* PARA SEGUIRMOS EM FRENTE NO ESTUDO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA HÁ A NECESSIDADE DE APRENDERMOS MUITO BEM O PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO. SENDO ASSIM, NA AULA DE HOJE FAREMOS UMA BREVE REVISÃO SOBRE AS QUESTÕES 5 E 8 DA PRIMEIRA PROVA E APROVEITANDO ESSA REVISÃO PARA INSERIR O CONCEITO DE <u>FUNÇÕES GERADORAS</u> E SUAS APLICAÇÕES.

① Encontrar o número de soluções, em inteiros, de $y_1+y_2+y_3=14$, em que $2\leqslant y_1\leqslant 4$, $2\leqslant y_2\leqslant 4$ e $5\leqslant y_3\leqslant 7$. Depois, encontrar o número de soluções para 13 e para 12.

Mudança de variáveis de y_n a x_n

$2\leqslant y_1\leqslant 4$	$y_1=x_1+1$	$x_1\leqslant 3 \to A$
$2\leqslant y_2\leqslant 4$	$y_2=x_2+1$	$x_2\leqslant 3 \to B$
$5\leqslant y_3\leqslant 7$	$y_3=x_3+4$	$x_3\leqslant 3 \to C$

*Obs: notemos que a soma $4+4+7=15$. Para o nº de soluções igual a 14 poderíamos encontrar diretamente as seguintes soluções:

$$\left.\begin{matrix}3+4+7=14\\4+3+7=14\\4+4+6=14\end{matrix}\right\}$$ Logo a resposta seria 3 soluções

$x_1+x_2+x_3=14-1-1-4=8$ TOTAL: $\dfrac{7!}{2!\cdot 5!}$

$$\left.\begin{matrix}A(>3)=7-3=4\\B(>3)=7-3=4\\C(>3)=7-3=4\end{matrix}\right\} 3\times\frac{4!}{2!\,2!}$$

$$\left.\begin{matrix}\cancel{AB(>3,>3)=7-6}\\\cancel{AC(>3,>3)}\\\cancel{BC(>3,>3)}\\\cancel{ABC(>3,>3,>3)}\end{matrix}\right\}\text{não é o caso}$$

Resposta: $\dfrac{7!}{2!\cdot 5!}-3\cdot\dfrac{4!}{2!\,2!}=21-3\times 6=\boxed{3}$

Agora, encontrando as soluções para 13 e para 12.

> (13) Devemos subtrair de 1 (um), as parcelas da resposta anterior, ou seja:

$$\frac{6!}{2!\cdot 4!}-3\cdot\frac{3!}{2!\cdot 1!}=15-9=\boxed{6}$$

> (12) Mais uma vez, devemos subtrair de 1 (um), as parcelas da resposta para o 13:

$$\frac{5!}{2!\cdot 3!}-3\cdot\frac{2!}{2!\cdot 0!}=10-3=\boxed{7}$$

* VAMOS APROVEITAR O EXEMPLO ANTERIOR PARA INTRODUZIR UMA DAS PRINCIPAIS FERRAMENTAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONTAGEM. ESTA TÉCNICA CHAMA-SE FUNÇÕES GERADORAS.

Observemos que, no exercício anterior, tínhamos as restrições de y_1, y_2 e y_3 da seguinte forma: $2 \leq y_1 \leq 4$, $2 \leq y_2 \leq 4$, $5 \leq y_3 \leq 7$.

Dessa forma, poderíamos falar que as variáveis y_1 e y_2 pertencem ao conjunto $\{2, 3, 4\}$ e a variável y_3 pertence ao conjunto $\{5, 6, 7\}$. Tomemos então três polinômios para cada variável y_i, da seguinte forma:

$P_1 = P_2 = x^2 + x^3 + x^4$

$P_3 = x^5 + x^6 + x^7$

FAZENDO $P_1 \times P_2 \times P_3 \Rightarrow (x^2 + x^3 + x^4)^2 (x^5 + x^6 + x^7) =$

$= (x^4 + x^6 + x^8 + 2x^5 + 2x^6 + 2x^7)(x^5 + x^6 + x^7) =$

* reordenando $= (x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 2x^7 + x^8)(x^5 + x^6 + x^7)$

Tomemos esse resultado e vamos construir a seguinte tabela:

Primeiramente sabemos que o menor expoente do produto acima seria, $x^4 \times x^5 = x^9$;

	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	x^{13}	x^{14}	x^{15}
x^5	1	2	3	2	1		
x^6		1	2	3	2	1	
x^7			1	2	3	2	1
	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
Somadas colunas $\rightarrow$	1	3	6	7	6	3	1

Obs: Podemos notar que os valores encontrados em cada linha correspondem aos coeficientes do primeiro polinômio do produto acima:

$(1x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 2x^7 + 1x^8)$

Assim, o polinômio $1x^9 + 3x^{10} + 6x^{11} + 7x^{12} + 6x^{13} + 3x^{14} + 1x^{15}$ é a função geradora para o problema do exemplo anterior, ou seja

$y_1 + y_2 + y_3 = 8 \rightarrow 0$

$2 \leq y_1 \leq 4$ $\quad 9 \rightarrow 1$

$2 \leq y_2 \leq 4$ $\quad 10 \rightarrow 3$

$5 \leq y_3 \leq 7$ $\quad 11 \rightarrow 6$

$\boxed{\begin{matrix} 12 \rightarrow 7 \\ 13 \rightarrow 6 \\ 14 \rightarrow 3 \end{matrix}}$

$15 \rightarrow 1$

$16 \rightarrow 0$

* Obs: notemos que o número de soluções para 8 e 16 é igual a zero, pois o coeficiente da função geradora para esses valores é zero. Observe abaixo:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	6	7	6	3	1	0	0...

