grande utilidade em diversos ramos da Matemática como por exemplo, na solução de equações diferenciais ordinárias via transformadas de Laplace e no estudo das probabilidades, em Estatística.

9.2 Integrais Definidas em Intervalos Ilimitados

Antes de enunciar as definições estudemos o seguinte problema:

Problema: Calcular a área da região R determinada pelo gráfico da função:

$$\begin{aligned} f : [1, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

e o eixo dos x .

Primeiramente note que a região R é **ilimitada** e não é claro o significado de "área" de uma tal região.

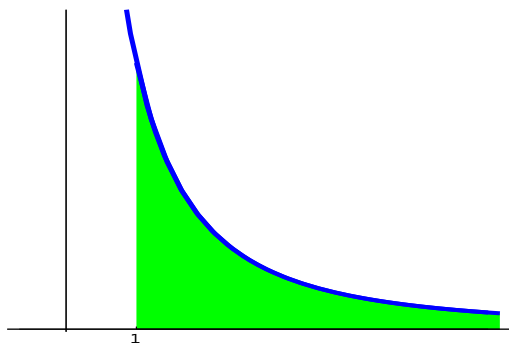


Figura 9.1: Gráfico de $y = \frac{1}{x^2}$, $x \geq 1$.

Seja R_b a região determinada pelo gráfico de $y = \frac{1}{x^2}$ e $1 \leq x \leq b$, acima do eixo dos x .

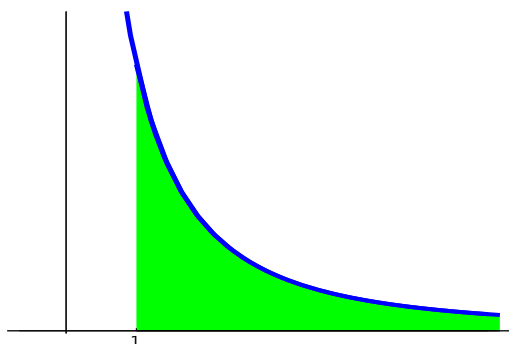


Figura 9.2: Gráfico de $y = \frac{1}{x^2}$, $1 \leq x \leq b$.

A área de R_b é:

$$A(R_b) = \int_1^b \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^b = 1 - \frac{1}{b}.$$

É intuitivo que para valores de b , muito grandes, a área da região **limitada** R_b é uma boa aproximação da área da região **ilimitada** R . Isto nos induz a escrever:

$$A(R) = \lim_{b \rightarrow +\infty} A(R_b),$$

quando o limite existe. Neste caso:

$$A(R) = \lim_{b \rightarrow +\infty} A(R_b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1 \text{ u.a.}$$

É comum denotar $A(R)$ por:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

Esta integral é um exemplo de **integral imprópria** com limite de integração infinito. Motivados pelo raciocínio anterior temos as seguintes definições:

Definição 9.1.

1. Se f é uma função integrável em $[a, +\infty)$, então:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

2. Se f é uma função integrável em $(-\infty, b]$, então:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

3. Se f é uma função integrável em $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, então:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx$$

Se nas definições anteriores os limites existirem, as integrais impróprias são ditas convergentes; caso contrário são ditas divergentes.

Exemplo 9.1.

Calcule as seguintes integrais impróprias:

$$[1] \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg(x) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg(b) = \frac{\pi}{2}.$$

$$[2] \int_0^{+\infty} e^{-x} dx.$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-e^{-b} + 1) = 1.$$

[3] $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} dx.$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^{-x} dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} (-e^{-x}) \Big|_a^0 + 1 = +\infty.$$

[4] $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2}.$ Seja $u = x^2 + 1$; logo $du = 2x dx$:

$$\int \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2u} = -\frac{1}{2(x^2 + 1)}.$$

Então,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2} = 0.$$

[5] Calcule a área da região, no primeiro quadrante, determinada pelo gráfico de $y = 2^{-x}$, o eixo dos x e à direita do eixo dos y .

$$A(R) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{2^x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{2^x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{2^{-x}}{\ln(2)} \right] \Big|_0^b = \frac{1}{\ln(2)} \text{ u.a.}$$

[6] Seja $p \in \mathbb{R}$. Calcule $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}.$

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} (b^{1-p} - 1), \quad p \neq 1$$

a) Se $p > 1$ temos: $\lim_{b \rightarrow +\infty} b^{1-p} = 0$; logo,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}.$$

b) Se $p < 1$ temos: $\lim_{b \rightarrow +\infty} b^{1-p} = \infty$; logo,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \infty.$$

c) Se $p = 1$, temos: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln(b) = \infty$. Em geral:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \infty & \text{se } p \leq 1 \\ \frac{1}{p-1} & \text{se } p > 1. \end{cases}$$

Portanto, a integral converge para $p > 1$ e diverge para $p \leq 1$.

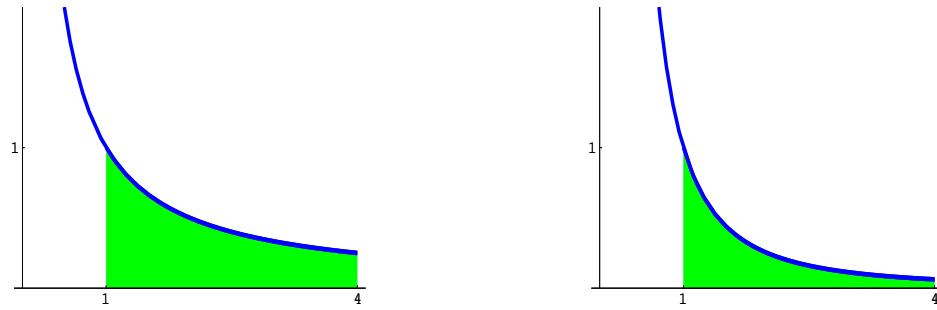


Figura 9.3: Gráficos de $y = \frac{1}{x}$ e $y = \frac{1}{x^2}$, para $x > 0$, são, respectivamente.

[7] Calcule a área da região limitada por $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ e o eixo dos x .

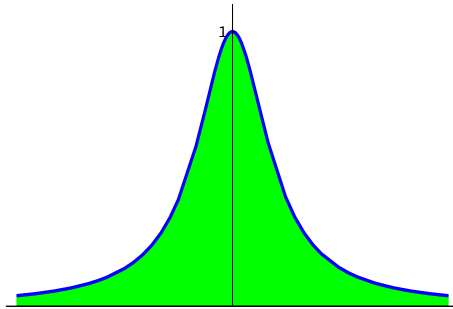


Figura 9.4: Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 1} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} \\
 &= \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^0 \frac{dx}{x^2 + 1} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2 + 1} \\
 &= \lim_{b \rightarrow -\infty} (-\arctg(b)) + \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg(b) \\
 &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \text{ u.a.}
 \end{aligned}$$

[8] Calcule o volume do sólido de revolução, obtido ao girar ao redor do eixo dos x , o gráfico de $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

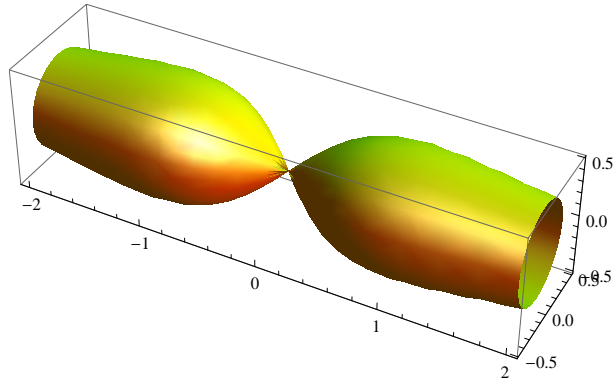


Figura 9.5: Gráfico do volume do exemplo [8].

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx \\
 &= \frac{\pi^2}{2} u.v.
 \end{aligned}$$

9.3 Aplicação

É comum, em aplicações, definir funções via integrais. A seguinte função é amplamente utilizada em diferentes Ciências Aplicadas.

9.3.1 Função Gama

Se $x > 0$, a função Gama é definida e denotada por:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Utilizando integração por partes, temos:

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x).$$

Se $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n(n-1) \Gamma(n-1) = n(n-1) \dots 2 \times 1 \times \Gamma(1).$$

Como:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$$

Logo, se $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Se $\nu \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned}\Gamma(n + \nu + 1) &= (n + \nu) \Gamma(n + \nu) \\ &= (n + \nu) (n + \nu - 1) \Gamma(n + \nu - 1) \\ &\vdots \\ &= (n + \nu) (n + \nu - 1) (n + \nu - 2) \dots (\nu + 1) \Gamma(\nu + 1).\end{aligned}$$

Por outro lado, para $x > 0$ temos:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x + 1).$$

Definamos primeiramente a função Γ , para $-1 < x < 0$ por:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x + 1).$$

Por exemplo:

$$\Gamma(-0.2) = -\frac{1}{0.2} \Gamma(-0.2 + 1) = -\frac{1}{0.2} \Gamma(0.8).$$

Logo, podemos definir a função Γ , para $-2 < x < -1$ por:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x + 1).$$

Por exemplo:

$$\Gamma(-1.2) = -\frac{1}{1.2} \Gamma(-1.2 + 1) = -\frac{1}{1.2} \Gamma(-0.2) = \frac{1}{0.2} \frac{1}{1.2} \Gamma(0.8).$$

Continuando este processo, podemos definir a função Γ , para $x < 0$ por:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x + 1).$$

Muitas vezes não é possível calcular o valor exato de uma integral imprópria, mas, podemos indagar se uma integral imprópria converge ou diverge.

Proposição 9.1. Sejam f e g funções integráveis em $[a, +\infty)$ tais que $f(x) \geq g(x) > 0$ para todo $x \geq a$.

1. Se $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge, então $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ converge.
2. Se $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ diverge, então $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diverge.

A prova, segue diretamente das definições. Seja $f(x) \geq 0$, para todo $x \geq a$. Para mostrar a convergência da integral de f , é preciso que f seja menor que uma função cuja integral converge. Para mostrar a divergência da integral de f , é preciso que f seja maior que uma função cuja integral diverge.

Exemplo 9.2.

[1] Analise a convergência da integral: $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x) + 2}{\sqrt{x}} dx$.

Considere a seguinte desigualdade:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{-1 + 2}{\sqrt{x}} \leq \frac{\operatorname{sen}(x) + 2}{\sqrt{x}}.$$

Por outro lado: $\int_1^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} dx$ diverge; logo, pela proposição, parte 2, temos que a integral dada diverge.

[2] Analise a convergência da integral $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

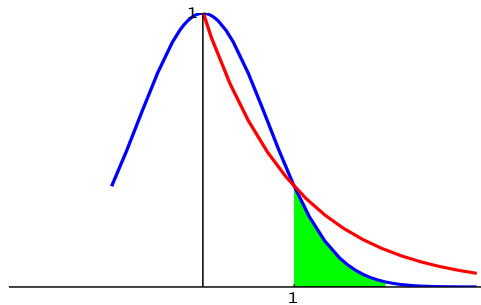


Figura 9.6: Gráfico de e^{-x^2} em azul e de e^{-x} em vermelho, respectivamente.

Claramente $\frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{e^x}$, para todo $x \geq 1$; então, como

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-e^{-b} + e^{-1}) = \frac{1}{e},$$

temos que a integral dada converge.

9.4 Probabilidades

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ positiva e integrável é chamada densidade de probabilidade se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Assim denotamos e definimos a probabilidade de um número x estar compreendido entre a e b ($a < b$); por:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Analogamente definimos as outras possibilidades:

$$P(a \leq x) = \int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \text{e} \quad P(x \leq b) = \int_{-\infty}^b f(x) dx$$

Também podemos definir o valor esperado ou esperança do número x , como

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

E a variância do número x é definida por:

$$V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(x)]^2 f(x) dx$$

A variável independente x é chamada variável aleatória contínua (**v.a.c**).

Proposição 9.2.

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2.$$

De fato,

$$\begin{aligned} V(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(x)]^2 f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [x^2 - 2xE(x) + [E(x)]^2] f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - 2E(x) \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx + [E(x)]^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \\ &= E(x^2) - 2[E(x)]^2 + [E(x)]^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \\ &= E(x^2) - [E(x)]^2. \end{aligned}$$

Utilizamos o fato de que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

9.5 Exemplos

A seguir apresentamos as mais conhecidas densidades de probabilidade de siatribuição.

9.5.1 Distribuição Uniforme

Definimos a função densidade de probabilidade da distribuição uniforme sobre o intervalo $[a, b]$, por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{outro caso} \end{cases}$$

Observe que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b dx = 1.$$

O valor esperado do número x :

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{a+b}{2}.$$

A variância:

$$V(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left[x - \frac{a+b}{2} \right]^2 dx = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Exemplo 9.3.

[1] Suponha que a v.a.c. tem distribuição uniforme com esperança igual a 4 e a variância igual $\frac{4}{3}$. Determine $P(x \leq 4)$ e $P(3 \leq x \leq 4)$.

Sabemos que $E(x) = \frac{a+b}{2} = 4$ e $V(x) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{4}{3}$, logo:

$$\begin{cases} a+b = 8 \\ b-a = 4. \end{cases}$$

Donde $a = 2$ e $b = 6$. Então:

$$P(x \leq 4) = \int_2^4 \frac{dx}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow 50\%$$

$$P(3 \leq x \leq 4) = \int_3^4 \frac{dx}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow 25\%.$$

[2] Um atacadista vende entre 100 e 200 toneladas de grãos, com distribuição uniforme de probabilidade. Sabe-se que o ponto de equilíbrio para esta operação corresponde a uma venda de 130 toneladas. Determine a esperança, a variância e a probabilidade de que o comerciante tenha um prejuízo em um determinado dia.

Note que $a = 100$ e $b = 200$, então:

$$E(x) = \frac{100+200}{2} = 150 \quad \text{e} \quad V(x) = \frac{(200-100)^2}{12} = 833.3.$$

Como o equilíbrio (não se perde nem se ganha) acontece quando vende 130 toneladas, devemos calcular:

$$P(x < 130) = \int_{100}^{130} \frac{dx}{100} = \frac{30}{100} = 0.3.$$

Isto é, tem uma probabilidade de 30%.

9.5.2 Distribuição Exponencial

Definimos a função densidade de probabilidade da distribuição exponencial de parâmetro α , por:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

$\alpha > 0$. Observe que $f(x) \geq 0$, para todo x .

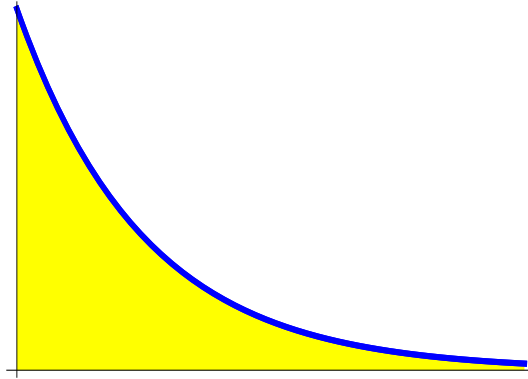


Figura 9.7: Gráfico da distribuição exponencial.

Note que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \alpha \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-\alpha x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (1 - e^{-\alpha b}) = 1.$$

Por outro lado, a probabilidade de que um número $x \in (a, b)$ é:

$$P(a \leq x \leq b) = \alpha \int_a^b e^{-\alpha x} dx = e^{-a\alpha} - e^{-b\alpha}$$

O valor esperado do número x :

$$E(x) = \alpha \int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}.$$

A variância:

$$V(x) = \alpha \int_0^{+\infty} \left[x - \frac{1}{\alpha} \right] e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Esta função de densidade de distribuição é frequentemente utilizada para determinar a vida útil de equipamentos eletrônicos e do tempo entre ocorrências de eventos sucessivos, como por exemplo, o tempo entre chegadas de clientes a uma agência bancária.

