Introdução à teoria dos grafos

Grafo: modelo matemático para representar relações entre objetos utilizado na resolução de problemas em diversas áreas caracterizado para um conjunto de vertices e um conjuntos de arestas (arcos)

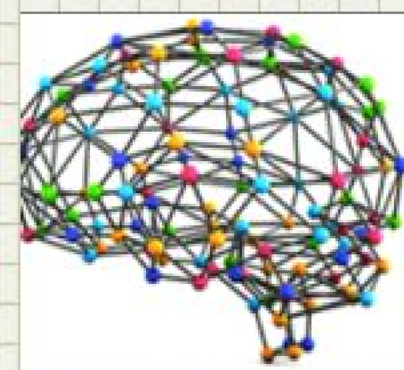
Exemplos de problemas que serão resolvidos no curso:

Problema do mínimo caminho
Problema de designação

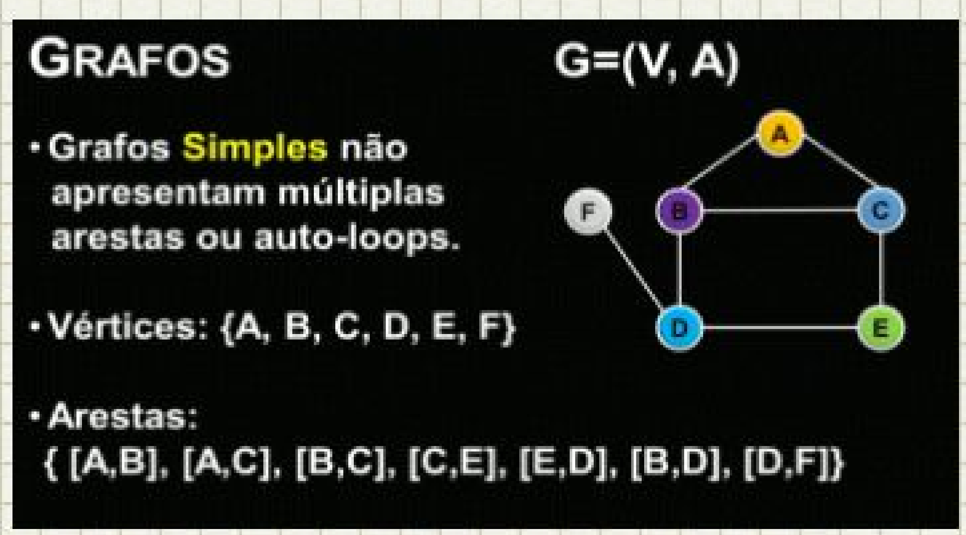
Exemplos de grafos:

Redes metropolitanas

Redes Sociais

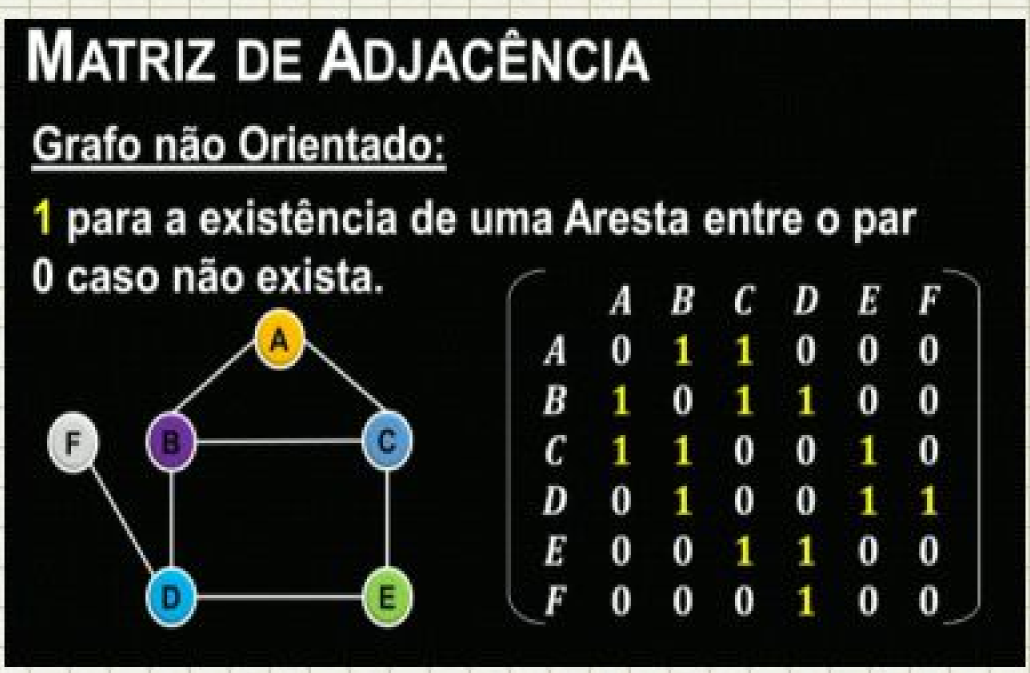


Redes Neurais



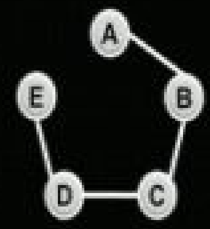
G(6,7)

A(A,2) A(B,2) A(C,2)
A(D,3) A(E,2) A(F,1)



Grafo Conexo

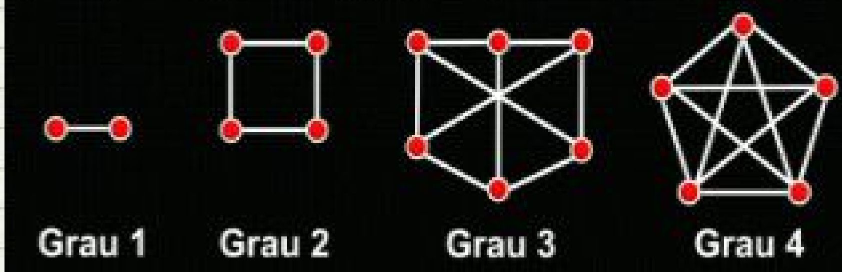
Um grafo é conexo se houver um caminho entre quaisquer dois vértices



O número mínimo de arestas para o grafo ser conexo é a quantidade de vértices menos um

Grafo Regular

- Os vértices têm o mesmo grau

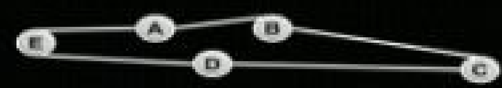


Grafo Completo

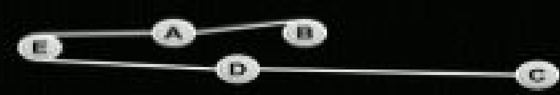
- É um Grafo Regular Fortemente Conexo
- Todos os pares de vértices são adjacentes
- Devem existir n(n-1)/2 arestas

Ciclo e Circuito

- Um ciclo é um caminho de algum vértice *v* até novamente *v*, de forma que nenhum vértice ocorra mais de uma vez no caminho.

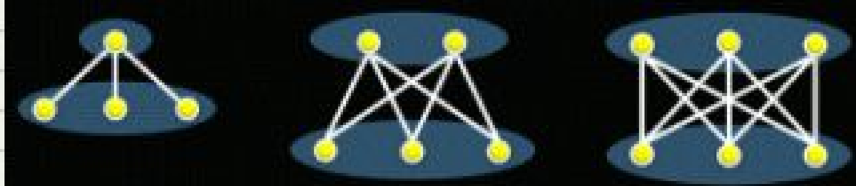


- Um grafo sem ciclos é dito grafo acíclico.



