

## SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Na matemática, os números de Fibonacci são uma sequência ou sucessão definida como recursiva pela fórmula:

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n) \text{ , com } n \geq 1 \text{ e } F(1) = F(2) = 1 \text{ .}$$

Os primeiros números de Fibonacci são:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, ...

Esta sequência foi descrita primeiramente por Leonardo de Pisa, também conhecido como Fibonacci para descrever o crescimento de uma população de coelhos.

## SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Na matemática, os números de Fibonacci são uma sequência ou sucessão definida como recursiva pela fórmula:

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n) \text{ , com } n \geq 1 \text{ e } F(1) = F(2) = 1 \text{ .}$$

Os primeiros números de Fibonacci são:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, ...

Esta sequência foi descrita primeiramente por Leonardo de Pisa, também conhecido como Fibonacci para descrever o crescimento de uma população de coelhos.

⊙ → ⊗ → ⊗⊙
⊙
⊗
⊗⊙
⊗ ⊙ ⊗
⊗ ⊙ ⊗ ⊗ ⊙
⊗ ⊙ ⊗ ⊗ ⊙ ⊗ ⊙
⊗ ⊙ ⊗ ⊗ ⊙ ⊗ ⊗ ⊙ ⊗ ⊗ ⊙
⊗ ⊙ ⊗ ⊗ ⊙ ⊗ ⊙ ⊗ ⊗ ⊙ ⊗ ⊗ ⊙ ⊗ ⊗ ⊙ ⊗ ⊗ ⊙

## SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Na matemática, os números de Fibonacci são uma sequência ou sucessão definida como recursiva pela fórmula:

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n) \text{ , com } n \geq 1 \text{ e } F(1) = F(2) = 1 \text{ .}$$

Os primeiros números de Fibonacci são:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, ...

Esta sequência foi descrita primeiramente por Leonardo de Pisa, também conhecido como Fibonacci para descrever o crescimento de uma população de coelhos.

$\odot \rightarrow \otimes \rightarrow \otimes \odot$	★
$\odot$	1
$\otimes$	1
$\otimes \odot$	2
$\otimes \odot \otimes$	3
$\otimes \odot \otimes \otimes \odot$	5
$\otimes \odot \otimes \otimes \odot \otimes \odot \otimes$	8
$\otimes \odot \otimes \otimes \odot \otimes \odot \otimes \otimes \odot \otimes \otimes \odot$	13
$\otimes \odot \otimes \otimes \odot \otimes \odot \otimes \otimes \odot \otimes \otimes \odot \otimes \odot \otimes \otimes \odot \otimes \otimes \odot$	21
	⋮

## SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Na matemática, os números de Fibonacci são uma sequência ou sucessão definida como recursiva pela fórmula:

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n) \text{ , com } n \geq 1 \text{ e } F(1) = F(2) = 1 \text{ .}$$

Os primeiros números de Fibonacci são:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, ...

Esta sequência foi descrita primeiramente por Leonardo de Pisa, também conhecido como Fibonacci para descrever o crescimento de uma população de coelhos.

$\odot \rightarrow \otimes \rightarrow \otimes \odot$	★	$0 \rightarrow 1 \rightarrow 10$
$\odot$	1	0
$\otimes$	1	1
$\otimes \odot$	2	10
$\otimes \odot \otimes$	3	101
$\otimes \odot \otimes \otimes \odot$	5	10110
$\otimes \odot \otimes \otimes \odot \otimes \odot \otimes$	8	10110101
$\otimes \odot \otimes \otimes \odot \otimes \odot \otimes \otimes \odot \otimes \otimes \odot$	13	1011010110110
$\otimes \odot \otimes \otimes \odot \otimes \odot \otimes \otimes \odot \otimes \otimes \odot \otimes \odot \otimes \otimes \odot \otimes \otimes \odot$	21	101101011011010110101
	⋮	

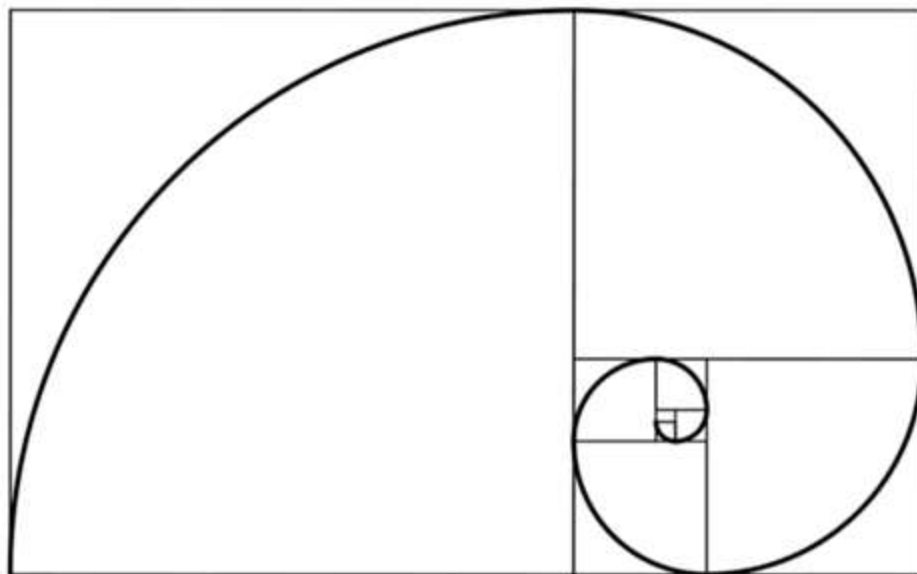
## SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Na matemática, os números de Fibonacci são uma sequência ou sucessão definida como recursiva pela fórmula:

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n) \text{ , com } n \geq 1 \text{ e } F(1) = F(2) = 1 \text{ .}$$

Os primeiros números de Fibonacci são:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, ...



