MS328 - Matemática Discreta

Resolução do problema de emparelhamento utilizando Teoria de Grafos

Marina Lima Morais - nº 03

Campinas, Outubro - 2012

1 Introdução

Um grafo $G = (V, E)$ é um conjunto não-vazio V, cujos elementos são chamados vértices, e um conjunto E de arestas. Uma aresta é um par não-ordenado (v_i, v_j), onde v_i e v_j são elementos de V. Normalmente, utiliza-se uma representação gráfica de um grafo.

O problema das pontes de Königsberg é um problema antigo que foi resolvido por Euler, com a criação da teoria dos grafos. O problema é o seguinte: *Considerando um rio com duas ilhas e 7 pontes como ilustrado na Figura 1, é possível identificar um caminho que atravesse todas as pontes uma vez só e que retorne ao ponto de partida?*

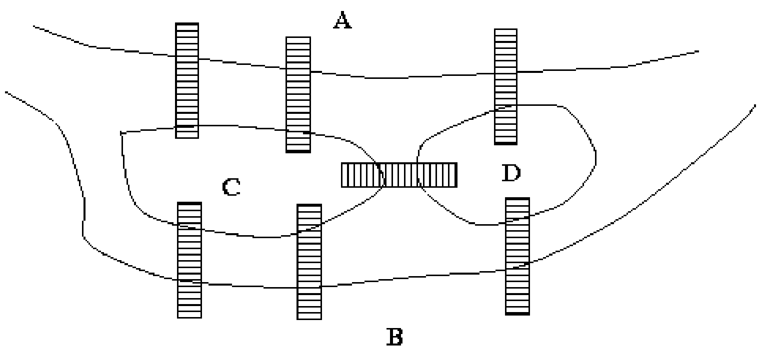

Figura 1: Ilustração do Problema das pontes de Königsberg.

Para resolver esse problema, Euler o representou com o grafo ilustrado na Figura 2. Com essa representação, e considerando as propriedades do grafos é possível resolver facilmente esse problema.

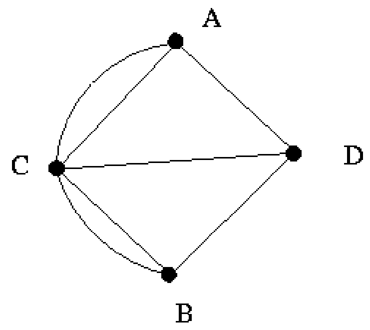

Figura 2: Grafo correspondente ao Problema das pontes de Königsberg

Esse é um tipo clássico de problema resolvido utilizando Teoria de Grafos.

2 Problema proposto

2.1 Problema de Emparelhamento

O problema proposto é um problema clássico de Emparelhamento (ou designação), que pode ser descrito como: *Temos um conjunto de m tarefas e m operários. O operário O_i tem habilidade para realizar um conjunto de tarefas $\{T_j\}_{j \in J_i}$ de tarefas. É possível atribuir, exatamente, uma tarefa a cada operário de modo que todas as tarefas sejam realizadas?* [1]

O modelo natural para este tipo de problema consiste em associar cada operário a um nó. Este grafo pertence à classe dos *grafos bipartidos*, que são aqueles em que o conjunto de nós N pode ser particionado em dois subconjuntos, de tal maneira que nós pertencentes a um mesmo subconjunto não sejam adjacentes, como mostrado na Figura [3].

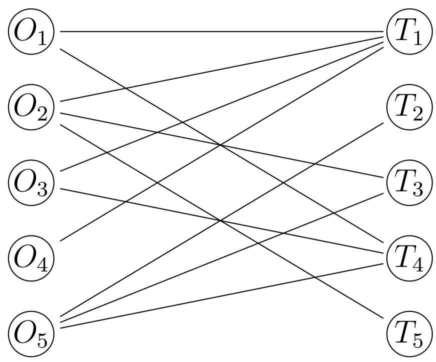

Figura 3: Ilustração do Problema de Emparelhamento para 5 operários e 5 tarefas.

