



Fórmulas de recorrência:

Fibonacci

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n)$$

Fibonacci modificado

$$F(n+2) = F(n+1) + m F(n)$$

Como, a partir de um número áureo fixado, podemos construir as nossas próprias sequências ?



$$F(n+2) = F(n+1) + F(n)$$

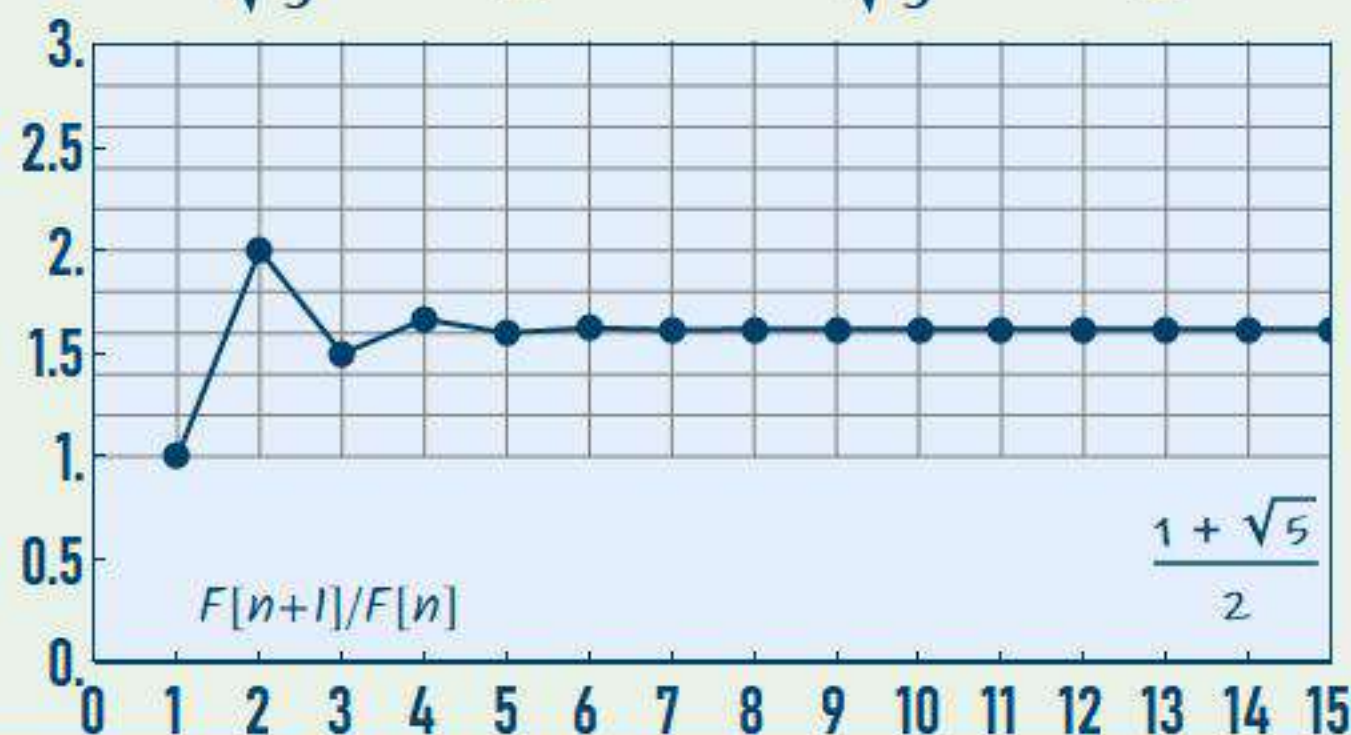
solução do tipo α^n : $\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n$

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

solução: $a \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + b \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$

usando $F(1) = F(2) = 1$:

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$



$$F(n+2) = F(n+1) + m F(n)$$

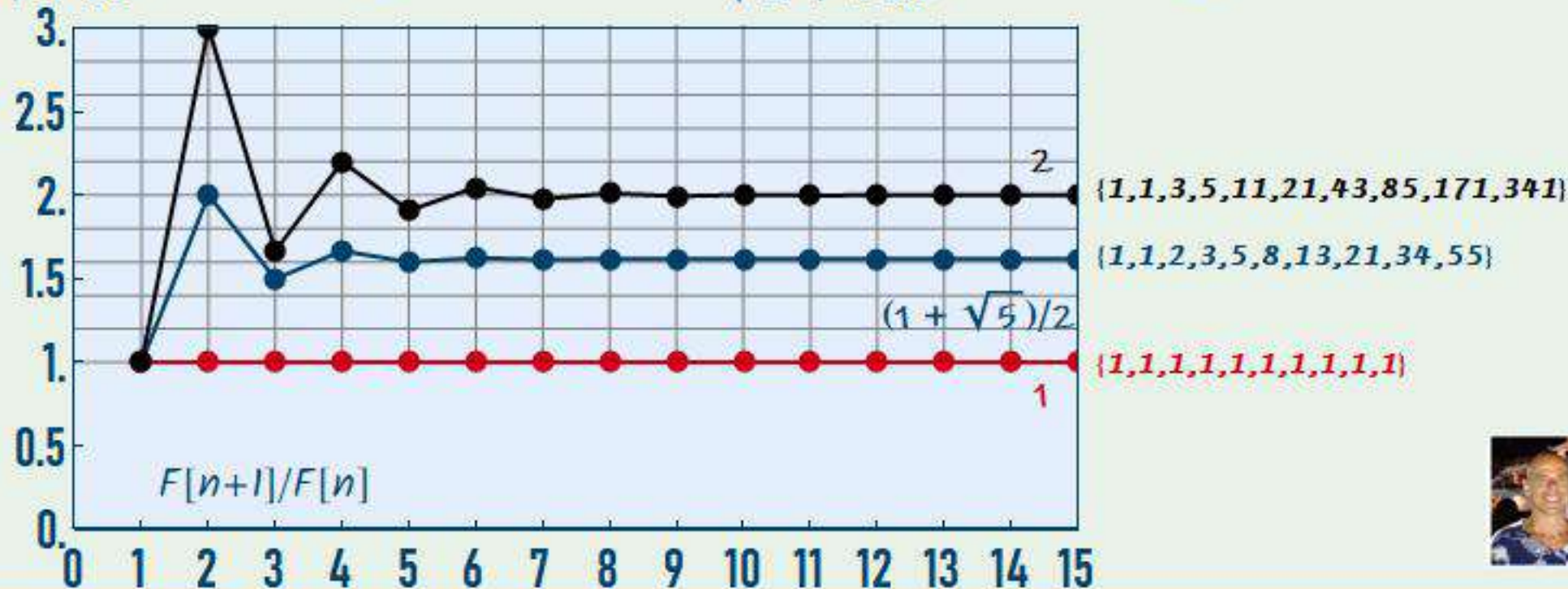
solução do tipo α^n : $\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + m \alpha^n$

$$\alpha^2 - \alpha - m = 0$$

$$\text{solução: } a \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4m}}{2} \right)^n + b \left(\frac{1 - \sqrt{1 + 4m}}{2} \right)^n$$

usando $F(1) = F(2) = 1$:

$$F(n, m) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4m}} \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4m}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{1 + 4m}} \left(\frac{1 - \sqrt{1 + 4m}}{2} \right)^n$$



$$G[n+2] = 4 (G[n+1] - G[n])$$

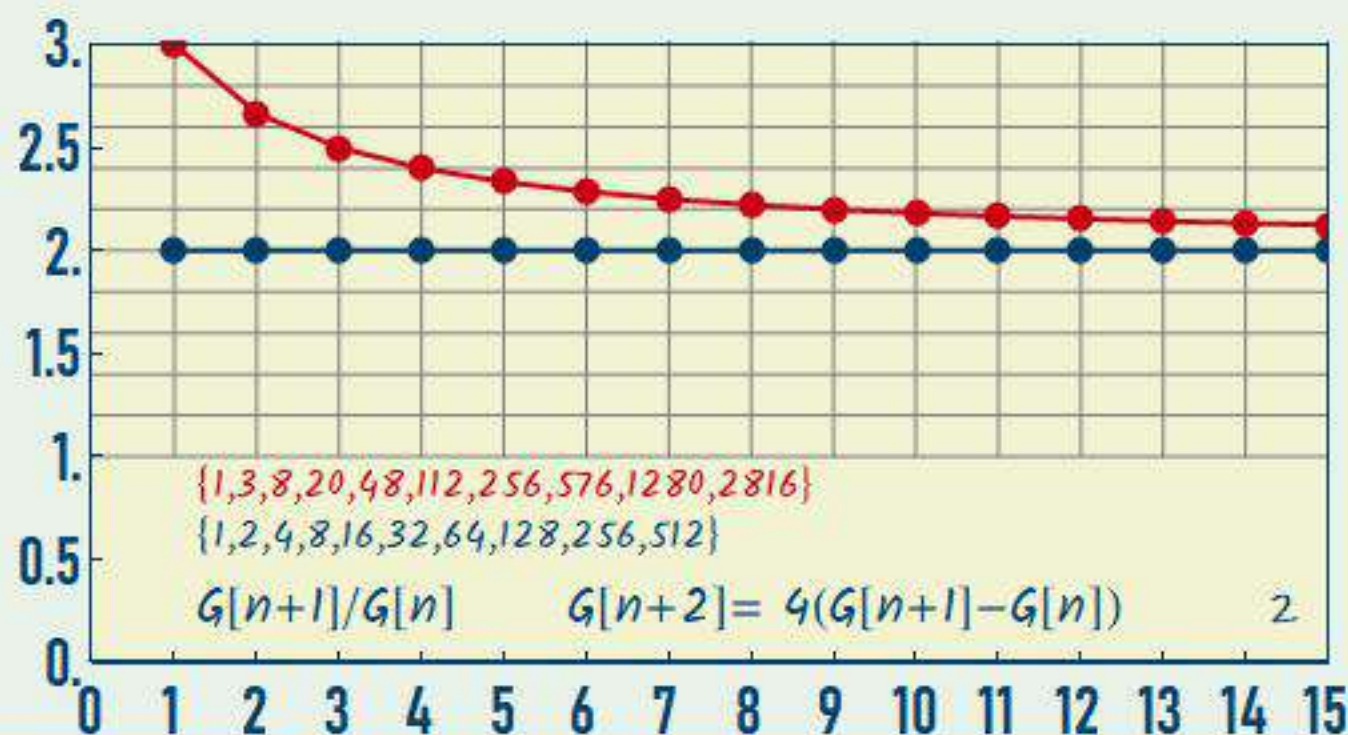
solução do tipo α^n : $\alpha^{n+2} = 4 (\alpha^{n+1} - \alpha^n)$