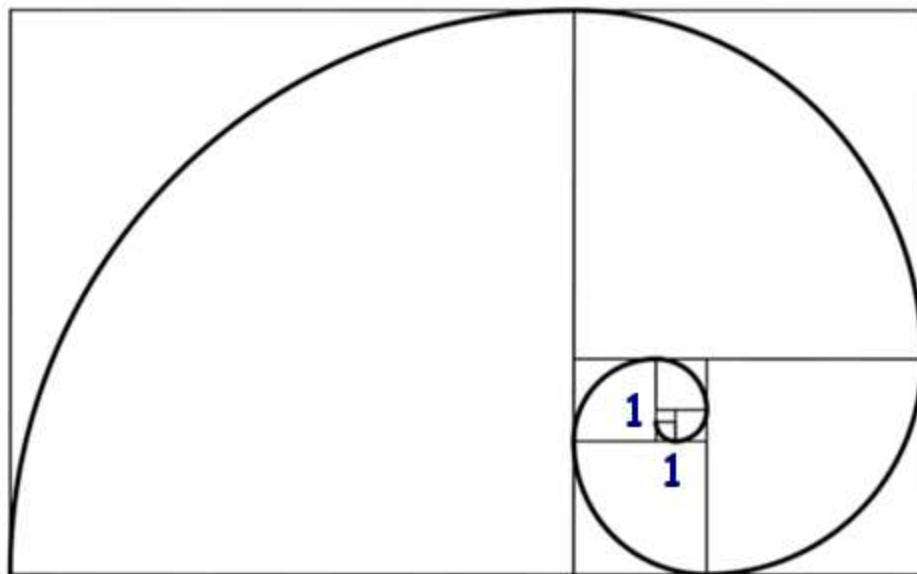
## SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Na matemática, os números de Fibonacci são uma sequência ou sucessão definida como recursiva pela fórmula:

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n) \text{ , com } n \geq 1 \text{ e } F(1) = F(2) = 1 \text{ .}$$

Os primeiros números de Fibonacci são:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, ...





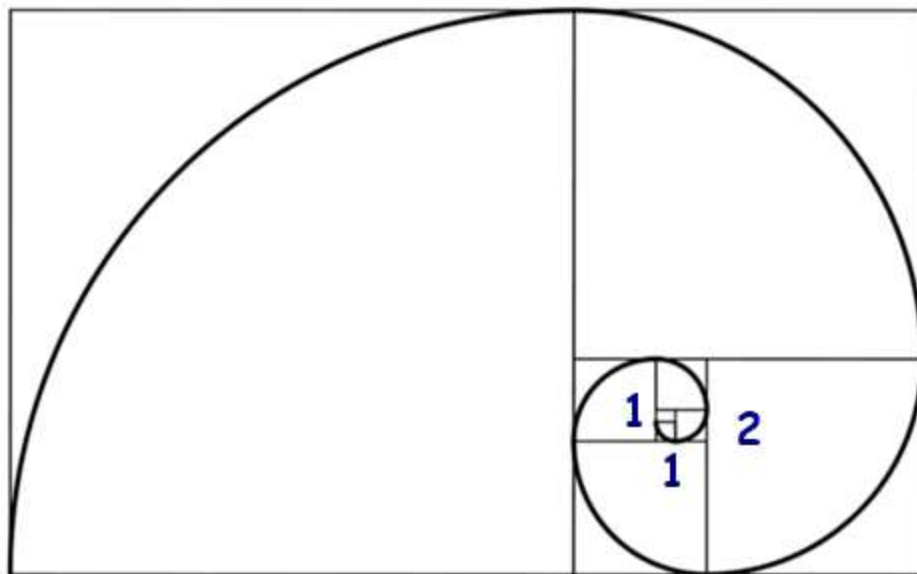
## SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Na matemática, os números de Fibonacci são uma sequência ou sucessão definida como recursiva pela fórmula:

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n) \text{ , com } n \geq 1 \text{ e } F(1) = F(2) = 1 \text{ .}$$

Os primeiros números de Fibonacci são:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, ...



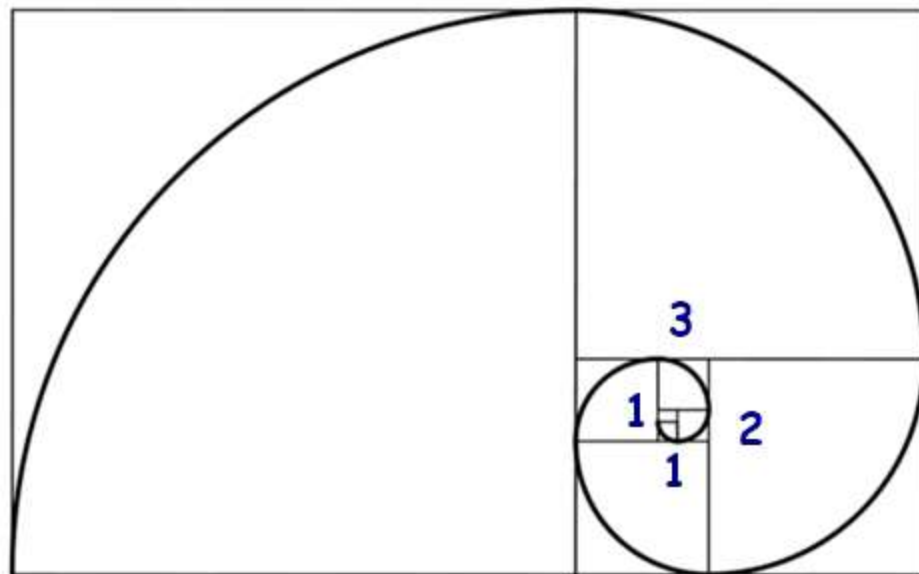
## SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Na matemática, os números de Fibonacci são uma sequência ou sucessão definida como recursiva pela fórmula:

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n) \text{ , com } n \geq 1 \text{ e } F(1) = F(2) = 1 \text{ .}$$

Os primeiros números de Fibonacci são:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, ...





