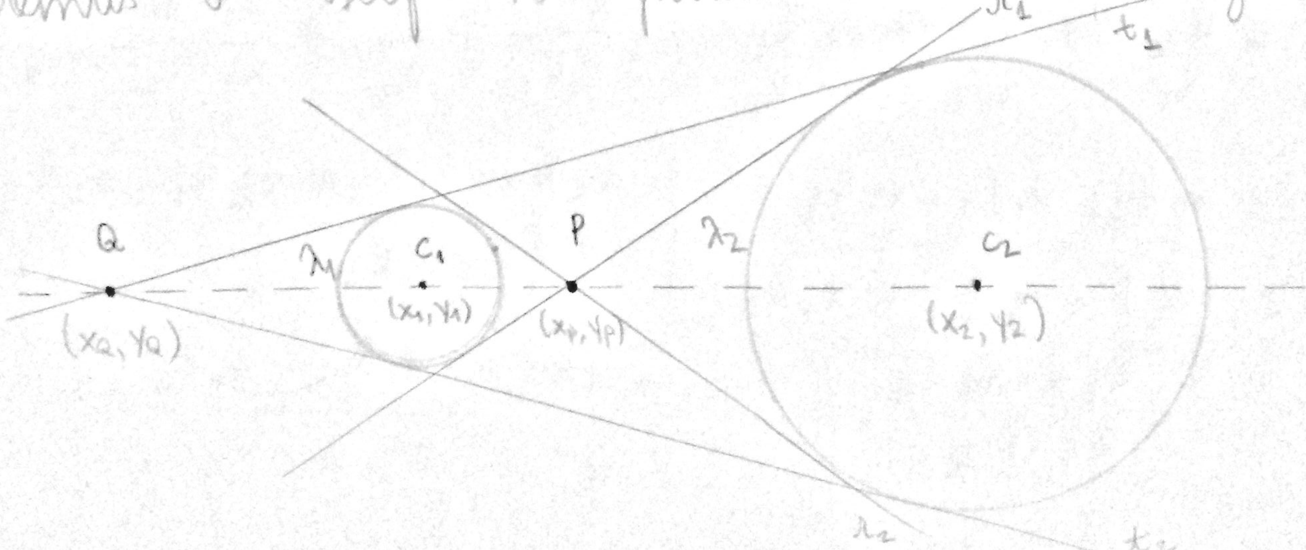
Caso Especial de Tangência

→ Encontrar as retas tangentes a dois círculos de raios diferentes.

O complexo desse exercício é que teríamos uma equação de 4° grau (4 tangentes possíveis) Então precisamos, de alguma forma, reduzir a ordem do nosso problema.

Encontrar as retas tangentes a um círculo que passam por um ponto conhecido é um caso trivial. Será que conseguimos resolver o problema das quatro tangentes dessa forma? A resposta é óbvia, "sim", só precisamos encontrar um ponto conhecido dessas retas. Se observarmos o problema geometricamente vemos o seguinte (considerando que os centros estão distantes o suficiente para melhor visualização)



O ponto de interseção das retas r_1 e r_2 (P) e o das retas t_1 e t_2 (Q) coincidem com a reta que une os dois centros! Tecnicamente falando, P divide internamente o segmento $\overline{C_1C_2}$ e Q divide externamente numa razão fixa relacionada aos raios R_1 e R_2. Como essa razão é igual, dizemos que P e Q dividem $\overline{C_1C_2}$ numa divisão harmônica!

Agora, como encontrar P e Q?

Podemos dizer que:

$$\frac{\overline{C_1P}}{\overline{PC_2}} = \frac{\overline{QC_1}}{\overline{QC_2}} = \frac{R_1}{R_2}$$

E analisando separadamente para P e Q:

em x $\begin{cases} \overline{C_1P} = x_1 - x_P \\ \overline{PC_2} = x_P - x_2 \end{cases}$

$$\frac{\overline{C_1P}}{\overline{PC_2}} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \frac{x_1 - x_P}{x_P - x_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$x_1R_2 - x_PR_2 = x_PR_1 - x_2R_1$$

$$x_P(R_1 + R_2) = x_2R_1 + x_1R_2$$

$$\boxed{x_P = \frac{x_2R_1 + x_1R_2}{R_1 + R_2}}$$

em x $\begin{cases} \overline{QC_1} = x_Q - x_1 \\ \overline{QC_2} = x_Q - x_2 \end{cases}$

$$\frac{\overline{QC_1}}{\overline{QC_2}} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \frac{x_Q - x_1}{x_Q - x_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$x_QR_2 - x_1R_2 = x_QR_1 - x_2R_1$$

$$x_Q(R_1 - R_2) = x_2R_1 - x_1R_2$$

$$\boxed{x_Q = \frac{x_2R_1 - x_1R_2}{R_1 - R_2}}$$

Poderíamos fazer o mesmo para Y e encontrar:

$$\boxed{Y_P = \frac{Y_2 R_1 + Y_1 R_2}{R_1 + R_2}} \quad e \quad \boxed{Y_Q = \frac{Y_2 R_1 - Y_1 R_2}{R_1 - R_2}}$$

Se analisarmos para o caso de $R_1 = R_2$ (raios iguais, como já fizemos), $P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ e Q não existiria (pois o denominador de x_Q e y_Q seria zero). Isso nós já sabíamos: no caso particular de $R_1 = R_2$, duas tangentes se cruzam no ponto médio dos centros (P) e as outras duas são paralelas, logo não se encontram.

