Problemas de designação

Podemos resolver problemas de designação mediante o método hungaro que ilustraremos com exemplos
Imaginamos de dever designar 4 operaios para desenvolver 4 tarefas e cada possível designação requer um custo e queremos determinar a designação de menor custo.
Em problemas de designação monta-se sempre uma matriz quadrada.

	T_1	T_2	T_3	T_4
O_1	10	12	15	16
O_2	14	12	13	18
O_3	10	16	19	15
O_4	14	12	13	15

PRIMEIRO PASSO

OBTER PELO MENOS UM ZERO EM CADA LINHA

−10
−12
−10
−12

$$\begin{matrix} 10 & 12 & 15 & 16 \\ 14 & 12 & 13 & 18 \\ 10 & 16 & 19 & 15 \\ 14 & 12 & 13 & 15 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 6 & 9 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -0 & -0 & -1 & -3 \end{matrix}$$

SEGUNDO PASSO

OBTER PELO MENOS UM ZERO EM CADA COLUNA

$$\begin{matrix} \boxed{0} & 2 & 4 & 3 \\ 2 & \boxed{0} & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 8 & \boxed{2} \\ 2 & 0 & \boxed{0} & 0 \end{matrix}$$

TENTAR A DESIGNAÇÃO COM ZEROS

NESTE CASO NÃO É POSSÍVEL

PRECISA FAZER O COBRIMENTO !!!

TRAÇAMOS O MÍNIMO NÚMERO DE RETAS QUE TOCAM TODOS OS ZEROS

$$\begin{matrix} 0 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

SUBTRAIR DOS NÚMEROS LIVRES (NÃO PASSA NENHUMA RETAS) O MÍNIMO (NESTE CASO 2)

DEIXAR OS NÚMEROS TOCADOS PARA UMA RETA INALTERADOS

SOMAR AOS NÚMEROS CRUZADOS PARA DUAS RETAS O MÍNIMO ACHADO ANTERIORMENTE (NESTE CASO 2)

$$\begin{matrix} \boxed{0} & 0 & 2 & 1 \\ 4 & \boxed{0} & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 6 & \boxed{0} \\ 4 & 0 & \boxed{0} & 0 \end{matrix}$$

AGORA PODEMOS DESIGNAR

11, 22, 34, 43 o 11, 23, 34, 42
10 12 15 13   10 13 15 12

$$\begin{matrix} 0 & \boxed{0} & 2 & 1 \\ 4 & 0 & \boxed{0} & 3 \\ \boxed{0} & 4 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{matrix}$$

12, 23, 31, 44
12 13 10 15

CUSTO MÍNIMO : 50

Quando uma tarefa não pode ser designada daremos um valor infinto e colocaremos x. Se o númoero de operaio for inferior aquele das tarrfas adicionaremos linha nulas e o número de tarefas for inferior colunas nulas.

$$\begin{matrix} 6 & x & 8 & 0 \\ 4 & 9 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 4 & 0 \\ 8 & 10 & 12 & 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 2 & x & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 9 & 0 \end{matrix}$$

PROBLEMAS EM DESIGNAR

PIVOT 2

$$\begin{matrix} \boxed{0} & x & 3 & 0 \\ 0 & 3 & \boxed{0} & 2 \\ 1 & \boxed{0} & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & \boxed{0} \end{matrix}$$

11, 23, 32, 44

6 3 6 x

OPERAIO 4 SEM TAREFA

O1 T1 O2 T3 O3 T2

CUSTO : 15

Calculamos agora o mínimo e o máximo. Começamos com o mínimo na mesma maneira dos exercícios anteriores

$$\begin{matrix} 6 & 10 & 5 & 0 \\ 5 & 8 & 7 & 0 \\ 8 & 10 & 8 & 0 \\ 7 & 9 & 9 & 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{matrix}$$

PIVOT 1

$$\begin{matrix} 1 & 2 & \boxed{0} & 1 \\ \boxed{0} & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & \boxed{0} \\ 1 & \boxed{0} & 3 & 0 \end{matrix}$$