Exemplo 9.4.

[1] Para determinado tipo de baterias de telefone celular, a função de densidade de probabilidade dada que x horas seja o tempo de vida útil de uma bateria escolhida aleatoriamente é:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x/20}}{20} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Determine a probabilidade de que uma bateria escolhida aleatoriamente tenha um tempo de vida útil entre 10 a 15 horas e de uma que funcione pelo menos 50 horas. Determine a esperança e a variância.

Devemos calcular $P(10 \leq x \leq 15)$ e $P(x \geq 50)$, então:

$$P(10 \leq x \leq 15) = \int_{10}^{15} \frac{e^{-x/20}}{20} dx = 0.134 \cong 13.4\%$$

$$P(x \geq 50) = \int_{50}^{+\infty} \frac{e^{-x/20}}{20} dx = 0.082 \cong 8.2\%.$$

Determinemos a esperança e a variância:

$$E(x) = 20 \quad \text{e} \quad V(x) = 400.$$

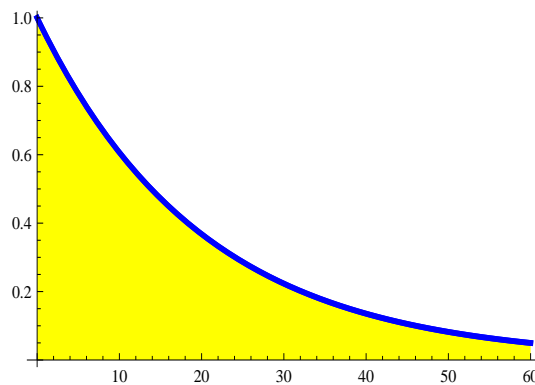


Figura 9.8: Gráfico da distribuição exponencial do exemplo [1].

[2] O tempo de espera entre o pedido de atendimento num banco é uma v.a.c. com distribuição exponencial com média igual a 10 minutos. Determine a probabilidade do tempo de espera superior a 10 minutos. Ache a esperança e a variância.

Note que:

$$f(x) = \begin{cases} 0.1 e^{-0.1x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Logo:

$$P(10 \leq x) = \int_{10}^{+\infty} 0.1 e^{-0.1x} = e^{-1} \cong 0.368 = 36.8\%,$$

e:

$$E(x) = 10 \text{ min.} \quad \text{e} \quad V(x) = 100 \text{ min.}$$

9.6 Integrais de Funções Descontínuas

Problema: Calcular a área da região R determinada pelo gráfico da função:

$$\begin{aligned} f : (0, 9] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

e o eixo dos x .

Notamos que a região R é **ilimitada** pois a função f nem é definida no ponto $x = 0$.

Seja R_ε a região determinada pelo gráfico de $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ e $\varepsilon \leq x \leq 9$, $\varepsilon > 0$ pequeno.

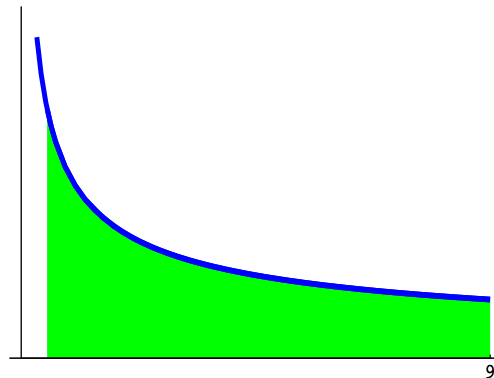


Figura 9.9: A região R_ε .

A área de R_ε é:

$$A(R_\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^9 = (6 - 2\sqrt{\varepsilon}) \text{ u.a.}$$

É intuitivo que para valores de ε muito pequenos, a área da região **limitada** R_ε é uma boa aproximação da área da região **ilimitada** R . Isto nos induz a escrever:

$$A(R) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} A(R_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (6 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 6 \text{ u.a.}$$

$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ é um exemplo de integral **imprópria** com integrando ilimitado. Motivados pelo raciocínio anterior, temos as seguintes definições:

Definição 9.2.

1. Se f é uma função integrável em $(a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow a^+} \int_\varepsilon^b f(x) dx$$

2. Se f é uma função integrável em $[a, b)$, então:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow b^-} \int_a^\varepsilon f(x) dx$$

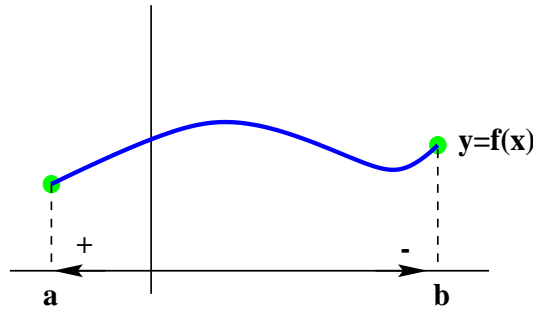


Figura 9.10:

3. Se f é uma função integrável em $[a, b]$ exceto em c tal que $a < c < b$, então:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow c^-} \int_a^\varepsilon f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow c^+} \int_\varepsilon^b f(x) dx$$

Se nas definições anteriores os limites existirem, as integrais impróprias são ditas convergentes; caso contrário, são ditas divergentes.

Exemplo 9.5.

Calcule as seguintes integrais impróprias:

$$[1] \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx.$$

Fazendo $u = \sin(x)$ temos: $\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{\sin(x)}$. Logo,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 2\sqrt{\sin(x)} \Big|_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{\sin(\varepsilon)}) = 2.$$

$$[2] \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 2^-} \int_0^{\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 2^-} \arcsen\left(\frac{x}{2}\right) \Big|_0^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 2^-} (\arcsen(\frac{\varepsilon}{2})) = \frac{\pi}{2}.$$

$$[3] \int_{-4}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}}.$$

Observe que a função integranda não é definida em $-2 \in [-4, 1]$.

$$\begin{aligned} \int_{-4}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow -2^-} \int_{-4}^{\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}} + \lim_{\varepsilon \rightarrow -2^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}} \\ &= \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow -2^-} (x+2)^{\frac{2}{3}} \Big|_{-4}^{\varepsilon} + \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow -2^+} (x+2)^{\frac{2}{3}} \Big|_{\varepsilon}^1 \\ &= \frac{3}{2} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow -2^-} (-\sqrt[3]{4} + \varepsilon^{\frac{2}{3}}) + \lim_{\varepsilon \rightarrow -2^+} (\sqrt[3]{9} - \varepsilon^{\frac{2}{3}}) \right] \\ &= \frac{3}{2} (\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4}). \end{aligned}$$

$$[4] \text{ Calcule o comprimento da astróide } \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}, a > 0.$$

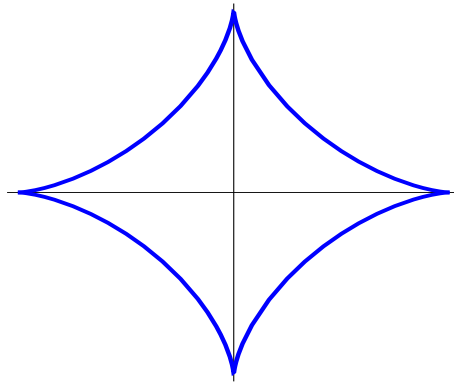


Figura 9.11: A astróide.

A curva não é diferenciável nos pontos de interseção com os eixos coordenados; pela simetria, calcularemos o comprimento da curva no primeiro quadrante e multiplicaremos o resultado por 4.

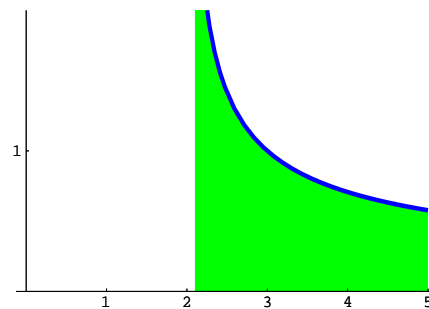
Derivando implicitamente a equação da astróide $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$ em relação a x :

$$y' = -\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}}; \quad \text{então,} \quad \sqrt{1 + (y')^2} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x}}.$$

Na última igualdade usamos o fato de que $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$; logo,

$$L = 4 \sqrt[3]{a} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = 4 \sqrt[3]{a} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^a \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = 4 \sqrt[3]{a} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{3(a^{\frac{2}{3}} - \varepsilon^{\frac{2}{3}})}{2} \right] = 6a \text{ u.c.}$$

[5] Calcule a área limitada por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$, e pelas retas $x = 2$ e $x = 5$. $a > 0$.

Figura 9.12: Gráfico de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$.

$$A = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 2^+} \int_{\varepsilon}^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2} \Big|_{\varepsilon}^5 = 2\sqrt{3} \text{ u.a.}$$

Numa integral imprópria com limite superior infinito e cuja função integranda não é definida no limite inferior, procedemos assim: Se f é integrável em $(a, +\infty)$ então

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow a^+} \int_{\varepsilon}^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx$$

onde $a < c$; analogamente nos outros casos.

Exemplo 9.6.

$$[1] \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}.$$

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 2^+} \int_{\varepsilon}^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_3^b \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 2^+} \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{2}\right) \Big|_{\varepsilon}^3 + \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{2}\right) \Big|_3^b \\ &= \frac{1}{2} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 2^+} \arccos\left(\frac{2}{x}\right) \Big|_{\varepsilon}^3 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \arccos\left(\frac{2}{x}\right) \Big|_3^b \right] \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

[2] Calcule a área da região limitada pelo gráfico de $y = \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$ e o eixo dos x .

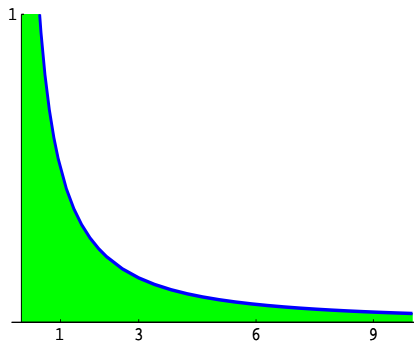


Figura 9.13: Gráfico de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$.

Como $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{x})$, então:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) \Big|_{\varepsilon}^1 + \lim_{b \rightarrow +\infty} 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) \Big|_1^b \\
&= 2 \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\pi - 4 \operatorname{arctg}(\sqrt{\varepsilon})}{4} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{4 \operatorname{arctg}(\sqrt{b}) - \pi}{4} \right] \\
&= \pi \text{ u.a.}
\end{aligned}$$

9.7 Exercícios

1. Calcule as seguintes integrais impróprias, caso sejam convergentes:

- | | |
|---|--|
| (a) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ | (m) $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{(2x-3)^2}$ |
| (b) $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9}$ | (n) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} dx$ |
| (c) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$ | (o) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$ |
| (d) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$ | (p) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3+x}$ |
| (e) $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx$ | (q) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen}(x) dx$ |
| (f) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln(x)}$ | (r) $\int_1^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$ |
| (g) $\int_0^{+\infty} \frac{\cosh(x)}{1+\operatorname{senh}(x)} dx$ | (s) $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^4} dx$ |
| (h) $\int_{-\infty}^0 x 5^{-x^2} dx$ | (t) $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3(x)}$ |
| (i) $\int_{-\infty}^0 x \cosh(x) dx$ | (u) $\int_0^{+\infty} x \operatorname{sen}(x) dx$ |
| (j) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx$ | (v) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+1}$ |
| (k) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ | (w) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ |
| (l) $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(t\pi) e^{-t} dt$ | (x) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2(x)}$ |

2. Calcule a área das regiões determinadas por:

(a) $y = (e^x + e^{-x})^{-1}$ (b) $y = x^{-2}$, $y = e^{-2x}$ e $x \geq 1$

(c) $y = \frac{1}{x^4+1}$ e o eixo dos x .

3. Calcule as seguintes integrais impróprias, caso sejam convergentes:

(a) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(l) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$

(b) $\int_0^1 \frac{\cos(x^{\frac{1}{3}})}{x^{\frac{2}{3}}} dx$

(m) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos(x)}$

(c) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

(n) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$

(d) $\int_0^4 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

(o) $\int_0^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

(e) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x \sqrt[7]{(\ln(x))^2}}$

(p) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}$

(f) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3}$

(q) $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln^2(x)}$

(g) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1-\cos(x)}$

(r) $\int_1^2 \frac{dx}{x \sqrt{\ln(x)}}$

(h) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

(s) $\int_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx$

(i) $\int_4^5 \frac{dx}{\sqrt[5]{(5-x)^2}}$

(t) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) dx$

(j) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}}$

(u) $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^3)}$

(k) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(v) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \sqrt[3]{\ln(x)}}$

4. Determine o valor de s tal que as seguintes integrais impróprias sejam convergentes:

(a) $\int_0^{+\infty} e^{-st} dt$

(b) $\int_0^{+\infty} e^{-st} \operatorname{sen}(t) dt$

$$(c) \int_0^{+\infty} e^{-st} e^t dt$$

$$(f) \int_0^{+\infty} e^{-st} \cosh(t) dt$$

$$(d) \int_0^{+\infty} t^2 e^{-st} dt$$

$$(g) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(x)}{x^s} dx$$

$$(e) \int_0^{+\infty} e^{-st} \sinh(t) dt$$

$$(h) \int_0^{\pi} \frac{dx}{(\sin(x))^s}$$

5. Seja $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, $x > 0$; esta função é chamada função gama. Verifique:

(a) $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$, $x > 0$.

(b) Se $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$

6. Seja $f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{se } |x| \leq 3 \\ 0 & \text{se } |x| > 3 \end{cases}$. Determine a de modo que f seja função de densidade de probabilidade.

7. Determine k para que $f(t) = e^{k|t|}$ seja função de densidade de probabilidade.

8. Verifique que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{2n+1} dx = \frac{n!}{2}$; $n \in \mathbb{N}$.

9. Se f é função de densidade de probabilidade, defina a probabilidade de um número x ser maior que a , ser menor que a .

10. Numa fábrica de circuitos impressos, a vida útil desses circuitos tem uma distribuição descrita pela densidade de probabilidade $f(x) = 0.002 e^{-0.002x}$ se $x \geq 0$, onde x é medido em horas.

(a) Qual é a probabilidade dos circuitos funcionarem em menos de 600 horas?

(b) Qual é a probabilidade dos circuitos continuarem funcionando após 600 horas?

Capítulo 10

APÊNDICE

10.1 Limites

Proposição 10.1. (Unicidade do limite)

Se $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L_2$; ($L_1, L_2 \in \mathbb{R}$), então $L_1 = L_2$. Em outras palavras se o limite existe (é um número real), ele é único.

Prova: Se $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L_1$, então para todo $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $\delta_1 > 0$, tal que se $0 < |x - b| < \delta_1$ então $|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$. Se $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L_2$, então para todo $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $\delta_2 > 0$, tal que se $0 < |x - b| < \delta_2$ então $|f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Seja δ o menor entre δ_1 e δ_2 . Em particular, $(b - \delta, b + \delta) \cap (A - \{b\}) \neq \emptyset$; logo, existe $z \in A$ tal que $0 < |z - b| < \delta$ e $|L_1 - L_2| = |L_1 - f(z) + f(z) - L_2| \leq |L_1 - f(z)| + |f(z) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$; logo, $|L_1 - L_2| < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$; consequentemente, $L_1 = L_2$.

Proposição 10.2.

1. Se $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > \frac{L}{2}$, para todo $x \in (b - \delta, b + \delta) \cap (A - \{b\})$.
2. Se $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L < 0$, então existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in (b - \delta, b + \delta) \cap (A - \{b\})$ tem-se $f(x) < \frac{L}{2}$.

