MATEMÁTICA DISCRETA/P2

8 de novembro de 2011

Prof. Stefano De Leo

NOME:

RA:

NUM:

1

Quantas são as permutações das letras da palavra PARADO em que consonantes ocupam o primeiro e terceiro lugar, ou uma vogal o segundo lugar, ou a vogal O o primeiro lugar, ou a vogal A o terceiro lugar.

G1	:	**con**	x	**con**	x	x	x
G2	:	x	**vog**	x	x	x	x
G3	:	**O**	x	x	x	x	x
G4	:	x	x	**A**	x	x	x

G1	72
G2	180
G3	60
G4	120
G12	54
G13	0
G14	0
G23	24
G24	48
G34	24
G123	0
G124	0
G134	0
G234	6
G1234	0

Res: $72 + 180 + 60 + 120 - 54 - 24 - 28 - 24 + 6 = \mathbf{288}$

2

• De quantas maneiras podemos selecionar 8, 9 e 10 letras de um conjunto de 5 A, 6 B, 5 C e 4 D, sabendo que A e B devem comparecer pelo menos uma vez ?

FUNÇÃO GERADORA:

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5)\,(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)\,(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)\,(1+x+x^2+x^3+x^4)$$

$$x\,(1+x+x^2+x^3+x^4)\,x\,(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)\,(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)\,(1+x+x^2+x^3+x^4)$$

$$x^2\,(1+x+x^2+x^3+x^4)^2\,(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^2$$

$$x^2\left(\frac{1-x^5}{1-x}\right)^2\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^2 \approx\; x^2\,\frac{(1-2\,x^5)\,(1-2\,x^6)}{(1-x)^4} \approx\; x^2\,\frac{(1-2\,x^5-2\,x^6)}{(1-x)^4}$$

$$(x^2-2\,x^7-2\,x^8)\sum_{r=0}^{\infty}\binom{4+r-1}{r}\,x^r$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{8}\;&:\binom{9}{6}-2\binom{4}{1}-2\binom{3}{0} \;=\; \mathbf{74}\\
\mathbf{9}\;&:\binom{10}{7}-2\binom{5}{2}-2\binom{4}{1} =\; \mathbf{92}\\
\mathbf{10}&:\binom{11}{8}-2\binom{6}{3}-2\binom{5}{2} = \mathbf{105}
\end{aligned}$$

Res: 8 [74] - 9 [92] - 10 [105]

3

• De quantas maneiras podemos selecionar palavras de 4 letras de um conjunto de 3 A, 4 B, 3 C e 3 D, sabendo que A e B devem comparecer pelo menos uma vez ?

FUNÇÃO GERADORA:

$$(x+x^2/2+x^3/6)\,(x+x^2/2+x^3/6+x^4/4)\,(1+x+x^2/2+x^3/6)^2 \approx (x+x^2/2+x^3/6)^2\,(1+x+x^2/2)^2$$

$$(x^2+x^4/4+x^3+x^4/3+...)\,(1+x^2+2x+x^2+...)$$

$$(x^2+x^3+7x^4/12)\,(1+2x+2x^2) \;\Rightarrow\; 2+2+7/12 = 55/12$$

Res: $(55/12)\cdot 4! = \mathbf{110}$

4

• Encontrar a função geradora do problema

$$x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + x_4 + x_5$$

com x_i inteiros que satisfazem

$$2 \le x_1 \le 4 \;\;,\;\; 1 \le x_{2,3,4} \;\;,\;\; x_5 = 0\,,1 \;\;.$$

Calcule o número de soluções que garantem soma 9, 11, 13 e 15.

FUNÇÃO GERADORA:

$$(x^2+x^3+x^4)\,\frac{x^2}{1-x^2}\,\frac{x^3}{1-x^3}\,\frac{x}{1-x}\,(1+x)$$

$$x^2(1+x+x^2)\,\frac{x^2}{1-x^2}\,\frac{x^3}{1-x^3}\,\frac{x}{1-x}\,(1+x)$$

$$x^8\,\frac{1-x^3}{1-x}\,\frac{1}{1-x^2}\,\frac{1}{1-x^3}\,\frac{1}{1-x}\,(1+x)$$

$$\frac{x^8}{(1-x)^3} = x^8 \sum_{r=0}^{\infty} \binom{3+r-1}{r}\, x^r$$

$$\mathbf{9} \;:\; \binom{3}{1} = \mathbf{3}$$

$$\mathbf{11} : \binom{5}{3} = \mathbf{10}$$

$$\mathbf{13} : \binom{7}{5} = \mathbf{21}$$

$$\mathbf{15} : \binom{9}{7} = \mathbf{36}$$

Res: 9 [3] - 11 [10] - 13 [21] - 15 [36]