Grafo Completo Bipartido

- Cada nó de um conjunto está ligado a todos os outros nós do outro conjunto

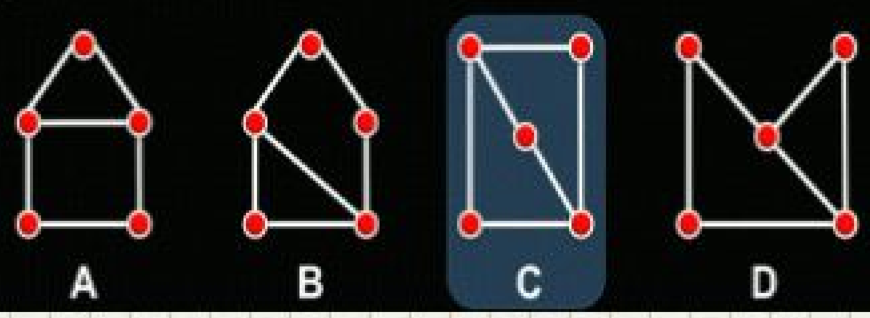


Grafos Isomorfos

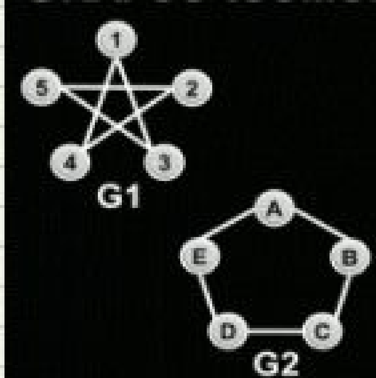
Grafos isomorfos podem ter representações gráficas diferentes mas são essencialmente o mesmo grafo.

Grafos Isomorfos

Qual dos Grafos não é isomorfo aos outros?



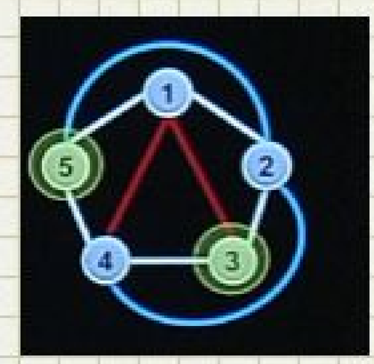
Grafos Isomorfos

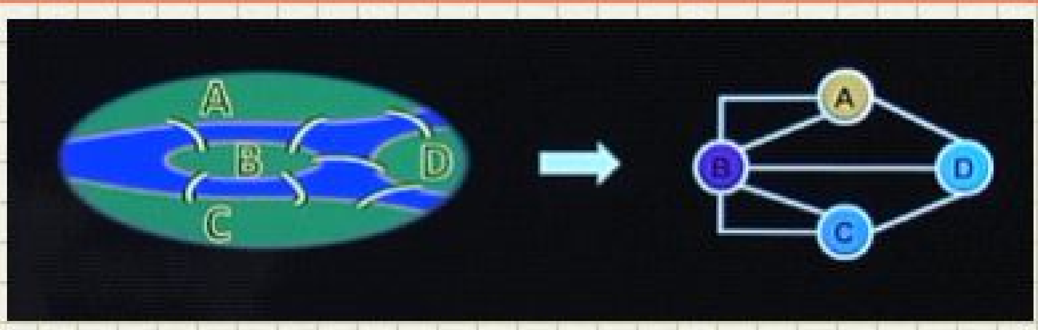


- tem 5 nós e 5 arcos;
- não tem arcos paralelos ou laços;
- tem 5 nós de grau 2;
- são conexos;
- tem apenas 1 ciclo.

Grafos Planares

- Podem ser desenhados em um plano, de forma que suas arestas se interceptem apenas em vértices.





Ciclo ou Circuito Euleriano

O problema consiste em encontrar caminhos, de início e fim no mesmo vértice, passando por todas as arestas uma única vez.

Um mesmo vértice pode ser visitado mais de uma vez.

Caminho Euleriano
início e fim em vertices diferentes

Ciclo ou Circuito Euleriano

Grafo Não Orientado - Condições necessárias e suficientes:
- Deve ser conexo e
- Cada vértice ter grau par

Grafo Orientado - Condições:
- Deve ser fortemente conexo e
- Cada vértice precisa ter o grau de entrada e de saída iguais.