Prova: 1. Seja $\varepsilon = \frac{L}{2}$; então, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (b - \delta, b + \delta) \cap (A - \{b\})$; logo,

$$|f(x) - L| < \frac{L}{2} \text{ ou } \frac{L}{2} < f(x) < \frac{3L}{2}.$$

2. Exercício.

Proposição 10.3. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, existem, então para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1. $\lim_{x \rightarrow a} [\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \beta \lim_{x \rightarrow a} g(x).$
2. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) g(x)] = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)] [\lim_{x \rightarrow a} g(x)].$
3. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)},$ se $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0.$
4. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n,$ se $n \in \mathbb{N}.$
5. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)},$ se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0$ e n é qualquer natural, ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < 0$ e n é um natural ímpar.
6. $\lim_{x \rightarrow a} \ln[f(x)] = \ln[\lim_{x \rightarrow a} f(x)],$ se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0.$
7. Se $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ e existe $\delta > 0$ tal que $h(x) \leq f(x) \leq g(x),$ para $0 < |x - a| < \delta,$ então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$

Prova: Provaremos 2 e 7. As demais propriedades ficam como exercícios.

2. Sejam $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M,$ de definição:

$$|f(x) g(x) - L M| = |f(x) g(x) - f(x) M + f(x) M - L M| \leq |f(x)| |g(x) - M| + |M| |f(x) - L|.$$

Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$ dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ se $0 < |x - a| < \delta_1;$

logo, $|f(x)| < |L| + 1$ se $0 < |x - a| < \delta_1.$ Por outro lado também existe $\delta_2 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2(|M|+1)}$ se $0 < |x - a| < \delta_2;$ analogamente, existe $\delta_3 > 0$ tal que $|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)}.$

Seja δ um número menor que δ_1, δ_2 e $\delta_3;$ então: $|f(x) g(x) - L M| \leq |f(x)| |g(x) - M| + |M| |f(x) - L| \leq$

$$\leq (|L| + 1) K_1 + |M| K_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ se } 0 < |x - a| < \delta, \text{ onde } K_1 = \left(\frac{\varepsilon}{2(|L|+1)}\right) \text{ e } K_2 = \left(\frac{\varepsilon}{2(|M|+1)}\right).$$

7. Para todo $\varepsilon > 0,$ existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta_1,$ então, $L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$ e se $0 < |x - a| < \delta_2,$ então, $L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon;$ considere δ menor que δ_1 e $\delta_2;$ logo, se $0 < |x - a| < \delta;$ então, $L - \varepsilon < h(x) \leq f(x) \leq g(x) < L + \varepsilon.$

Teorema 10.1. Seja $f(x)$ uma função com domínio D nas condições das definições. Então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se e somente se os limites laterais existem e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L.$

Prova: A condição necessária segue das definições. Reciprocamente, se os limites laterais existem e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$, temos que dado $\varepsilon > 0$ existem $\delta_1, \delta_2 > 0$, tais que se $a < x < a + \delta_1$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$ e se $a - \delta_2 < x < a$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$. Note que δ_1 e δ_2 podem ser iguais ou diferentes, (arranje exemplos). Caso $\delta_1 \neq \delta_2$, considere $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$; então se $|x - a| < \delta$ temos que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

10.2 Funções Deriváveis

Teorema 10.2. Se f é derivável em x_0 então f é contínua em x_0 .

Prova: Como f é derivável em x_0 , temos: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Devemos provar que

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, o que é equivalente a $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0;$$

logo, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. A recíproca do teorema é falsa.

Proposição 10.4. Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ funções deriváveis; então:

1. **Regra da soma:** As funções $u \pm v$ são deriváveis e

$$(u \pm v)'(x) = u'(x) \pm v'(x)$$

2. **Regra do produto:** A função $u \cdot v$ é derivável e

$$(u \cdot v)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

3. **Regra do quociente:** A função $\frac{u}{v}$ é derivável, e

$$\left(\frac{u}{v} \right)'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2} \quad \text{se } v(x) \neq 0$$

Provaremos a segunda propriedade; as outras provas são análogas.

$$(u \cdot v)'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(u \cdot v)(x+t) - (u \cdot v)(x)}{t}.$$

$(u \cdot v)(x+t) - (u \cdot v)(x) = u(x+t) \cdot v(x+t) - u(x) \cdot v(x)$; somando e subtraindo o termo

$u(x+t) \cdot v(x)$, obtemos:

$$(u \cdot v)(x+t) - (u \cdot v)(x) = u(x+t) \cdot v(x+t) - u(x+t) \cdot v(x) + u(x+t) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x);$$

logo,

$$(u \cdot v)(x+t) - (u \cdot v)(x) = u(x+t) \cdot (v(x+t) - v(x)) + v(x) \cdot (u(x+t) - u(x)).$$

Então: $(u \cdot v)'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x+t)(v(x+t) - v(x)) + v(x)(u(x+t) - u(x))}{t}$; logo,

$$(u \cdot v)'(x) = u(x) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x+t) - v(x)}{t} + v(x) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x+t) - u(x)}{t},$$

pois, $\lim_{t \rightarrow 0} u(x+t) = u(x)$ (u é derivável, logo contínua). Logo $(u \cdot v)'(x) = u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x)$.

Teorema 10.3. Regra da Cadeia

Sejam f e g funções, tais que $g \circ f$ esteja bem definida. Se f é derivável em x e g é derivável em $f(x)$, então $g \circ f$ é derivável em x :

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Prova: Se $x_0 \in \text{Dom}(f)$, provaremos que $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$. Consideremos a seguinte função:

$$G(t) = \begin{cases} \frac{g(t) - g(f(x_0))}{t - f(x_0)} & \text{se } t \neq f(x_0) \\ g'(f(x_0)) & \text{se } t = f(x_0). \end{cases}$$

G é contínua em $t_0 = f(x_0)$, de fato:

$$\lim_{t \rightarrow f(x_0)} G(t) = \lim_{t \rightarrow f(x_0)} \frac{g(t) - g(f(x_0))}{t - f(x_0)} = g'(f(x_0)) = G(f(x_0)).$$

G também é contínua em $t = f(x) \neq f(x_0)$, pois para $s \neq f(x_0)$, temos:

$$\lim_{s \rightarrow t} G(s) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{g(s) - g(f(x_0))}{s - f(x_0)} = \frac{g(t) - g(f(x_0))}{t - f(x_0)} = G(t).$$

f é diferenciável, logo contínua; então, $G \circ f$ é contínua em $\text{Dom}(f)$, e:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} G(f(x)) = G(f(x_0)) = g'(f(x_0)).$$

Por outro lado, se $x \neq x_0$: $\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = G(f(x)) \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$.

No caso que $f(x) = f(x_0)$ se $x \neq x_0$, ambos os lados da ultima igualdade são nulos.

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} G(f(x)) \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = g'(f(x_0)) f'(x_0).$$

Proposição 10.5. Se f é uma função derivável no intervalo (a, b) e $x_0 \in (a, b)$ é um extremo relativo de f , então $f'(x_0) = 0$.

Prova: Suponha que x_0 é um ponto de máximo relativo de f ; como f é derivável em (a, b) , temos:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Mais ainda: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$

i) Se $x \rightarrow x_0^+$, então $x - x_0 > 0$ e $f(x) - f(x_0) \leq 0$, logo $f'(x_0) \leq 0$.

ii) Se $x \rightarrow x_0^-$, então $x - x_0 < 0$ e $f(x) - f(x_0) \leq 0$, logo $f'(x_0) \geq 0$.

De i) e ii) temos que $f'(x_0) = 0$. A prova para mínimo é análoga.

Teorema 10.4. (do Valor Médio)

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b) . Então existe pelo menos um $x_0 \in (a, b)$ tal que:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Prova: Considere a função $F(x) = f(x) - f(a) - (x - a) \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)$. F é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e $F(a) = F(b)$; $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Pelo Teorema de Rolle aplicado a F , existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $F'(x_0) = 0$; então:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Interpretação geométrica da função auxiliar F

i) A equação da reta que passa pelos pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$ é:

$$y = \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) (x - a) + f(a).$$

ii) $F(x) = f(x) - y$, ou seja, $F(x)$ representa a diferença das ordenadas do gráfico de f e da reta que passa pelos pontos A e B para os pontos de mesma abscissa. Observe que no desenho anterior, $F(x) \leq 0$, para todo $x \in [a, b]$, pois o gráfico de f está abaixo da reta que passa por A e B .

Teorema 10.5. (Teorema do Valor Médio Generalizado)

Sejam f e g funções contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b) . Se $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, então existe pelo menos um $x_0 \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Prova: i) Observemos, primeiramente, que a expressão do enunciado do Teorema está bem definida. De fato, se $g(a) = g(b)$, considerando $h(x) = g(x) - g(a)$, obtemos $h(a) = h(b) = 0$; como h é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) , pelo Teorema de Rolle temos que existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $h'(x_0) = 0$; então $g'(x_0) = 0$, o que é uma contradição com a hipótese do Teorema. Logo, $g(a) \neq g(b)$.

ii) Definamos a seguinte função: $F(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (f(x) - f(a))(g(b) - g(a))$.

F é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) , $F(a) = F(b)$ e:

$$F'(x) = g'(x)(f(b) - f(a)) - f'(x)(g(b) - g(a)).$$

Pelo Teorema de Rolle, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $F'(x_0) = 0$. Usando a expressão da derivada de F obtemos o resultado.

Teorema 10.6. (L'Hôpital)

Sejam f e g funções deriváveis num domínio D que pode ser um intervalo aberto ou uma reunião de intervalos abertos, exceto possivelmente num ponto a e $g'(x) \neq 0$, para todo $x \neq a$.

1. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

2. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Prova: 1. Provaremos que: $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, o outro caso é análogo. Consideremos as funções:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq a \\ 0 & \text{se } x = a \end{cases} \quad \text{e} \quad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \neq a \\ 0 & \text{se } x = a. \end{cases}$$

Seja $\beta > a$, F e G são deriváveis em (a, β) e

$$\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} G(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0.$$

$F' = f'$ e $G' = g'$ em (a, β) . Se $x \in (a, \beta)$; então F e G são contínuas em $[a, x]$; logo, pelo teorema do valor médio generalizado, existe $x_0 \in (a, x)$ tal que:

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(x_0)}{G'(x_0)},$$

como $F(a) = G(a) = 0$, temos $\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(x_0)}{G'(x_0)}$ se $x_0 \in (a, x)$. Então:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x_0 \rightarrow a^+} \frac{F'(x_0)}{G'(x_0)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)};$$

pois se $x \rightarrow a^+$; então $x_0 \rightarrow a^+$.

Fazendo $t = \frac{1}{x}$; então $f'(x) = -f'\left(\frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2}$ e $g'(x) = -g'\left(\frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2}$; logo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

10.3 Funções Integráveis

Proposição 10.6. Se f e g são funções integráveis em $[a, b]$, então:

1. **Linearidade da Integral.** $\alpha f + \beta g$ é função integrável em $[a, b]$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

2. **Monotonicidade da Integral.** Se $f(x) \geq g(x)$ em $[a, b]$; então,

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

3. $|f|$ é integrável e:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

4. Sejam $a < c < b$ e f uma função integrável em $[a, c]$ e $[c, b]$ respectivamente. Então f é integrável em $[a, b]$ e:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Prova: 1. Provaremos que para toda partição P de $[a, b]$ e para todo $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ teremos que

$$\begin{aligned} \lim_{|\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\alpha f + \beta g)(c_i) \Delta x_i &\text{ existe. De fato:} \\ \lim_{|\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\alpha f + \beta g)(c_i) \Delta x_i &= \lim_{|\Delta x_i| \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n \alpha f(c_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \beta g(c_i) \Delta x_i \right) = \\ &= \alpha \lim_{|\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i + \beta \lim_{|\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(c_i) \Delta x_i = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx, \end{aligned}$$

pois f e g são integráveis em $[a, b]$; logo:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

2. Por 1. provaremos que se $h = f - g$; então, $\int_a^b h(x) dx \geq 0$. Para toda partição P de $[a, b]$ e para todo $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ temos que $h(c_i) \geq 0$; logo, $\sum_{i=1}^n h(c_i) \Delta x_i \geq 0$ e:

$$\int_a^b h(x) dx = \lim_{|\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n h(c_i) \Delta x_i \geq 0.$$

4. Para toda partição P de $[a, b]$ tal que $c = x_i$ para algum i ; então $[a, c]$ é subdividido em r subintervalos e $[c, b]$ em $n - r$ subintervalos; logo:

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^r f(c_i) \Delta x_i + \sum_{i=r}^{n-r} f(c_i) \Delta x_i.$$

Então: $\int_a^b f(x) dx = \lim_{|\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \lim_{|\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^r f(c_i) \Delta x_i + \lim_{|\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=r}^{n-r} f(c_i) \Delta x_i$; logo:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Teorema 10.7. (Fundamental do Cálculo).

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. A função $g(x) = \int_a^x f(t) dt$ é derivável e:

$$g'(x) = f(x), \text{ ou, } g'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

Prova: Seja $h \in \mathbb{R}$ tal que $x + h \in [a, b]$:

$$g(x + h) - g(x) = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_a^{x+h} f(t) dt + \int_x^a f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Suponha que $h > 0$. Como f é contínua no intervalo $[x, x + h]$, pelo teorema de Weierstrass, existem $u, v \in [x, x + h]$ tal que $f(u) \leq f(t) \leq f(v)$, então

$$\int_x^{x+h} f(u) dt \leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq \int_x^{x+h} f(v) dt;$$

logo:

$$h f(u) \leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq h f(v),$$

e $f(u) \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \leq f(v)$. Por outro lado, se $h \rightarrow 0$, então $u \rightarrow x$ e $v \rightarrow x$, e:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(u) = \lim_{u \rightarrow x} f(u) = f(x), \quad \lim_{h \rightarrow 0} f(v) = \lim_{v \rightarrow x} f(v) = f(x),$$

pois f é contínua; então:

$$f(x) \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \leq f(x),$$

donde $g'(x) = f(x)$. Analogamente se $h < 0$.

Corolário 10.8. Se f é uma função integrável em $[a, b]$ e admite uma primitiva $F(x)$ em $[a, b]$, então:

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)}$$

Prova: Defina:

$$G(x) = \int_a^x f(x) dx.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo: $G'(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$. Logo, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que:

$$G(x) = F(x) + C.$$

Por outro lado: $G(a) = 0$, então $C = -F(a)$ e:

$$G(x) = F(x) - F(a) \implies G(b) = \int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Capítulo 11

RESPOSTAS

11.1 Capítulo 1

[1] a) x^2 b) $\frac{4x^3\pi}{3}$ c) $x^3\pi$ d) $\frac{10x^3\pi}{3}$

[2] a) \mathbb{R} , $[0, +\infty)$ b) e , p \mathbb{R} , \mathbb{R} c) $\mathbb{R} - \{4\}$, $\mathbb{R} - \{0\}$ d) $[0, +\infty)$, $(0, 1]$

e) \mathbb{R} , $[-1, 1]$ f) $[0, 1]$, $[0, 1]$ g) $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$, $[0, +\infty)$ h) $[1, +\infty)$, $[0, +\infty)$

i) $(-\infty, -2) \cup [3, +\infty)$, $[0, +\infty)$

j) \mathbb{R} , $[0, +\infty)$

l) $\mathbb{R} - \{\frac{2}{3}\}$, $\mathbb{R} - \{4\}$ k) $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$, $(0, +\infty)$ m) $(1, 5) \cup (5, +\infty)$, \mathbb{R}

n) $[-2, 0) \cup (0, 2]$, \mathbb{R} o) $(-\infty, 4) \cup (9, +\infty)$, $[0, 1) \cup (1, +\infty)$ p) \mathbb{R} , \mathbb{R}

[3] \mathbb{R} , $f(1) = -1$ e $f(-\frac{2}{3}) = 2$.