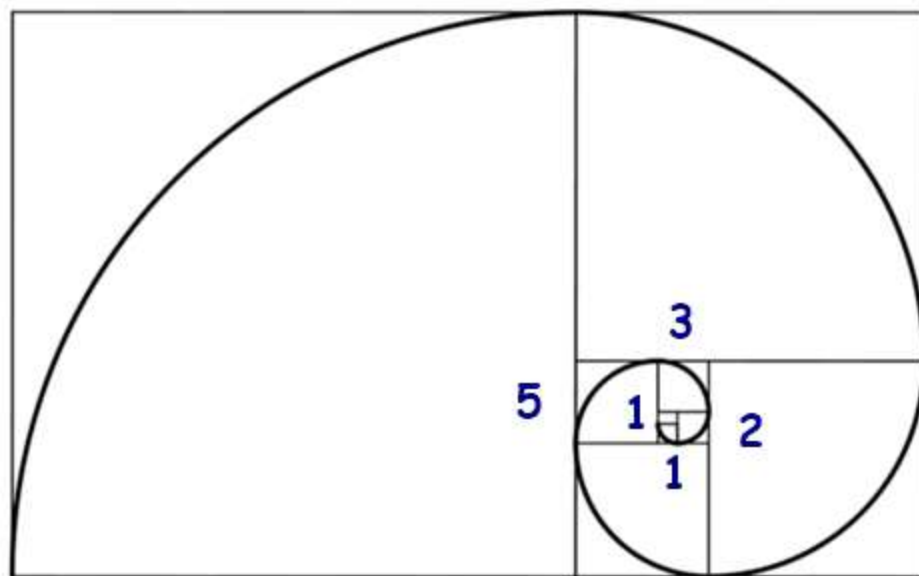
## SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Na matemática, os números de Fibonacci são uma sequência ou sucessão definida como recursiva pela fórmula:

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n) \text{ , com } n \geq 1 \text{ e } F(1) = F(2) = 1 \text{ .}$$

Os primeiros números de Fibonacci são:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, ...



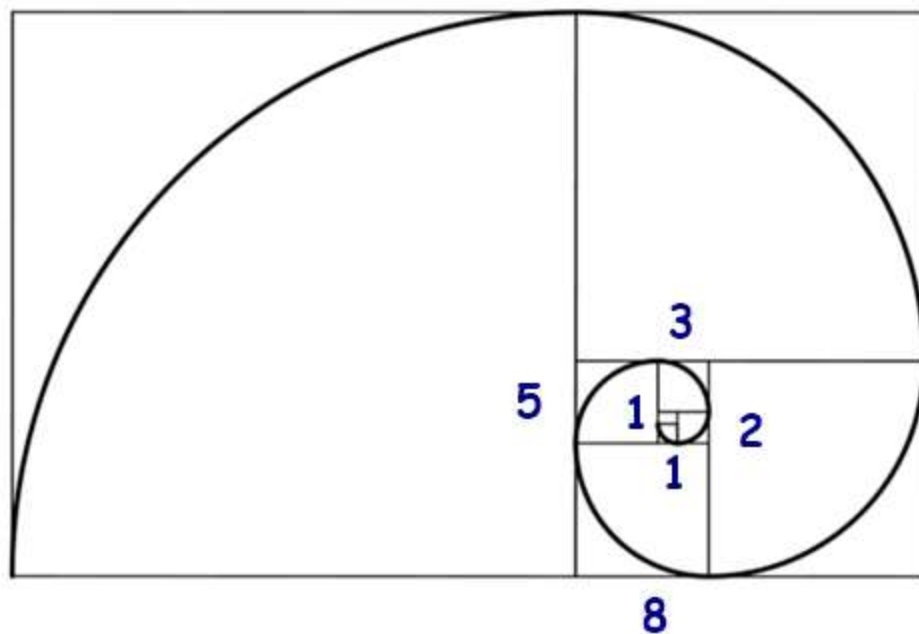
## SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Na matemática, os números de Fibonacci são uma sequência ou sucessão definida como recursiva pela fórmula:

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n) \text{ , com } n \geq 1 \text{ e } F(1) = F(2) = 1 \text{ .}$$

Os primeiros números de Fibonacci são:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, ...



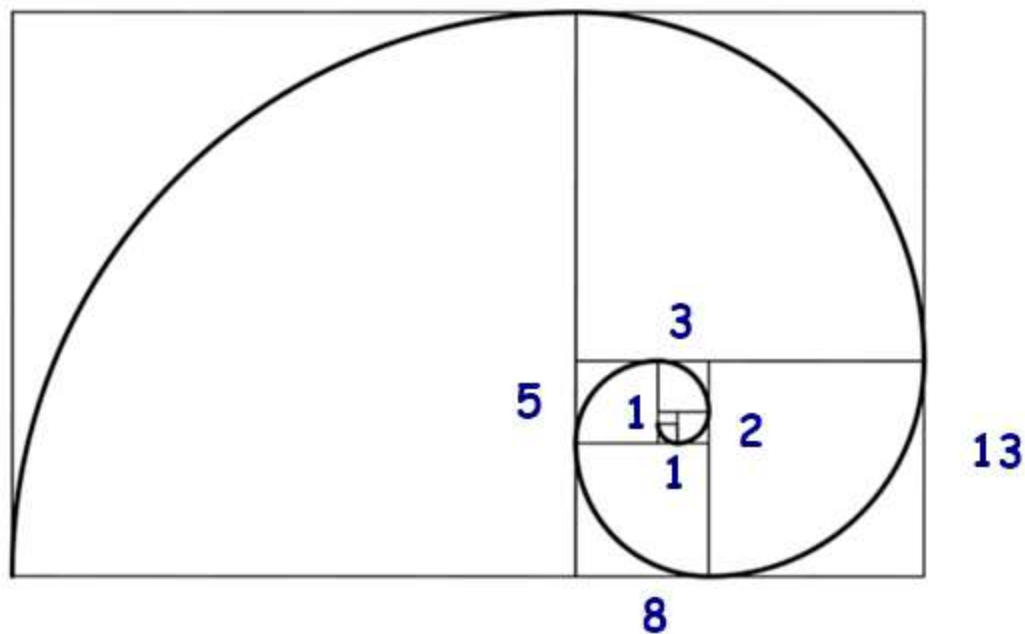
## SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Na matemática, os números de Fibonacci são uma sequência ou sucessão definida como recursiva pela fórmula:

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n) \text{ , com } n \geq 1 \text{ e } F(1) = F(2) = 1 \text{ .}$$

Os primeiros números de Fibonacci são:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, ...



