Primeira prova 2018

1) 1.2 pontos

Qual é a probabilidade de obter um anagrama que satisfaz pelo menos uma das seguintes condoções

a) Vog Con x x x x x E
b) Vog B x x x x A x
c) A x x Con x x x x

do conjunto de letras AAABBCEE

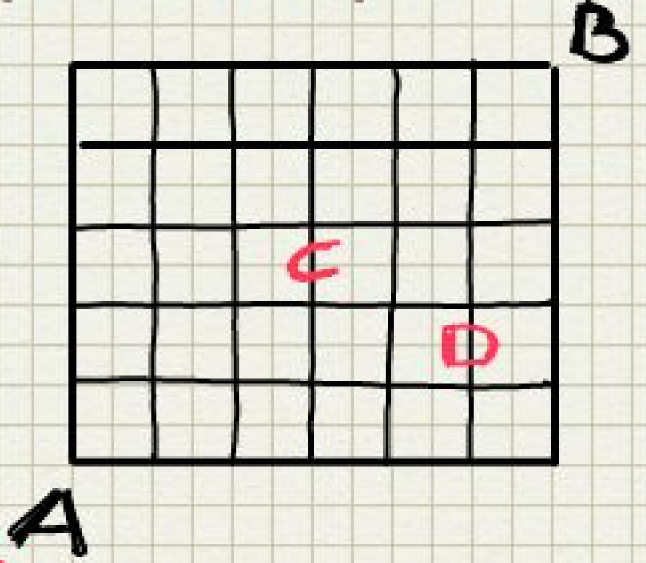
2) 1.3 pontos

Encontre as soluções em inteiros positivos, negativos e nulos do sistema

$$y_1 + y_2 + y_3 = 16 \qquad \begin{array}{l} -3 \le y_1 \le 2 \\ 2 \le y_2 \le 7 \\ 2 \le y_3 \le N \end{array}$$

3) 0.5 pontos

Encontre entre todos os possíveis caminhos a probabilidade de ir de A até B passando para C, para D e não passando para C e D



movimentos
para direita
para cima

4) 2.0 pontos

Encontrar o número mínimo e máximo de soluções em inteiros positivos, negativos e nulos do sistema

$$y_1 + y_2 + y_3 = N \qquad \begin{array}{l} -2 \le y_1 \le 8-N \\ 0 \le y_2 \le 8 \\ -4 \le y_3 \le 5 \end{array} \qquad 0 \le N \le 10$$

1) RESOLUSÃO

a) Vog Con • • • • • E $\quad 5! = 120$

b) Vog B • • • • A • $\quad 5! = 120$

c) A • • Con • • • • $\quad \frac{3}{8}6! = \frac{3\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{8} = 270$

ab) Vog B • • • • A E $\quad \frac{3}{2}4! = 36$

ac) A Con • Con • • • E $\quad \frac{3}{2}4! = 36$

bc) A B • Con • • A • $\quad 4! = 24$

abc) A B • Con • • A E $\quad 2\cdot3! = 12$

a) ABE, ACE, EBE, ECE $\quad 5!$ $\quad$ 1/2! AA; 1/2!2! AA BB; 1/3! AAA; 1/3!2! AAA BB

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12} = \frac{6+3+2+1}{12} = 1$$

b) ABA, EBA $\quad 5!$ $\quad$ 1/2! EE; 1/2! AA

c) AB, AC $\quad 6!$ $\quad$ 1/2!2! AA EE; 1/2!2!2! AABBEE $\quad \frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

ac) ABBE, ABCE, ACBE $\quad 4!$ $\quad$ 1/2! AA; 1/2! AA; 1/2! AA $\quad \frac{3}{2}$

ab) ABAE, EBAE $\quad 4!$ $\quad$ 1; 1/2! AA $\quad \frac{3}{2}$

bc) ABBA, ABCA $\quad 4!$ $\quad$ 1/2! EE; 1/2! EE

abc) ABBAE, ABCAE $\quad 3!$ $\quad$ 1; 1 $\quad 2$

ANAGRAMAS QUE RESPEITAM PELO MENOS UMA DAS CONDIÇÕES

$$120+120+270-36-36-24+12$$
$$510-96+12$$
$$510-84 = \boxed{426}$$

TOT ANAGRAMAS $\quad \frac{8!}{3!\,2!\,2!} = \frac{8!}{4!}$

$$8\cdot7\cdot6\cdot5 = \boxed{1680}$$

Probabilidade $\quad \frac{426}{1680} = \frac{\cancel{213}}{\cancel{840}} = \boxed{\frac{71}{280}} \approx \frac{1}{4}$