[4] $\mathbb{R} - \{-\frac{7}{2}\}$, $\frac{1-x}{2+7x}$, $\frac{2+7x}{x-1}$

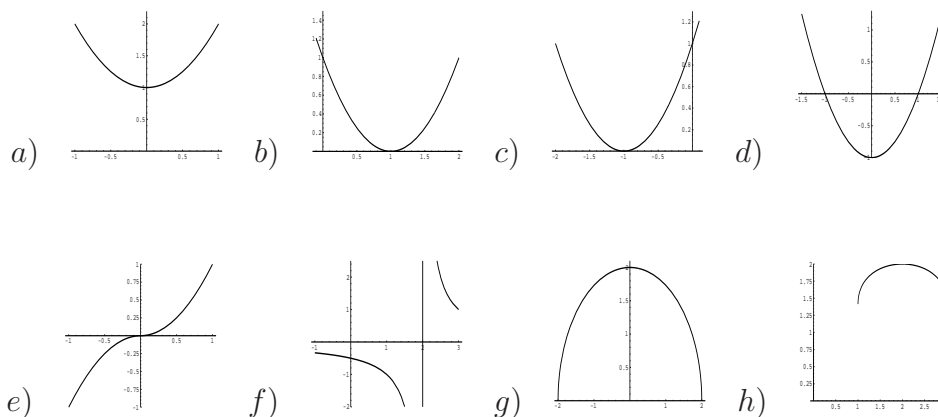
[5] a) $x+1$ b) x^2-2x+4 c) x d) $-\frac{1}{x}$ e) 2 f) $-\frac{x+2}{4x^2}$ g) x^2+2x+5

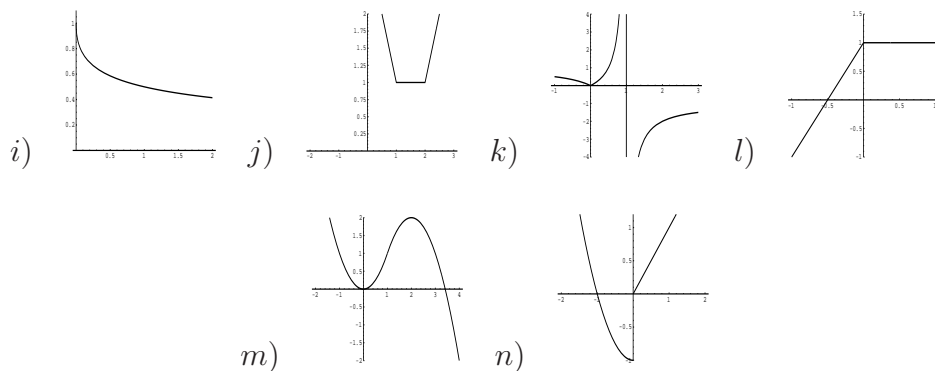
h) $-\frac{x^2+3x+9}{27x^3}$ i) $\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{2}}{x-1}$ j) $-\frac{(x+4)(x^2+16)}{256x^4}$

[6] a) $x+a$ b) x^2-ax+a^2 c) $x+a+1$ d) $-\frac{1}{ax}$ e) 2 f) $-\frac{x+a}{a^2x^2}$

g) x^2+ax+a^2+1 h) $-\frac{x^2+ax+a^2}{a^3x^3}$ i) $\frac{\sqrt[3]{a+1}-\sqrt[3]{1+x}}{a-x}$ j) $-\frac{(x+a)(x^2+a^2)}{a^4x^4}$

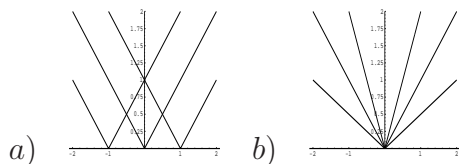
[7]





[8] Não, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

[9]



[10] a) $2 + 2x + x^2$, $2x - x^2 - 2$, $2x(2 + x^2)$, $\frac{2x}{x^2+2}$

b) $3x - 2 + |x + 2|$, $3x - 2 - |x + 2|$, $(3x - 2)|x + 2|$, $\frac{3x-2}{|x+2|}$ se $x \neq -2$ e) $\frac{1+x^8}{x^4}$, $\frac{-1+x^8}{x^4}$, 1 , x^8

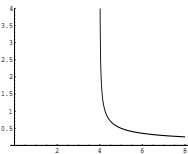
f) $\frac{1+x^3}{x}$, $\frac{1-x^3}{x}$, x , $\frac{1}{x^3}$ se $x \neq 0$ g) $\frac{1}{x^8} + x^2 + x^3$, $-\frac{1}{x^8} + x^2 + x^3$, $\frac{x+1}{x^6}$, $x^{10}(x+1)$ se $x \neq 0$

h) $\frac{1+x^4}{x}$, $\frac{1-x^4}{x}$, 1 , $\frac{1}{x^4}$ se $x \neq 0$

[11] a) x^2 b) bx c) $\pm(x^2 - 3x + 5)$

[12] $a = 3$, $b = -\frac{3}{4}$, $a = -3$, $b = \frac{3}{2}$

[13] $\frac{1}{2\sqrt{x-4}}$; $(4, +\infty)$



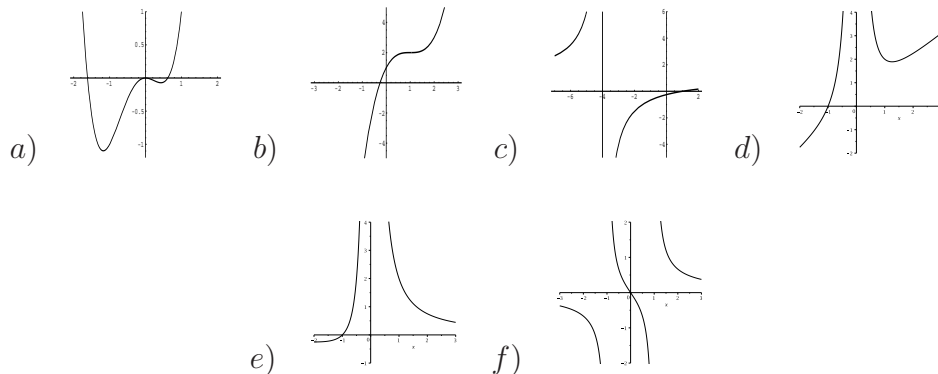
[14] a) $3x + 7$ b) $\sqrt{x^2 + 2}$ c) $\frac{x^2+4}{x^2+1}$

d) $-17 + 18x - 4x^2$ e) $\frac{2}{x-1}$ se $x \neq 1$ f) $-1 - 2x$

[15] a) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^4$ b) $f(x) = x^2 - 9$, $g(x) = x^{-2}$

c) $f(x) = 3x + 5$, $g(x) = \sqrt[4]{x}$

[16] $x + 3n + 3$ [17]



[18] a) $(2, 1)$ b) $(4, -4)$ c) $(\frac{1}{4}, -\frac{9}{8})$ [19] $f(x) = -6x + 8$ e $g(x) = 2x^2 - 7x + 4$

11.2 Capítulo 2

[1] a) $\{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N}\}$ b) $[1, +\infty)$ c), d) $\mathbb{R} - \{0\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{x} \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N}; x \neq 0\}$

f) $[-1, 1]$ g) $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ h) \mathbb{R} i) $[-1, 1]$

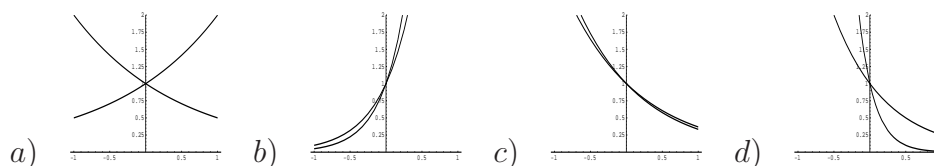
k) $\mathbb{R} - \{0\}$ l) $(-\sqrt{3}, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

[2] a) $\frac{1}{x}$ b) $\frac{x-2}{1-x}$ c) $\sqrt[4]{x}$ d) $1 + \sqrt{x+1}$

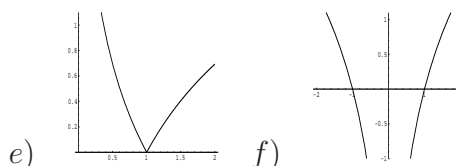
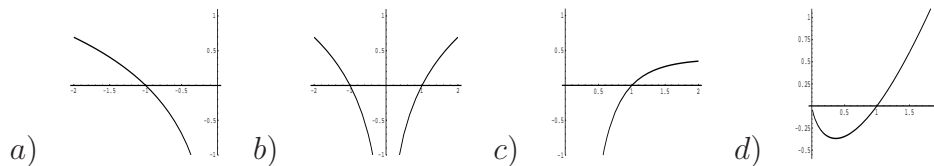
e) $-1 + \frac{3}{x-2}$, f) $2 + \sqrt{1+x}$ g) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ h) $\frac{x+2}{2x-1}$ i) $\sqrt{\frac{x}{1-x}}$

j) $\frac{4x-5}{3x+3}$, k) a^{x-1} l) $\frac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}$

[4]



[6]

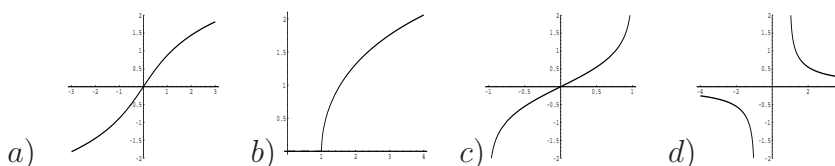


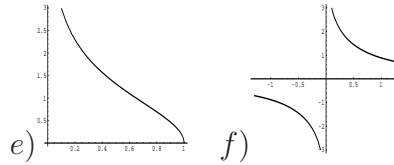
[8] a) 0 b) $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 0$

[10] a) $\operatorname{argsinh}(x)$ é a função inversa da função $\sinh(x)$; $y = \operatorname{argsinh}(x)$ se e somente se $x = \sinh(y)$; então: $x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$, que é equivalente a: $e^{2y} - 2e^y x - 1 = 0$ equação quadrática em e^y , cujas soluções são: $e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$.

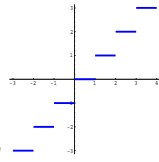
Mas $e^y > 0$; então $e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ e $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$; analogamente obtêm-se as outras funções hiperbólicas inversas.

Os respectivos gráficos são:



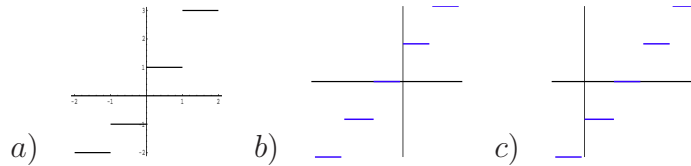


[11] $f \circ f$ é a identidade [12] $f(x) = ax$; a), b), c) não.



[14] $Dom(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = \mathbb{Z}$

[15]



[20] $(0, 9]$; $f(9) = 0$ [23] 120 mg

[24] Aprox. 13412 anos.

[25] $Q(t) = 100e^{-0.049t}$, 70.6 g [26] 23.3 dias

[27] 19.035 anos [28] 15385.23, 15529.69 e 15656.81

[29] a) 739.52 doentes, 38447.54 doentes, b) 11.03 dias. [31] 8.25, $1122.018 \times 10^{12} \text{ J}$

11.3 Capítulo 3

[1] a) -5 b) 1 c) 2 d) 2 e) $\sqrt{2}$ f) 4 g) $-\frac{1}{1000}$ h) 4 i) 9 j) 1 k) 0 l) 2

[2] a) $k = \frac{5}{106}$ b) $k = 2, 3$ c) $k = 70$ d) $k = 0$

[3] a) Não, os domínios são diferentes. b) Sim. [4] a) 4 b) $\frac{15}{11}$ c) 2 d) 1 e) -1 , f) -1 g) 2 h) 2 i) 2 j) -6 k) 1

l) $\frac{5}{6}$ m) $\frac{1}{4}$ n) $-\frac{1}{56}$ o) $2m$ p) $3q$ q) 0 r) $\sqrt{2} + 1$

s) 0 t) $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ u) $\frac{1}{9}$ v) 0

[5] a) $\pm\sqrt{2}$ b) não existe c) $-1, 0$ [6] a) não existe b) existe 0 c) existe -1 d) $\frac{21}{5}e) - \frac{5}{13}$

f) 12 g) 1 h) -1 i) $\frac{|b|}{a}$ j) 0

[7] a) 0 b) 3 c) $\frac{1}{3}$ d) 0 e) $\frac{1}{3}$ f) $-\frac{1}{3}$ g) 0

h) 0 i) 0 j) 1 k) 0 l) 0 m) 1

n) 0 o) 0 p) 0 q) 0 r) 1 s) 0 t) 3

u) 0 v) 1 w) 2 x) 0

[8] a), b), c), f), h) i), k), l), p), r) $+\infty$ d), e), g), j), m), n), o), q) $-\infty$ s) $-\infty$ t) $-\infty$ u) 0 v) $-\infty$

[9] a) $-\frac{13}{6}$ b) $\frac{11}{6}$ c) $\frac{1}{3}$ d) 12 e) $\frac{1}{12}$ f) 4

g) -4 h) $-\frac{1}{6}$ i) $-\frac{85}{4}$ j) 0 k) 1 l) 0 m) 0 n) 0

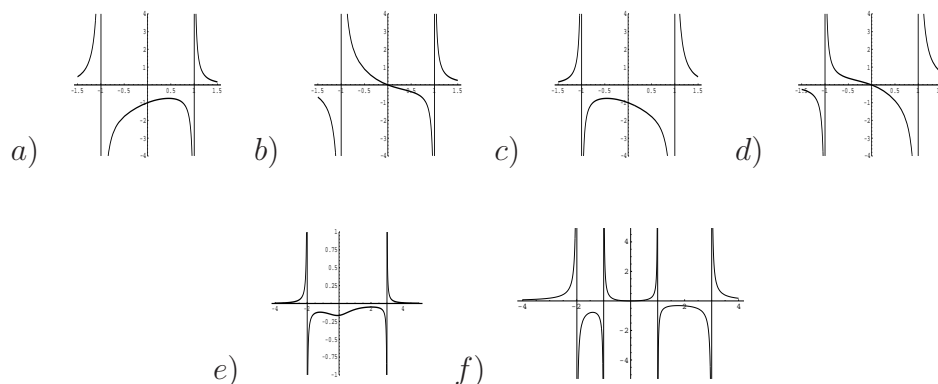
[10] a) 3 b) 0 c) $\frac{3}{4}$ d) 0 e) -1

$f) 1 g) 0 h) e^2 i) \sqrt{e} j) e^2 k) 2 l) 0 m) \ln(5) n) + \infty o) 1$
 $p) 0 q) 1 r) e^{-4} s) e^{-1}$

[11] Ambos os limites são iguais: $a), b), d) 4 c), f) -1 g) 0 e) \frac{1}{2} h) -4 i) 1 j) 2$

[15] a) 3644.24 e 40171.1 b) 4931.94 [16] a) 100000

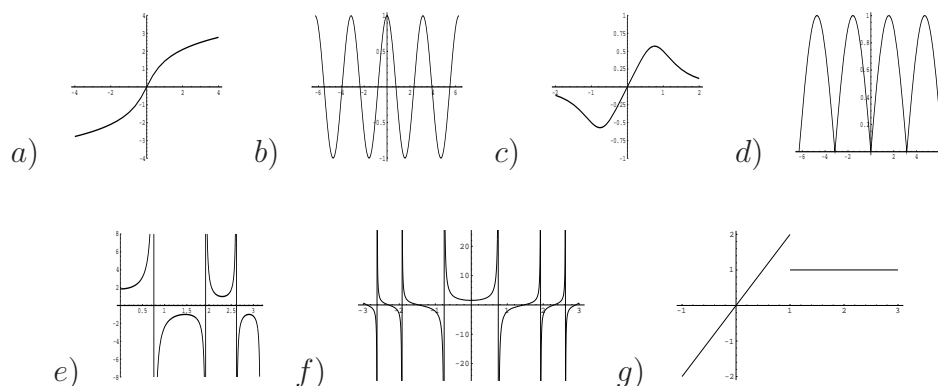
[17]



[18] a) -1 b) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ c) $\frac{4}{\pi}$ e) $\sin(\sin(1))$

f) $\frac{\ln(2)}{2}$

[19] a), b), c) d), h) contínuas e), f), g) descontínuas. Desenhos correspondentes:



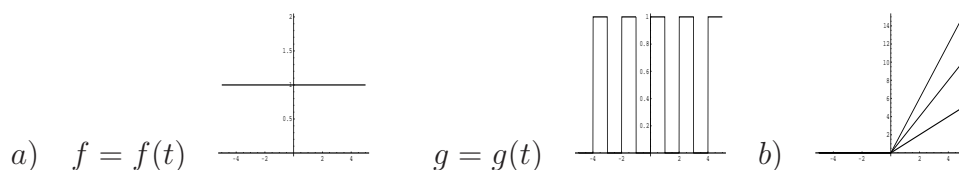
[21] a) -1 b) 6 c), e) 1 d) 2 f) 5.