13, 21, 34, 42

5 5 x 9

MÍNIMO : 19

PARA CALCULAR O MÁXIMO CALCULANDO A MATRIZ COMPLEMENTAR AO PIVOT MÁXIMO (NO NOSSO EXEMPLO 10) RESOLVEREMOS SEMPRE UM PROBLEMA DE MÍNIMO PARA A NOVA MATRIZ

$$\begin{matrix} 10-6 & 10-10 & 10-5 & 10-0 \\ 10-5 & 10-8 & 10-7 & 10-0 \\ 10-8 & 10-10 & 10-8 & 10-0 \\ 10-7 & 10-9 & 10-9 & 10-0 \end{matrix} = \begin{matrix} 4 & 0 & 5 & 10 \\ 5 & 2 & 3 & 10 \\ 2 & 0 & 2 & 10 \\ 3 & 1 & 1 & 10 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 4 & 0 & 5 & 10 \\ 3 & 0 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 2 & 10 \\ 2 & 0 & 0 & 9 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & \boxed{0} & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 1 \end{matrix}$$

12, ~~24~~, 31, 43

10 8 9

MÁXIMO : 27

$$\begin{matrix} -6 & -10 & -5 & 0 \\ -5 & -8 & -7 & 0 \\ -8 & -10 & -8 & 0 \\ -7 & -9 & -9 & 0 \end{matrix}$$

"ACHAR O MÍNIMO"

PODEMOS SOMAR 10 PARA TER NÚMEROS ≥ 0

Analizaremos agora um problema de mínimo e máximo para un caso de 5 operaios e 3 tarefas sabendo que se o operaio 4 ficará ocioso teremos um gasto de peso 25, se o operaio 2 ficará ocioso um gasto de −5 e que o operaio 1 não poderá ficar ocioso

Começamos com achando a designação mínima

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	
O_1	−3	−2	1	x	x	+3
O_2	10	3	9	−5	−5	+5
O_3	16	−2	11	0	0	+2
O_4	12	5	8	25	25	−5
O_5	1	7	15	0	0	0

ADICIONAMOS TAREFAS VIRTUAIS T4 E T5

0	1	4	x	x
15	8	14	0	0
18	0	13	2	2
7	0	3	20	20
1	7	15	0	0
		−3		

$\boxed{0}$	1	1	x	x
15	8	11	0	0
18	$\boxed{0}$	10	2	2
7	0	$\boxed{0}$	20	20
1	7	12	0	0

$$11, 32, 43 \begin{cases} 24, 55 \\ 25, 54 \end{cases}$$

CUSTO $-3-2+8 \begin{matrix} -5+0 \\ 0-5 \end{matrix}$ $\boxed{-2}$

ENCONTRAMOS O MÁXIMO

COLOCAREMOS UM MENOS EM TODOS OS ELEMENTOS DA TABELA E TRATEREMOS O PROBLEMA COMO FOSSE UM PROBLEMA DE MÍNIMO

3	2	−1	x	x	+1
−10	−3	−9	5	5	+10
−16	2	−11	0	0	+16
−12	−5	−8	−25	−25	+25
−1	−7	−15	0	0	+15

4	3	0	x	x
0	7	1	15	15
0	18	5	16	16
13	20	17	0	0
14	8	0	15	15

	−3			
4	0	0	x	x
0	4	1	15	15
0	15	5	16	16
13	17	17	0	0
14	5	0	15	15

4	$\boxed{0}$	0	x	x
0	4	1	0	0
$\boxed{0}$	15	5	1	1
28	32	32	0	0
4	5	$\boxed{0}$	0	0

$$12, 31, 53 \begin{cases} 24, 45 \\ 25, 44 \end{cases}$$

$$-2+16+15 \begin{cases} -5+25 \\ -5+25 \end{cases}$$

CUSTO MÁXIMO : $\boxed{49}$

PROVAMOS A CONTROLAR DE FORMA DIRETA A RESPOSTA ENCONTRADA

O4 FICARÁ OCIOSO PORQUE O PESO 25 É O MAIOR

O3 OCIOSO
PESO 0

−3	−2	1	
10	3	9	23
1	7	15	

O5 OCIOSO
PESO 0

−3	−2	1	
10	3	9	23
16	−2	11	

O4, O3 PESO 25
O4, O5 PESO 25

CUSTO 48

PROVAMOS A DESIGNAÇÃO O4,O2 OCIOSOS DE PESO 20

$$\begin{matrix} -3 & -2 & 1 \\ 16 & -2 & 11 \\ 1 & 7 & 15 \end{matrix} \qquad 29 \qquad\qquad 29 + 20 = 49\,!$$