Como montar um plano

① Para haver um plano, são necessários 3 pontos não colineares. No momento estaremos usando um sistema cartesian tridimensional.

$P_1 = (3, -1, 2)$

$P_2 = (4, -1, -1)$

$P_3 = (2, 0, 2)$

② Escolhemos um ponto para ser o ponto de referência. Juntamente com um ponto $P = (x, y, z)$, veremos os vetores resultantes fazendo a diferença entre os valores de x, y e z dos pontos.

$P = (x; y; z)$ $\quad \underbrace{P_1 = (3, -1, 2)}_{\text{ponto de referência}}$ $\quad P_2 = (4, -1, -1)$ $\quad P_3 = (2, 0, 2)$

$\vec{V_1} = P - P_1 \rightarrow \vec{V_1} = (x - 3, y - (-1), z - 2) \rightarrow \boxed{\vec{V_1} = (x-3, y+1, z-2)}$

$\vec{V_2} = P_2 - P_1 \rightarrow \vec{V_2} = (4 - 3, -1 - (-1), -1 - 2) \rightarrow \boxed{\vec{V_2} = (1, 0, -3)}$

$\vec{V_3} = P_3 - P_1 \rightarrow \vec{V_3} = (2 - 3, 0 - (-1), 2 - 2) \rightarrow \boxed{\vec{V_3} = (-1, 1, 0)}$

③ Fazemos o produto vetorial de dois vetores. Note que o vetor resultante é perpendicular ao plano.

$\vec{V_2} = (1, 0, -3)$

$\vec{V_3} = (-1, 1, 0)$

Organizamos seus valores na ordem y, z, x, y e calculamos o determinante de cada matriz 2×2, obtendo assim o valor resultante x, y, z.

$$\begin{array}{cccc} y & z & x & y \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

$PV = (0.0 - [(-3).1], (-3).(-1) - 1.0, 1.1 - 0.(-1)) \rightarrow$

$PV = (0+3, 3-0, 1+0) \rightarrow \boxed{PV = (3, 3, 1)}$

4) Fazemos o produto escalar entre a resultante do produto vetorial com o vetor que está em função de x, y, z. O resultado será o plano. O valor do produto terá que ser igual a 0.

$\vec{V_1} = (x-3, y+1, z-2)$

$PV = (3, 3, 1)$

$PE = 0 \rightarrow 3.(x-3) + 3.(y+1) + 1.(z-2) = 0 \rightarrow 3x - 9 + 3y + 3 + z - 2 = 0 \rightarrow$

$\boxed{3x + 3y + z = 8}$

↳ equação do plano

5) Fazer o controle! Substitua os valores dos pontos no plano. Se houver diferença na igualdade, reveja o exercício e corrija os erros.

Plano: $3x + 3y + z = 8$

$P_1: (3, -1, 2)$

$P_2 = (4, -1, -1)$

$P_3 = (2, 0, 2)$

- $3.3 + 3.(-1) + 1.2 = 8 \rightarrow 9 - 3 + 2 = 8 \rightarrow 8 = 8$
- $3.4 + 3.(-1) + 1.(-1) = 8 \rightarrow 12 - 3 - 1 = 8 \rightarrow 8 = 8$
- $3.2 + 3.0 + 1.2 = 8 \rightarrow 6 + 0 + 2 = 8 \rightarrow 8 = 8$

Forma alternativa

Podemos resolver os 3 vetores juntos na hora de calcular o determinante.

$$\begin{array}{ccccc} x-3 & y+1 & z-2 & x-3 & y+1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

$(x-3)(0+3) + (y+1)(3-0) + (z-2)(1+0) = 0 \rightarrow (x-3).3 + (y+1).3 + (z-2).1 = 0 \rightarrow$

$\boxed{3x + 3y + z = 8}$