Apenas o Caminho Euleriano

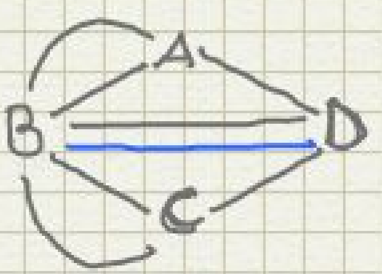
Grafo Não Orientado - Condições:
- Deve ser conexo e
- Vértices de início e fim do caminho terão grau ímpar, os demais grau par

Grafo Orientado - Condições:
- Deve ser fortemente conexo e
- Dois vértices terão grau ímpar, onde o grau de entrada e de saída difere em 1, os demais grau par

Como mudar o grafo anterior para obter um caminho e um ciclo Euleriano?

Caminho Euleriano

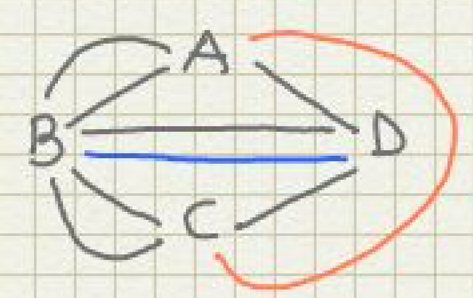
ex AB, BA, AD, DB, BC, CB, BD, DC



Vertices A e C
início e fim
o viceversa

Ciclo Euleriano

ex BA, AB, BD, DA, AC, CB, BC, CD, DB



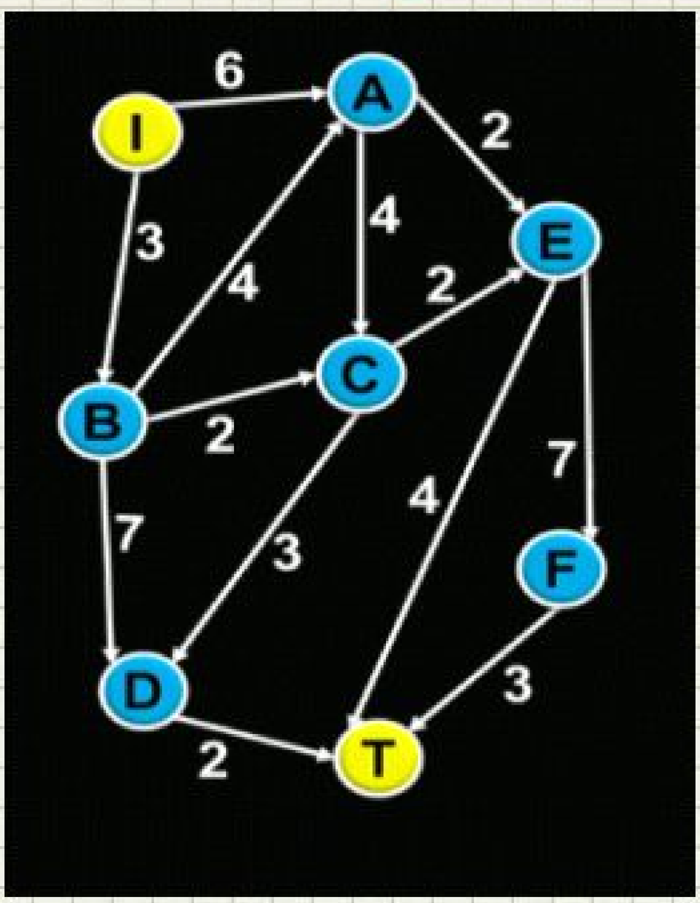
ALGORITMO DO CAMINHO MÍNIMO

Foi criado por Edsger Wybe Dijkstra em 1956 e publicado em 1959;

Soluciona o problema do caminho de custo mínimo num grafo ponderado de valores **não negativos**.

Princípio de Otimalidade de Bellman:

- "Um caminho mínimo é constituído de subcaminhos mínimos".



