# MS328 - Prova 2 - 05/11/2012

## Fórmulas úteis:

$$\frac{1}{(1-x)^N} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{N+r-1}{r} x^r \tag{1}$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \tag{2}$$

**Questão 1:** Quantos anagramas de 5 letras podemos formar de um conjunto de $4A$, $3B$, $5C$ e $6D$, sabendo que os anagramas devem conter, pelo menos, uma letra $B$ e uma letra $C$.

**Resolução:**

Como queremos formar anagramas, a ordem entre as letras é importante.

Função geradora de cada elemento do conjunto:

- $A$: $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$;
- $B$: $x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = x\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)$;
- $C$: $x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} = x\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120}\right)$;
- $D$: $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720}$;

Função geradora ($f$) do anagrama:

$$\begin{aligned} f = 5!&\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) x^2 \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right) \times \\ &\times \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720}\right) \end{aligned}$$

Como queremos um anagrama formado por 5 letras, desprezamos os termos superiores a $x^5$. Então:

$$\begin{aligned} f &= 5!x^2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)^2 \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right) \\ &= 120x^2 \left(1 + 2x + x^2 + 2(1+x)\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)\right)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{2x^3}{12}\right) \\ &= 120x^2 \left(1 + 2x + 2x^2 + \frac{x^3}{3} + x^3\right)\left(1 + x + \frac{7x^2}{12} + \frac{5x^3}{24}\right) \\ &= 120x^2 \left(1 + 3x + \frac{56x^2}{12} + \frac{113x^3}{24}\right) \end{aligned}$$

Termo de ordem $x^5$: $120 \times \frac{113}{24} = 565$ possibilidades.

**Questão 2:** De quantas maneiras podemos selecionar 10 letras de um conjunto de $6A$, $6B$, $5C$ e $5D$, sabendo que $A$ e $B$ devem comparecer, pelo menos, uma vez?

**Resolução:**

Como queremos formar um conjunto de letras, a ordem não é importante.

Para obter a função geradora de cada elemento do conjunto utilizaremos a equação (2):

- $A$: $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 = x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5) = x\frac{1-x^6}{1-x}$;
- $B$: $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 = x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5) = x\frac{1-x^6}{1-x}$;
- $C$: $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = \frac{1-x^6}{1-x}$;
- $D$: $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = \frac{1-x^6}{1-x}$;

Função geradora ($f$):

$$f = x^2\frac{(1-x^6)^4}{(1-x)^4}$$

Desprezando os termos superiores a $x^5$ temos:

$$f = x^2\frac{(1-2x^6)^2}{(1-x)^4} = x^2\frac{(1-4x^6)}{(1-x)^4}$$

Usando a equação (1), para $N = 4$, temos:

$$f = (x^2 - 4x^8)\sum_{r=0}^{\infty}\binom{4+r-1}{r}x^r = (x^2 - 4x^8)\sum_{r=0}^{\infty}\binom{3+r}{r}x^r$$

Para os termos de ordem $x^{10}$, temos $r = 8$ e $r = 2$:

$$\binom{3+8}{8} - 4\binom{5+2}{2} = \binom{11}{8} - 4\binom{5}{2} = 165 - 40 = 125 \text{ possibilidades.}$$

**Questão 3:** Calcule as probabilidades de fazer 15 lançando 5 dados e de fazer 20 lançando 6 dados.

**Resolução:**

Função geradora de cada dado:

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 = x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$$

Usando a equação (2), temos:

$$x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5) = x\frac{1 - x^6}{1 - x}$$

**Caso A:** Função geradora ($f_A$) para 5 dados:

$$f_A = \left(x\frac{1 - x^6}{1 - x}\right)^5 = \frac{x^5(1 - x^6)(1 - 2x^6 + x^{12})^2}{(1 - x)^5}$$

Desprezando os termos superiores a $x^{15}$, temos:

$$f_A = \frac{x^5(1 - x^6)(1 - 4x^6)}{(1 - x)^5} = \frac{(x^5 - x^{11})(1 - 4x^6)}{(1 - x)^5} = \frac{x^5 - 5x^{11}}{(1 - x)^5}$$

