Correção: P2. Geometria Analítica

1. CÔNICAS

$$\frac{5}{36}x^2 + \frac{1}{9}xy + \frac{2}{9}y^2 - \frac{1}{9\sqrt{5}}x - \frac{22}{9\sqrt{5}}y = -\frac{4}{9}$$

→ MMC

$$\frac{25}{180}x^2 + \frac{20}{180}xy + \frac{40}{180}y^2 - \frac{4\sqrt{5}}{180}x - \frac{88\sqrt{5}}{180}y = -\frac{80}{180}$$

$$tg\alpha = \frac{40-25 \pm \sqrt{(40-25)^2+20^2}}{20} = \frac{15 \pm 25}{20} \quad \begin{cases} tg\alpha = -\frac{1}{2} \\ tg\alpha = 2 \end{cases}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+2^2}} \qquad sen\alpha = \frac{2}{\sqrt{1+2^2}}$$

$$tg\alpha = 2 \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad sen\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$x = X\cos\alpha - Y sen\alpha \rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}(X - 2Y)$$

$$y = X sen\alpha + Y\cos\alpha \rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y)$$

fórmula em termos de XY

$$\frac{25}{5}(X-2Y)^2 + \frac{20}{5}(X-2Y)(2X+Y) + \frac{40}{5}(2X+Y)^2 - \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}}(X-2Y)$$

$$-\frac{88\sqrt{5}}{\sqrt{5}}(2X+Y) = -80$$

→ Cálculo dos coeficientes:

$$XY = 5.(2)(1).(-2) + 4(1-4) + 8(2).(2).(1) = -20 + -12 + 32 = 0$$

como $XY = 0$ os cálculos acima estão corretos!

$X^2 = 5.(1) + 4.(2) + 8.4 = 5 + 8 + 32 = 45$ //

$X = -4.1 - 88.2 = -180$ //

$Y^2 = 5.(4) + 4.(-2) + 8.1 = 20 - 8 + 8 = 20$ //

$Y = -4.(-2) - 88.1 = 80$ //

Elipse:

$$45X^2 - 180X + 20Y^2 - 80Y = -80$$

$$45(X^2 - 4X) + 20(Y^2 - 4Y) = -80$$

→ completando quadrados:

$$\frac{45(X-2)^2}{180} + \frac{20(Y-2)^2}{180} = \frac{-80 + 45.4 + 20.4}{180}$$

$$\frac{(X-2)^2}{4} + \frac{(Y-2)^2}{9} = 1$$

→ focos: XY

$$f_1 = (\overset{X_0 + C}{2+5}, \overset{Y_0}{2}) = (7, 2)$$

$$f_2 = (\overset{X_0 - C}{2-5}, \overset{Y_0}{2}) = (-3, 2)$$

2. EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS.

(a) $R_1 \begin{cases} \text{plano 1}: P_1(0,0,0),\ P_2(0,1,0),\ P_3(2,1,0) \\ \text{plano 2}: \vec{V_1}(1,1,2),\ \vec{V_2}(2,0,1),\ P_4(1,1,1) \end{cases}$

Para o plano 1:

2 vetores com relação a P_1

$P_1P_2(0,1,0)$

$P_1P_3(2,1,0)$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

plano 1 $\to$ $2z = 0$

Para o plano 2.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

plano 2 $\to$ $x + 3y - 2z = 2$

$R_1 \begin{cases} 2z = 0 \\ x + 3y - 2z = 2 \end{cases}$ $x = t$

$t + 3y - 2.(0) = 2$

$y = \dfrac{2-t}{3}$

simétrica:

$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{2}{3} - \dfrac{t}{3} \\ z = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Paramétrica. $R_1: (0, 2/3, 0) + t(1, -1/3, 0)$

$R_1: (0, 2/3, 0) + t(3, -1, 0)$

(b) $R_2 \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y + z = d \end{cases}$ com $z = t$ $\to$ $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = d - t \end{cases}$

em formato matricial o sistema fica:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ d-t \end{pmatrix} \to \underbrace{A^{-1}.A}_{I_2} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}. \begin{pmatrix} 2 \\ d-t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ d-t \end{pmatrix}$$

$z = t$

$x = \dfrac{2+d}{2} - \dfrac{t}{2}$

$y = \dfrac{2-d}{2} + \dfrac{t}{2}$

Equação paramétrica

$$R_2 = \left(\frac{2+d}{2}; \frac{2-d}{2}, 0\right) + t\left(-1/2, 1/2, 1\right)$$

Para descobrir a intersecção testamos valores de d

$d=0 \rightsquigarrow$ não há

$d=1 \rightsquigarrow$ não há

$d=2 \rightsquigarrow$ sim!

$$R_1 \begin{cases} x = t \\ y = \frac{2}{3} - t \\ z = 0 \end{cases} \qquad R_2 \begin{cases} x = \frac{2+d}{2} - \frac{t}{2} \\ y = \frac{2-d}{2} + \frac{t}{2} \\ z = t \end{cases}$$

para $d = 2$,

$P_{int} = (2, 0, 0)$

3. SISTEMAS

(a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ x + y = 2 \rightarrow y = 2 - x \end{cases}$

EIXOS DA ELIPSE FORMADOS PELO CORTE PLANAR

$$x^2 + (2-x)^2 + z^2 = 25$$

$$x^2 + 4 - 4x + x^2 + z^2 = 25$$

$$2x^2 - 4x + z^2 = 21$$

$$2.(x^2 - 2x) + z^2 = 21$$

$$2.(x-1)^2 + z^2 = 21 + 2.1$$

$$\frac{2(x-1)^2}{23} + \frac{z^2}{23} = 1$$

Eixos $\left(\sqrt{\frac{23}{2}}, \sqrt{23}\right)$.

(b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ x + y = D \end{cases}$

$$y = D - x$$

$$x^2 + D^2 - 2Dx + x^2 + z^2 = 25$$

$$2x^2 - 2Dx + D^2 + z^2 = 25$$

$$2(x^2 - Dx) + D^2 + z^2 = 25$$

$$2\left(x - D/2\right)^2 + z^2 = \underbrace{25 - D^2 + 2.\frac{D^2}{4}}$$

$$25 - D^2 + \frac{D^2}{2} = 0$$

$$\frac{1D^2}{2} = 25 \rightarrow D^2 = 50$$

$$\boxed{D = \pm 5\sqrt{2}}$$

(c) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25 \\ y=ax \end{cases}$

Elipse $\left(\overset{x}{5}, \overset{z}{\sqrt{5}}\right)$ $\quad \dfrac{(\quad)^2}{A=25}+\dfrac{(\quad)^2}{B=5}=1$

$x^2+a^2x^2+z^2=25$

$\dfrac{x^2.(a^2+1)}{25}+\dfrac{z^2}{25}=\dfrac{25}{25}$

$\dfrac{25}{a^2+1}=5 \to 5=a^2+1 \to a^2=4 \quad \boxed{a=\pm 2}$