$\boxed{\text{Funções Geradoras}}$

Encontrar o número de soluções inteiras da equação y1 + y2 + y3 = 12, onde as variáveis y1,2 pertencem ao conjunto {2,3,4} e y3 ao conjunto {5,6,7}.

$\boxed{\text{RESOLUÇÃO 1}}$ $x_{1,2} = y_{1,2} - 1$ $\quad 1 \leq x_{1,2} \leq 3$

$x_3 = y_3 - 4$ $\quad 1 \leq x_3 \leq 3$

$x_1 + 1 + x_2 + 1 + x_3 + 4 = 12$ $\quad \boxed{x_1 + x_2 + x_3 = 6}$

TOT. $\binom{5}{3} = 10$ $\quad A > 3$ $\quad \binom{5-3}{2} = 1$ $\quad \cancel{AB}$

$\boxed{TOT - A - B - C}$ $\quad 10 - 1 - 1 - 1 = \boxed{7}$

$\boxed{\text{RESOLUÇÃO 2}}$ $(x^2 + x^3 + x^4)^2 (x^5 + x^6 + x^7)$

"funções geradoras"

$(x^4 + x^6 + x^8 + 2x^5 + 2x^6 + 2x^7)(x^5 + x^6 + x^7)$

$(x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 2x^7 + x^8)(x^5 + x^6 + x^7)$

$x^9 + 2x^{10} + 3x^{11} + 2x^{12} + x^{13}$

$x^{10} + 2x^{11} + 3x^{12} + 2x^{13} + x^{14}$

$x^{11} + 2x^{12} + 3x^{13} + 2x^{14} + x^{15}$

$x^9 + 3x^{10} + 6x^{11} + 7x^{12} + 6x^{13} + 3x^{14} + x^{15}$

$\equiv$

$\{9, 10, 11, \boxed{12}, 13, 14, 15\}$

número de sol. $\{1, 3, 6, \boxed{7}, 6, 3, 1\}$

$y_1 + y_2 + y_3 = 10$ $\quad$ exemplos $\quad$ $y_1 + y_2 + y_3 = 15$

$2 + 3 + 5$ $\quad 4 + 4 + 7$

$3 + 2 + 5$

$2 + 2 + 6$

Achar a função geradora cujo coeficiente ar representa o número de soluções inteiras não negativa da equação 2 y1 + 3 y2 + 7 y3 = r.

$2y_1 = \{0, 2, 4, \dots\}$ $\quad 3y_2 = \{0, 3, 6, \dots\}$

$7y_3 = \{0, 7, 14, \dots\}$

$$f(x) = (1+x^2+x^4+x^6+\dots)(1+x^3+x^6+x^9+\dots)(1+x^7+x^{14}+x^{21}+\dots)$$

OBSERVANDO QUE $1+x+x^2+x^3+\dots \;:\; \dfrac{1}{1-x}$

NO CONTEXTO DE FUNÇÕES GERADORAS ESTAMOS INTERESSADOS NO CÁLCULO DOS COEFICIENTES E NUNCA NECESSITAREMOS ATRIBUIR VALORES NÚMERICOS A VARIÁVEL x

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^7)}}$$

TODAS AS SOLUÇÕES

PROCURAMOS AS SOLUÇÕES ATÉ $r=8$:

FUNSÃO GERADORA SIMPLIFICADA !!

$$(1+x^2+x^4+x^6+x^8)(1+x^3+x^6)(1+x^7)$$

$$(1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^3+x^5+x^7+x^6+x^8)(1+x^7)$$

$$(1+x^2+x^3+x^4+x^5+2x^6+x^7+2x^8)(1+x^7)$$

$$1+x^2+x^3+x^4+x^5+2x^6+x^7+2x^8+x^7$$

$$\boxed{x^0+x^2+x^3+x^4+x^5+2x^6+2x^7+2x^8}$$

$$2y_1+3y_2+7y_3 = r$$

$r=0$:	$(0,0,0)$	$r=5$:	$(1,1,0)$
$r=2$:	$(1,0,0)$	$r=6$:	$(3,0,0)$ E $(0,2,0)$
$r=3$:	$(0,1,0)$	$r=7$:	$(0,0,1)$ E $(2,1,0)$
$r=4$:	$(2,0,0)$	$r=8$:	$(4,0,0)$ E $(1,2,0)$

$\boxed{\text{SOLUÇÕES} = 17}$

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}\,\frac{1}{1-x^3}\,\frac{1}{1-x^7}$$

$$\sum_0^\infty{}_r\, x^{2r} \quad \sum_0^\infty{}_s\, x^{3s} \quad \sum_0^\infty{}_t\, x^{7t}$$

CON INTEIROS POSITIVOS !!!

$2+3+7 = 12$

$2r+3s+7\cancel{t} = 5$ $\quad (r,s,t) \geq 0$ ✓

UMA SOLUSÃO

$2y_1+3y_2+7y_3 = 17$

$y_{1,2,3} \geq 1$

$y_1 = 2$
$y_2 = 2$
$y_3 = 1$

$2y_1+3y_2+7y_3 = 17$

$y_{1,2,3} \geq 0$

PRECISAMOS CALCULAR AS COMBINASOES COM ZERO

$r=0$	$3s+7t = 17$	$(0,1,2)$
$s=0$	$2r+7t = 17$	$(5,0,1)$
$t=0$	$2r+3s = 17$	
~~$r=t=0$~~	$7t=17$	
~~$r=t=0$~~	$3s=17$	
~~$t=s=0$~~	$2r=17$	
~~$r=s=t=0$~~		

r	$3s$
0	~~17~~
1	15
2	~~13~~
3	~~11~~
4	9
5	~~7~~
6	~~5~~
7	3
8	~~1~~

$(1,5,0)$
$(4,3,0)$
$(7,1,0)$

$(0,1,2)$
$(5,0,1)$
$(1,5,0)$ $\quad (2,2,1)$
$(4,3,0)$
$(7,1,0)$

$\boxed{\text{TOT}: 6}$