Cônicas

Sabendo que:

Cônica	Forma canônica	tangencia
ELIPSE	$\dfrac{(x-x_0)^2}{A^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{B^2}=1$	$(ax_0+b-y_0)^2=a^2A^2+B^2$
HIPÉRBOLE	$\dfrac{(x-x_0)^2}{A^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{B^2}=1$	$(ax_0+b-y_0)^2=a^2A^2-B^2$
	$\dfrac{(y-y_0)^2}{B^2}-\dfrac{(x-x_0)^2}{A^2}=1$	...
PARÁBOLA	$\dfrac{(x-x_0)^2}{A^2}=y-y_0$	$(ax_0+b-y_0)=\dfrac{-aA^2}{4}$
	$\dfrac{(y-y_0)^2}{B^2}=x-x_0$	$(ax_0+b-y_0)=\dfrac{B^2}{4a}$

Resolva os seguintes exercícios:

1. Classifique a cônica; ache A e B quando possível; ache (x_0, y_0)

a) $x^2-100y-10x=1075$

b) $4x^2+y^2-32x-6y=-37$

c) $x^2-9y^2-72y=\cancel{144}\ 156$

2. Encontre a equação da elipse com centro em $(-2,0)$ e tangente a reta $2y=3x+3+\sqrt{205}$

3. Encontre a equação da parábola com $(x_0,y_0)=(2,1)$ e tangente a reta: $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{163}{2}$ e com y quadrático

Resolução:

1. a. $x^2 - 100y - 10x = 1075$

. Como não temos termo com y^2 a equação só pode ser de uma parábola.

$$x^2 - 100y - 10x = 1075$$

$$\underbrace{x^2 - 10x}_{(x-5)^2} - 100y = 1075$$

$$x^2 - 10x \boxed{+25} - 100y = 1075 \boxed{+25}$$

$$(x-5)^2 - 100y = 1100$$

$$\frac{(x-5)^2}{100} = \frac{1100 + 100y}{100}$$

$$\frac{(x-5)^2}{(10)^2} = y + 11$$

$\therefore (x_0, y_0) = (5, -11)$ e $B = 10$

1.b. $4x^2 + y^2 - 32x - 6y = -37$

. Como temos termos x^2 e y^2 positivos a equação só pode ser de uma elipse.

$$4x^2 - 32x + y^2 - 6y = -37$$

$$4 \cdot \underbrace{(x^2 - 8x)}_{(x-4)^2} + \underbrace{y - 6y}_{(y-3)^2} = -37$$

$$4 \cdot (x-4)^2 + (y-3)^2 = -37 + \boxed{4 \cdot 16} + \boxed{9}$$

$$\frac{4 \cdot (x-4)^2}{36} + \frac{(y-3)^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{36} = 1$$

$\therefore (x_0, y_0) = (4, 3)$ e $A = 3$ e $B = 6$

c. $x^2 - 9y^2 - 72y = 153$

. Como os sinais de x^2 e y^2 são invertidos a equação só pode ser de uma hipérbole.

$$x^2 - 9.\,(y^2 - 8y) = 153$$

$$y^2 - 8y + 16$$

$$(y-4)^2$$

$$x^2 - 9.\,(y-4)^2 = 153 + (-9)\,16$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{9.\,(y-4)^2}{9} = \frac{9}{9}$$

$$\frac{x^2}{9} - (y-4)^2 = 1$$

$\therefore\ (x_0, y_0) = (0, 4)$ e $A = 3$ e $B = 1$

2. Escreva as equações com as incógnitas num sistema e ache a forma canônica da elipse

$$\begin{cases} \dfrac{(x+2)^2}{A^2} + \dfrac{y^2}{B^2} = 1 \\ 2y = 3x + 3 + \sqrt{205} \end{cases} \Rightarrow (ax_0 + b - y_0)^2 = a^2A^2 + B^2$$

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{3+\sqrt{205}}{2} \qquad a = \frac{3}{2} \quad e \quad b = \frac{3+\sqrt{205}}{2}$$

$$\frac{(x+2)^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \qquad (1)$$

$$\left(\frac{3}{2}.(-2) + \frac{3+\sqrt{205}}{2} - 0\right)^2 = \frac{3}{2}.\,A^2 + B^2$$

$$\left(-3 + \frac{3+\sqrt{205}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}.\,A^2 + B^2$$

$$\left(\frac{-3+\sqrt{205}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}A^2 + B^2 \qquad (2)$$

resolvendo um sistema com (1) e (2) achamos:

$$\frac{(x^2+2)^2}{4} + \frac{y^2}{49} = 1$$

3. Idem 2.

$$\frac{(y-y_0)^2}{B^2} = x - x_0 \qquad (x_0, y_0)(2,1)$$

$$a = \frac{1}{4} \qquad b = \frac{163}{2}$$

$$a x_0 + b - y_0 = \frac{B^2}{4a}$$

$$\frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{163}{2} - 1 = \frac{B^2}{4\cdot {}^1/_4}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{163}{2} - \frac{2}{2} = B^2$$

$$B^2 = \frac{162}{2} \rightarrow B^2 = 81 \rightarrow B = 9 \,//$$

$$\therefore \frac{(y-1)^2}{81} = x - 2$$