

## Lista 1 - Prazo de entrega 16/04

1. Questão 1 enviada em outro anexo.
2. Tendo à disposição 1 bloco de 1 cm, 10 blocos de 2 cm e 8 blocos de 3 cm de diferentes cores, determinar quantos blocos diferentes de  $n$  cm podemos formar. Prepare e resolva um exercício parecido explicando como foi criado o novo exercício.

**Solução.** Inicialmente, seja  $B(n)$  o número de blocos diferentes de  $n$  cm que podemos formar.

Como há apenas 1 bloco de 1 cm,  $B(1) = 1$ .

Com 2 cm, podemos usar quaisquer um dos 10 blocos de 2 cm ou usar 2 blocos de 1 cm, resultando em  $B(2) = 10 + 1 = 11$ .

Finalmente, com 3 cm podemos utilizar quaisquer um dos 8 blocos de 3 cm dados, usar qualquer um dos 10 blocos de 2 cm seguidos do bloco de 1 cm, usar um bloco de 1 cm seguido por um dos 10 blocos de 2 cm ou utilizar 3 blocos de 1 cm, resultando em  $B(3) = 8 + 10 + 10 + 1 = 29$ .

Para obter a fórmula de recorrência, basta notar que o número de blocos diferentes de  $(n+3)$  cm que podem ser formados é igual a soma do número de blocos diferentes de  $(n+2)$  cm seguidos por um bloco de 1 cm com o número de blocos de  $(n+1)$  cm seguidos por qualquer um dos 10 possíveis blocos de 2 cm com o número de blocos de  $n$  cm seguidos por qualquer um dos 8 blocos de 3 cm. Assim,

$$B(n+3) = B(n+2) + 10B(n+1) + 8B(n)$$

Assim, a equação característica é  $\alpha^3 = \alpha^2 + 10\alpha + 8 \Rightarrow \alpha^3 - \alpha^2 - 10\alpha - 8 = 0$ .

Substituindo alguns valores como 1, 2 e -1, encontramos que  $\alpha = -1$  é raiz dessa equação. Então, podemos reescrevê-la como

$$\begin{aligned}\alpha^3 - \alpha^2 - 10\alpha - 8 &= [\alpha - (-1)](a\alpha^2 + b\alpha + c) \\ \alpha^3 - \alpha^2 - 10\alpha - 8 &= (\alpha + 1)(a\alpha^2 + b\alpha + c) \\ \alpha^3 - \alpha^2 - 10\alpha - 8 &= a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + a\alpha^2 + b\alpha + c \\ \alpha^3 - \alpha^2 - 10\alpha - 8 &= a\alpha^3 + (a+b)\alpha^2 + (b+c)\alpha + c\end{aligned}$$

Por fim, igualando os coeficientes, obtemos que  $a = 1$ ,  $a + b = -1$ ,  $b + c = -10$  e  $c = -8$ . Substituindo  $a$  na segunda equação ou  $c$  na terceira equação obtemos que  $b = -2$ . Portanto,  $\alpha^3 - \alpha^2 - 10\alpha - 8 = (\alpha + 1)(\alpha^2 - 2\alpha - 8)$ .

Para encontrar as raízes de  $\alpha^2 - 2\alpha - 8$ , basta observar quais os números que somados resultam em 2 e multiplicados resultam em -8, obtendo as outras duas raízes: 4 e -2. Assim,  $\alpha^3 - \alpha^2 - 10\alpha - 8 = (\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha - 4)$ .

A fórmula do termo geral dessa recorrência será  $B(n) = a(-1)^n + b(-2)^n + c \cdot 4^n$ .

$$B(1) : \quad 1 = a \cdot (-1) + b \cdot (-2) + c \cdot 4 \Rightarrow -a - 2b + 4c = 1 \quad (1)$$

$$B(2) : \quad 11 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-2)^2 + c \cdot 4^2 \Rightarrow a + 4b + 16c = 11 \quad (2)$$

$$B(3) : \quad 29 = a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-2)^3 + c \cdot 4^3 \Rightarrow -a - 8b + 64c = 29 \quad (3)$$

$$(1) + (2) : \quad -a - 2b + 4c + (a + 4b + 16c) = 1 + 11 \Rightarrow 2b + 20c = 12 \quad (4)$$

$$(2) + (3) : \quad a + 4b + 16c + (-a - 8b + 64c) = 11 + 29 \Rightarrow -4b + 80c = 40 \quad (5)$$