Agora que sabemos os pontos de interseção das retas, podemos calcular as tangentes que passam por P ou Q aos círculos. (Tanto faz se calculo com os dados de λ_1 ou λ_2).

Para isso, resolveremos um exemplo prático com os passos a serem seguidos:

Dadas as circunferências

λ_1: $x^2+y^2-4x-4y=-4$

λ_2: $x^2+y^2+6x+8y=-24$

1° Passo: encontrar a forma canônica das circunferências e extrair as coordenadas do centro e o raio:

$$x^2+y^2-4x-4y=-4$$
$$x^2-4x+y^2-4y=-4$$
$$x^2-4x+4+y^2-4y+4=-4+4+4$$
$$(x-2)^2+(y-2)^2=2^2$$
$$x_1=2 \quad y_1=2 \quad R_1=2$$

$$x^2+y^2+6x+8y=-24$$
$$x^2+6x+y^2+8y=-24$$
$$x^2+6x+9+y^2+8y+16=-24+25$$
$$(x+3)^2+(y+4)^2=1^2$$
$$x_2=-3 \quad y_2=-4 \quad R_2=1$$

2° Passo: desenhar o problema (feito em anexo).

3° Passo: verificar se os círculos não se cortam ou tangenciam. Pela imagem fica claro que não, mas se quiser provar, pode calcular a distância entre C_1 e C_2 (d_{12}) e seguir a relação:

$d_{12} > R_1+R_2 \Rightarrow$ não se tocam

$d_{12} = R_1+R_2 \Rightarrow$ se tangenciam

$0 \neq d_{12} < R_1+R_2 \Rightarrow$ se cortam em 2 pontos

$d_{12} = 0 \Rightarrow$ concêntricos

4º Passo: encontrar P e Q (se existirem, claro).

$$x_P = \frac{x_2 R_1 + x_1 R_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow x_P = -\frac{4}{3}$$

$$y_P = \frac{y_2 R_1 + y_1 R_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow y_P = -2$$

$$P\left(-\frac{4}{3}, -2\right)$$

$$x_Q = \frac{x_2 R_1 - x_1 R_2}{R_1 - R_2} \Rightarrow x_Q = -8$$

$$y_Q = \frac{y_2 R_1 - y_1 R_2}{R_1 - R_2} \Rightarrow y_Q = -10$$

$$Q(-8, -10)$$

5º Passo: encontrar a relação entre "a" e "b" das retas sabendo que r_1 e r_2 passam por P e t_1 e t_2, por Q:

r	t
$y_P = ax_P + b \Rightarrow b = -2 + \frac{4a}{3}$	$y_Q = ax_Q + b \Rightarrow b = -10 + 8a$

6º Passo: utilizar a fórmula da distância entre ponto e reta para encontrar "a".

$$R = \frac{|ax - y + b|}{\sqrt{a^2+1}} \Rightarrow a^2R^2 + R^2 = a^2x^2 + b^2 + y^2 - 2axy + 2abx - 2by$$

(Podemos substituir R com R_1 ou R_2, desde que se $R_i = R_i \Rightarrow x = x_i$ e $y = y_i$, $i \in \{1, 2\}$)

6.1) Primeiro substitui-se $b = y_P - a x_P$ e encontra-se a seguinte eq. em a:

$$16a^2 - 60a + 27 = 0$$

$a_1 = 3,23 \Rightarrow b_1 = 2,31$
$a_2 = 0,52 \Rightarrow b_2 = -1,31$

$\boxed{r_1: y = 3,23a + 2,31 \quad r_2: y = 0,52a - 1,31}$

6.2) Depois, $b = y_Q - a x_Q$:

$$24a^2 - 60a + 35 = 0$$

$a_1 = 1,57 \Rightarrow b_1 = 2,58$
$a_2 = 0,93 \Rightarrow b_2 = -2,58$

$\boxed{t_1: y = 1,57x + 2,58 \quad t_2: y = 0,93x - 2,58}$

Obs.: nesse caso os círculos não se tocam, mas caso tocarem:

Tangentes: para Q seria normal e para P teríamos uma única reta.

Secantes: para Q seria normal, mas P seria interno aos círculos, logo não teriam tangentes que passam por ele.