Podemos notar que, para o grafo da Figura [3], não é possível atribuir todas as tarefas aos operários. Acrescentando-se outras informações ao modelo, como o "custo"ou "benefício"associado a cada par emparelhado, podemos buscar o *Emparelhamento Ótimo*: Seja $\{O_i\}$ o conjunto de m operários e $\{T_j\}$ o conjunto de m tarefas. Considere, associado ao par (O_i, T_j), temos um custo c_{ij}. O problema consiste em encontrar o emparelhamento que minimiza o custo total, ou seja, a soma dos custos dos pares emparelhados.

2.2 Exemplo Numérico

Considere o problema proposto na seção 2.1, que pode ser fornecido sob a forma de uma matriz $m \times m$, em que o elemento da linha i e da coluna j é o custo c_{ij}, se o operário O_i é capaz de realizar a tarefa T_j, e é $+\infty$, caso contrário. Para $m = 4$, temos:

	T_1	T_2	T_3	T_4
O_1	1	7	$+\infty$	5
O_2	-3	-2	1	$+\infty$
O_3	$+\infty$	3	9	-1
O_4	$+\infty$	5	8	1

Queremos resolver o problema de forma a encontrar o emparelhamento ótimo, ou seja, o menor custo de forma que todas as tarefas sejam realizadas por operários distintos.

3 Resolução

3.1 Descrição do método

Existem métodos eficientes para a resolver o problema do emparelhamento ótimo, muito comum na área de otimização combinatorial. Desenvolvemos um método baseado no *Método Húngaro* [2], que consiste em adicionar ou subtrair valores de forma adequada às linhas e colunas de matriz de custos de dimensão $m \times m$, para obter um problema equivalente com m zeros enquadrados na matriz de custos.

Uma vez transformada a matriz de custos numa matriz com m zeros enquadrados, esses zeros correspondem ao emparelhamento ótimo, uma vez que tomarmos:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{para os zeros enquadrados na matriz de custos transformada,} \\ 0, & \text{para os valores restantes,} \end{cases}$$

$\forall i, j = 1, \ldots, m.$

Baseado no método descrito, podemos resolver um problema de emparelhamento génerico, ou seja, com uma matriz de custos negativos ou com matrizes de custo não quadradas, uma vez que realizarmos uma translação adequada dos valores, pois o que interessa na resolução do problema é o valor relativo entre os custos.

3.2 Exemplo numérico 1

Seja uma matriz de custos relativos 2×2, relacionada aos operários O_1 e O_2 e às tarefas T_1 e T_2, dada a seguir:

	T_1	T_2
O_1	2	1
O_2	-3	7

- Primeiramente, fazemos uma translação dos valores de forma que todos os custos sejam positivos. Sempre somamos um valor correspondente ao menor custo da tabela. Neste caso, basta somarmos 3 unidades aos custos:

	T_1	T_2
O_1	$2 + 3 = 5$	$1 + 3 = 4$
O_2	$-3 + 3 = 0$	$7 + 3 = 10$

- Iniciamos o processo de zerar os elementos das linhas. Nota-se que na linha correspondente ao operário O_2 já temos um elemento nulo. Então, para zerarmos algum elemento da linha correspondente ao operário O_1, basta subtrairmos o menor valor de todos os elementos da linha, ou seja, basta subtrairmos 4:

	T_1	T_2
O_1	$5 - 4 = 1$	$4 - 4 = 0$
O_2	0	10

- Como temos, pelo menos, um zero em cada linha e em cada coluna, podemos fazer a designação dos operários com as tarefas correspondentes, como descrito na seção 3.1: $x_{11} = 0$, $x_{12} = 1$, $x_{21} = 1$ e $x_{22} = 0$.

Logo, o operário 1 realiza a tarefa 2, com um custo de 1, e o operário 2 realiza a tarefa 1, com um custo de -3, então, temos um custo total de -2, que corresponde ao emparelhamento ótimo.