Dividindo a equação (5) por 4, obtemos

$$-4b + 80c = 40 \Rightarrow -b + 20c = 10 \quad (6)$$

$$(4) - (6) :$$

$$2b + 20c - (-b + 20c) = 12 - 10 \Rightarrow 3b = 2 \Rightarrow b = \frac{2}{3}$$

Substituindo em (4) :

$$2 \cdot \frac{2}{3} + 20c = 12 \Rightarrow 20c = 12 - \frac{4}{3} \Rightarrow 20c = \frac{36 - 4}{3} \Rightarrow c = \frac{32}{3 \cdot 20} \Rightarrow c = \frac{8}{15}$$

Substituindo em (1) :

$$-a - 2 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{8}{15} = 1 \Rightarrow a = -\frac{4}{3} + \frac{32}{15} - 1 \Rightarrow a = \frac{-20 + 32 - 15}{15} \Rightarrow a = \frac{-3}{15} \Rightarrow a = -\frac{1}{5}$$

Portanto, o número de blocos diferentes de n cm que podem ser formados é

$$B(n) = \frac{-1}{5}(-1)^n + \frac{2}{3}(-2)^n + \frac{8}{15}4^n$$

$$B(n) = (-1)^n \left( \frac{-1}{5} + \frac{2^{n+1}}{3} \right) + \frac{2}{15}4^{n+1}$$

Para confirmar que as contas estão corretas, podemos calcular  $B(4)$  pela solução recém obtida e pela fórmula de recorrência.

$$B(4) = (-1)^4 \left( \frac{-1}{5} + \frac{2^{4+1}}{3} \right) + \frac{2}{15}4^{4+1}$$

$$B(4) = 1 \left( \frac{-1}{5} + \frac{32}{3} \right) + \frac{2}{15} \cdot 1024$$

$$B(4) = \frac{-3 + 160 + 2048}{15}$$

$$B(4) = \frac{2205}{15}$$

$$B(4) = 147$$

$$B(n+3) = B(n+2) + 10B(n+1) + 8B(n)$$

$$B(4) = B(3) + 10B(2) + 8B(1)$$

$$B(4) = 29 + 10 \cdot 11 + 8 \cdot 1$$

$$B(4) = 29 + 110 + 8$$

$$B(4) = 147$$

Como as duas soluções coincidem, confirmamos que obtivemos a fórmula correta.

3. Usando funções geradoras, a partir do conjunto de letras AAAA BBB CC DD E, calcular o número de anagramas de 4 a 12 letras com pelo menos 2 A, 1 B e 1 C. O que acontece se o conjunto inicial mudar para AAAAA BB CC DD E?

**Solução.** Se não houvesse nenhuma restrição sobre a quantidade de A's, escreveríamos  $A : 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$ , pois temos 4 letras A. Como queremos que tenham pelo menos 2 A's, teremos  $A : \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$ . Da mesma forma,  $B : x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$ ,  $C : x + \frac{x^2}{2!}$ ,  $D : 1 + x + \frac{x^2}{2!}$  e  $E : 1 + x$ .

Para calcular o número de anagramas, precisamos multiplicar todas as equações obtidas:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \right) \left( x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \right) \left( x + \frac{x^2}{2!} \right) \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} \right) (1+x) \\
& \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right) \left( x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right) \left( x + \frac{x^2}{2} \right) \left( 1 + x + \frac{x^2}{2} \right) (1+x) \\
& \left( \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{12} + \frac{5x^5}{24} + \frac{7x^6}{144} + \frac{x^7}{144} \right) \left( x + \frac{x^2}{2} \right) \left( 1 + 2x + \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{2} \right) \\
& \left( \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{12} + \frac{5x^5}{24} + \frac{7x^6}{144} + \frac{x^7}{144} \right) \left( x + \frac{5x^2}{2} + \frac{5x^3}{2} + \frac{5x^4}{4} + \frac{x^5}{4} \right) \\
& \frac{x^4}{2} + \frac{5x^5}{3} + \frac{5x^6}{2} + \frac{161x^7}{72} + \frac{373x^8}{288} + \frac{145x^9}{288} + \frac{25x^{10}}{192} + \frac{x^{11}}{48} + \frac{x^{12}}{576}
\end{aligned}$$

