

Triangular form

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y + 2z &= 2 \\ 2x + y + az &= b \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 1 & -1 & 2 & 2 & & & & \\ 2 & 1 & a & b & & & & & & & & \end{array}$$

\rightarrow $\begin{array}{cccc|cccc|cccc} & & & 0 & -2 & 1 & 1 & & 2 & 1 & a & b \\ & & & 0 & & & & & 0 & -1 & a-2 & b-2 \end{array}$

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & & & \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & -1 & a-2 & b-2 & & & & \\ 0 & -1 & a-2 & b-2 & 0 & 0 & a-\frac{5}{2} & b-\frac{5}{2} & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\ 0 & -2 & 1 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & a-\frac{5}{2} & b-\frac{5}{2} & & & & \end{array}$$

Reduced triangular form

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & & & \\ 0 & 0 & a-\frac{5}{2} & b-\frac{5}{2} & 0 & 0 & 1 & \frac{2b-5}{2a-5} & & & & \end{array}$$

$a \neq \frac{5}{2}$

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2b-5}{2a-5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2b-5}{2a-5} & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \frac{2b-2a}{2a-5} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \frac{2a-2b}{2a-5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{b-a}{2a-5} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \frac{2b-5}{2a-5} & & & & \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2b-5}{2a-5} & & & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 3 \frac{a-b}{2a-5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{b-a}{2a-5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2b-5}{2a-5} \end{array}$$

$$a \neq 5/2$$

ONE SOLUTION

$$\frac{1}{2a-5} \left[3(a-b), b-a, 2b-5 \right]$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a - \frac{5}{2} & b - \frac{5}{2} \end{array}$$

$$a = \frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b - \frac{5}{2} \end{array}$$

$$a = \frac{5}{2} \quad b \neq \frac{5}{2} \quad \text{NO SOLUTION}$$

$$a = b = 5/2$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} x + \frac{3}{2}z &= \frac{3}{2} \\ y - \frac{1}{2}z &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{2}(1-z) \\ y &= \frac{1}{2}(z-1) \\ z & \text{ FREE VARIABLE} \end{aligned}$$

$$a = b = \frac{5}{2} \quad \infty \text{ SOLUTIONS} \quad \left[\frac{3}{2}(1-z), \frac{1}{2}(z-1), z \right]$$

$$\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right) + z \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right)$$