[22] a), b), c), e), f), g) não d) sim [23] a), c), e) \mathbb{R} b), d) $\mathbb{R} - \{0\}$

f) $(-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$ [24] a), b) c), e) f) sim. [25] $f(0) = 1$. [26] $f(2) = \frac{\pi}{2}$

[27] a) $f(0) = \frac{1}{2}$ b) $f(0) = 0$ c) $f(0) = 1$ [28] g é contínua pois $g(x) = |x|$

[29] Por exemplo: $\frac{1}{x}$ e $\frac{x^2-1}{x}$ [31] Sim, considere a função $g(x) = f(x) - \frac{7}{3}$ [33]



[35] Tome $g(x) = f(x) - x$ e aplique o TVI a g . [36] Tome $h(x) = f(x) - g(x)$ e aplique o TVI a h .

11.4 Capítulo 4

[1] a) $y + 6x - 10 = 0$ b) $2x + y + 1 = 0$ c) $y - 5x + 4 = 0$ d) $2x - y - 6 = 0$ e) $y + x = 0$ f) $y - 4x = 0$ g) $4y - x - 3 = 0$ h) $2y + x - 5 = 0$

i) $\sqrt{3}y - 2x - 1 = 0$ j) $y + 1 = 0$ k) $y - 2x + 2 = 0$ l) $y - x - 1 = 0$ m) $y + \pi x = 0$

n) $3y - x - 3 = 0$ o) $4y + x - 3 = 0$ p) $2\sqrt{2}y + x - 3 = 0$ q) $2y - x + 1 = 0$

r) $2y + 4x - 5 = 0$

[2] $b = \pm 6$. [3] $y - 6x + 9 = 0$, $y + 6x + 9 = 0$. [4] $x = -4$, $y - 48x - 128 = 0$

[5] a) $y + 2x - 2 = 0$, $2y - x + 1 = 0$, b) $y - ex - 2e = 0$, $ey + x - e^2 + 1 = 0$, c) $y - 1 = 0$, $x = 0$, d) $y + 2x - \frac{\pi}{2} = 0$, $2y - x - \pi = 0$ e) $2y - x - 1 = 0$, $y + 2x - 3 = 0$

f) $y + \pi x - \pi \ln(\pi) = 0$, $\pi y - x + \ln(\pi) = 0$ g) $y - x + 1 - \ln(2) = 0$, $y + x - 1 - \ln(2) = 0$ h) $y - 8x + 8 = 0$, $8y + x - 1 = 0$

[6] Uma reta passando pela origem é da forma $y = kx$; use o fato que $xy' - y = 0$. $(-1, 16)$, $(\frac{2}{3}, \frac{154}{9})$, $(-2, 34)$.

[7] $y - 4x + 1 = 0$, $y - 4x + 4 = 0$. [8] $g'(0) = 4$. [9] $g'(x) = f(x^2) + 2x^2 f'(x^2)$. [10] a) $g'(0) = 11$ b) $F'(3) = 28$.

[11] a) $vwu' + uvw' + uvw'$ b) $\frac{1}{v^2}(vwu' - uvw' + uvw')$ c) $\frac{-uvw' + v(wu' - uw')}{v^2w^2}$

[12] a) $(1+x)(1+5x+10x^2+14x^3+11x^4+7x^5)$ b) $3x^2(5x^2+3)(x^5+x^3+1)^2$ c) $\frac{6x^3+9x^2+4x-10}{(3x+1)^2}$ d) $\frac{5x^8-8x^7-21x^6+38x^5-x^4-12x^3+9x^2-2x}{(x^2-3)^2}$

[13] a) $150(3x+5)^{49}$ b) $7(12x^2+3)(4x^3+3x-1)^6$ c) $-24(6-3x)^7$ d) $30x(3x^2+4)^4$ e) $\frac{6-6x-3x^2}{(4-6x+3x^2+x^3)^2}$

f) $(x^2+1)(x^3-2x)(2(x^2+1)(3x^2-2)+4x(x^3-2x))$ g) $18x^2(x^3-6)^2 \sec^2((x^3-6)^3) \operatorname{tg}((x^3-6)^3)$ h) $(\frac{x+3}{3x-6})(\frac{x-7}{x-2})$ i) $\frac{56(3x-2)^7}{(2x+1)^9}$ j) $-\frac{1+2x}{x^2(x+1)^2}$

k) $\frac{x^{25}(x+1)^2(x^4+1)^3}{(x^3+3x+7)^9}(182+257x+63x^2+2x^3+299x^4+417x^5+111x^6+18x^7+21x^8)$

[14] a) $5^{x-1} \ln(5)$ b) $2^{1-2x} 5^{-2x} \ln(10)(10^x-1)(10^x+1)(10^{2x}+1)$ c) $\frac{2}{x \ln(5)}$ d) $\frac{1+\ln(\frac{x}{4})}{\ln(4)}$ e) $\frac{1}{x+x^2}$ f) $\operatorname{tgh}(x)$ g) $\ln(10)$ h) $\frac{1}{x \ln(x)}$ i) $e^x \cos(e^x)$ j) $\frac{1}{x}(e^x \cos(\ln(x)) + x \operatorname{sen}(\ln(x)))$

[15] a) $\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+2}}$ b) $18\frac{(x+4)^5}{(x+7)^7}$ c) $x^{x-2}(x \ln(x) + x - 1)$ d) $\frac{1}{x} 3^{\ln(x)} \ln(3)$ e) $\frac{xe^x(x+2)(2x^2+2x-1)}{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}$

f) $(x^2)^x(2+\ln(x^2))$ g) $x^{x^2+1}(1+\ln(x^2))$ h) $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln(x))$

i) $\operatorname{sen}^{x-1}(x)(x \cos(x) + \ln(\operatorname{sen}(x)) \operatorname{sen}(x))$

j) $x e^{x-1} e^x(1+x \ln(x))$ k) $\cos^{\operatorname{sen}(x)-1}(x)(\cos^2(x) \ln(\cos(x)) - \operatorname{sen}^2(x))$

l) $\frac{(\ln(x))^{\ln(x)}}{x}(1+\ln(\ln(x)))$

[16] a) $-\frac{\sec^2(x) \operatorname{tg}(x)}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2(x)}}$ b) $\frac{\cos(x) \operatorname{sen}(x)}{\sqrt{2-\cos^2(x)}}$ c) $2 \sec(2x) \operatorname{tg}(2x)$ d) $\frac{\cos(\frac{x}{3})}{3}$

e) $\cot g(2x) - 2x \operatorname{cosec}^2(2x)$

f) $\frac{10}{3} \cos^4(\frac{x}{3}) \operatorname{sen}(\frac{x}{3})(\cos^5(\frac{x}{3}) - 1)$ g) $12x \sec^3(2x^2) \operatorname{tg}(2x^2)$

h) $-\frac{x \sec^2(\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}}$

i) $2(\cot g(x) - \operatorname{cosec}(2x))(2 \cot g(2x) \operatorname{cosec}(2x) - \operatorname{cosec}^2(x))$ j) $-\frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{sen}(2\sqrt{x})$ k) $\sec^2(x)$

l) $\frac{2t \cos(t^2)}{3 \operatorname{sen}^{\frac{2}{3}}(t^2)}$

m) $-\frac{2}{x^3} \cos(\frac{1}{x^2})$ n) $2x \sec(x^2) \sec^2(\sec(x^2)) \operatorname{tg}(x^2)$

o) $-\frac{4}{x^3} \sec^2(\frac{1}{x^2}) \operatorname{tg}(\frac{1}{x^2})$ p) $-2x \operatorname{cosec}^2(\sec(x^2)) \sec(x^2) \operatorname{tg}(x^2)$ q) $\frac{1}{x \ln(a) \ln(x)}$ r) $\frac{1}{x \ln(x)}$

$$\begin{aligned}
[18] \ a) & -\frac{1}{x^2+1} \ b) \ 2\frac{\arcsen(x)}{\sqrt{1-x^2}} \ c) \ \frac{2x}{x^4+1} \ d) -\frac{1}{x^2+1} \\
e) & \frac{1}{x^2+1} \ f) -\frac{5}{x^2}\cosh\left(\frac{5}{x}\right) \ g) \ 6(\cosh(3x)\sinh(3x) - \cos(3x)\sen(3x)) \\
h) & 16x(4x^2-3)\sech^2((4x^2-3)^2) \ i) -\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} \\
j) & \operatorname{argcosh}(x) \ k) \frac{4x}{4-x^4} \ l) \frac{2x}{1-x^4} \ m) \frac{2x \operatorname{argcosh}(x^2)}{\sqrt{x^4-1}} \\
n) & \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{cosech}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\cotgh\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\
[19] \ a) & -x^2y^{-2}, \ b) -\frac{3x^2+2xy}{x^2+2y}, \ c) -\sqrt{\frac{y}{x}} \ d) \frac{2y}{2x+3x^2y^2+6xy^3+3y^4} \ e) -1 \ f) -\frac{y}{x-\sec^2(y)} \\
g) & \frac{1}{e^y-1} \ h) \frac{1+2x^2+2xy^2}{y(3y^3+3xy-2)} \ i) -\frac{y}{x} \ j) \frac{x(2x^2-2y^2-1)}{y+2x^2y-2y^3} \\
k) & \frac{\cos(y)-y\cos(xy)}{x(\cos(xy)+\sen(y))} \ l) \frac{y}{x} \ m) -2-\frac{e^{2x+y}}{x} \ n) -\frac{y}{x} \ o) \frac{y}{x} \\
p) & -\frac{2y}{x} \ q) \frac{y-y^2}{2xy+3\sec^2(y)-x} \ r) -\frac{1+y^2}{1+x^2}\left(\frac{y+(1+x^2)\operatorname{arctg}(y)}{x+(1+y^2)\operatorname{arctg}(x)}\right) \\
[20] \ & (-2, 1), (2, -1), (0, -1) \ e) (0, 1) \\
[21] \ & \left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}\right). \ [22] \ a = 1 \text{ ou } a = 3 \ [23] \ yx_0 + xy_0 = 2a. \\
[24] \ & y\sqrt[3]{x_0} + x\sqrt[3]{y_0} = \sqrt[3]{x_0y_0}, \quad d(A, B) = 1 \\
[26] \ a) & -\frac{5}{36x^{\frac{11}{6}}} \ b) \frac{30}{x^7} \ c) 2(\cos(x^2) - 2x^2\sen(x^2)) \ d) 2\sec^2(x)(\sec^2(x) + 2tg^2(x)) \\
e) & 2\cos(2x) - \cos(x) \ f) -\frac{1}{(x+1)^3} \ g) \frac{6+4x}{x^4} \ h) \frac{3x}{(x^2-1)^{\frac{5}{2}}} \\
i) & \frac{e^x}{x^3}(2-2x+x^2) \ j) -\cos^2(x)\cos(\sen(x)) + \sen(x)\sen(\sen(x)) \\
k) & -\left(\frac{\ln(x)+1}{x^2lg^2(x)}\right) \\
l) & -\left(\frac{\sen(x)(1+2\cos^2(x)+\sen^2(x))}{(1+\sen^2(x))^2}\right) \\
m) & \frac{\sec(\sqrt{x})}{4x^{\frac{3}{2}}}(\sqrt{x}\sec^2(\sqrt{x}) - tg(\sqrt{x}) + \sqrt{x}tg^2(\sqrt{x})) \\
n) & \frac{2(1-3x^4)}{x^2(x^4-1)^{\frac{3}{2}}} \\
o) & \frac{6(2x^3+1)}{x^2(2+x^3)^2} \\
[27] \ a) & 0 \ b) 72 \ c) -\frac{9x}{(3-x^2)^{\frac{5}{2}}} \ d) \frac{24}{(x-1)^5} \ e) 8e^{2x+1} \ f) -\frac{6}{x^4} \\
g) & \frac{1}{16}\sen\left(\frac{x}{2}\right) \ h) -a^7\cos(ax) \ i) -\frac{2}{x^3} \ j) (x+7)e^x \\
k) & \text{Antes de derivar simplique a expressão. } \frac{48(5x^4+10x^2+1)}{(x^2-1)^5} \ l) -\left(\frac{24x(x^4+20x^2+11)}{(x^2-1)^5}\right) \\
m) & \cosh^6(x)\sinh(x)(225\cosh^2(x) + 504\sinh^2(x)) \ n) \frac{e^x(1-10e^{2x}+4e^{4x})}{(e^{2x}+1)^{\frac{7}{2}}} \\
o) & -8\sech^2(x)tg h(x)(2\sech^2(x) - tgh^2(x)) \\
p) & \sinh(x)\cosh(x)(\cosh(x)\cosh(\cosh(x)) + 3\sinh(\cosh(x))) \\
q) & -\frac{2}{x^2}(\sen(\ln(x)) + \cos(\ln(x))) \ r) \frac{2(2-\cos^2(x))}{\cos^3(x)} \\
[28] \ & 4e^{2x}(f'(e^{2x}) + e^{2x}f''(e^{2x})). \ [32] \ \alpha = \pm 2 \\
[34] \ a) & -\frac{3}{y^3}(x^2 + y^2y'^2) \ b) -\frac{1+6y'+y'^2}{3x+y} \ c) -\frac{2(x^2-1)y'^2+yy'(4x+3y')+y^2(1+6y'^2)}{4y^3+3y^2+2(x^2-1)y-1} \\
d) & \frac{6x(1-x)-y'^2}{y} \\
e) & -\frac{(-\sen(x)+2\cos(xy)y'-\sen(y)y'^2-\sen(xy)(y+xy')^2)}{\cos(y)+x\cos(xy)} \\
f) & \operatorname{cosec}(y)(\sen(x) - \cos(y)y'^2)
\end{aligned}$$