Agora, para calcular o número de anagramas com n letras, basta multiplicar o coeficiente na frente de  $x^n$  por  $n!$ , obtendo assim:

$$\begin{aligned}
4 : & \quad \frac{1}{2} \cdot 4! = \frac{24}{2} = 12 \\
5 : & \quad \frac{5}{3} \cdot 5! = \frac{5 \cdot 120}{3} = 200 \\
6 : & \quad \frac{5}{2} \cdot 6! = \frac{5 \cdot 720}{2} = 1800 \\
7 : & \quad \frac{161}{72} \cdot 7! = \frac{161 \cdot 5040}{72} = 11270 \\
8 : & \quad \frac{373}{288} \cdot 8! = \frac{373 \cdot 40320}{288} = 52220 \\
9 : & \quad \frac{145}{288} \cdot 9! = \frac{145 \cdot 362880}{288} = 182700 \\
10 : & \quad \frac{25}{192} \cdot 10! = \frac{25 \cdot 3628800}{192} = 472500 \\
11 : & \quad \frac{1}{48} \cdot 11! = \frac{39916800}{48} = 831600 \\
12 : & \quad \frac{1}{576} \cdot 12! = \frac{479001600}{576} = 831600
\end{aligned}$$

Para realizar os cálculos com o conjunto inicial AAAAA BB CC DD E, teríamos que alterar as condições iniciais:

$$A : \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$B : x + \frac{x^2}{2!}$$

$$C : x + \frac{x^2}{2!}$$

$$D : 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

$$E : 1 + x$$

Nesse caso, o produto ficaria

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \right) \left( x + \frac{x^2}{2!} \right) \left( x + \frac{x^2}{2!} \right) \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} \right) (1+x) \\
& \left( \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{12} + \frac{x^5}{8} + \frac{7x^6}{240} + \frac{x^7}{240} \right) \left( x + \frac{5x^2}{2} + \frac{5x^3}{2} + \frac{5x^4}{4} + \frac{x^5}{4} \right) \\
& \frac{x^4}{2} + \frac{5x^5}{3} + \frac{29x^6}{12} + \frac{241x^7}{120} + \frac{497x^8}{480} + \frac{11x^9}{32} + \frac{5x^{10}}{64} + \frac{x^{11}}{80} + \frac{x^{12}}{960}
\end{aligned}$$

Novamente, para calcular o número de anagramas com n letras, basta multiplicar o coeficiente na frente de  $x^n$  por  $n!$ , obtendo assim:

$$\begin{aligned}
4 : \quad & \frac{1}{2} \cdot 4! = \frac{24}{2} = 12 \\
5 : \quad & \frac{5}{3} \cdot 5! = \frac{5 \cdot 120}{3} = 200 \\
6 : \quad & \frac{29}{12} \cdot 6! = \frac{29 \cdot 720}{12} = 1740 \\
7 : \quad & \frac{241}{120} \cdot 7! = \frac{241 \cdot 5040}{120} = 10122 \\
8 : \quad & \frac{497}{480} \cdot 8! = \frac{497 \cdot 40320}{480} = 41748 \\
9 : \quad & \frac{11}{32} \cdot 9! = \frac{11 \cdot 362880}{32} = 124740 \\
10 : \quad & \frac{5}{64} \cdot 10! = \frac{5 \cdot 3628800}{64} = 283500 \\
11 : \quad & \frac{1}{80} \cdot 11! = \frac{39916800}{80} = 498960 \\
12 : \quad & \frac{1}{960} \cdot 12! = \frac{479001600}{960} = 498960
\end{aligned}$$