Os termos da sequência estabelecem entre si a chamada proporção (ou razão) áurea, muito usada na arte, na arquitetura e no design por ser considerada agradável aos olhos. Seu valor é de 1,618... Trata-se de um número irracional, infinito, representado na matemática pela letra grega phi:  $\phi$ .

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, ...

$$2 \div 1 = 2$$

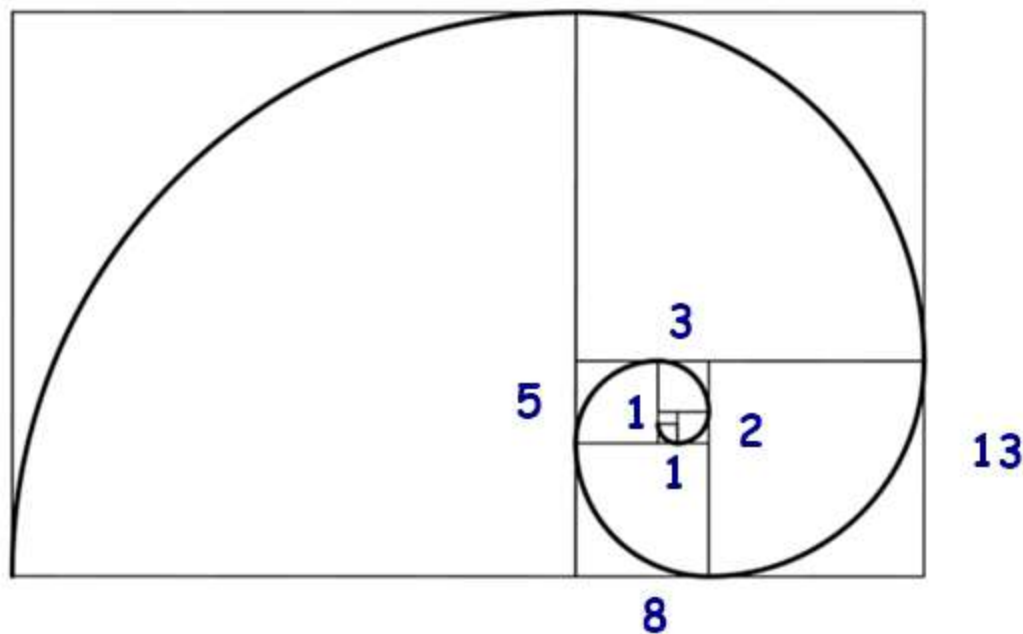
$$3 \div 2 = 1,5$$

$$5 \div 3 = 1,666...$$

$$8 \div 5 = 1,6$$

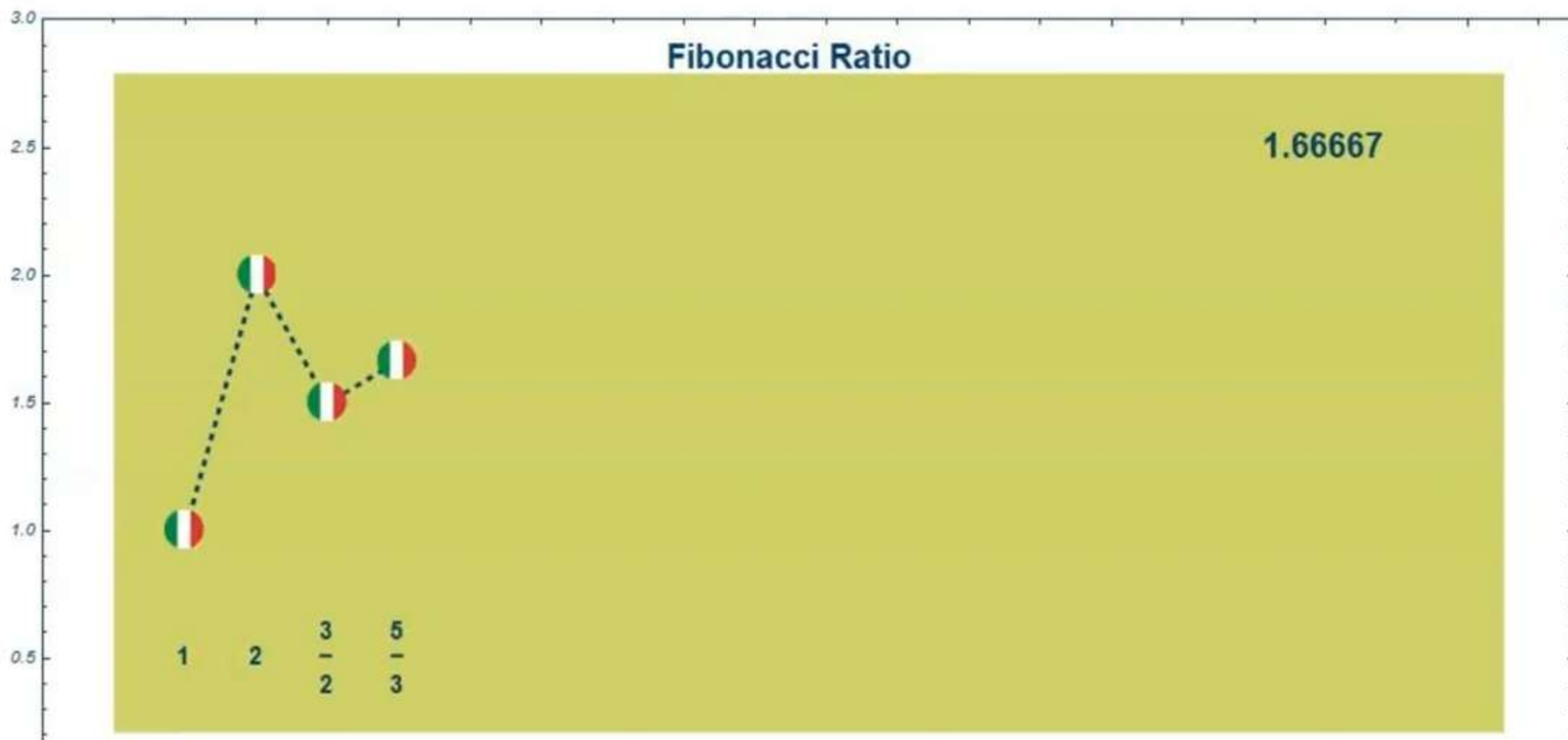
$$13 \div 8 = 1,625$$

$$21 \div 13 = 1,615$$



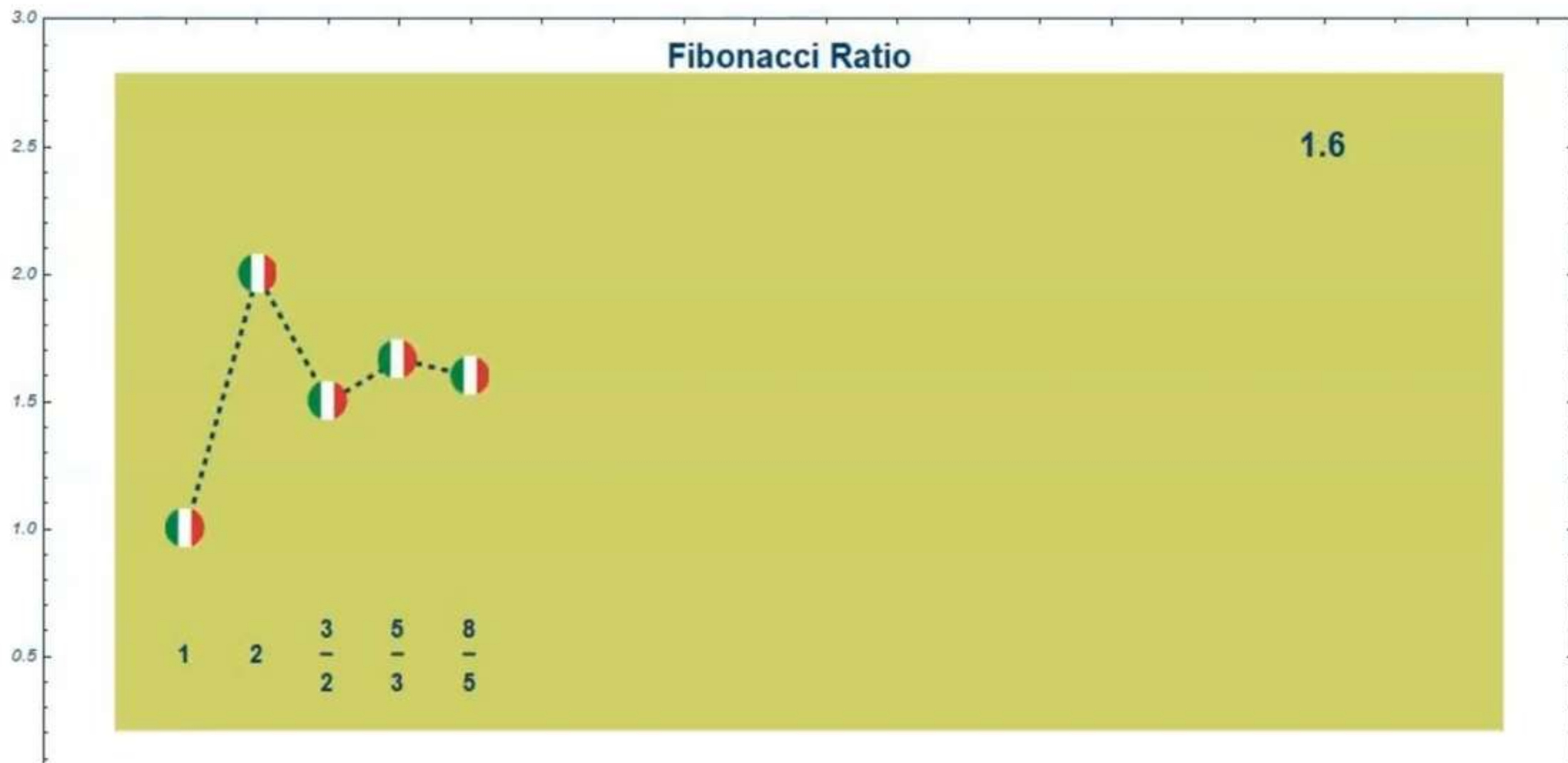
## Fibonacci Ratio

1.66667



## Fibonacci Ratio

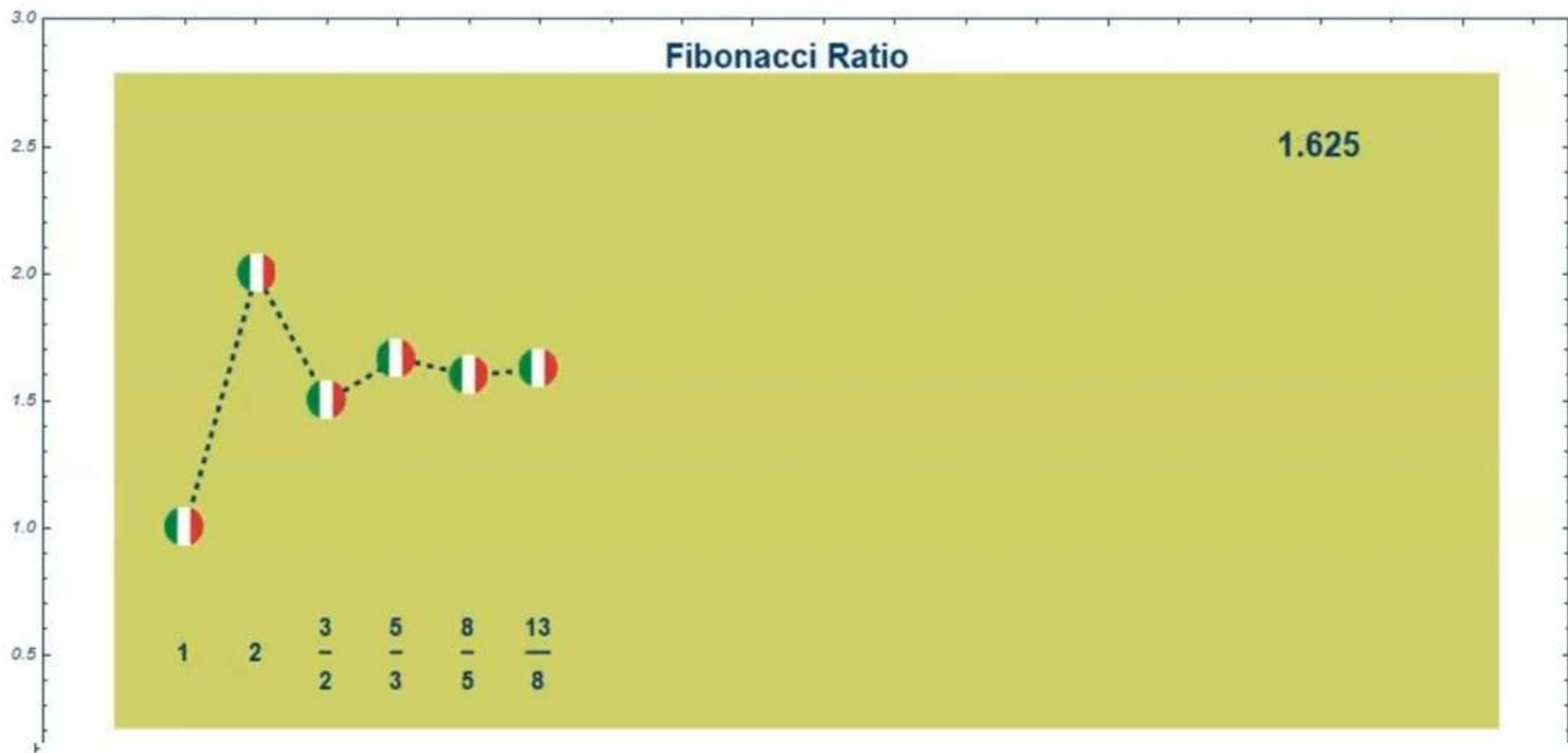
1.6





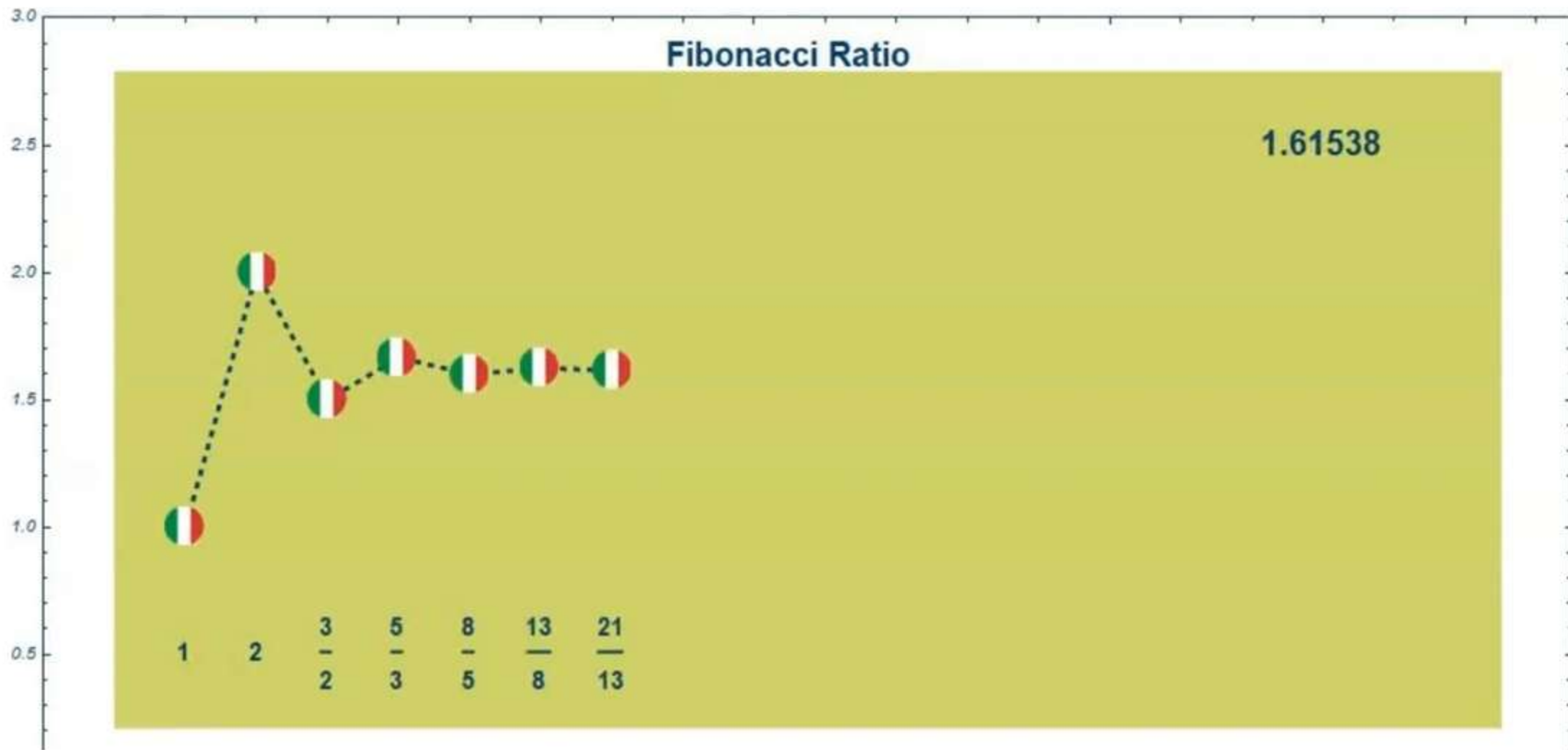
## Fibonacci Ratio

1.625



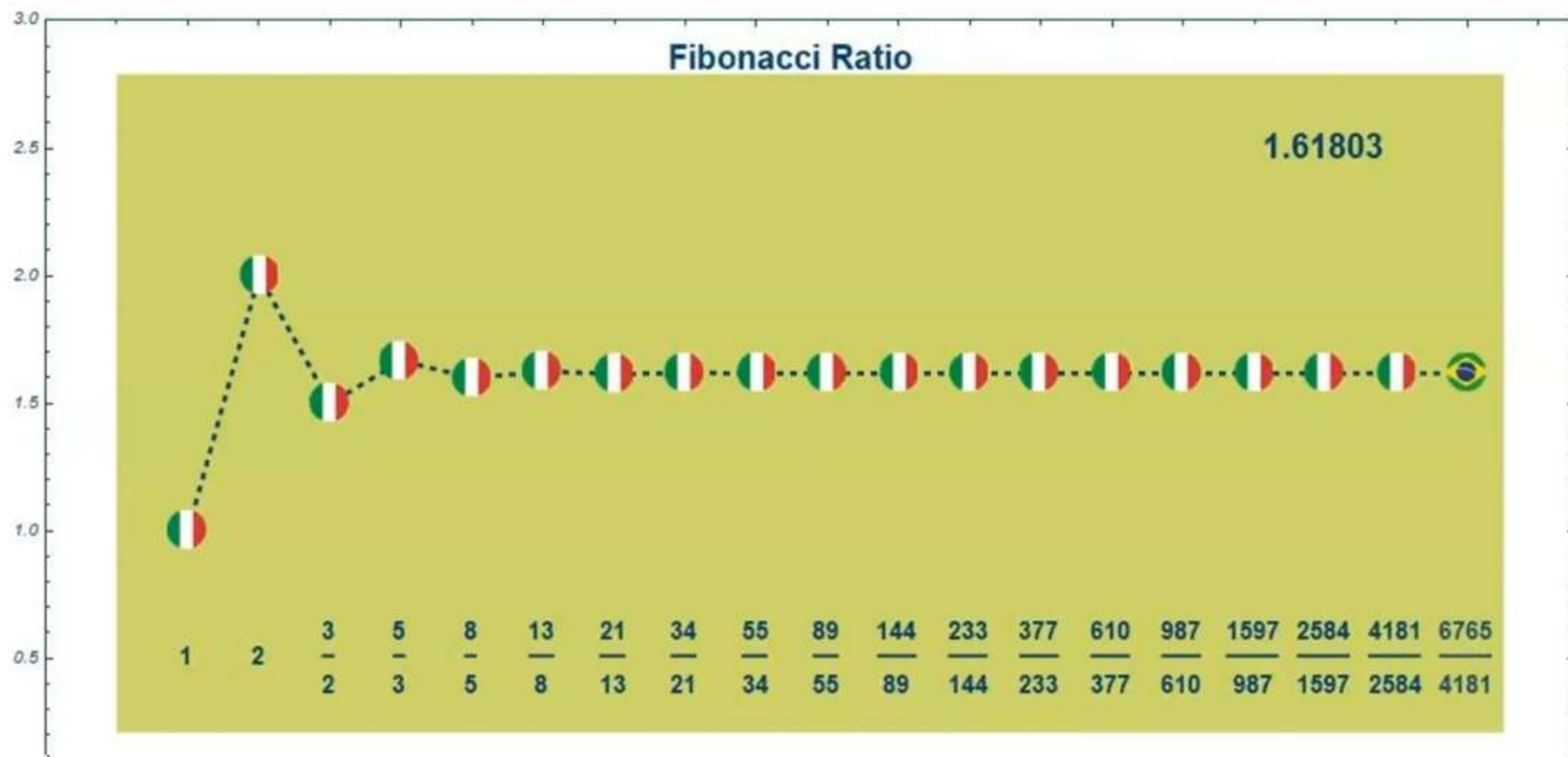
## Fibonacci Ratio

1.61538



# Fibonacci Ratio

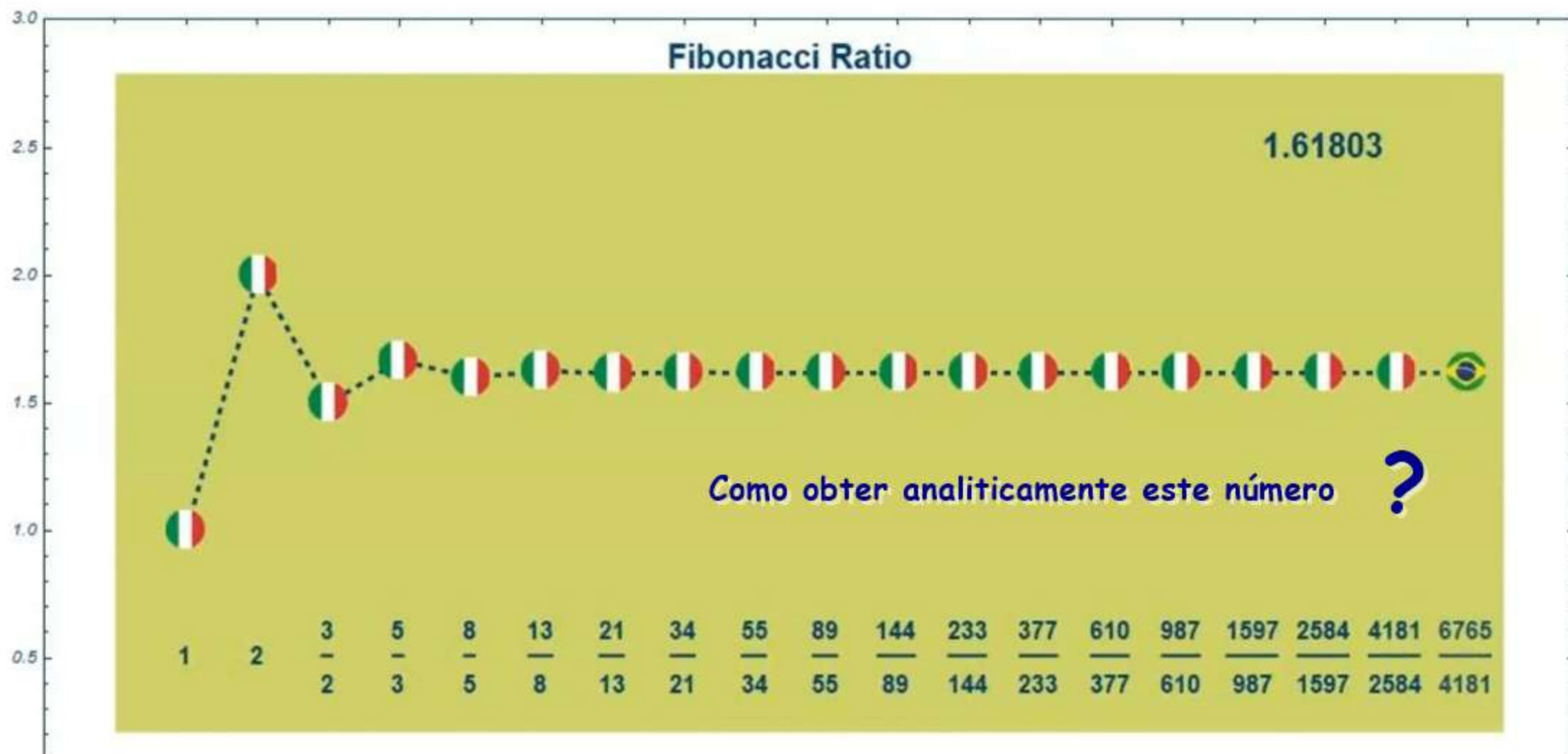
1.61803



## Fibonacci Ratio

1.61803

Como obter analiticamente este número ?



## Sequências

FIBONACCI  $F(n) + F(n+1) = F(n+2)$

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

$$F(n) = a\alpha_1^n + b\alpha_2^n$$