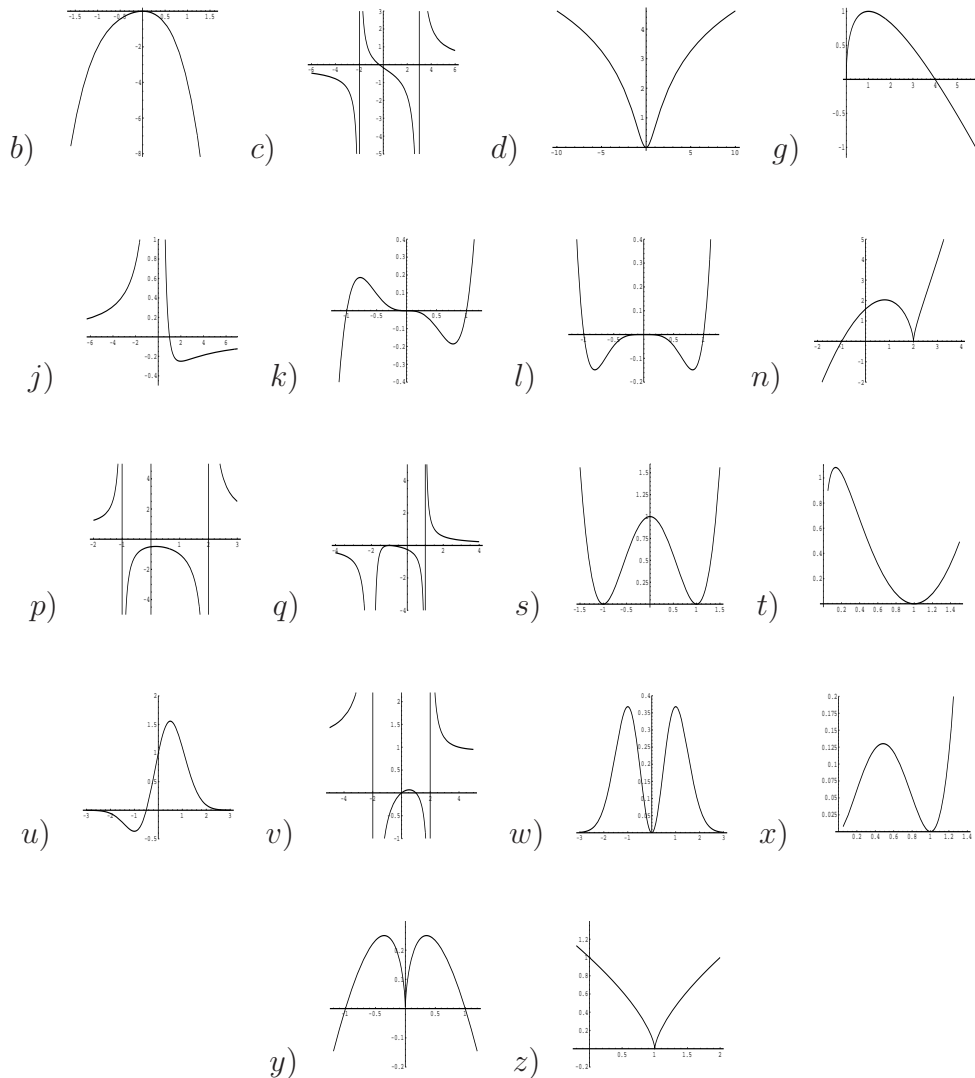
- [35] $\frac{5493}{256}$ [36] $-\frac{49}{32}$ [37] a) x , b) 1, c) x , d) $\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}x$, e) $1 - 2x$,
 f) $\frac{x}{3} + 1$,
 g) x , h) $\ln(5) + x$, i) $21x - 1$
 [38] a) 0.5013, b) 2.03, c) 0.874, d) 1.00772, e) 15.5269, f) 4.0055 [40] 1030 cm^3
 [41] i) $-8t^{-3} + 1$, $24t^{-4}$ ii) $t = 2$ [42] Aprox. $60^0/h$
 [43] 8000 l/m [44] gt , g [45] 29.4 m/seg [46] $a k \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2/h$ [47] $2\sqrt{2} \text{ cm/seg}$. [48] Aprox.
 16.75 cm/seg .
 [49] $(25\pi)^{-1} \text{ cm/seg}$ [51] 21.71, 5.56, 1.12 e 0.16 [52] -1 Km/h

11.5 Capítulo 5

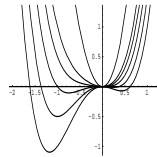
- [1] a) $\frac{7}{2}$ b) 2 c) $\frac{5 \pm 2\sqrt{19}}{3}$ d) $\frac{\pi}{4}$
 [2] a) $\frac{4 + \sqrt{76}}{6}$ b) 0 c) $\frac{7}{2}$ d) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$
 [3] a) Não existe, b) $\frac{3}{2}$, c) 1, d) -1, e) 0, f) Não existe, g) 0, -3, h) $\frac{\pi}{2} + k\pi$, i) $k\pi$, j) $\frac{3\pi}{4} + k\pi$,
 k) 0, l) 0, m) Não existe, n) Não existe. o) $x = 1$, $x = -\frac{1}{4}$, $x = \frac{3}{8}$ p) $x = 0$, $x = a$ e
 $x = \frac{ma}{m+n}$
 [4] a) Cres. em $(-1, \frac{3}{2}) \cup (2, +\infty)$, decres. em $(-\infty, -1) \cup (\frac{3}{2}, 2)$, b) Cres. em $(-\infty, -\frac{1}{2} \cup$
 $(\frac{1}{2}, +\infty)$, decres. em $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$,
 c) Cres. em $(0, +\infty)$, decres. em $(-\infty, 0)$, d) Cres. em $(0, +\infty)$, decres. em $(-\infty, 0)$, e)
 Cres. em $(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty)$, decres. em $(0, \frac{1}{\sqrt{e}})$,
 f) Cres. em $(-\infty, 0)$, decres. em $(0, +\infty]$, g) Cres. em \mathbb{R} , h) Decres. em \mathbb{R} , i) Cres. em
 $(-1, +\infty)$, decres. em $(-\infty, -1)$,
 j) Cres. em $(-\infty, -2) \cup (\frac{2}{3}, +\infty)$, decres. em $(-2, \frac{2}{3})$, k) Cres. em $(-\infty, -\sqrt{\frac{7}{3}}] \cup [\sqrt{\frac{7}{3}}, +\infty)$,
 decres. em $(-\sqrt{\frac{7}{3}}, \sqrt{\frac{7}{3}})$,
 l) Cres. em $(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$, decres. $(-\infty, -\frac{2\pi}{3}) \cup (\frac{2\pi}{3}, +\infty)$ m) Cres. em \mathbb{R} ,
 n) Decres. em \mathbb{R} o) Cres. $(-\infty, 1)$, decres. $(1, +\infty)$, p) Cres. $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ decres.
 $(0, 1) \cup (1, 2)$.
 [5] a) Mín. $\frac{3}{7}$, não existe máx. b) Máx 2, não existe mín. c) Mín. 1. máx. -7, d) Mín 0,
 não existe máx. e) Máx $\frac{2}{9}$, f) Não existem,
 g) Mín. $-\frac{3}{2}$ h) Mín. -2, máx 2, i) Não existem, j) Mín. $-\frac{4}{5}$, máx. -2, k) Mín. 0, máx $\frac{64}{5}$,
 l) Mín. 0. m) Mín. $\sqrt{2} - 1$, máx $-\sqrt{2} - 1$, n) Mín. 0, máx $\pm\sqrt{2}$, o) Mín. 0, máx -4 p)
 Máx 2, não existe mín.
 q) Mín. -1, não existe máx. r) Mín. ± 1 , não existe máx.
 [6] a) Inf. $\frac{5}{3}$, côncava para cima em $(-\infty, \frac{5}{3})$, côncava para baixo em $(\frac{5}{3}, +\infty)$.
 b) Inf. $-\frac{1}{3}$, 2, côncava para cima em $(-\infty, -\frac{1}{3})$, $(2, +\infty)$, côncava para baixo em $(-\frac{1}{3}, 2)$.
 c) Não existem; côncava para cima em $(-4, +\infty)$, côncava para baixo em $(-\infty, -4)$.
 d) Inf. $\frac{2}{3}$, côncava para cima em $(\frac{2}{3}, +\infty)$, côncava para baixo em $(-\infty, -\frac{2}{3})$. e) Inf.
 ± 1 , côncava para cima em $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, côncava para baixo em $(-\infty, -1) \cup$
 $(-1, +\infty)$.

- f) Inf. -6 , côncava para cima em $(-6, -3) \cup (3, +\infty)$, côncava para baixo em $(-\infty, -6)$.
g) Inf. $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, côncava para cima em $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$; côncava para baixo em $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.
h) Inf. -6 , côncava para cima em $(-6, +\infty)$, côncava para baixo em $(-\infty, -6)$. i) Não possui pontos de inf. côncava para cima em $(0, +\infty)$, côncava para baixo em $(-\infty, 0)$.
j) Inf. 0 e $\pm \sqrt{\frac{3}{2}}$, côncava para cima em $(-1, 0)$, côncava para baixo em $(0, 1)$. k) Inf. $k \in \mathbb{Z}$, côncava para cima em $(2k - 1, 2k)$, côncava para baixo em $(2k, 2k + 1)$. l) Inf. 0 e 2 . côncava para cima em $(0, 2)$; côncava para baixo em $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.
m) Inf. $k + \frac{1}{2}$ com $k \in \mathbb{Z}$, côncava para cima em $(2k - \frac{3}{2}, 2k - \frac{1}{2})$; côncava para baixo em $(2k - \frac{5}{2}, 2k - \frac{3}{2})$. n) Não possui pontos de inf. côncava para cima em todo \mathbb{R} .

[7]

[8] $k = -3$, [9] a) $x_0 = -\frac{b}{3a}$.

[11]



Exercícios de Otimização

- [1] 32 u.a., [2] Cubo de volume $\sqrt{\frac{A^3}{6^3}}$, [3] 4 u.a., [5] $V = \frac{2\pi h^3}{9\sqrt{3}}$ [6] $(1, 0)$, [7] $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi r^3$,
 [8] $r = 5\text{ m}$ e $h = 5\text{ m}$, [9] $\frac{2}{3}\sqrt{3}$, [10] $(\frac{1}{4}, 0)$, [11] Quadrado de lados \sqrt{a} ,
 [12] Comprimento de cada cateto $\frac{h}{\sqrt{2}}$, [13] $h = r = \frac{12}{\pi+4}\text{ m}$, [14] 1, [15] $\text{tg}(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
 [16] $r = h = 1$. [17] largura $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$, altura $\frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ [18] largura $\frac{4}{6-\sqrt{3}}$, altura $\frac{6-2\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}}$
 [19] 10 e -10, [20] $\frac{70}{4}$ e 7,
 [21] $\frac{2a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $\frac{2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$
 [22] a) $m = \frac{x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n}{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}$ b) $y = \frac{19x}{30}$.
 [23] $L = B$. [24] Aprox. aos 20 anos. [25] $x = \frac{\pi}{2}$ e $r = \frac{2a}{\pi}$
 [26] a) $\ln(3) - \ln(2)$, b) a droga é completamente eliminada. [27] 18.22 m
 [28]

L'Hôpital:

- 1) -1, 2) 0, 3) 0, 4) 0, 5) 0, 6) 1, 7) $+\infty$,
 8) 1, 9) 0, 10) 1, 11) 0, 12) 1,
 13) e^2 , 14) 1, 15) e^2 , 16) 0, 17) $+\infty$,
 18) $+\infty$, 19) e^2 , 20) $e^{-\frac{1}{3}}$, 21) $\frac{1}{2}$, 22) 0,
 23) 0, 24) -2, 25) $-\frac{2}{3}$, 26) 0,
 27) 0, 28) $\frac{n^2+n}{2}$.

11.6 Capítulo 6

- [2] a) $\frac{5}{8}(x^2 - 1)^{\frac{4}{5}} + c$ b) $\frac{3}{2}\ln(x^2 + 1) + c$ c) $\frac{2}{3}(x + 5)^{\frac{3}{2}} + c$ d) $-\frac{2}{a}\sqrt{b - ay} + c$; $a \neq 0$
 e) $\frac{1}{4}(2by^2 - ay^4) + c$
 f) $\frac{8}{3}\sqrt{x^3 + 8} + c$ g) $\frac{1}{5-3x^2} + c$ h) $-\frac{1}{2a(b+ay)^2} + c$; $a \neq 0$ i) $\frac{1}{6b}(a + bx^4)^{\frac{3}{2}} + c$; $b \neq 0$
 j) $\frac{\ln^2(x)}{2} + 2\ln(x) + c$ k) $-\frac{1}{6}\cos^3(2x) + c$ l) $\sec^2(\frac{x}{2}) + c$ m) $\frac{2}{a}\sqrt{b + \sin(ax)} + c$; $a \neq 0$
 n) $-\frac{1}{\ln(x)} + c$ o) $\frac{1}{2}\sqrt{1+x^4} + c$ p) $\frac{1}{3}e^{x^3} + c$ q) $\frac{1}{4}\arcsen^2(y) + c$ r) $-\frac{1}{4}\arctg(4e^{-x}) + c$
 s) $-\frac{1}{2(\cos(\theta)-5)^2} + c$ t) $-\frac{1}{2}(\frac{1}{x^2+6x}) + c$ u) $\ln(\ln(x)) + c$ v) $e^{\arcsen(x)} + c$
 w) $-\cos(\ln(x)) + c$ x) $2\sin(\sqrt{x+1}) + c$ y) $\frac{1}{2}(1+x^6)^{\frac{2}{3}} + c$ z) $\frac{\sin(3^x)}{\ln(3)} + c$
 [3] a) $2\sqrt{2}\text{arcsec}(\frac{x}{\sqrt{2}}) + c$ b) $x - \ln(e^x + 1) + c$ c) $\frac{2}{3}\sqrt{x+1}(x-2) + c$ d) $-\sqrt{1-x^2} + c$