Outro exemplo: Encontrar o número de soluções, em inteiros, de $y_1+y_2+y_3=1$

em que $2 \leq y_1 \leq 4$, $2 \leq y_2 \leq 4$ e $5 \leq y_3$. Depois encontrar o resultado para 15 e 20.

Conforme foi feito no exemplo anterior, façamos a mudança de variáveis:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1+1 \\ y_2 &= x_2+1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x_1 &\leq 3 \to A \\ x_2 &\leq 3 \to B \end{aligned}$$

$y_3 = x_3+4$

* Observemos que para y_3, não existe o limite superior

$x_1+x_2+x_3 = 8$ Total $= \dfrac{7!}{2!\cdot 5!}$

$$\left.\begin{aligned} A(>3) &= 7-3=4 \\ B(>3) &= 7-3=4 \end{aligned}\right\} 2\cdot\frac{4!}{2!2!}$$

$\cancel{AB(>3,>3)} = 8-6=2$

Resp: $\dfrac{7!}{2!\cdot 5!} - 2\,\dfrac{4!}{2!2!} = 21-12 = \boxed{9}$

Agora, encontrando as soluções para 15 e 20, temos:

15 Devemos somar 1 (um) as parcelas da resposta anterior:

$$\frac{8!}{2!\cdot 6!} - 2\cdot\frac{5!}{2!3!} + \boxed{\frac{2!}{2!\cdot 0!}}$$

* Obs: Como somamos 1 as parcelas, devemos incluir na resposta, o resultado de AB que é C_2^2.

$28 - 20 + 1 = \boxed{9}$

20 Devemos, dessa vez, somar 5 (cinco) as parcelas do resultado para 15

Assim:

$$\frac{13!}{2!\cdot 11!} - 2\cdot\frac{10!}{2!8!} + \frac{7!}{2!5!} = 78-90+21 = \boxed{9}$$

Aplicando agora o conceito de função geradora, conforme anteriormente

Temos: $(x^2+x^3+x^4)^2(x^5+x^6+x^7+\ldots\ldots)$

$(x^4+2x^5+3x^6+2x^7+x^8)(x^5+x^6+x^7+\ldots)$

* Notemos que, como para y_3 não havia limite superior, o polinômio dessa construção fica da forma apresentada

	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	x^{13}	x^{14}	x^{15}	x^{16}	...
x^5	1	2	3	2	1				
x^6		1	2	3	2	1			
x^7			1	2	3	2	1		
x^8				1	2	3	2	1	...
x^9					1	2	3	2	
x^{10}						1	2	3	
x^{11}							1	2	

(4) Nesse segundo exemplo, como não havia limite para o segundo polinômio, na construção da tabela, observamos que os coeficientes da função geradora a partir de x^{13}, é igual a 9. Assim obtemos a seguinte função geradora:

$$1x^9 + 3x^{10} + 6x^{11} + 8x^{12} + 9x^{13} + 9x^{14} + 9x^{15} + 9x^{16} + \dots$$

Voltando ao resultado para o segundo exemplo, teríamos o seguinte:

$y_1 + y_2 + y_3 = 8 \to 0$

$9 \to 1$

$10 \to 3$

$11 \to 6$

$12 \to 8$

$13 \to 9$

$\boxed{14 \to 9}$

$\boxed{15 \to 9}$

$16 \to 9$

$\vdots$

$\boxed{20 \to 9}$

$\vdots$

* Simplificando; os expoentes da função geradora, são os valores dados a equação, como exemplo: $y_1 + y_2 + y_3 = 14$, nesse caso seria o "x^{14}" da função geradora. Já o número de soluções é igual ao coeficiente desse "x^{14}" que no caso é o 9. Observe a seguir:

$$\dots 9x^{13} + \boxed{9x^{14}} + 9x^{15} + \dots$$

REVISAREMOS AGORA, UMA QUESTÃO SEMELHANTE A QUESTÃO 8 DA 1ª PROVA. SENDO ESSE EXEMPLO, UM POUCO MAIS SIMPLES, A FIM DE PODERMOS ENTENDER MELHOR OS PASSOS DA RESOLUÇÃO

*QUANTAS SÃO AS PERMUTAÇÕES DA PALAVRA "CASA" EM QUE A LETRA C OCUPA O PRIMEIRO LUGAR, OU QUE COMEÇAM POR VOGAL E TERMINA COM S, OU QUE COMEÇAM COM CONSOANTE E TERMINAM COM A

C A S A TOTAL: $\frac{4!}{2!} = 12$

$A\{C \_\_ \_\_ \_\_\} \Rightarrow 3!/2! = 3$

$B\{Vog \_\_ \_\_ S\} \Rightarrow 2! = 2$

$C\{Con \_\_ \_\_ A\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \underline{C}\ \_\_\ \_\_\ \underline{A} = 2! \\ \underline{S}\ \_\_\ \_\_\ \underline{A} = 2! \end{array}\right\} 2! + 2! = 4$

$\cancel{AB} \to$ como A começa com C e B com vogal, é vazia essa interseção

$AC \to [\underline{C}\ \_\_\ \_\_\ \underline{A}] = 2!$

$\cancel{BC} \to$ como B começa com vogal e C com consoante, é vazia essa interseção

$\cancel{ABC} \to$ vazio

Resposta: $3 + 2 + 4 - 2 = \boxed{7}$

Vejamos as permutações

$\boxed{\text{CAAS}}$	$\boxed{\text{ACAS}}$	AASC	SAAC
$\boxed{\text{CASA}}$	ACSA	ASAC	$\boxed{\text{SACA}}$
$\boxed{\text{CSAA}}$	$\boxed{\text{AACS}}$	ASCA	$\boxed{\text{SCAA}}$

Resultado = $\boxed{7}$