2) RESOLUSÃO

$-3 \le x_1-4 \le 2 \qquad 1 \le x_1 \le 6$

$2 \le x_2+1 \le 7 \qquad 1 \le x_2 \le 6$

$2 \le x_3+1 \le N \qquad 1 \le x_3 \le N-1$

$$y_1+y_2+y_3 = 16$$
$$x_1-4+x_2+1+x_3+1 = 16$$
$$\boxed{x_1+x_2+x_3 = 18}$$

tot: $\binom{17}{2}$

$A(>6)\ \binom{11}{2} \quad B(>6)\ \binom{11}{2} \quad C(>N-1)\ \binom{18-N}{2}$

$AB(>12)\ \binom{5}{2} \quad AC(>5+N)\ \binom{12-N}{2} \quad BC(>5+N)\ \binom{12-N}{2}$

$ABC(>11+N)\ \binom{6-N}{2}$

IMPORTANTE QUAL É O MÍNIMO N QUE GARANTE UMA SOLUÇÃO

$$\underset{x_1\,max}{6}+\underset{x_2\,max}{6}+\underset{x_3\,max}{N-1} = 18 \qquad N=7 \Rightarrow \cancel{\binom{6-N}{2}}$$

$7 \le N \le 10 \qquad \binom{17}{2} - 2\binom{11}{2} - \binom{18-N}{2} + \binom{5}{2} + 2\binom{12-N}{2}$

$11 \le N \le 16 \qquad \binom{17}{2} - 2\binom{11}{2} - \binom{18-N}{2} + \binom{5}{2}$

$N \geq 17 \quad \binom{17}{2} - 2\binom{11}{2} + \binom{5}{2}$

A PARTIR DE N=17 NÃO MUDA O NÚMERO DE SOLUÇÕES
ESTE NÚMERO PODE SER OBTIDO OBSERVANDO QUE

$$x_{1,min} + x_{2,min} + x_{3,max} = 18$$

$$1 + 1 + N_{max} - 1 = 18 \Rightarrow N_{max} = 17 \ ✓$$

NÚMERO MÁXIMO DE SOLUÇÕES É $17 \cdot 8 - 11 \cdot 10 + 10 = \boxed{36}$

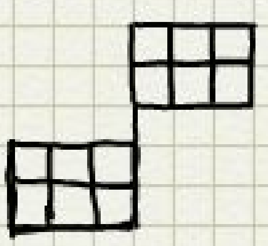
CONTROLAMOS QUE PARA N=7 TEMOS UMA SÓ SOLUÇÃO (6,6,6)

$$\binom{17}{2} - 2\binom{11}{2} - \binom{11}{2} + \binom{5}{2} + 2\binom{5}{2}$$

$$17 \cdot 8 - 3 \cdot 11 \cdot 5 + 3 \cdot 10 = 136 - 165 + 30 = 1 \ ✓$$

3) RESOLUSÃO

CAMINHO QUE PASSA PELO PONTO A

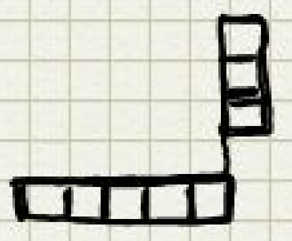


$\binom{5}{3}\binom{5}{3}$

$\boxed{100}$

A

CAMINHO QUE PASSA PELO PONTO B



$\binom{6}{5}\binom{4}{1}$

$\boxed{24}$

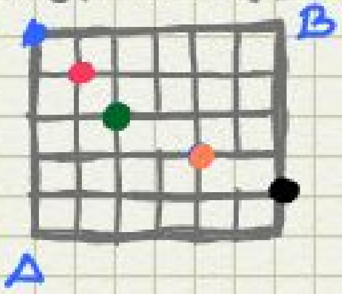
B

CAMINHOS POSSÍVEIS

$$\frac{11!}{6!\,5!} = \frac{11 \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{9} \cdot 8 \cdot 7}{\cancel{120}} \quad {}^{3\ 2}$$