- e) $2(1 + \sqrt{x}) - 2\ln(\sqrt{x} + 1) + c$ f) $\frac{2}{5}\sqrt{1+x^{\frac{1}{3}}}(8-4x^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}) + c$
 [4] a) $e^x(x-1) + c$ b) $2x\operatorname{sen}(x) - (x^2-2)\cos(x) + c$ c) $\frac{e^x}{1+x} + c$ d) $\frac{e^{-t}(\pi\operatorname{sen}(\pi t) - \cos(\pi t))}{\pi^2+1} + c$
 e) $\frac{1}{2}x(\operatorname{sen}(\ln(x)) - \cos(\ln(x))) + c$ f) $-\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + x \arccos(2x) + c$ g) $\frac{3x(\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\ln(3))}{1+(\ln(3))^2} + c$
 h) $\frac{(x^2+1)\operatorname{arctg}(x)}{2} - \frac{x}{2} + c$
 i) $\frac{1}{2}(\sec(x)\operatorname{tg}(x) + \ln(|\sec(x) + \operatorname{tg}(x)|)) + c$ j) $-xe^{-x} + c$ k) $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}(x-1) + c$
 l) $-\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}(x^2+2) + c$. Sugestão: faça $u = x^2$. m) $-x \cotg(x) + \ln(|\operatorname{sen}(x)|) + c$ n) $x \sec(x) - \ln(|\sec(x) + \operatorname{tg}(x)|) + c$
 o) $\cos(5x)(\frac{6x}{125} - \frac{x^3}{5}) + \operatorname{sen}(5x)(\frac{3x^2}{25} - \frac{6}{625}) + c$ p) $\operatorname{sen}(2x)(\frac{x^4}{2} - \frac{3x^2}{2} + \frac{3}{4}) + \cos(2x)(x^3 - \frac{3x}{2}) + c$
 q) $e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c$
 r) $-e^{-x}(x^5 + 5x^4 + 19x^3 + 57x^2 + 115x + 115) + c$ s) $\cosh(x)(x^2+2) - 2x \sinh(x) + c$ t) $\frac{1}{16}((1+8x^2)\operatorname{argsen}(2x) - 2x\sqrt{1+4x^2}) + c$
 u) $-e^{-x}(x^4+4x^3+12x^2+24x+24) + c$ v) $x - \arcsen(x)\sqrt{1-x^2} + c$ w) $x \operatorname{tg}(x) + \ln(\cos(x)) + c$
 x) $x(\ln^3(x) - 3\ln^2(x) + 6\ln(x) - 6) + c$ y) $\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{9}(3\ln(x) - 2) + c$
 z) $\frac{2}{15}(x+1)^{\frac{3}{2}}(3x-2) + c$
 [5] a) $\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+1} + \operatorname{argsen}(x)) + c$ b) $\frac{1}{4}(\operatorname{sen}(x^4)(x^8-2) + 2x^4\cos(x^4)) + c$. Sugestão: use $t = x^4$. c) $\frac{x}{2}(\cos(\ln(x)) + \operatorname{sen}(\ln(x))) + c$ d) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + c$
 e) $2(\operatorname{sen}(\sqrt{x}) - \sqrt{x}\cos(\sqrt{x})) + c$ f) $e^{x^2}(\frac{x^4}{2} - x^2 + 1) + c$.
 [6] a) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3(x) + c$ b) $\frac{\sec^7(x)}{840}(35\cos(4x) - 28\cos(2x) + 57) + c$ c) $\frac{x}{8} - \frac{\operatorname{sen}(4x)}{32} + c$
 d) $-2\sqrt{\cos(x)}(1 - \frac{2}{5}\cos^2(x) + \frac{1}{9}\cos^4(x)) + c$ e) $\cos(x) + \ln(|\operatorname{cosec}(x) - \cotg(x)|) + c$ f) $-\frac{1}{6}\cotg^3(2x) + c$ g) $-\frac{1}{5}\cotg^5(x) + c$
 h) $\frac{1}{8a}(3ax - 3\cos(ax)\operatorname{sen}(ax) - 2\operatorname{sen}^3(ax)\cos(ax)) + c$; $a \neq 0$ i) $-\frac{\cos^5(y)}{7}(\operatorname{sen}^2(y) + \frac{2}{5}) + c$ j) $\frac{\operatorname{tg}^5(x)}{5}$
 [7] a) $-\frac{\sqrt{16-x^2}}{x} - \arcsen(\frac{x}{4}) + c$ b) $\frac{\sqrt{x^2-9}}{18x^2} - \frac{1}{54}\operatorname{arctg}(\frac{3}{\sqrt{x^2-9}}) + c$ c) $-\frac{\sqrt{5-x^2}}{5x} + c$
 d) $\ln(|x + \sqrt{x^2-7}|) + c$ e) $\frac{1}{5}\ln(|\frac{x}{5+\sqrt{25-x^2}}|) + c$ f) $-\frac{3}{2}\arcsen(1-x) - \frac{1}{2}(x+3)\sqrt{2x-x^2} + c$
 g) $-\frac{(16-9x^2)^{\frac{5}{2}}}{80x^5} + c$ h) $\frac{x-2}{4\sqrt{4x-x^2}} + c$ i) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+2} + \ln(|x + \sqrt{x^2+2}|) + c$ j) $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}) + c$
 k) $\frac{\sqrt{2}}{4}\ln(|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}|) + c$ l) $\frac{\sqrt{x^2-4}}{4x} + c$ m) $\frac{7}{8}\frac{2x^2+9}{\sqrt{4x^2+9}} + c$
 n) $\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + x^2 + \frac{1}{2}\arcsen(x) + c$ o) $2\sqrt{e^x+1} + c$ p) $\sqrt{x^2-1} + \ln(|x + \sqrt{x^2-1}|) + c$
 q) $-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}$
 [8] a) $-\frac{\cos(x)}{25\sqrt{25-\cos^2(x)}} + c$ b) $-\frac{\ln(x)}{4\sqrt{(\ln(x))^2-4}} + c$ c) $\ln(|\frac{\operatorname{sen}(x)+\sqrt{\operatorname{sen}^2(x)+4}}{2}|) + c = \operatorname{arcsen}(\frac{\operatorname{sen}(x)}{2}) + c$
 [9] a) $\frac{1}{2}\arcsen(2x-2) + c$ b) $-\frac{1}{3}\sqrt{3x^2-x+1} + \frac{\sqrt{3}}{18}\ln(|\sqrt{3x^2-x+1} + \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{6}|) + c$ c) $\frac{2}{49}(-\frac{7(3x+8)}{x^2+3x+4} - 6\sqrt{7}\operatorname{arctg}(\frac{3+2x}{\sqrt{7}})) + c$
 d) $\operatorname{argsen}(\frac{2x+3}{\sqrt{11}}) + c$ e) $\ln(2x-1+2\sqrt{x^2-x-1}) + c$ f) $\frac{5}{4}\sqrt{4x^2+3x+1} + \frac{9}{16}\operatorname{argsinh}(\frac{8x+3}{\sqrt{7}}) + c$
 g) $-\arcsen(2-x)$ h) $2\sqrt{3+2x+x^2} + \operatorname{argsen}(\frac{x-1}{2}) + c$ i) $\sqrt{4-3x+x^2} + \frac{3}{2}\operatorname{argsen}(\frac{2x-3}{\sqrt{7}}) + c$
 j) $\sqrt{x^2+6x+34} - \operatorname{argsen}(\frac{x+3}{5}) + c$
 [10] a) $\frac{1}{24}\ln(\frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4}) + \frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg}(\frac{x-1}{\sqrt{3}}) + c$ b) $\ln(|\frac{x-1}{x+1}|) - 2\operatorname{arctg}(x) + c$ c) $\frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{1}{(x^2+2)^2} + c$

- d) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{x^2+1} + c$ e) $-\frac{1}{x} - \arctg(x) + c$ f) $\ln(\sqrt{x^2+1}) - \frac{1}{2}\arctg(x) - \frac{x}{2(x^2+1)} + c$
g) $\ln(|\frac{x^3-x^2+x}{(x+1)^2}|) - \frac{3}{x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctg(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) + c$ h) $-\frac{1}{2x^2} - \ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$ i) $-\frac{x+3}{2(x^2+4x+5)} - \frac{1}{2}\arctg(x+2) + c$
j) $x + \ln(|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}|) + c$ k) $\frac{1}{2}(\frac{3x-17}{5-4x+x^2} - 15\arctg(2-x)) + \ln(5-4x+x^2) + c$ l) $\ln(|\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}|) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctg(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}) + c$
m) $-\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} - \arctg(x) + c$ n) $\frac{3}{2}\ln|x^2-x+1| + \frac{5\sqrt{3}}{3}\arctg(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) + c$
o) $\ln|\frac{x-1}{x}| + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + c$
p) $\frac{1}{4}\ln(|\frac{x^2-1}{x^2+1}|) + c$ q) $\ln|x^{\frac{2}{9}}(x^2+9)^{\frac{43}{18}}| + \frac{1}{9x} - \frac{26}{27}\arctg(\frac{x}{3}) + c$
r) $\frac{1}{8}(8x - \frac{2(4+5x)}{x^2+2} - 5\sqrt{2}\arctg(\frac{x}{\sqrt{2}}) + \ln(\frac{x^4}{(x^2+2)^2})) + c$
s) $\ln|\frac{\sqrt{x}}{(x^2+2x+2)^{\frac{1}{4}}}| + \frac{x+2}{2(x^2+2x+2)} + c$ t) $\frac{1}{8}\ln|\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+5}| + c$
u) $\frac{2}{5}\ln(|x|) + \frac{21}{10}\ln(|x+5|) - \frac{3}{2}\ln(|x+1|) + c$ v) $\ln(|(x^2-1)\sqrt{x^2+1}|) + \arctg(x) + c$
[11] a) $\operatorname{sen}(x)(\ln(\operatorname{sen}(x))-1)+c$ b) $\frac{5^x}{\ln^2(5)}(x\ln(5)-1)+c$ c) $\frac{1}{3}(\cos(x^3)+x^3\operatorname{sen}(x^3))+c$
d) $\frac{\sec^3(x)}{3}+c$ e) $\frac{1}{2}(\operatorname{sen}(x)+\frac{\operatorname{sen}(7x)}{7})+c$ f) $-\frac{1}{3(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}+c$ g) $\operatorname{argsenh}(\frac{x}{2}+1)+c$
h) $\frac{1}{2}(e^t\sqrt{9-e^{2t}}+9\operatorname{arcsen}(\frac{e^t}{3}))+c$ i) $\frac{1}{3}\ln(x^3+3x^2+4)+c$ j) $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+4) - \frac{4\sqrt{3}}{3}\arctg(\frac{x+1}{\sqrt{3}}) + c$ k) $\frac{x^2}{2} + \ln(|\frac{x}{x^2+1}|) + c$
l) $\sqrt{5}\arctg(\frac{\sqrt{5}}{5}\cos(x)) - \cos(x) + c$ m) $\frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + \ln(|x+1|) + c$ n) $\frac{1}{16}(\ln(2x-1) - \ln(2x+7)) + c$
o) $\ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+3) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctg(\frac{\sqrt{3}}{3}x) + c$
p) $2\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 3\arctg(x) + c$ q) $\frac{3}{20}(2x^2-3)(x^2+1)^{\frac{2}{3}} + c$
r) $2\sqrt{x} - 2\arctg(\sqrt{x}) + c$
s) $\frac{1}{12\sqrt{5}}\ln(\frac{18+7x^2+3x\sqrt{5}\sqrt{x^2+4}}{-18-7x^2+3x\sqrt{5}\sqrt{x^2+4}}) + c$ t) $\ln(x-1) - \ln(2x-1+\sqrt{x^2+2x-2}) + c$
u) $\arctg(\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)+\operatorname{sen}(x)}) + c$ v) $\ln(|x+\operatorname{sen}(x)|) + c$
w) $\ln(|2+\operatorname{sen}(2x)|) + c$ x) $-\sqrt{2}\arctg(\frac{\sqrt{x-1}}{2}) + c$
[12] a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}(\ln(\sqrt{2}\operatorname{tg}(x/2)+\sqrt{2}+2) - \ln(-\sqrt{2}\operatorname{tg}(x/2)-\sqrt{2}+2)) + c$
c) $\frac{\sqrt{2}}{2}\arctg(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}(x/2)) + c$
[14] $y = -\frac{\cos(2x)}{2} + \operatorname{sen}(x) + 2x + \frac{5}{4}$, [15] $\frac{s^2}{2a} + \frac{cs}{a} + \frac{b\ln(|s|)}{a} = t + k$.

11.7 Capítulo 7

[1] Método de substituição:

- a) $\frac{26}{3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\ln(e^\pi+1)$ d) $\sqrt{2}-1$ e) $\frac{1}{4}$
f) $\frac{1}{2}\ln(\frac{e^2+1}{2})$ g) $\frac{2+\ln(2)}{2\sqrt{2}}-1$ h) $1-e^{-1}$ i) $2e^2-2e$
j) $\frac{1}{101}$ k) $\frac{\ln(3)}{2}$ l) $4-2\sqrt{\ln(2)}$ m) $\frac{4}{3}$
n) $\cos(1)-\cos(e)$ o) 0 p) $\frac{1}{3}(e-1)$ q) $\frac{3}{4}(5^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{2}{3}})$ r) $\frac{\pi^2}{8}$
s) $2(1-\ln(2))$ t) $2(\cos(2)-\cos(3))$ u) $-\frac{a^3}{3}$ v) $\ln(\frac{4}{3})$ w) $1-\cos(\ln(2))$

x) $\frac{1}{3}\ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$

[2] Método de integração por partes:

a) $1 - 2e^{-1}$ b) $\frac{1}{13}(3 - 2e^\pi)$ c) $-\ln(3)(\frac{3\pi+1}{1+\ln^2(3)})$ d) $24 - 65e^{-1}$ e) $\ln(128) - \frac{3}{2}$

f) $\frac{1}{4}(\pi - 2\ln(2))$ g) $\frac{2}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{8}$ h) $\frac{1}{4}(\pi + \ln(4))$ i) $\frac{e}{2} - 1$

j) $\frac{2\pi}{3} + \ln(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1})$ k) $4\ln(2) - \frac{3}{2}$ l) $-\frac{1}{2}(e^\pi + 1)$ m) -1

n) $2e^2$ o) $6 - 2e$ p) $\pi - 2$ q) $\frac{1}{4}(\pi - \ln(4))$ r) $\frac{\pi}{2} - 1$

s) $\sqrt{3} - \frac{1}{2}\ln(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1})$ t) 0 u) $\frac{4}{9}(1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2}\ln(8))$ v) $\frac{\pi}{32}$

w) $\frac{2}{3}$ x) $-\frac{4}{15}$

[3] a) $\frac{2+\ln(2)}{2\sqrt{2}} - 1$ b) $\frac{5\ln(5)-4}{\ln^2(5)}$ c) $-\frac{2}{3}$ d) $\frac{7}{3}$

e) 0 f) $\frac{1}{24} - \frac{\sqrt{5}}{75}$ g) $\operatorname{argsinh}(2) - \operatorname{argsinh}(1)$ h) $\frac{1}{4}(9\pi - 4\sqrt{2} - 18\arcsin(\frac{1}{3}))$ i) $\ln(\frac{5}{2})$

j) $\frac{5}{4}\ln(\frac{3}{2}) - \frac{5}{8}$ k) $\frac{3}{2} + 2\ln(2) - \ln(5)$ l) $1 - \sqrt{5}\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{5}}{5})$ m) $-\frac{5}{8} + \ln(2)$

n) $\frac{1}{16}\ln(\frac{27}{11})$ o) $\frac{1}{2}\ln(3) + \frac{\sqrt{3}}{9}\pi$ p) $\frac{5}{2}\ln(2) - 3\operatorname{arctg}(3) + 3\operatorname{arctg}(2)$ q) $\frac{3}{20}(3 - \sqrt[3]{4})$

r) $2 - \frac{\pi}{2}$ s) $\frac{300}{7}$ t) 2 u) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ v) $\frac{2}{5} - 7\ln(5) - 9\ln(2) + 16\ln(3)$

w) $\frac{a^2}{4}(\pi - 2)$ x) $\frac{\pi}{4\sqrt{3}}(\pi - \arccos(7))$

[4] a) $\sqrt[3]{x^2+1}$ b) $x \operatorname{sen}(x)$ c) $x \ln(x)$ d) $\sqrt{x^4+1}$

e) $e^x \sqrt{1+e^{2x}} - \sqrt{1-x^2}$ f) $2x \operatorname{sen}(x^4)$ g) $2^x + x^2 - 3$ h) $\frac{3x^5}{\sqrt{1+x^9}}$

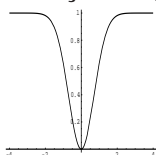
[5] $a = 0, f(x) = 1$ [6] Pontos críticos: $x = n\pi$. Se n par $n\pi$ é ponto de mínimo; se n ímpar $n\pi$ é ponto de máximo.

[7] a) $\frac{1}{2}$, b) 2 c) $2\ln(2) - 1$ d) $\frac{\ln(2)}{2}$ e) $\frac{4}{\pi}$ f) $e - 2$

[8] Use a) $x^2 + 1 > x^2$ [10] a) 0 , b) 0 , pois ambos os integrandos são funções ímpares.

