1.

Fórmula de Recorrência

Faremos dois exercícios. Um com duas raízes diferentes e outro com raiz dupla, para mostrar os dois modelos de fórmula de recorrência.
Em tais casos, trabalharemos com equação de 2º grau porque partimos de 3 dados iniciais.

Veja,

2 dados iniciais → Equação 1º grau
3 dados iniciais → Equação 2º grau
⋮
n dados iniciais → Equação (n-1)º grau
(n+1) dados iniciais → Equação nº grau

- Exercício - Tipo 1 - Duas Raízes Diversas: $A(\alpha_1^n) + B(\alpha_2^n)$

Dados iniciais $f_0 = 6$; $f_1 = 5$; $f_{n+2} = 5f_{n+1} - 6f_n$

Obtenha a fórmula de recorrência?

- resolução:

• Note que são três dados iniciais: $\begin{cases} f_{n+2} = \alpha^2 \\ f_{n+1} = \alpha \\ f_n = 1 \ (\alpha^0 = 1) \end{cases}$

Por isso, transformamos

$$f_{n+2} = 5f_{n+1} - 6f_n \rightarrow \alpha^2 = 5\alpha^1 - 6\alpha^0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha^2 = 5\alpha - 6 \rightarrow \boxed{\alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0}$$; agora resolvemos esta equação de 2º grau →

2.

• Resolvendo a equação $\alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0$, obtemos as raízes:

$$\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(1).(6)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} =$$

$$= \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \alpha_1 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \alpha_2 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

As raízes são $\underline{\underline{\alpha_1 = 2}}$ e $\underline{\underline{\alpha_2 = 3}}$,

Agora usamos o modelo

$$\boxed{A(\alpha_1^n) + B(\alpha_2^n)}$$

obtemos: $A(2^n) + B(3^n)$; agora, usamos os dados iniciais para obter os coeficientes A e B:

(I.) $n=0 \rightarrow$

$$A(2^0) + B(3^0) = 6$$
$$A(1) + B(1) = 6$$
$$\boxed{A + B = 6} \quad (I.)$$

(II.) $n=1 \rightarrow$

$$A(2^1) + B(3^1) = 5$$
$$A(2) + B(3) = 5$$
$$\boxed{2A + 3B = 5} \quad (II.)$$

$\rightarrow$ agora, resolvemos o sistema:

3.

- De (I.) e (II.), temos o seguinte sistema para resolver:

$$\begin{cases} A + B = 6 \\ 2A + 3B = 5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A = 13 \\ B = -7 \end{cases}$$

e, finalmente, chegamos na <u>fórmula de recorrência</u> seguinte:

$$A(2^n) + B(3^n) \longrightarrow \boxed{13(2^n) - 7(3^n)}$$

. A partir de agora, só falta conferir se esta fórmula de recorrência confere com os dados iniciais:

$$f_0 = 13(2^0) - 7(3^0) = 13.(1) - 7.(1) = 13 - 7 = 6 \checkmark$$

$$f_1 = 13(2^1) - 7(3^1) = 13.(2) - 7(3) = 26 - 21 = 5 \checkmark$$

$$f_{n+2} = 5f_{n+1} - 6f_n \rightarrow$$

$$\rightarrow 13(2^{n+2}) - 7(3^{n+2}) = 5\left[13(2^{n+1}) - 7(3^{n+1})\right] - 6\left[13(2^n) - 7(3^n)\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow 13.2^n.2^2 - 7.3^n.3^2 = 5\left[13.2^n.2^1 - 7.3^n.3^1\right] - 6\left[13.2^n - 7.3^n\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow (4.13.2^n - 7.9.3^n) = (5.13.2).2^n - (5.7.3)3^n - (6.13).2^n + (6.7).3^n \rightarrow$$

$$\rightarrow (52.2^n - 63.3^n) = 130.2^n - 105.3^n - 78.2^n + 42.3^n \rightarrow$$

$$\rightarrow (52.2^n - 63.3^n) = (130 - 78).2^n - (105 - 42).3^n \rightarrow$$

$$\rightarrow (52.2^n - 63.3^n) = (52.2^n - 63.3^n) \checkmark$$

confirmado.

