

1- a) Quantas maneiras diferentes podemos selecionar 5 letras de um conjunto de: 5A, 6B, 4C, 3D. Sabendo que A e B devem comparecer pelo menos uma vez ?

b) Quantos anagramas podemos formar ?

2- a) Encontre a função geradora do problema $X_1 + 2X_2 + X_3$ com as condições: $1 \leq X_1 \leq 4$, $X_2 \geq 2$ e $X_3 \geq 1$.

b) Calcule o número de soluções que geram soma 16.

3) Qual é a probabilidade de fazer 13, 14 ou 15 lançando 4 dados.

4) Considerando os 3 blocos de cores diferentes:



Sabendo que temos N blocos de cada cor, quantos blocos diferentes de N podemos formar ?

1) a) Conjuntos: 5A, 6B, 4C, 3D

Selecionar 5 letras:

$$\overbrace{(X^1 + X^2 + X^3 + X^4 + X^5)}^A \cdot \overbrace{(X^1 + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + X^6)}^B \cdot \overbrace{(X^0 + X^1 + X^2 + X^3 + X^4)}^C \cdot \overbrace{(\quad)}^D$$

↳ Começando de X^1 pois é obrigatório ter pelo menos um A e um B

$(X^0 + X^1 + X^2 + X^3)$
D

As equações de cada letra podem ser reescritas como:

$$\overbrace{\left[X \left(\frac{1-X^5}{1-X} \right) \right]}^A \cdot \overbrace{\left[X \left(\frac{1-X^6}{1-X} \right) \right]}^B \cdot \overbrace{\left[\frac{1-X^5}{1-X} \right]}^C \cdot \overbrace{\left[\frac{1-X^4}{1-X} \right]}^D$$

colocando X em evidência

$$\Rightarrow \frac{X^2 (1-X^5)^2 (1-X^4)}{(1-X)^4}$$

Como queremos 5 letras = X^5

devemos ignorar índices maiores que 5!

$$\Rightarrow \left[X^2 (1-2X^5) (1-X^4) \right] \cdot \frac{1}{(1-X)^4}$$

$$\Rightarrow \left[X^2 (1-X^4 - 2X^5) \right] \cdot \frac{1}{(1-X)^4}$$

Como tem X^2 em evidência o índice é maior que 5 logo ignoramos!

$$\Rightarrow \frac{X^2}{(1-X)^4}$$

$$\Rightarrow X^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{3+n}{n} \cdot X^n$$

$$n=3 \rightarrow \binom{6}{3} = \boxed{20}$$

1] b) Anagramas

$$A \rightarrow \left(\frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \right) \rightarrow x \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} \right) \leftarrow$$

$$B \rightarrow \left(\frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} \right) \rightarrow x \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + \frac{x^5}{6!} \right)$$

$$C \rightarrow \left(\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \right) \rightarrow \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \right)$$

$$D \rightarrow \left(\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \right) \rightarrow \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \right)$$

Como queremos 5 letras (x^5) devemos ignorar os índices maiores que 5

Assim temos a equação:

$$x^2 \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} \right)^2 \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \right)^2$$

$$x^2 \left[1 + x + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{6} \right) x^2 + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} \right) x^3 \right] \cdot \left[1 + 2x + 2x^2 + \left(1 + \frac{1}{3} \right) x^3 \right]$$

$$x^2 \left(1 + x + \frac{7}{12} x^2 + \frac{1}{4} x^3 \right) \left(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3} x^3 \right)$$

$$\binom{4}{3} + 2 + \binom{7}{\frac{12}{6}} + \binom{1}{4} = \binom{15}{6} + \binom{9}{4} = \boxed{\frac{19}{4}}$$

$$\left(\frac{19}{4} \right) \cdot 5! = \left(\frac{19}{4} \right) 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 19 \cdot 30 = \boxed{570}$$

2] a) Equação $X_1 + 2X_2 + X_3$ sujeito a:

- (I) $1 \leq X_1 \leq 4 \rightarrow (X^1 + X^2 + X^3 + X^4)$ \leadsto índices de X igual aos valores possíveis
 (II) $X_2 \geq 2 \rightarrow (X^4 + X^6 + X^8 + \dots)$ \leadsto começa em 4 pois $X_2 \geq 2$ e pois X_2 é multiplicado por 2 na eq logo todos seus índices são maiores que 2 e múltiplos de 2.
 (III) $X_3 \geq 1 \rightarrow (X^1 + X^2 + X^3 + \dots)$
- A reticências "..." indicam soma infinito.

Reescrevendo as equações com X em evidência

$$\underbrace{X(1+X+X^2+X^3)}_{\text{(I)}} \cdot \underbrace{X^4(1+X^2+X^4+X^6+\dots)}_{\text{(II)}} \cdot \underbrace{X(1+X+X^2+X^3+\dots)}_{\text{(III)}}$$

$$\Rightarrow X^6 \cdot \frac{1+X^2}{1-X} \cdot \frac{1}{1-X^2} \cdot \frac{1}{1-X} = X^6 \cdot \frac{1+X^2}{(1-X)^2}$$

$$\Rightarrow X^6 (1+X^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1+n}{n} X^n \Rightarrow \binom{11}{10} + \binom{9}{8} = 20$$

b) Para soma 16

3] Equação dado $(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)$ → índices são resultados possíveis de sair no dado.