3.3 Exemplo numérico 2

Modificamos o exemplo da seção 3.2, uma vez que trocamos as linhas correspondentes aos operários O_1 e O_2 quanto à tarefa T_2 e diminuimos o custo de realizar a T_1 pelo O_1:

	T_1	T_2
O_1	1	7
O_2	-3	1

- Primeiramente, fazemos uma translação dos valores de forma que todos os custos sejam positivos. Sempre somamos um valor correspondente ao menor custo da tabela. Neste caso, basta somarmos 3 unidades aos custos:

	T_1	T_2
O_1	$1 + 3 = 4$	$7 + 3 = 10$
O_2	$-3 + 3 = 0$	$1 + 3 = 4$

- Iniciamos o processo de zerar os elementos das linhas. Nota-se que na linha correspondente ao operário O_2 já temos um elemento nulo. Então, para zerarmos algum elemento da linha correspondente ao operário O_1, basta subtrairmos o menor valor de todos os elementos da linha, ou seja, basta subtrairmos 4:

	T_1	T_2
O_1	$4 - 4 = 0$	$10 - 4 = 6$
O_2	0	4

- Como temos zeros na mesma coluna T_1 da matriz, ainda não podemos atribuir valores aos x_{ij} correspondentes. Neste caso, devemos subtrair, dos elementos da coluna da tarefa T_2 o valor do menor custo, ou seja, basta subtrairmos 4:

	T_1	T_2
O_1	0	$6 - 4 = 2$
O_2	0	$4 - 4 = 0$

- Como temos, pelo menos, um zero em cada linha e em cada coluna, podemos fazer a designação dos operários com as tarefas correspondentes, como descrito na seção 3.1: $x_{11} = 1$, $x_{12} = 0$, $x_{21} = 0$ e $x_{22} = 1$.

Logo, o operário 2 realiza a tarefa 2, com um custo de 1, e o operário 2 realiza a tarefa 2, com um custo de 1, então, temos um custo total de 2, que corresponde ao emparelhamento ótimo.

3.4 Exemplo numérico 3

Neste exemplo, diferentemente dos anteriores, vamos trabalhar com um caso em que há mais operários do que tarefas. Assim, alguns operários ficarão ociosos, uma vez que uma tarefa só pode ser realizada por um único operário. Além disso, o operário O_1 nunca pode ficar ocioso e, se o operário O_4, ficar ocioso, haverá uma penalização de 25 no custo. Seja a matriz com os custos de realização de cada tarefa pelos operários:

	T_1	T_2	T_3
O_1	1	7	15
O_2	-3	-2	1
O_3	10	3	9
O_4	16	-5	11
O_5	12	5	8

- Primeiramente, fazemos uma translação dos valores de forma que todos os custos sejam positivos. Sempre somamos um valor correspondente ao menor custo da tabela. Neste caso, basta somarmos 5 unidades aos custos. Logo, temos a seguinte matriz de custos:

	T_1	T_2	T_3
O_1	6	12	20
O_2	2	3	6
O_3	15	8	14
O_4	21	0	16
O_5	17	10	13

- Para obtermos uma matriz quadrada, acrescentamos 2 colunas à matriz de custos, que correspondem às tarefas "ociosas" T_4 e T_5. Como o operário O_1 não pode ficar ocioso, o custo deste nas tarefas ociosas é ∞ e, como o operário O_4 tem uma penalização de 25, caso fique ocioso, esse será o custo deste nas tarefas T_4 e T_5. No caso dos demais operários, o custo de não fazer a tarefa é nulo. Então, temos a matriz quadrada de custos:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
O_1	6	12	20	∞	∞
O_2	2	3	6	0	0
O_3	15	8	14	0	0
O_4	21	0	16	25	25
O_5	17	10	13	0	0