FIM

- Exercício - Tipo 2 -

Raiz Dupla:

$$A.(\alpha^n) + n.B(\alpha^n)$$

novidade

• **Dados iniciais:**

$f_0 = 2$; $f_1 = 4$; $f_2 = 6$;

$$f_{n+2} = 2f_{n+1} - f_n$$

Obtenha a fórmula de recorrência?

· resolução: Note que são três dados iniciais

$$\begin{cases} f_{n+2} \rightarrow \alpha^2 \\ f_{n+1} \rightarrow \alpha^1 \\ f_n \rightarrow \alpha^0 = 1 \end{cases}$$

· Montamos a equação de 2º grau:

$$f_{n+2} = 2f_{n+1} - f_n$$

$$\alpha^2 = 2\alpha - 1$$

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \rightarrow \text{raiz dupla: } \alpha = 1$$

• Agora, usamos o modelo: $\boxed{A(\alpha^n) + n.B(\alpha^n)}$

novidade

e obtemos:

$$A(1^n) + n.B(1^n) \rightarrow \boxed{A + n.B}$$

; vamos agora obter os coeficientes A e B usando os dados iniciais:

$$\boxed{A + nB}$$

$n=0 \longrightarrow \quad A + 0 \cdot B =$

$A + 0 = 2 \longrightarrow A = 2$

$n=1 \longrightarrow \quad A + 1 \cdot B =$

$A + B = 4$

$2 + B = 4 \longrightarrow B = 2$

E assim chegamos na seguinte fórmula de recorrência:

$$A + nB = 2 + n2 = 2(n+1)$$

- Agora, só falta conferir com os dados iniciais para encerrar o exercício:

$f_{n+2} = 2f_{n+1} - f_n \longrightarrow$

$\rightarrow 2[(n+2)+1] = 2[2((n+1)+1)] - 2(n+1) \rightarrow$

$\rightarrow 2(n+3) = 2[2(n+2)] - 2n - 2 \longrightarrow$

$\rightarrow 2(n+3) = 2(2n+4) - 2n - 2 \longrightarrow$

$\rightarrow 2(n+3) = 4n + 8 - 2n - 2 \longrightarrow$

$\rightarrow 2(n+3) = 2n + 6 \longrightarrow$

$\rightarrow 2(n+3) = 2(n+3)$; conferido

FIM

- **ADENDO:** Se neste caso quisessemos calcular f_{50}, bastaria usar a fórmula:

$$f_{50} = 2(n+1) = 2(50+1) = 2 \cdot (51) = 102.$$

Exercício Resolvido - Tipo 1 - $A(\alpha_1^n) + B(\alpha_2^n)$

- Dados iniciais

$f_0 = 1$; $f_1 = 2$; $f_2 = 4$

$f_{n+2} = 3f_{n+1} - 2f_n$

Obtenha a fórmula de recorrência e calcule f_{10}?

- resolução:

- 3 dados iniciais $\longrightarrow$ $\begin{cases} f_{n+2} = \alpha^2 \\ f_{n+1} = \alpha^1 \\ f_{n+0} = \alpha^0 = 1 \end{cases}$

$f_{n+2} = 3f_{n+1} - 2f_n \rightarrow \alpha^2 = 3\alpha - 2$

$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$, resolvemos esta equação de 2º grau

$$\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \rightarrow \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2$$

Assim, obtemos $A(1^n) + B(2^n)$ e usamos os dados iniciais para calcular os coeficientes A e B:

$n=0 \rightarrow A(1^0) + B(2^0) = 1 \rightarrow A + B = 1$ (I.)

$n=1 \rightarrow A(1^1) + B(2^1) = 2 \rightarrow A + 2B = 2$ (II.)

Obtemos o sistema $\begin{cases} A + B = 1 \\ A + 2B = 2 \end{cases}$ e obtemos os valores de A e B, sendo $\boxed{A = 0}$ e $\boxed{B = 1}$

Portanto, $\boxed{\text{fórmula de recorrência é } 2^n}$

Assim, $f_{10} = 2^{10}$//

FIM