COM  $\alpha_1, \alpha_2$  DETERMINADOS RESOLVENDO A EQUAÇÃO QUE OBTENHAMOS

DA SEQUÊNCIA, NESTE CASO  $\alpha^n + \alpha^{n+1} = \alpha^{n+2} \rightarrow 1 + \alpha = \alpha^2$

## Sequências

FIBONACCI  $F(n) + F(n+1) = F(n+2)$

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

$$F(n) = a\alpha_1^n + b\alpha_2^n$$

COM  $\alpha_1, \alpha_2$  DETERMINADOS RESOLVENDO A EQUAÇÃO QUE OBTENHAMOS

DA SEQUÊNCIA, NESTE CASO  $\alpha^n + \alpha^{n+1} = \alpha^{n+2} \rightarrow 1 + \alpha = \alpha^2$

teremos que resolver uma equação de segunda ordem



$$1 + \alpha = \alpha^2$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$F(n) = a \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + b \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

PARA DETERMINAR  $a$  E  $b$  USAREMOS OS VALORES DE  $F(1)$  E  $F(2)$

$$F(1) = a \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + b \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1$$

$$F(2) = a \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + b \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 = 1$$

ENTÃO TEREMOS  $\frac{a+b}{2} + \sqrt{5} \frac{a-b}{2} = 1 \Rightarrow a+b=0$

