MS328 Teste 7 - Método Hungaro

Augusto Andrade RA:213362 Nº:26

Questão 1.:

	$Ta1$	$Ta2$	$Ta3$	$Ta4$	$Ta5$
$Op1$	5	2	3	4	−3
$Op2$	0	−4	2	−2	0
$Op3$	1	0	1	−1	3
$Op4$	4	2	1	3	1
$Op5$	3	4	−5	4	2

Portanto a matrix de custos A é

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & -4 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Vamos subtrair de cada linha o menor valor dessa linha, afim de deixarmos todas as linhas com menor valor sendo 0

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & -4 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} +3 \\ +4 \\ +1 \\ -1 \\ +5 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 5 & 6 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Vamos fazer o mesmo processo para as colunas

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 8 & 5 & 6 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 9 & 7 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 9 & 0 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Tentando designar zeros vemos que

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 & 7 & \boxed{0} \\ 2 & \boxed{0} & 6 & 2 & 4 \\ \boxed{0} & 1 & 2 & \cancel{0} & 4 \\ 1 & 1 & \boxed{0} & 2 & \cancel{0} \\ 6 & 9 & \cancel{0} & 9 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \text{não há nenhum 0 para designarmos}$$

Como não há nenhum 0 na ultima linha para designarmos veremos que podemos selecionar todos os 0 usando menos de 5 colunas ou linhas e usaremos o método húngaro:

- Passo 1: Selecionar o mínimo de linhas e colunas afim de selecionarmos todos os zeros.
- Passo 2: Subtrair o menor dos elementos livres em todos os elementos livres e soma-lo nas intersecções das seleções.
- Passo 3: Se podemos selecionar todos os 0 usando menos linhas e colunas do que o tamanho da matriz: itere novamente.
  - Se não: o algoritmo termina e selecionamos um zero por linha e coluna dessa matriz de custos modificada, as posiçãos desses zeros representam as posições na matriz original que nos dão a solução de mínimo quando somadas.

Iteração 1:

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 9 & 0 & 9 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 & 6 & \boxed{0} \\ 2 & \boxed{0} & 7 & 2 & 5 \\ \cancel{0} & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & \cancel{0} & \cancel{0} & 1 & \cancel{0} \\ 5 & 8 & \boxed{0} & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Fim do algoritmo.

Portanto temos as seguintes designações:

	$Ta1$	$Ta2$	$Ta3$	$Ta4$	$Ta5$
$Op1$	5	2	3	4	-3
$Op2$	0	-4	2	-2	0
$Op3$	1	0	1	-1	3
$Op4$	4	2	1	3	1
$Op5$	3	4	-5	4	2

Logo o custo mínimo nesse problema de designação é

$$c_{\min} = 4 - 4 - 5 - 1 - 3 = \boxed{-9}$$

Para encontrarmos o máximo vamos multiplicar a matriz A por -1 e tratar o problema como um problema de minimização:

$$A_{max} = -A = \begin{bmatrix} -5 & -2 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & -1 & -3 & -1 \\ -3 & -4 & 5 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

Vamos subtrair de cada linha o menor valor dessa linha, afim de deixarmos todas as linhas com menor valor sendo 0

$$\begin{bmatrix} -5 & -2 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & -1 & -3 & -1 \\ -3 & -4 & 5 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} +5 \\ +2 \\ +3 \\ +4 \\ +4 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 6 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 9 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Tentando designar zeros vemos que

$$\begin{bmatrix} \boxed{0} & 3 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 6 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ \cancel{0} & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 9 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{não há nenhum 0 para designarmos}$$

Como não há nenhum 0 na penultima linha para designarmos veremos que podemos selecionar todos os 0 usando menos de 5 colunas ou linhas e usaremos o método húngaro:

Iteração 1:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 6 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & \boxed{1} & 3 \\ 1 & 0 & 9 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 8 \\ 2 & 5 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 10 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{0} & 2 & 2 & \cancel{0} & 8 \\ 2 & 5 & \boxed{0} & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & \boxed{0} \\ \cancel{0} & 1 & 3 & \boxed{0} & 3 \\ 2 & \boxed{0} & 10 & \cancel{0} & 3 \end{bmatrix} \; ou \; \begin{bmatrix} \cancel{0} & 2 & 2 & \boxed{0} & 8 \\ 2 & 5 & \boxed{0} & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 1 & 3 & \cancel{0} & 3 \\ 2 & \boxed{0} & 10 & \cancel{0} & 3 \end{bmatrix}$$

Fim do algoritmo.

Portanto temos as seguintes designações:

	$Ta1$	$Ta2$	$Ta3$	$Ta4$	$Ta5$
$Op1$	**5**	2	3	4	-3
$Op2$	0	-4	**2**	-2	0
$Op3$	1	0	1	-1	**3**
$Op4$	4	2	1	**3**	1
$Op5$	3	**4**	-5	4	2

ou

	$Ta1$	$Ta2$	$Ta3$	$Ta4$	$Ta5$
$Op1$	5	2	3	**4**	-3
$Op2$	0	-4	**2**	-2	0
$Op3$	1	0	1	-1	**3**
$Op4$	**4**	2	1	3	1
$Op5$	3	**4**	-5	4	2

Logo o custo máximo nesse problema de designação é

$$c_{\max} = 5 + 2 + 4 + 3 + 3 = 4 + 4 + 2 + 4 + 3 = \boxed{17}$$