- Iniciamos o processo de zerar os elementos das linhas. Nota-se que, somente na linha correspondente ao operário O_1 não temos elementos nulos. Então, para zerarmos algum elemento da linha correspondente ao operário O_1, basta subtrairmos o menor valor de todos os elementos da linha, ou seja, basta subtrairmos 6:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
O_1	0	6	14	∞	∞
O_2	2	3	6	0	0
O_3	15	8	14	0	0
O_4	21	0	16	25	25
O_5	17	10	13	0	0

- Como não temos zeros na coluna T_3 da matriz, ainda não podemos atribuir valores aos x_{ij} correspondentes. Neste caso, devemos subtrair, dos elementos da coluna da tarefa T_3 o valor do menor custo, ou seja, basta subtrairmos 6:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
O_1	0	6	8	∞	∞
O_2	2	3	0	0	0
O_3	15	8	8	0	0
O_4	21	0	10	25	25
O_5	17	10	7	0	0

- Como temos, pelo menos, um zero em cada linha e em cada coluna, podemos fazer a designação dos operários com as tarefas correspondentes, como descrito na seção 3.1. Temos duas soluções possíveis: $x_{11} = 1$, $x_{23} = 1$, $x_{34} = 1$, $x_{42} = 1$ e $x_{55} = 1$; e $x_{11} = 1$, $x_{23} = 1$, $x_{35} = 1$, $x_{42} = 1$ e $x_{54} = 1$.

Logo, em ambos os casos, o operário 1 realiza a tarefa 1, o operário 2 realiza a tarefa 3 e o operário 4 realiza a tarefa 4. A variação ocorre nas tarefas 4 e 5, mas o custo é sempre -3, que corresponde ao emparelhamento ótimo.

3.5 Exemplo numérico 4

Este exemplo é semelhante ao anterior, porém, além de que o operário O_1 nunca pode ficar ocioso e, se o operário O_5, ficar ocioso, haverá uma penalização de 25 no custo. Seja a matriz com os custos de realização de cada tarefa pelos operários:

	T_1	T_2	T_3
O_1	1	7	15
O_2	-3	-2	1
O_3	10	3	9
O_4	16	-5	11
O_5	12	5	8

- Primeiramente, fazemos uma translação dos valores de forma que todos os custos sejam positivos. Sempre somamos um valor correspondente ao menor custo da tabela. Neste caso, basta somarmos 5 unidades aos custos. Logo, temos a seguinte matriz de custos:

	T_1	T_2	T_3
O_1	6	12	20
O_2	2	3	6
O_3	15	8	14
O_4	21	0	16
O_5	17	10	13

- Para obtermos uma matriz quadrada, acrescentamos 2 colunas à matriz de custos, que correspondem às tarefas "ociosas" T_4 e T_5. Como o operário O_1 não pode ficar ocioso, o custo deste nas tarefas ociosas é ∞ e, como o operário O_4 tem uma penalização de 25, caso fique ocioso, esse será o custo deste nas tarefas T_4 e T_5. No caso dos demais operários, o custo de não fazer a tarefa é nulo. Então, temos a matriz quadrada de custos:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
O_1	6	12	20	∞	∞
O_2	2	3	6	0	0
O_3	15	8	14	0	0
O_4	21	0	16	0	0
O_5	17	10	13	25	25

- Iniciamos o processo de zerar os elementos das linhas. Temos que as linhas referentes ao O_1 e O_5 não possuem elementos nulos. Então, devemos subtrair 6 unidades de O_1 e 10 unidades de O_5:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
O_1	0	6	14	∞	∞
O_2	2	3	6	0	0
O_3	15	8	14	0	0
O_4	21	0	16	0	0
O_5	7	0	3	15	15

- Como não temos zeros na coluna T_3 da matriz, ainda não podemos atribuir valores aos x_{ij} correspondentes. Neste caso, devemos subtrair, dos elementos da coluna da tarefa T_3 o valor do menor custo, ou seja, basta subtrairmos 3:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
O_1	0	6	11	∞	∞
O_2	2	3	3	0	0
O_3	15	8	11	0	0
O_4	21	0	13	0	0
O_5	7	0	0	15	15

- Como temos, pelo menos, um zero em cada linha e em cada coluna, podemos fazer a designação dos operários com as tarefas correspondentes, como descrito na seção 3.1. Temos duas soluções possíveis: $x_{11} = 1$, $x_{24} = 1$, $x_{35} = 1$, $x_{42} = 1$ e $x_{53} = 1$; e $x_{11} = 1$, $x_{25} = 1$, $x_{34} = 1$, $x_{42} = 1$ e $x_{53} = 1$.