$$3 \frac{a+b}{2} + \sqrt{5} \frac{a-b}{2} = 1$$

CONSEQUENTE MENTE  $a-b = 2/\sqrt{5}$

$$a = -b = 1/\sqrt{5}$$

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{RAZÃO ÁUREA}$$

O QUE ACONTECE SE MANTERMOS A FÓRMULA DA  
SEQUÊNCIA MAS MUDAMOS O SEGUNDO ELEMENTO

$$\tilde{F}(n) + \tilde{F}(n+1) = \tilde{F}(n+2) \quad 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \dots$$

Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8,

$$\hat{F}(n) = \tilde{\alpha} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \tilde{\beta} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$$\hat{F}(1) = \tilde{\alpha} \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \tilde{\beta} \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

$$\hat{F}(2) = \tilde{\alpha} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 + \tilde{\beta} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 = 3$$

$$\frac{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}}{2} + \sqrt{5} \frac{\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}}{2} = 1 \quad \frac{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}}{2} + \sqrt{5} \frac{\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}}{2} = 1$$

$$3 \frac{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}}{2} + \sqrt{5} \frac{\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}}{2} = 3 \quad \frac{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}}{2} + \sqrt{5} \frac{\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}}{6} = 1$$

$$\sqrt{5}(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) = 0$$

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$$

$$\frac{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}}{2} = 1 \Rightarrow \tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = 1$$

$$\hat{F}(n) = \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

CLARIFICATION  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{F}(n+1)}{\hat{F}(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

# Fibonacci: $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$

1.61803

$F(1)=1$  &  $F(2)=3$



3

4

3

7

4

11

7

18

11

29

18

47

29

76

47

123

76

199

123

322

199

521

322

843

521

1364

843

2207

1364

3571

2207

5778

3571

9349

5778

15127

9349



2

3

5

3

8

5

13

8

21

13

34

21

55

34

89

55

144