Equação 4 dados $(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^4$

Colocando X em evidência:

$$\Rightarrow x^4 (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^4$$

$$\Rightarrow x^4 \cdot \left(\frac{1 - x^6}{1 - x} \right)^4$$

$$\Rightarrow x^4 \cdot \left[\sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} (-1)^k \cdot x^{6k} \right] \cdot \left[\sum_{l=0}^{\infty} \binom{3+l}{2} \cdot x^l \right]$$

$$P(13) = (13-4) = \boxed{9} \Rightarrow \frac{k \mid 2}{0 \mid 9} \Big|_{1 \mid 3^2}^{-6} \Rightarrow \binom{4}{0} \binom{12}{9} - \binom{4}{1} \binom{6}{3} = 140$$

+

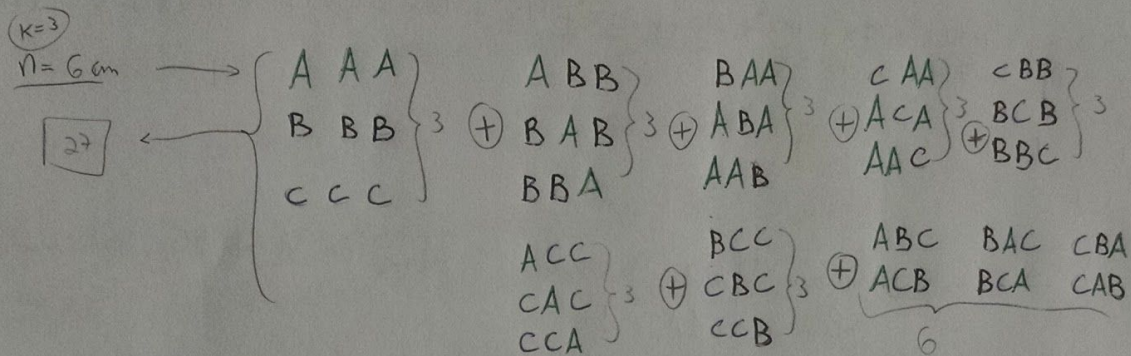
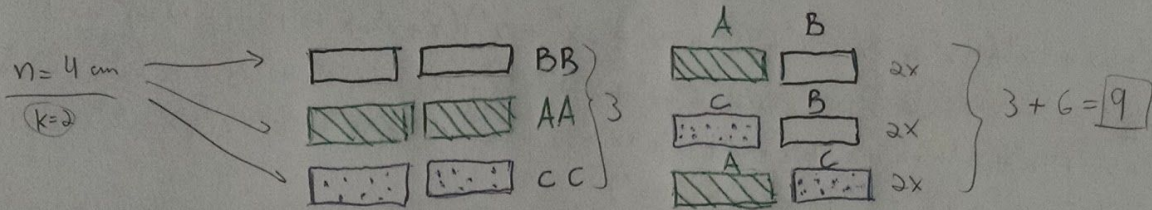
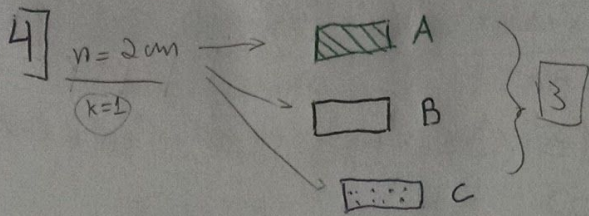
$$P(14) = (14-4) = \boxed{10} \Rightarrow \frac{k \mid 2}{0 \mid 10} \Big|_{1 \mid 6^2}^{-6} \Rightarrow \binom{4}{0} \binom{13}{10} - \binom{4}{1} \binom{7}{4} = 146$$

+

$$P(15) = (15-4) = \boxed{11} \Rightarrow \frac{k \mid 2}{0 \mid 11} \Big|_{1 \mid 5^2}^{-6} \Rightarrow \binom{4}{0} \binom{14}{11} - \binom{4}{1} \binom{8}{5} = 140$$

426

$$P(13) + P(14) + P(15) = \frac{426}{6^4} = \boxed{\frac{71}{216}}$$



$$C_k = 3 C_{k-2}$$

$$(\alpha^k) = 3 (\alpha^{k-2})$$

$$(\alpha^2) = 3 \cdot (\alpha^0) \rightarrow 1$$

$$\alpha^2 = 3$$

$$\alpha = \sqrt{3}$$

$$A \cdot (\sqrt{3})^n$$

Para $n = 2$

$$A(\sqrt{3})^2 = 3$$

$$A = 1$$

$$C_n = A \cdot (\sqrt{3})^n$$

$$C_n = 1 \cdot (\sqrt{3})^n$$

$$C_n = 3^{n/2}$$

confirmando:

$$C(4) = \sqrt{3}^4 = 3^2 = 9$$

$$C(6) = \sqrt{3}^6 = 3^3 = 27$$