MATEMÁTICA DISCRETA | INDUÇÃO MATEMÁTICA
SEGUNDO SEM. 2011 | MA220
UNICAMP | PROF. STEFANO DE LEO

SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Na matemática, os números de Fibonacci são uma sequência ou sucessão definida como recursiva pela fórmula:

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n) \ , \quad \text{com } n \geq 1 \text{ e } F(1) = F(2) = 1 \ .$$

Os primeiros números de Fibonacci são:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, ...$$

Esta sequência foi descrita primeiramente por Leonardo de Pisa, também conhecido como Fibonacci, para descrever o crescimento de uma população de coelhos.

$\odot \longrightarrow \otimes \longrightarrow \otimes\odot$	$\star$	$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 10$
$\odot$	1	0
$\otimes$	1	1
$\otimes\odot$	2	10
$\otimes\odot\otimes$	3	101
$\otimes\odot\otimes\otimes\odot$	5	10110
$\otimes\odot\otimes\otimes\odot\otimes\odot\otimes$	8	10110101
$\otimes\odot\otimes\otimes\odot\otimes\odot\otimes\otimes\odot\otimes\otimes\odot$	13	1011010110110
$\otimes\odot\otimes\otimes\odot\otimes\odot\otimes\otimes\odot\otimes\otimes\odot\otimes\odot\otimes\otimes\odot\otimes\odot\otimes$	21	101101011011010110101
	$\vdots$	

• 1) $F(1) + F(2) + F(3) + ... + F(n) = F(n+2) - 1$ para $n \geq 1$

1.1)
$n = 1$: $\quad F(1) = F(3) - 1 \ \surd$

1.2)
$F(1) + F(2) + F(3) + ... + F(k) = F(k+2) - 1 \ \surd$

$$\underbrace{F(1) + F(2) + F(3) + ... + F(k)}_{F(k+2)-1} + F(k+1) = F(k+3) - 1 \ ?$$

usando $F(k+1) + F(k+2) = F(k+3) \ \surd$

$$\bullet\ \mathbf{2)}\quad F(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \text{ para } n\geq 1$$

2.1a)

$$n=1:\quad 1=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\ \checkmark$$

2.1b)

$$n=2:\quad 1=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\ \checkmark$$

2.2a)

$$F(k)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\ \checkmark$$

2.2b)

$$F(k+1)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\ \checkmark$$

$$F(k+2)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\ ?$$

$$\begin{aligned}
F(k+2)&=F(k+1)+F(k)\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right]-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right]\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\frac{3-\sqrt{5}}{2}\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\ \checkmark
\end{aligned}$$

$$\underbrace{F(n)}_{n\gg 1}\rightarrow\frac{1}{\sqrt{5}}\,\phi^n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\underbrace{F(n+1)/F(n)}_{n\gg 1}\rightarrow\phi$$

$$\bullet\ \mathbf{3)}\quad F(n)<\left(\frac{7}{4}\right)^n \text{ para } n\geq 1$$

$$\bullet\ \mathbf{4)}\quad \sum_{p=1}^{2n-1}F(p)F(p+1)=\left[F(2n)\right]^2 \qquad \text{para } n\geq 1$$

$$\bullet\ \mathbf{5)}\quad \sum_{p=1}^{2n}F(p)F(p+1)=\left[F(2n+1)\right]^2-1 \qquad \text{para } n\geq 1$$