[12] $\pi - 2$

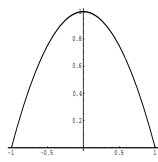
[14] $(2x+1)2^{-x^2(x+1)^2} - x2^{-(x^2+1)^2+1}$ [15] $g'(x) = \frac{1}{x}, g'(\frac{1}{2}) = 2$ [16] Use o método de substituição. 2 [18]



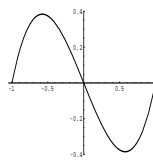
11.8 Capítulo 8

11.8.1 Áreas

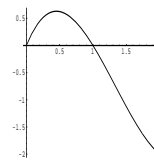
[1] $\frac{4}{3}$



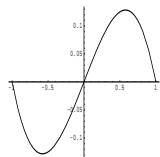
[2] $\frac{1}{2}$



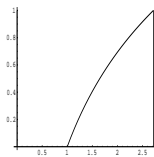
[3] $\frac{3}{2}$



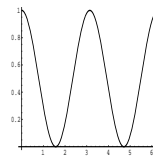
[4] $\frac{1}{6}$



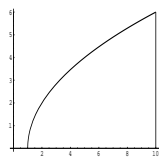
[5] 1



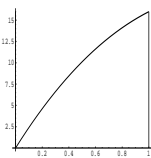
[6] π



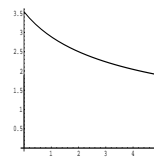
[7] 36



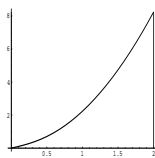
[8] $\frac{113}{12}$



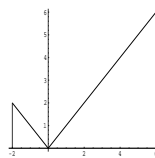
[9] $10(\sqrt{7} - \sqrt{2})$



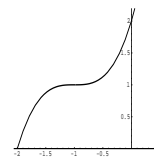
[10] $\frac{1}{12}(17\sqrt{17} - 1)$



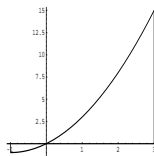
[11] 20



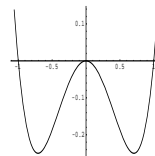
[12] 2



[13] $\frac{56}{3}$



[14] $\frac{4}{15}$



Calcule a área das regiões limitadas pelas curvas dadas:

[1] $\frac{9}{2}$ [2] $\frac{32}{3}$ [3] $\frac{9}{2}$ [4] $\frac{145}{6}$ [5] $\frac{1}{2}$

[6] $\frac{32}{3}$ [7] $\frac{125}{6}$ [8] 72 [9] 1

[10] $\frac{4}{15}$ [11] $\frac{64}{3}$ [12] $\frac{1}{6}$ [13] 18

[14] $\frac{1}{3}$ [15] $2\sqrt{2} - 2$ [16] $2\sqrt{3} - 2 - \frac{\pi}{6}$

[17] $\frac{1}{6}$ [18] $\frac{4}{3} + 1$ [19] $\frac{9}{2}$ [20] 34 [21] $2(e^3 - e^{-3})$

[22] $e - e^{-1}$ [23] $e^4 - 5$ [24] $\frac{128}{15}$

[25] 2 [26] $\frac{1}{2}(e + e^{-1} - 2)$ [27] $\frac{15}{4}$ [28] 6 [29] 9 [30] $\frac{\pi}{2} - 1$

[31] 2 [32] $\pi - 2 \ln(2)$ [33] $\pi - 2$ [34] $\frac{16}{3}$ [35] $\frac{1}{15}$

[36] 2 [37] $e - \frac{3}{2}$ [38] $\frac{1}{3}(4\sqrt{2} - 5) + e^{-1}$ [39] $\frac{\ln(10)-1}{\ln(10)}$ [40] $\frac{148}{3}$ [41] $\frac{4}{3}$

[42] $\frac{27}{4}$ [43] $\frac{128}{15}$ [44] $\frac{8}{3}$ [45] $c = 2, 1 - 3e^{-2}$

[46] $c = \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{e}})$ [47] $c = e, \frac{1}{2}$ [48] $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ [49] 12 [50] $2(\pi - \frac{2}{3})$

11.8.2 Volumes

[1] $\frac{26}{3}\pi$ [2] $\frac{206}{15}\pi$ [3] $\frac{2}{35}\pi$ [4] $\frac{\pi}{2}$ [5] $\frac{512\pi}{3}$ [6] $\frac{10\pi}{9}$ [7] $\frac{55\pi}{6}$

[8] $\frac{5\pi}{28}$ [9] $\frac{\pi^2}{2}$ [10] $\frac{\pi(e^2-1)}{4}$ [11] $\frac{32\pi}{3}$

[12] $\frac{\pi}{2}(e^4 - e^{-2})$ [13] 8π [14] $\frac{15\pi^2}{2}$ [15] $\frac{256}{5}\pi$
 [16] $\frac{3\pi}{2}$ [17] 64π [18] 8π [19] $\frac{64\pi}{15}$
 [20] $\frac{2\sqrt{5}\pi}{3}$ [21] $\frac{16\sqrt{5}\pi}{5}$ [22] $\frac{2\pi}{3}$ [23] $\frac{\pi}{6}$
 [24] $\frac{\pi}{2}(e^4 - 5e^2 + 4e + 2)$ [25] $\frac{221\pi}{45}$ [26] $\frac{\pi}{6}$ [27] $\frac{8\pi}{3}$
 [28] $\frac{16}{15}\pi$ [29] $\frac{64\sqrt{2}\pi}{15}$ [30] $\frac{648\pi}{5}$

11.8.3 Comprimento de Arco

[1] $4\sqrt{26}$ [2] $\frac{53}{6}$ [3] $\frac{53}{6}$ [4] $1 + \frac{1}{2}\ln(\frac{3}{2})$ [5] $\frac{14}{3}$ [6] 12
 [7] $\frac{4}{3}$ [8] $\frac{38}{3}$ [9] $\frac{14}{3}$ [10] $\frac{2\sqrt{2}}{3}(5\sqrt{5} - 1)$
 [11] $\frac{13\sqrt{13}-8}{27}$ [12] $\frac{13\sqrt{13}-8}{27}$ [13] $\frac{92}{9}$ [14] $\frac{31}{6}$
 [15] $\ln(\sqrt{3})$ [16] $\ln(2 + \sqrt{3})$ [17] $\frac{9}{8}$ [18] $\ln(\sqrt{2} + 1)$
 [19] $\sqrt{6} - \sqrt{2} + \ln(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{3+2\sqrt{2}}})$ [20] $\ln(e + \sqrt{e^2 - 1})$

11.8.4 Logarítmos

[2] Sugestão: Escreva $\frac{1}{u+1} = 1 - u + u^2 - \frac{u^3}{u+1}$. [5] $\ln(1.2) \simeq 0.1826$ e $E(1.2) \leq 0.0004$. [7] $x = 1$.

11.8.5 Trabalho

[1] a) $\frac{197}{12}$ b) 24 c) $\frac{3}{20}$ d) $\frac{311}{30}$ e) $\pi - 2$ f) 2 g) $\frac{1}{2}(1 - e^{-50\pi})$
 [2] 4 J. [3] $\frac{50}{3}$ J [4] 1 J [5] 72 J [6] 2 J
 [8] Da segunda lei de Coulomb $f(x) = \frac{e_1 e_2}{x^2}$ então $1.8 \times 10^4 \text{ erg}$ [10] a) $(\frac{1}{2}, \frac{2}{5})$ b) $(\frac{11}{13}, \frac{49}{13})$ c) $(0, \frac{\pi}{8})$.

11.9 Capítulo 9

[1] a) 2 b) $\frac{\pi}{12}$ c) $\ln(2)$ d) $\frac{1}{2}$ e) 1
 f) $+\infty$, diverge. g) ∞ , diverge. h) $-\frac{1}{2\ln(5)}$ i) $-\infty$, diverge.
 j) $+\infty$, diverge. k) π l) $\frac{\pi}{1+\pi^2}$
 m) $\frac{1}{2}$ n) diverge o) $\frac{\pi}{2}$ p) $\frac{\ln(2)}{2}$ q) $\frac{1}{2}$ r) $\frac{1}{4}$
 s) $+\infty$, diverge. t) $\frac{1}{8}$ u) o limite não existe. v) $\frac{\pi}{2}$
 w) $+\infty$, diverge. x) $\frac{1}{\ln(2)}$
 [2] a) $\frac{\pi}{2}$ b) $1 - \frac{1}{2e^2}$ c) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$
 [3] a) 4 b) $3\text{sen}(1)$ c) $\frac{\pi}{2}$ d) $2 - \frac{2}{e^2}$
 e) $\frac{7}{5}(\ln(2))^{\frac{5}{7}}$ f) diverge. g) diverge. h) π i) $\frac{5}{3}$
 j) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ k) $\frac{\pi}{2}$ l) diverge. m) diverge. n) π
 o) $\frac{51}{7}$ p) $-\frac{\pi}{3}$ q) diverge. r) $2\sqrt{\ln(2)}$

s) $\pi + 2$ t) diverge. u) diverge. v) diverge.

[4] a) $s > 0$ b) Para todo $s > 0$ c) $s > 1$ d) $s > 0$ e) $s > 1$ f) $s > 1$

g) Sugestão: Faça $\frac{1-\cos(x)}{x^s} = \frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2 x^{s-2}}$. Utilize limites fundamentais e o teorema de comparação de integrais impróprias. $s < 3$.

h) Sugestão: Faça $\int_0^\pi \frac{dx}{(\sin(x))^5} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\sin(x))^5} + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{dx}{(\sin(x))^5}$

e na segunda integral faça $x = \pi - t$. Utilize limites fundamentais para aplicar o teorema de comparação de integrais impróprias. $s < 1$

[6] $a = \frac{1}{18}$ [7] Utilize que a função $f(t) = e^{k|t|}$ é par. $k = -2$

[9] $P(x > a) = \int_a^{+\infty} f(x) dx$, $P(x < a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$ [10] a) 69% b) 30%

Bibliografia

- [TA] T. Apostol: *Calculus*, Blaisdell Pub.
- [RC] R. Courant: *Differential and Integral Calculus*, Interscience.
- [EL] E. Lima: *Curso de Análise, Vol. I*, Ed. Universitaria.
- [M-W] J. Marsden- A. Weinstein: *Calculus, Vol. I*, Springer-Verlag.
- [JS] J. Stewart: *Calculus, concepts and context*, Brooks/Cole Publishing Company, Itp.

Índice

- Álgebra de funções, 49
 - adição, 49
 - multiplicação, 49
- Logaritmo natural
 - como área, 392
- Aceleração, velocidade e posição, 351
- Aplicações da integral indefinida, 315
- Aproximação
 - de ordem superior, 208
 - linear, 205
- Assíntotas, 137
 - função logística, 138
 - função racionais, 139
- Cálculo de áreas, 353, 360
- Composta de funções, 52
- Comprimento de arco, 388
- Concavidade, 247
 - para baixo, 247
 - para cima, 247
- Construção de primitivas, 334
- Continuidade, 141, 148
- Crescimento exponencial, 77
- Curvas ortogonais, 200
- Derivação implícita, 192
- Derivada, 163
 - função exponencial, 180
 - função logarítmica, 182
 - classe C^k , 204
 - de função elementares, 180
 - funções deriváveis, 168
 - hiperbólicas, 190
 - interpretação geométrica, 169
 - regra da cadeia, 177
 - regras de derivação, 174
 - reta tangente, 163
 - taxa de variação, 213
 - trigonométricas, 186
 - trigonométricas inversas, 189
- Derivadas de ordem superior, 202
- Desintegração radioativa, 84
- Esboço de gráficos, 252
- Função
 - integrável, 333
- Função composta
 - derivada, 177
- Função Contínua, 141
 - propriedades, 144
- Função Descontínua, 142
- Função Exponencial
 - aplicações, 77
 - crescimento, 77
 - em Economia, 77
- Função exponencial
 - derivada, 180
- Função gama, 408
- Função implícita
 - derivada, 194
- Função Logarítmica, 80
- Função logarítmica
 - derivada, 182
- Funções, 11
 - composta, 52
 - constante, 31
 - crescentes, 236
 - decrescentes, 236
 - definição, 11
 - domínio, 17

- gráfico, 19
- gráficos, 45
- identicas, 17, 18
- Imagem, 17
- linear, 32
- pares e ímpares, 42
- polinomiais, 35
- polinomiais de grau n , 40
- por partes, 63
- racionais, 51
- Funções Deriváveis, 168
- Funções Elementares, 71
 - arcocosecante, 99
 - arcocoseno, 97
 - arcocotangente, 99
 - arcoseno, 95
 - arcossecante, 99
 - arcotangente, 98
 - cotangente e cosecante, 90
 - exponencial, 71
 - hiperbólicas, 101
 - inversas, 95
 - logística, 79
 - logarítmica, 80
 - seno e coseno, 88
 - tangente e secante, 89
 - trigonométricas, 88
- Funções elementares
 - derivada, 180
- Funções hiperbólicas
 - derivada, 190
- Funções monótonas, 236
- Funções racionais
 - caso 1, 305
 - caso 2, 309
 - caso 3, 311
 - caso 4, 313
- Funções Trigonométricas, 88
- Funções trigonométricas
 - derivada, 186
- Gráfico
 - de funções, 19
- Gráficos
 - intersecção, 45
- Integração definida, 325
 - definição, 332
 - introdução, 325
 - logaritmo, 392
 - partição, 325
 - propriedades, 333
 - soma de Riemann, 327
- Integração indefinida, 287
 - primitiva, 287
 - propriedades, 289
- Integrais impróprias, 403
- Integral definida
 - área, 353
 - métodos de integração, 338
 - propriedades, 333
- Integral indefinida
 - métodos de integração, 293
- Integral indefinida
 - famílias de curvas, 315
- integral indefinida
 - aplicações, 317
- Interseção de gráficos, 45
 - retas, 46
- Inversa
 - de uma função, 56
 - determinação da, 58
- Integrais impróprias, 415
- Juros Compostos, 77
- Lei
 - de Boyle, 13
 - de Poiseuille, 13
 - resfriamento de Newton, 240
- Limites, 109
 - de função racionais, 127
 - definição, 111
 - fundamentais, 133
 - infinitos, 129
 - laterais, 118
 - no infinito, 125

- símbolos de indeterminação, 132
- unicidade, 112
- Limites e Limites Laterais, 122
- Limites Fundamentais, 133
 - aplicação, 136
 - primeiro, 133
 - segundo, 135
 - terceiro, 135
- Limites infinitos, 129
- Limites Laterais, 118
 - à direita, 118
 - à esquerda, 119
- Limites no infinito, 125
- Logaritmo natural
 - integral definida, 392
- Máximos e mínimos
 - determinação, 241
- Métodos de integração, 293
 - ângulo médio, 315
 - funções racionais, 304
 - por partes, 297
 - substituição, 293, 295
 - substituição trigonométrica, 300
 - trigonométrica, 296
- Ponto
 - crítico, 230
 - de inflexão, 250
- Ponto de mínimo, 231
 - absoluto, 231
 - local, 227
- Ponto de máximo, 231
 - absoluto, 231
 - local, 227
- Ponto extremo, 228
- Probabilidades, 410
 - distribuição exponencial, 413
 - distribuição uniforme, 412
- Problemas de otimização, 259
- Respostas dos Exercícios, 433
- Respostas dos exercícios
 - capítulo 1, 433
 - capítulo 2, 435
 - capítulo 3, 436
 - capítulo 4, 438
 - capítulo 5, 440
 - capítulo 6, 442
 - capítulo 7, 444
 - capítulo 8, 445
 - capítulo 9, 447
- Reta normal, 169
- Reta tangente, 163
 - definição, 164
- Sólidos de revolução, 373
 - volume, 375, 382, 385
- Substituição trigonométrica
 - caso 1, 300
 - caso 2, 300
 - caso 3, 301
- Taxa de variação
 - derivada, 213
- Teorema
 - da função inversa, 179
 - de Rolle, 233
 - de Weierstrass, 233
 - do valor médio, 234
 - valor intermediário, 148
- Teorema de L'Hôpital, 271, 273
 - aplicação 1, 273
 - aplicação 2, 274
 - aplicação 3, 275
 - aplicação 4, 276
 - aplicação 5, 277
- Teorema Fundamental do Cálculo, 334
- Trabalho, 393
- Trigonométricas inversas
 - derivada, 189
- Valor mínimo, 227
- Valor máximo, 227
- Variável dependente, 11
- Variável independente, 11
- Variação de Funções, 227
- Velocidade e aceleração, 210