89

233

144

377

233

610

377

987

610

1597

987

2584

1597

4181

2584

6765

4181

$F(1)=1$  &  $F(2)=1$



1

2

3

2

5

3

8

5

13

8

21

13

34

21

55

34

89

55

144

89

233

144

377

233

610

377

987

610

1597

987

2584

1597

4181

2584

6765

4181



3

4

5

7

8

11

13

18

21

29

34

47

55

76

89

123

144

199

233

322

377

521

610

843

987

1364

1597

2207

2584

3571

4181

5778

6765

9349



2

3

5

7

8

11

13

18

21

29

34

47

55

76

89

123

144

199

233

322

377

521

610

843

987

1364

1597

2207

2584

3571

4181

5778

6765

9349



3

4

5

7

8

11

13

18

21

29

34

47

55

76

89

123

144

199

233

322

377

521

610

843

987

1364

1597

2207

2584

3571

4181

5778

6765

9349



2

3

5

7

8

11

13

18

21

29

34

47

55

76

89

123

144

199

233

322

377

521

610

843

987

1364

1597

2207

2584

3571

4181

5778

6765

9349



3

4

5

7

8

11

13

18

21

29

34

47

55

76

89

123

144

199

233

322

377

521

610

843

987

1364

1597

2207

2584

3571

4181

5778

6765

9349



2

3

5

7

8

11

13

18

21

29

34

47

55

76

89

123

144

199

233

322

377