A	B	C	D	E	F	T
I6	I3					
B7 I6		B5	B10			
I6			C8	C7		
			A10 C8	A8 C7		
			C8		E14	E11
					E14	D10

IBA = 7 B7 > I6
IBC = 5 B5
IBD = 10 B10

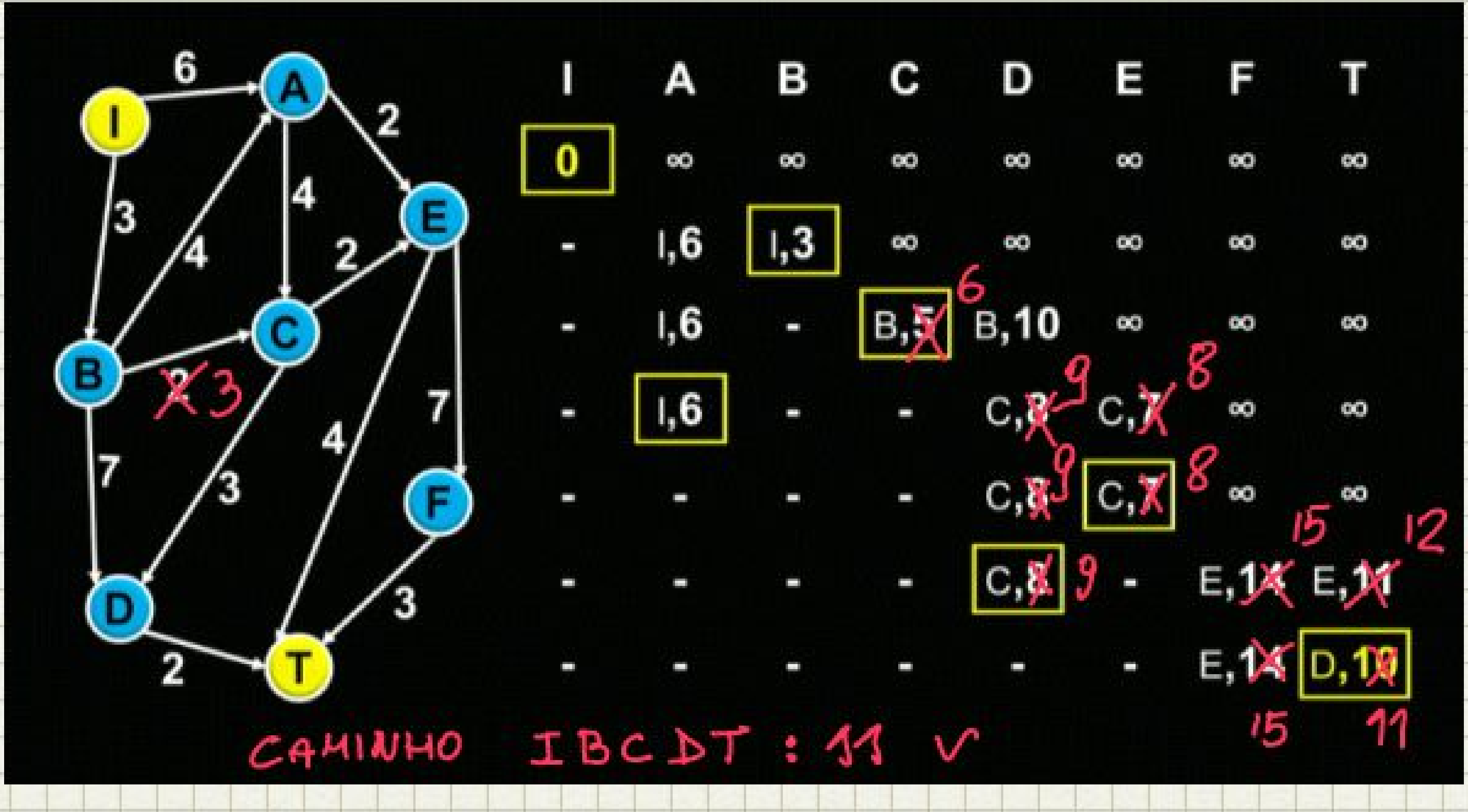
D10

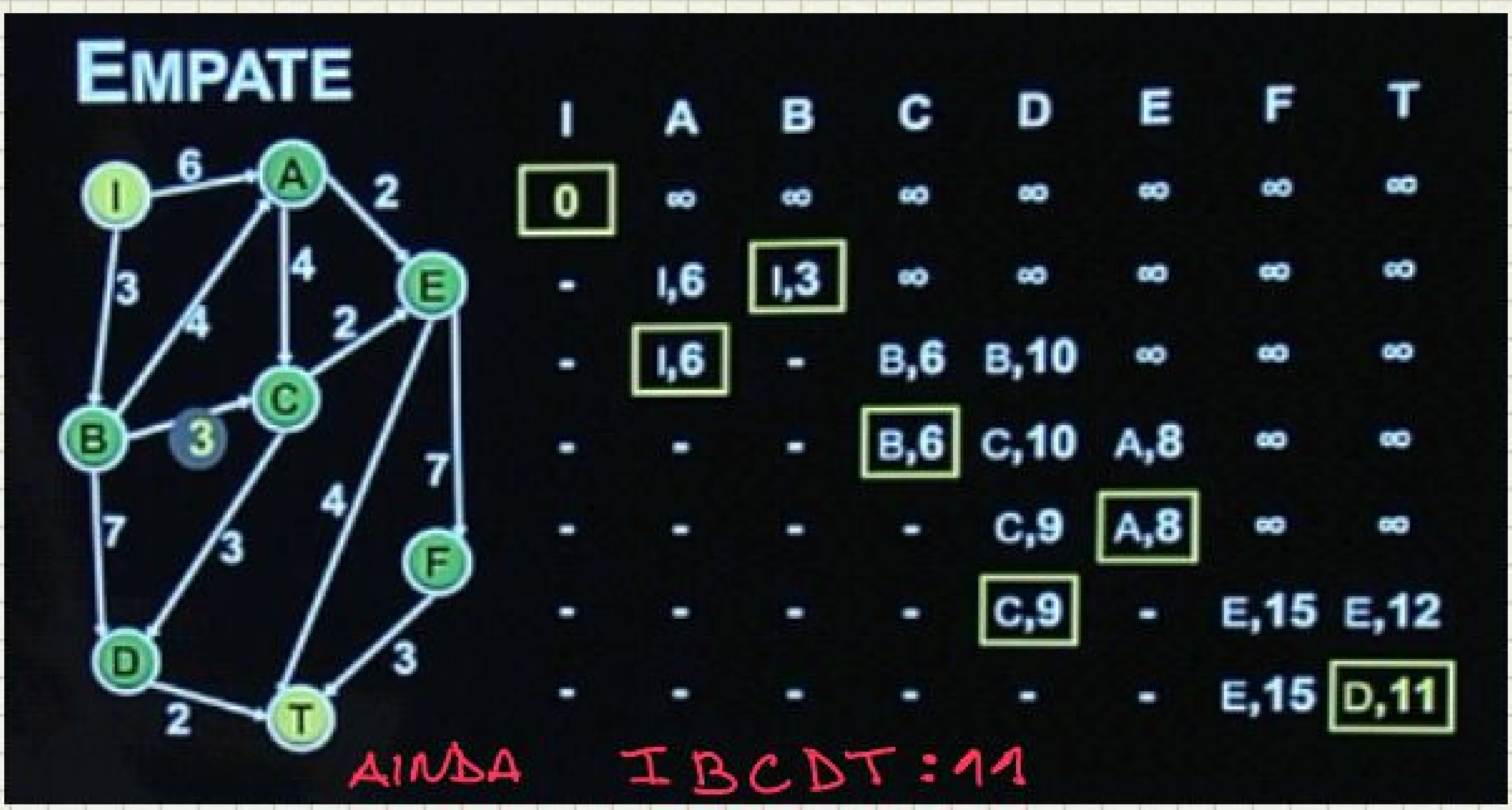
$\boxed{\text{10 CAMINHO MÍNIMO}}$

D10 → C8 → B5 → I3

$\boxed{\text{CAMINHO IBCDT}}$

Analizamos o caso em que o peso de B até C muda de 2 para 3





ANO	COMPRA	MANUTENÇÃO	VENDA
0	1000	0	1000
1	1000	0	700
2	1000	100	620
3	1000	160	500
4	1000	300	300
5	1000	500	100

QUEREMOS MINIMIZAR OS CUSTOS

TROCANDO DEPOIS 1 ANO : $1000 - 700 = 300$

2 ANOS : $1000 + 100 - 620 = 480$

3 ANOS : $1000 + 100 + 160 - 500 = 760$

