Prova 2 – MA-220-Z – Prof. Stefano De Leo – 09/11/2011

(1) Quantas são as permutações das letras da palavra

P	A	R	A	D	O

em que consoantes ocupam o primeiro e terceiro lugar, ou uma vogal o segundo lugar, ou a vogal **O** o primeiro lugar, ou a vogal **A** o terceiro lugar?

A: $\boxed{C} \times \boxed{C} \times \times \times$

B: $\times \boxed{V} \times \times \times \times$

C: $\boxed{O} \times \times \times \times \times$

D: $\times \times \boxed{A} \times \times \times$

resolução:

(I.)

$n(A): \; 3 \cdot 2 \cdot \left(\frac{4!}{2!}\right) = \underline{72}$

$n(B): \; \times \boxed{A} \times \times \times \times \to 5!$; $\times \boxed{O} \times \times \times \times \to \frac{5!}{2!}$; $5! + \frac{5!}{2!} = 120 + 60 = \underline{180}$

$n(C): \; \boxed{O} \times \times \times \times \times \to \frac{5!}{2!} = \underline{60}$

$n(D): \; \times \times \boxed{A} \times \times \times \to 5! = \underline{120}$

• Assim, $n(A)+n(B)+n(C)+n(D) = 432$ (I.)

(II.) $n(AB) =$ $\boxed{C}\boxed{A}\boxed{C} \times \times \times \to 3 \cdot 2 \cdot (3!) = 36$; $\boxed{C}\boxed{O}\boxed{C} \times \times \times \to 3 \cdot 2 \cdot \left(\frac{3!}{2!}\right) = 18$; $36 + 18 = \underline{54}$

$n(AC) = 0$; $n(AD) = 0$

$n(BC) = \boxed{O}\boxed{A} \times \times \times \times \to 4! = \underline{24}$

$n(BD) = \times \boxed{A}\boxed{A} \times \times \times \to 4!$; $\times \boxed{O}\boxed{A} \times \times \times \to 4!$; $2 \cdot (4!) = \underline{48}$

$n(CD) = \boxed{O}\boxed{A} \times \times \times \times \to 4! = \underline{24}$

•• Assim, $n(AB)+n(AC)+n(BC)+n(BD) = 54+24+48+24 = 150$ (II)

segue

continuação questão 1

(III.) $n(ABC) = 0$

$n(ABD) = 0$

$n(BCD) = \boxed{O}\,\boxed{A}\,\boxed{A} \times \times \times \rightarrow 3! = 6$

$n(ACD) = 0$

$\therefore$ Assim, $n(ABC) + n(ABD) + n(BCD) + n(ACD) = 0+0+6+0 = 6$ (III.)

(IV.) $n(ABCD) = 0$ (IV.)

Pelo "princípio da inclusão e exclusão", temos:

$$\overbrace{n(A) + n(B) + n(C) + n(D)}^{(I.)} - \overbrace{- n(AB) - n(AC) - n(AD) - n(BC) - n(BD) - n(CD)}^{(II)} +$$

$$+ \overbrace{n(ABC) + n(ABD) + n(BCD) + n(ACD)}^{(III.)} = - \overbrace{n(ABCD)}^{(IV.)}$$

$= (I.) - (II.) + (III.) - (IV.) = 432 - 150 + 6 - 0 =$

$= 288$

2. De quantas maneiras podemos selecionar 8, 9 e 10 letras de um conjunto de 5A, 6B, 5C e 4D, sabendo que A e B devem comparecer pelo menos uma vez?

• <u>resolução</u>:

A: $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = x\,(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$

B: $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 = x\,(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$

C: $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$

D: $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

Multiplicamos tudo, para obter:

$$x^2(1+x+x^2+x^3+x^4)^2\cdot(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^2 =$$

$$= x^2\cdot\frac{(1-x^5)^2}{(1-x)^2}\cdot\frac{(1-x^6)^2}{(1-x^2)} = x^2\cdot(1-x^5)^2(1-x^6)^2\cdot\frac{1}{(1-x)^4} =$$

$$= x^2\cdot(1-2x^5+x^{10})\cdot(1-2x^6+x^{12})\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{3+r}{r}x^r =$$

$$= x^2\cdot(1-2x^5-2x^6+x^{10}+4x^{11}+x^{12}-2x^{16}-2x^{17}+x^{22})\cdot\sum_{r=0}^{\infty}\binom{3+r}{r}x^r;$$