$\boxed{462}$

CALCULAMOS AQUELES SEM A E B
PARA CONTROLE (DEVEM SER 462-124=338)



A•B $\binom{5}{0}\binom{6}{6} = 1$ A•B $\binom{5}{1}\binom{6}{5} = 30$

A•B $\binom{5}{2}\binom{6}{4} = 150$ A•B $\binom{6}{4}\binom{5}{2} = 150$

A•B $\binom{7}{6}\binom{4}{0} = 7$ 338!

$$\boxed{P(A) = \frac{100}{462} \qquad P(B) = \frac{24}{462} \qquad P(\cancel{A},\cancel{B}) = \frac{338}{462}}$$

4) RESOLUSÃO

$-2 \leq x_1 - 3 \leq 8 - N \qquad 1 \leq x_1 \leq 11 - N$

$0 \leq x_2 - 1 \leq 8 \qquad 1 \leq x_2 \leq 9 \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 9 + N$

$-4 \leq x_3 - 5 \leq 5 \qquad 1 \leq x_3 \leq 10 \qquad (0 \leq N \leq 10)$

$y_1 + y_2 + y_3 = N \rightarrow x_1 - 3 + x_2 - 1 + x_3 - 5 = N$

TOT SEM LIMITAÇÕES $\binom{8+N}{2}$

A(>11-N) $\binom{8+N-11+N}{2} = \binom{2N-3}{2}_{N\geq 3}$

B(>9) $\binom{N-1}{2}_{N\geq 3}$ C(>10) $\binom{N-2}{2}_{N\geq 4}$

AB $(>20-N)$ $\quad \binom{8+N-20+N}{2} = \binom{2N-12}{2}_{N\geq 7}$

AC $(>21-N)$ $\quad \binom{8+N-21+N}{2} = \binom{2N-13}{2}_{N\geq 8}$

BC (>19) $\quad \cancel{\binom{N-11}{2}} \quad N\leq 10$

ABC $(>30-N)$ $\quad \binom{8+N-30+N}{2} = \cancel{\binom{2N-22}{2}} \quad N\leq 10$

$0\leq N\leq 2 \quad \binom{8+N}{2}$

$N=3 \quad \binom{8+N}{2}-\binom{2N-3}{2}-\binom{N-1}{2}$

$4\leq N\leq 6 \quad \binom{8+N}{2}-\binom{2N-3}{2}-\binom{N-1}{2}-\binom{N-2}{2}$

$N=7 \quad \binom{8+N}{2}-\binom{2N-3}{2}-\binom{N-1}{2}-\binom{N-2}{2}+\binom{2N-12}{2}$

$8\leq N\leq 10 \quad \binom{8+N}{2}-\binom{2N-3}{2}-\binom{N-1}{2}-\binom{N-2}{2}+\binom{2N-12}{2}+\binom{2N-13}{2}$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	N
28	36	45	51	52	48	39	16	15	7	2	
				MAX						MIN	

CONTROLAMOS OS RESULTADOS OBTIDOS PARA $N=10$ (2) E $N=9$ (7) COMO EXERCÍCIO

$\boxed{N=10}$ $\quad x_1+x_2+x_3=19$ $\quad 1\leq x_1\leq 1$, $1\leq x_2\leq 9$, $1\leq x_3\leq 10$ $\quad x_2+x_3=18$

SOLUÇÕES $(1,8,10)$ E $(1,9,9)$ $\quad \boxed{2}$

$\boxed{N=9}$ $\quad x_1+x_2+x_3=18$ $\quad 1\leq x_1\leq 2$, $1\leq x_2\leq 9$, $1\leq x_3\leq 10$

$x_1=1 \quad x_2+x_3=17 \quad (1,7,10);(1,8,9);(1,9,8)$

$x_1=2 \quad x_2+x_3=16 \quad (2,6,10);(2,7,9);(2,8,8);(2,9,7)$

TOTAL $\boxed{7}$