Elipses e Círculos   Resolução P1

1ª PARTE: Encontrar a elipse em sua forma canônica

Sabendo que

$F = (x_0 + C, y_0)$ $\varepsilon = \dfrac{C}{A}$ $x_D = x_0 + \dfrac{A^2}{C}$

E que o exercício tem os seguintes dados:

$F = (3\sqrt{3}, 0)$ $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $x_D = 4\sqrt{3}$

Temos: $y_0 = 0$ e

$x_0 + C = 3\sqrt{3}$ (1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{C}{A}$ (2) $4\sqrt{3} = x_0 + \dfrac{A^2}{C}$ (3)

Isolando A em (2)

$$A = \frac{2C}{\sqrt{3}}$$

E aplicando o resultado em (3) temos:

$$4\sqrt{3} = x_0 + \frac{4}{3}C \quad (4)$$

Fazendo um sistema com (4) e (1) temos que:

$$\begin{cases} 4\sqrt{3} = x_0 + \dfrac{4}{3}C \\ x_0 + C = 3\sqrt{3} \end{cases} \qquad \boxed{C = 3\sqrt{3}} \quad \boxed{x_0 = 0}$$

Sabendo que $\dfrac{C}{A} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \boxed{A = 6}$ e que $A^2 = B^2 + C^2$ podemos afirmar que $B^2 = 9$ e a equação canônica é dada por

$$\boxed{\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1}$$

2ª PARTE: Encontrar a equação dos círculos tangentes.

Sabendo que os raios são $r = 2$, que os centros pertencem a reta $y = x$, e que a distancia do centro de cada círculo até o centro da hipérbole é $4\sqrt{2}$ podemos escrever:

$(4\sqrt{2})^2 = (0-a)^2 + (0-a)^2$ onde a é a coordenada do centro dos círculos.

$32 = 2a^2 \rightarrow a^2 = 16 \rightarrow a = \pm 4$

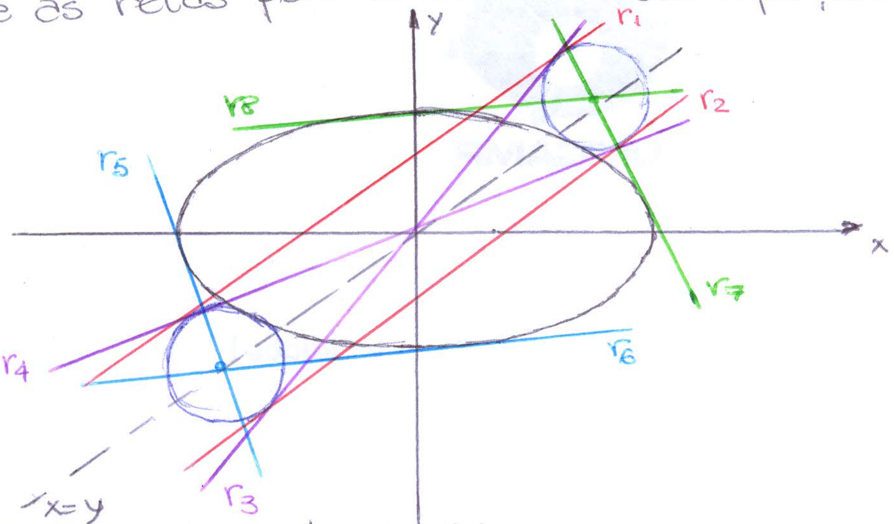
Assim, podemos afirmar que a equação dos círculos é:

$(x-4)^2 + (y-4)^2 = 4$

$(x+4)^2 + (y+4)^2 = 4$

3ª PARTE : encontrar as retas tangentes.

Esboce as retas para encontrar suas equações



• Para retas vermelhas temos que

$r_1 \parallel r_2 \parallel x = y$

assim $a = 1$ e b será dado pelo cruzamento com o eixo y, que ao analisar geometricamente, tendo como base o raio do círculo é:

$b = \pm 2\sqrt{2}$.

Então : $r_1: y = x + 2\sqrt{2}$

$r_2: y = x - 2\sqrt{2}$

• Para as retas roxas temos que

Como passam por $(0,0)$ podemos escrever suas equações como:

$r_3: a_3 x_0 = y_0$

$r_4: a_4 x_0 = y_0$

E com as equações dos círculos montamos um sistema de equações

$$\begin{cases} a_3 x_0 = y_0 \\ a_4 x_0 = y_0 \\ (x_0 + 4)^2 + (y_0 + 4)^2 = 4 \\ (x_0 - 4)^2 + (y_0 - 4)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_3 x = y \\ (x+4)^2 + (y+4)^2 = 4 \\ (x-4)^2 + (y-4)^2 = 4 \end{cases}$$

$\cancel{a_4 x_0 = y}$

$$\begin{cases} a_4 x = y \\ (x-4)^2 + (y-4)^2 = 4 \\ (x+4)^2 + (y+4)^2 = 4 \end{cases}$$

e verificamos que:

$r_3: (4 + \sqrt{7})\, x / 3 = y$

$r_4: (4 - \sqrt{7})\, x / 3 = y$

Para as retas r_5, r_6, r_7 e r_8 temos que usar os pontos por onde passam para equacionar um sistema:

$$ax + b = y$$

$(-4,-4) \to -4a + b = -4 \to b = (+4a - 4) \to b = 4(a-1)$ $r_5; r_6$

$(4,4) \to 4a + b = 4 \to b = (4 - 4a) \to b = 4(1-a)$ r_6, r_7

Note que as retas seguem a relação:

$r_5 \parallel r_7$ e $r_6 \parallel r_8$ (tem o mesmo coeficiente angular)

Usando os sistemas e o que sabemos de b.

$(-4,4)$

$$\cancel{y + 4 = a.(x+4)}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{6}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \\ a = \frac{y+4}{x+4} \\ (x+4)^2 + (y+4)^2 = 4 \end{cases}$$

$(4,4)$

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{6}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \\ a = \frac{y-4}{x-4} \\ (x-4)^2 + (y+4)^2 = 4 \end{cases}$$

Temos:

r_7 e r_5 $\quad a = -(8 + 3\sqrt{11})/10$

r_8 e r_6 $\quad a = (3\sqrt{11} - 8)/10$