Logo, em ambos os casos, o operário 1 realiza a tarefa 1, o operário 4 realiza a tarefa 2 e o operário 5 realiza a tarefa 3. Os operários 2 e 3 ficam ociosos e o custo é sempre 4, que corresponde ao emparelhamento ótimo.

3.6 Exemplo numérico 5

Neste exemplo, vamos trabalhar com um caso em que há mais tarefas que operários. Assim, algumas tarefas não serão realizadas, uma vez que uma tarefa só pode ser realizada por um único operário. Além disso, a tarefa T_1 tem uma penalização de 40, se não for realizada e a tarefa T_3 deve ser realizada. Seja a matriz com os custos de realização de cada tarefa pelos operários:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
O_1	6	12	20	-4	10
O_2	2	3	6	6	8
O_3	15	8	14	1	3

- Primeiramente, fazemos uma translação dos valores de forma que todos os custos sejam positivos. Sempre somamos um valor correspondente ao menor custo da tabela. Neste caso, basta somarmos 4 unidades aos custos. Logo, temos a seguinte matriz de custos:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
O_1	10	16	24	0	14
O_2	6	7	10	10	12
O_3	19	12	18	5	7

- Para obtermos uma matriz quadrada, acrescentamos 2 linhas à matriz de custos, que correspondem ao caso em que as tarefas não são realizadas, ou seja, os operários O_4 e O_5 são “ninguém”. Como a tarefa T_1 tem uma penalização, seu custo será 40, e como a tarefa T_3 deve ser realizada, o custo desta será ∞. No caso das demais tarefas, o custo de não fazer a tarefa é nulo. Então, temos a matriz quadrada de custos:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
O_1	10	16	24	0	14
O_2	6	7	10	10	12
O_3	19	12	18	5	7
O_4	40	0	∞	0	0
O_5	40	0	∞	0	0

- Iniciamos o processo de zerar os elementos das linhas. Para zerarmos algum elemento da linha correspondente ao operário O_2, basta subtrairmos 6 e, para zerarmos algum elemento da linha correspondente ao operário O_3, basta subtrairmos 5:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
O_1	10	16	24	0	14
O_2	0	1	4	4	6
O_3	14	7	13	0	2
O_4	40	0	∞	0	0
O_5	40	0	∞	0	0

- Como não temos zeros na coluna T_3 da matriz, ainda não podemos atribuir valores aos x_{ij} correspondentes. Neste caso, devemos subtrair, dos elementos da coluna da tarefa T_3 o valor do menor custo, ou seja, basta subtrairmos 4:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
O_1	10	16	20	0	14
O_2	0	1	0	4	6
O_3	14	7	9	0	2
O_4	40	0	∞	0	0
O_5	40	0	∞	0	0

- Como ainda não é possível realizar o emparelhamento, devemos zerar mais um elemento da coluna T_1. Assim, basta subtrairmos 10 dos elementos não nulos desta coluna:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
O_1	0	16	20	0	14
O_2	0	1	0	4	6
O_3	4	7	9	0	2
O_4	30	0	∞	0	0
O_5	30	0	∞	0	0

- Então, podemos fazer a designação dos operários com as tarefas correspondentes, como descrito na seção 3.1: $x_{11} = 1$, $x_{23} = 1$, $x_{34} = 1$, $x_{42} = 1$ e $x_{55} = 1$.

Logo, o operário 1 realiza a tarefa 1, o operário 2 realiza a tarefa 3, o operário 3 realiza a tarefa 4 e as tarefas 2 e 5 não são realizadas, com o custo mínimo de 13.