. A partir de agora, vamos usar apenas os termos que interessam para 8, 9 e 10 letras: $\boxed{(1x^2-2x^7-2x^8)\cdot\sum_{r=0}^{\infty}\binom{3+r}{r}x^r}$

$8 \triangleright \begin{cases} r=6 \\ r=1 \\ r=0 \end{cases}$ $1\cdot\binom{9}{6} - 2\cdot\binom{4}{1} - 2\cdot\binom{3}{0} = 84 - 8 - 2 = 74$

$9 \triangleright \begin{cases} r=7 \\ r=2 \\ r=1 \end{cases}$ $1\cdot\binom{10}{7} - 2\cdot\binom{5}{2} - 2\cdot\binom{4}{1} = 120 - 20 - 8 = 92$

$10 \triangleright \begin{cases} r=8 \\ r=3 \\ r=2 \end{cases}$ $1\cdot\binom{11}{8} - 2\cdot\binom{6}{3} - 2\cdot\binom{5}{2} = 165 - 40 - 20 = 105$

—— x ——

③ De quantas maneiras podemos selecionar palavras com 4 letras de um conjunto de 3A, 4B, 3C e 3D, sabendo que A e B devem comparecer pelo menos uma vez?

resolução:

$$A: \; x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) = x\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)$$

$$B: \; x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} = \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) = x\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right)$$

$$C: \; 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)$$

$$D: \; 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)$$

multiplicamos,

$x^2 \cdot \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right) \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)^2$; restringindo apenas ao coeficiente de x^4, temos:

$$\left(x^2 + x^3 + \frac{7}{12}x^4\right) \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)^2 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(x^2 + x^3 + \frac{7}{12}x^4\right) \cdot \left(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{12}x^4\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow 2x^4 + 2x^4 + \frac{7}{12}x^4 = \left(2 + 2 + \frac{7}{12}\right)x^4 =$$

$= \frac{55}{12}x^4 \longrightarrow$ só interessa o coeficiente e note que sendo anagrama, a função geradora é exponencial; assim:

$$\frac{55}{12} \cdot 4! \cdot \left(\frac{x^4}{4!}\right) \longrightarrow \frac{55 \cdot 4!}{12} = \frac{55 \cdot \cancel{24}^{\,2}}{\cancel{12}_{\,1}} = 55 \cdot (2) = 110$$

4. Encontre a função geradora de

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5$$

com x_i inteiros que satisfazem

$$2 \leq x_1 \leq 4, \quad 1 \leq x_{2,3,4}, \quad x_5 = (0,1).$$

Calcule o número de soluções que garantem a soma 9, 11, 13 e 15?

Resolução:

x_1: $(x^2 + x^3 + x^4) = x^2(1 + x + x^2)$

x_2: $(x^2 + x^4 + x^6 + \dots) = x^2(1 + x^2 + x^4 + \dots)$

x_3: $(x^3 + x^6 + x^9 + \dots) = x^3(1 + x^3 + x^6 + \dots)$

x_4: $(x + x^2 + x^3 + \dots) = x(1 + x + x^2 + \dots)$

x_5: $(1 + x)$

multiplicamos tudo para obter:

$$x^8 \cdot (1 + x + x^2) \cdot (1 + x) \cdot (1 + x + x^2 + \dots) \cdot (1 + x^2 + x^4 + \dots) \cdot (1 + x^3 + x^6 + \dots) =$$

$$= x^8 \cdot (1 + x + x^2) \cdot (1 + x) \cdot \frac{1}{(1-x)} \cdot \frac{1}{(1-x^2)} \cdot \frac{1}{(1-x^3)} =$$

$$= x^8 \cancel{(1 + x + x^2)} \cdot \cancel{(1 + x)} \cdot \frac{1}{(1-x)} \cdot \frac{1}{(1-x)\cancel{(1+x)}} \cdot \frac{1}{(1-x) \cdot \cancel{(1 + x + x^2)}} =$$

$$= x^8 \cdot \frac{1}{(1-x)^3} = x^8 \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \binom{2+r}{r} x^r$$

→

continuação questão 4

9 $r=1 \longrightarrow 1 \cdot \binom{3}{1} = 3$

11 $r=3 \longrightarrow 1 \cdot \binom{5}{3} = 10$

13 $r=5 \longrightarrow 1 \cdot \binom{7}{5} = 21$

15 $r=7 \longrightarrow 1 \cdot \binom{9}{7} = 36$