

Princípio de inclusão e exclusão

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$$



$$N(A) = 7$$

$$N(B) = 9$$

$$N(A \cap B) = 2$$

$$N(A \cup B) = 7 + 9 - 2 = 14$$

$$\begin{aligned} N(A \cup B \cup C) &= N(A \cup B) + N(C) - N[(A \cup B) \cap C] \\ &= N(A) + N(B) - N(A \cap B) + N(C) - N[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \end{aligned}$$

$$N[(A \cap C) \cup (B \cap C)] = N(A \cap C) + N(B \cap C) - N(A \cap B \cap C)$$

$$N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(B \cap C) - N(A \cap C) + N(A \cap B \cap C)$$

Usando

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B) \quad (1)$$

$$N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C) \quad (2)$$

encontre a expressão para $N(A \cup B \cup C \cup D)$.

- $N(A \cup B \cup C \cup D) = N(A_* \cup D)$ com $A_* = A \cup B \cup C$. Usando (1) temos

$$N(A \cup B \cup C \cup D) = N(A_*) + N(D) - N(A_* \cap D).$$

Usando (2) e observando que

$$A_* \cap D = (A \cup B \cup C) \cap D = (A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D),$$

temos

$$\begin{aligned} N(A \cup B \cup C \cup D) &= N(A) + N(B) + N(C) + N(D) \\ &\quad - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C) \\ &\quad - N[(A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)]. \end{aligned}$$

Usando novamente a (2) temos

$$\begin{aligned} N[(A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)] &= N(A \cap D) + N(B \cap D) + N(C \cap D) \\ &\quad - N[(A \cap D) \cap (B \cap D)] - N[(A \cap D) \cap (C \cap D)] - N[(B \cap D) \cap (C \cap D)] \\ &\quad + N[(A \cap D) \cap (B \cap D) \cap (C \cap D)], \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} N(A \cup B \cup C \cup D) &= N(A) + N(B) + N(C) + N(D) \\ &\quad - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(A \cap D) - N(B \cap C) - N(B \cap D) - N(C \cap D) \\ &\quad + N(A \cap B \cap C) + N(A \cap C \cap D) + N(A \cap B \cap D) + N(B \cap C \cap D) \\ &\quad - N(A \cap B \cap C \cap D). \end{aligned}$$

EX. 1

NUNA CLASSE DE 30 ALUNOS, 14 FALAM INGLÊS, 5 ALEMÃO E 7 FRANCÊS. SABENDO QUE 3 FALAM INGLÊS E ALEMÃO, 2 INGLÊS E FRANCÊS, 2 ALEMÃO E FRANCÊS E QUE 1 FALA AS 3

DETERMINAR O NÚMERO DE ALUNOS QUE FALAM PELO MENOS UMA LÍNGUA

$$A \text{ (INGLÊS)} : 14$$

$$B \text{ (ALEMÃO)} : 5$$

$$C \text{ (FRANCÊS)} : 7$$

$$A \cap B : 3$$

$$A \cap C : 2$$

$$B \cap C : 2$$

$$A \cap B \cap C : 1$$

$$N(A \cup B \cup C) = 14 + 5 + 7 - 3 - 2 - 2 + 1 = \boxed{20}$$

EX. 2

QUANTOS INTEIROS ENTRE 1 E 3600 (INCLUSIVE) SÃO DIVISÍVEIS POR 3, 5 E 7?

$$N(A) = \frac{3600}{3} = 1200$$

$$N(B) = \frac{3600}{5} = 720$$

$$N(C) = \frac{3600}{7} \Rightarrow 514$$

$$N(A \cap B) = \frac{3600}{15} = 240$$

$$N(A \cap C) = \frac{3600}{21} \Rightarrow 171$$

$$N(B \cap C) = \frac{3600}{35} \Rightarrow 102$$

$$N(A \cap B \cap C) = \frac{3600}{105} \Rightarrow 34$$

$$N(A \cup B \cup C) = 1200 + 720 + 514 - 240 - 171 - 102 + 34 = \boxed{1995}$$