Prof. Stefano
(21/11/2011)

- Próxima: | 2ª feira (28/11) — teste
  | 3ª feira (29/11) — prova - vale 1,0,

{ 1) Lançamento de dados;
{ 2) fórmulas de recorrência.

T Lançamos 4 dados. Qtas. possibilidades de obter 12?

R.)

$$\left(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right)^4$$

$$\left[x\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5\right)\right]^4$$

$$x^4 \cdot \left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5\right)^4$$

$$x^4 \cdot \frac{(1-x^6)^4}{(1-x)^4}$$

$$x^4 \cdot \underbrace{(1-x^6)^4}_{\sum_{m=0}^{4}\binom{4}{m}(-1)^m \cdot x^{6m}} \cdot \frac{1}{(1-x)^4}$$

$$\left(\underbrace{\binom{4}{0} - \binom{4}{1}x^6}_{\text{só estes interessam}} + \binom{4}{2}x^{12} - \dots\right)$$

- numerador: $x^4 \cdot (1 - 4x^6) =$

$$= (x^4 - 4x^{10})$$

- denominador: $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{4+r-1}{r} x^r =$

$$= \binom{3}{0} + \binom{4}{1} x + \binom{5}{2} x^2 + \cdots$$

- Assim,

$$\left.\begin{array}{l} x^4 \cdot \binom{11}{8} x^8 \longrightarrow \binom{11}{8} \\ -4x^{10} \cdot \binom{5}{2} x^2 \longrightarrow -4\binom{5}{2} \end{array}\right\} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \binom{11}{8} - 4\binom{5}{2} = 165 - 40 = 125 \text{ possibilidades}$$

já para obter a probabilidade basta dividir pelo número de casos possíveis: (6^4)

Assim, a probabilidade será

$$\frac{125}{6^4} = \frac{125}{1.296}$$

FIM

Lançamos 4 dados. Qtas. possibilidades de obter 15?

resolução:

$$\left(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)^4 = \left[x\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)\right]^4 =$$

$$= x^4 \cdot \left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)^4 =$$

$$= x^4 \cdot \frac{(1-x^6)^4}{(1-x)^4} = x^4 \cdot \left(1-x^6\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)^4 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow x^4 \cdot \left(\sum_{m=0}^{4} \binom{4}{m} (-1)^m (x^6)^m\right) \cdot \left(\sum_{r=0}^{\infty} \binom{4+r-1}{r} x^r\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow x^4 \cdot \left[\binom{4}{0} - \binom{4}{1} x^6 + \binom{4}{2} x^{12} - \binom{4}{3} x^{18} + \binom{4}{4} x^{24}\right] \cdot \left(\sum_{r=0}^{\infty} \binom{3+r}{r} x^r\right)$$

só interessa até aqui

reescrevendo, temos: $\boxed{x^4 \cdot \left[1-4x^6\right] \cdot \left(\sum_{r=0}^{\infty} \binom{3+r}{r} x^r\right)}$

$\rightarrow \left(x^4-4x^{10}\right) \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \binom{3+r}{r} x^r$; note que para obter 15, interessar-nos $\boxed{r=11}$ ... $\boxed{r=5}$; assim:

$$x^4 \binom{3+11}{11} x^{11} - 4x^{10} \cdot \binom{3+5}{5} x^5 = 364x^{15} - 224x^{15} = 140$$

(só coe...

Resposta

Lançamos 4 dados. Qtas. possibilidades de obter: 25?

• **resolução:** Aproveitando as resoluções anteriores, chegamos na seguinte expressão:

$$x^4 \cdot \left(\sum_{m=0}^{4} \binom{4}{m} (-1)^m \cdot (x^6)^m\right) \cdot \left(\sum_{r=0}^{\infty} \binom{3+r}{r} x^r\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow x^4 \cdot \left[\binom{4}{0} - \binom{4}{1} x^6 + \binom{4}{2} x^{12} - \binom{4}{3} x^{18} + \binom{4}{4} x^{24}\right] \left(\sum_{r=0}^{\infty} \binom{3+r}{r} x^r\right) \rightarrow$$

agora interessa até aqui

$$\rightarrow x^4 (1 - 4x^6 + 6x^{12} - 4x^{18}) \cdot \left(\sum_{r=0}^{\infty} \binom{3+r}{r} x^r\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow (x^4 - 4x^{10} + 6x^{16} - 4x^{22}) \cdot \left(\sum_{r=0}^{\infty} \binom{3+r}{r} x^r\right);$$

note que para obter 25, interessa-nos $\boxed{r=21}$, $\boxed{r=15}$; $\boxed{r=9}$ e $\boxed{r=3}$; assim:

$$x^4 \cdot \binom{3+21}{21} x^{21} - 4x^{10} \cdot \binom{3+15}{15} x^{15} + 6x^{16} \cdot \binom{3+9}{9} x^9 - 4x^{22} \binom{3+3}{3} x^3 =$$

$$= \binom{24}{21} x^{25} - 4 \cdot \binom{18}{15} x^{25} + 6 \cdot \binom{12}{9} \cdot x^{25} - 4 \cdot \binom{6}{3} x^{25} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ lembre-se que só nos interessam ~~nos~~ só os coeficientes, $\Rightarrow$

$$\underbrace{\binom{24}{21}}_{2.024} - 4\underbrace{\binom{18}{15}}_{3.264} + 6 \cdot \underbrace{\binom{12}{9}}_{1.320} - 4\underbrace{\binom{6}{3}}_{80} =$$

$$2.024 - 3.264 + 1.320 - 80$$

0 (zero) possibilidades,

até porque com 4 dados o máximo que se atinge é 24.