Usando a equação (1), para $N = 5$, temos:

$$f_A = (x^5 - 5x^{11}) \sum_{r=0}^{\infty} \binom{5 + r - 1}{r} x^r = (x^5 - 5x^{11}) \sum_{r=0}^{\infty} \binom{4 + r}{r} x^r$$

Para o termo de ordem $x^{15}$, temos $r = 10$ e $r = 4$:

$$f_A = \binom{4 + 10}{10} - 5\binom{4 + 4}{4} = \binom{14}{10} - 5\binom{8}{4} = 1001 - 350 = 651.$$

Logo, a probabilidade do Caso A ocorrer é: $P_A = \frac{f_A}{6^5} = \frac{651}{6^5}$

**Caso B:** Função geradora ($f_B$) para 6 dados:

$$f_B = \left(x\frac{1 - x^6}{1 - x}\right)^6 = \frac{x^6(1 - 2x^6 + x^{12})^3}{(1 - x)^6}$$

Desprezando os termos superiores a $x^{20}$, temos:

$$\begin{aligned} f_B &= \frac{x^6(1 - 2x^6 + x^{12})((1 - 2x^6)^2 + 2(1 - 2x^6)x^{12})}{(1 - x)^6} \\ &= \frac{x^6(1 - 2x^6 + x^{12})(1 - 4x^6 + 6x^{12})}{(1 - x)^6} = \frac{x^6(1 - 6x^6 + 15x^{12})}{(1 - x)^6} \end{aligned}$$

Usando a equação (1), para $N = 6$, temos:

$$f_B = (x^6 - 6x^{12} + 15x^{18}) \sum_{r=0}^{\infty} \binom{6+r-1}{r} x^r = (x^6 - 6x^{12} + 15x^{18}) \sum_{r=0}^{\infty} \binom{5+r}{r} x^r$$

Para o termo de ordem $x^{20}$, temos $r = 14$, $r = 8$ e $r = 2$:

$$f_B = \binom{5+14}{14} - 6\binom{5+8}{8} + 15\binom{5+2}{2} = 11628 - 7722 + 315 = 4221.$$

Logo, a probabilidade do Caso B ocorrer é: $P_B = \frac{f_B}{6^6} = \frac{4221}{6^6}$

Comparando os dois casos, temos: $\frac{P_A}{P_B} = \frac{651}{6^5} \times \frac{6^6}{4221} = \frac{6 \times 651}{4221} = \frac{3906}{4221} \approx 0.92$. Logo, o Caso B possui mais chance de ocorrer do que o Caso A.

**Questão 4:** Resolva a seguinte relação de recorrência:

$$F_n = F_{n-1} + 2F_{n-2} \qquad [n \geq 3], \qquad F_2 = 3F_1 = 3.$$

**Resolução:**

Podemos resolver o problema de relação de recorrência da mesma maneira que resolvemos equações diferenciais:

$$\alpha^2 = \alpha + 2 \Longrightarrow \alpha^2 - \alpha - 2 = 0$$
$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Longrightarrow \alpha_1 = 2, \alpha_2 = -1.$$

Então,

$$F_n = A(2)^n + B(-1)^n$$

em que $A$ e $B$ são constantes a serem determinadas. Utilizando as condições iniciais, temos:

- $F_2 = 3 \longrightarrow 3 = 4A + B$;
- $F_1 = \frac{F_2}{3} = 1 \longrightarrow 1 = 2A - B$.

Resolvendo o sistema linear, obtemos: $A = \frac{2}{3}$ e $B = \frac{1}{3}$. Portanto,

$$F_n = \frac{2}{3}(2)^n + \frac{1}{3}(-1)^n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$$

Conferindo, a função $F_n$ encontrada:

- $F_1 = \frac{2^{1+1}+(-1)^1}{3} = \frac{4-1}{3} = 1$;
- $F_2 = \frac{2^{2+1}+(-1)^2}{3} = \frac{8+1}{3} = 3$;

E, verificando na relação de recorrência:

$$\begin{aligned} F_{n-1} + 2F_{n-2} &= \frac{2^{n-1+1} + (-1)^{n-1}}{3} + 2\frac{2^{n-2+1} + (-1)^{n-2}}{3} \\ &= \frac{2^n - (-1)^n}{3} + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \\ &= \frac{2 \times 2^n + (-1)^n}{3} = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3} = F_n. \end{aligned}$$