4 ANOS : $1000 + 100 + 160 + 300 - 300 = 1260$

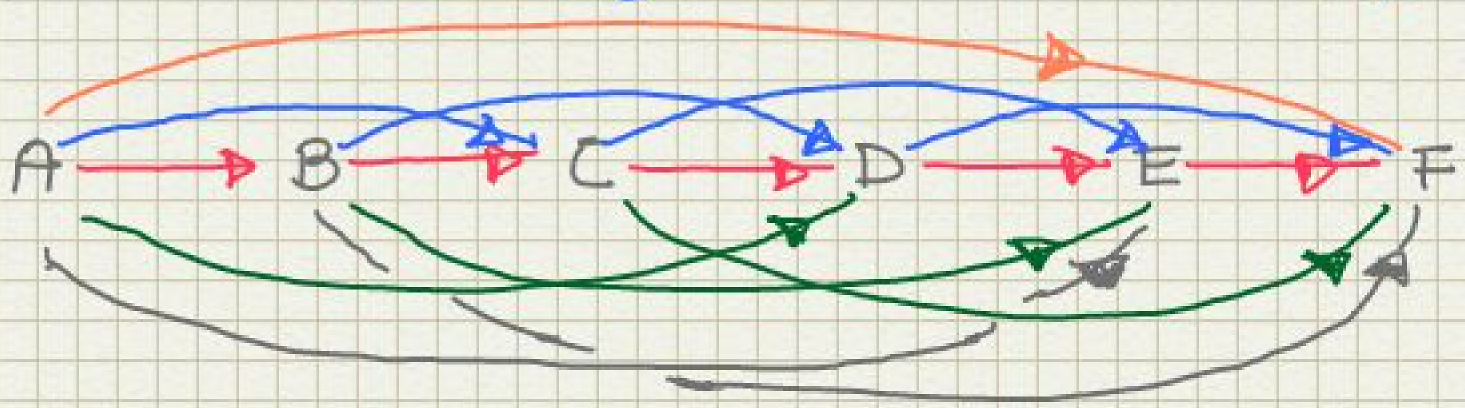
5 ANOS : $1000 + 100 + 160 + 300 + 500 - 100 = 1960$

EXEMPLOS TROCANDO CADA ANO TEREI UM GASTO DE 1500
TROCANDO DEPOIS DE 5 ANOS TEREI UM GASTO DE 1960
TROCANDO AO 4º E 5º ANO O GASTO SERIA 1260 + 300 = 1560
TROCANDO AO 3º, 4º E 5º ANO O GASTO SERIA 760 + 300 + 300 = 1360

PARA COMODIDADE CHAMAREMOS OS ANOS (A, B, C, D, E, F)
(0, 1, 2, 3, 4, 5)

GRAFO

1 — 300   2 — 480   3 — 760   4 — 1260   5 — 1960



B	C	D	E	F
A300	A480	A760	A1260	A1960
	~~B600~~ A480	~~B780~~ A760	B1060	B1560
		~~C780~~ A760	C960	C1240
			~~D1060~~ C960	D1240
				~~E1260~~ D1240

D1240
↳ coluna D A760

GASTO 1240
CAMINHO ADF

3 ANOS [760] + 2 ANOS [480] !!!

SITUAÇÃO OTIMAL É TROCAR AO 3º E 5º ANO

Agora mudamos o problema com gastos
250, 300, 400, 550, 750, 1000

Montaremos uma nova tabela para simplificar a solução

A (BCDEF) G

B	C	D	E	F	G
A250	A300	A400	A550	A750	A1000
X	B500	B550	B650	B800	B1000
	X	C550	C600	C700	C900
		X	D650	D700	D800
			X	E800	E850
				X	F950
					X

RESPOSTA: D800 A400

ADG: 800   3+3   MÍNIMO

400+400   CUSTO

COMO MUDA O RESULTADO SE QUEREMOS PARAR DEPOIS DE 5 ANOS?

NESTE CASO A COLUNA F DARÁ DUAS POSSIBILIDADES

C700 → A300   ACF   2+3

D700 → A400   ADF   3+2

CUSTO 700