3.7 Exemplo numérico 6

Finalmente, iremos resolver o problema proposto na seção 2.2:

- Primeiramente, fazemos uma translação dos valores de forma que todos os custos sejam positivos. Sempre somamos um valor correspondente ao menor custo da tabela. Neste caso, basta somarmos 3 unidades aos custos. Logo, temos a seguinte matriz de custos:

	T_1	T_2	T_3	T_4
O_1	4	10	$+\infty$	8
O_2	0	1	1	$+\infty$
O_3	$+\infty$	6	12	2
O_4	$+\infty$	8	11	4

- Iniciamos o processo de zerar os elementos das linhas. Para zerarmos algum elemento da linha correspondente ao operário O_1, basta subtrairmos 4, para zerarmos algum elemento da linha correspondente ao operário O_3, basta subtrairmos 2 e para zerarmos algum elemento da linha correspondente ao operário O_4, basta subtrairmos 4:

	T_1	T_2	T_3	T_4
O_1	0	6	$+\infty$	4
O_2	0	1	1	$+\infty$
O_3	$+\infty$	4	10	0
O_4	$+\infty$	4	7	0

- Como não temos zeros nas colunas T_2 e T_3 da matriz, ainda não podemos atribuir valores aos x_{ij} correspondentes. Neste caso, devemos subtrair, dos elementos da coluna T_2 um valor 1 e da coluna T_3, o valor 1:

	T_1	T_2	T_3	T_4
O_1	0	5	$+\infty$	4
O_2	0	0	0	$+\infty$
O_3	$+\infty$	3	9	0
O_4	$+\infty$	3	6	0

- Como ainda não é possível realizar o emparelhamento, devemos zerar mais um elemento das colunas T_2 e T_3. Assim, basta subtrairmos 3 dos elementos não nulos da T_2 e 6 dos elementos não nulos da T_3:

	T_1	T_2	T_3	T_4
O_1	0	2	$+\infty$	4
O_2	0	0	0	$+\infty$
O_3	$+\infty$	0	3	0
O_4	$+\infty$	0	0	0

- Então, podemos fazer a designação dos operários com as tarefas correspondentes, como descrito na seção 3.1, em que encontramos 3 soluções ótimas: $x_{11} = 1$, $x_{22} = 1$, $x_{34} = 1$ e $x_{43} = 1$; $x_{11} = 1$, $x_{23} = 1$, $x_{32} = 1$ e $x_{44} = 1$;$x_{11} = 1$, $x_{23} = 1$, $x_{34} = 1$ e $x_{42} = 1$.

Logo, a Tabela 1 resume as soluções:

Tabela 1: Soluções para o problema proposto na seção 2.2.

Operários	Solução 1	Solução 2	Solução 3
O_1	T_1	T_1	T_1
O_2	T_2	T_3	T_3
O_3	T_4	T_2	T_4
O_4	T_3	T_4	T_2
Custo	6	6	6

Assim, encontramos 3 emparelhamentos ótimos, com custo 6, para o problema proposto.

4 Considerações Finais

Com a resolução do problema de emparelhamento utilizando Teoria de Grafos, podemos ter uma breve introdução a uma ferramenta matemática de grande importância, que são os grafos, e de sua aplicabilidade em diversos problemas. O método proposto mostrou-se eficaz, uma vez que é capaz de resolver todos os casos de problemas de emparelhamento, pois trabalha com os custos relativos (o que é útil quando a matriz de custo possui valores negativos) e envolve operações aritméticas elementares. Apesar da facilidade de utilização, em todos os casos é possível obter um ou mais emparelhamentos, os quais são as soluções ótimas do problema.

Referências

[1] J. P. O. Santos; M. P. Mello. *Introdução à análise combinatória.* Editora Unicamp, 3 edition, 2006.

[2] W. Hochstattler; H. Jin; R. Nickel. The hungarian method in a mixed matching market. Technical report, FernUniversitat in Hagen, 2005.