$$\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0 \Rightarrow (\alpha - 2)^2 = 0$$

solução : $a 2^n + b n 2^n$

usando $G(1) = 1$ e $G(2) = 2$: $G[n] = 2^{n-1}$

usando $G(1) = 1$ e $G(2) = 3$: $G[n] = (n+1) 2^{n-2}$



$$I[n+3] = 6 I[n+2] - 11 I[n+1] + 6 I[n]$$

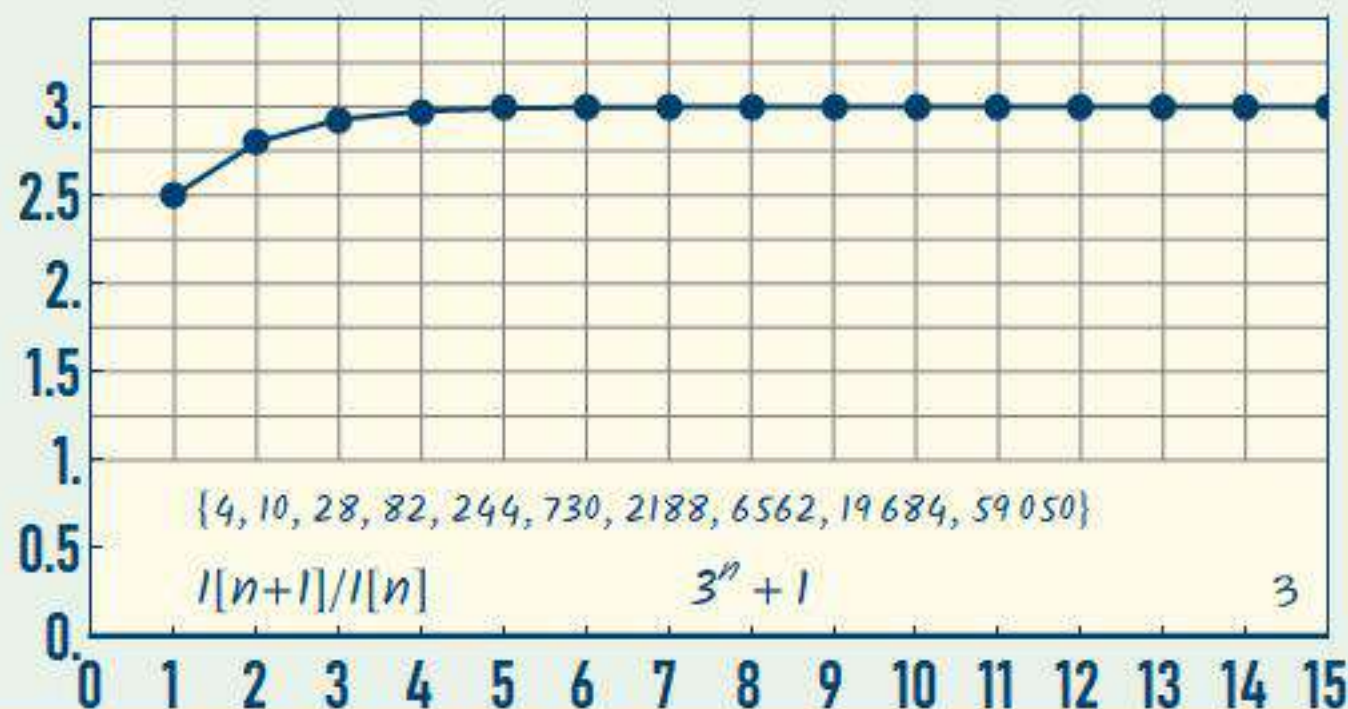
$$\alpha^3 - 6 \alpha^2 + 11 \alpha - 6 = 0 \quad [\alpha = 1 \text{ é uma solução}]$$

$$(\alpha^3 - 6 \alpha^2 + 11 \alpha - 6) / (\alpha - 1) = \alpha^2 - 5 \alpha + 6 = (\alpha - 2) (\alpha - 3)$$

$$\text{solução : } a 1^n + b 2^n + c 3^n$$

se escolhemos como primeiros 3 termos $I(1) = 4$, $I(2) = 10$ e $I(3) = 28$ teremos $a = 1$, $b = 0$ e $c = 1$

$$I[n] = 1 + 3^n$$



$$J[n+3] = 4 J[n+2] - 5 J[n+1] + 2 J[n]$$

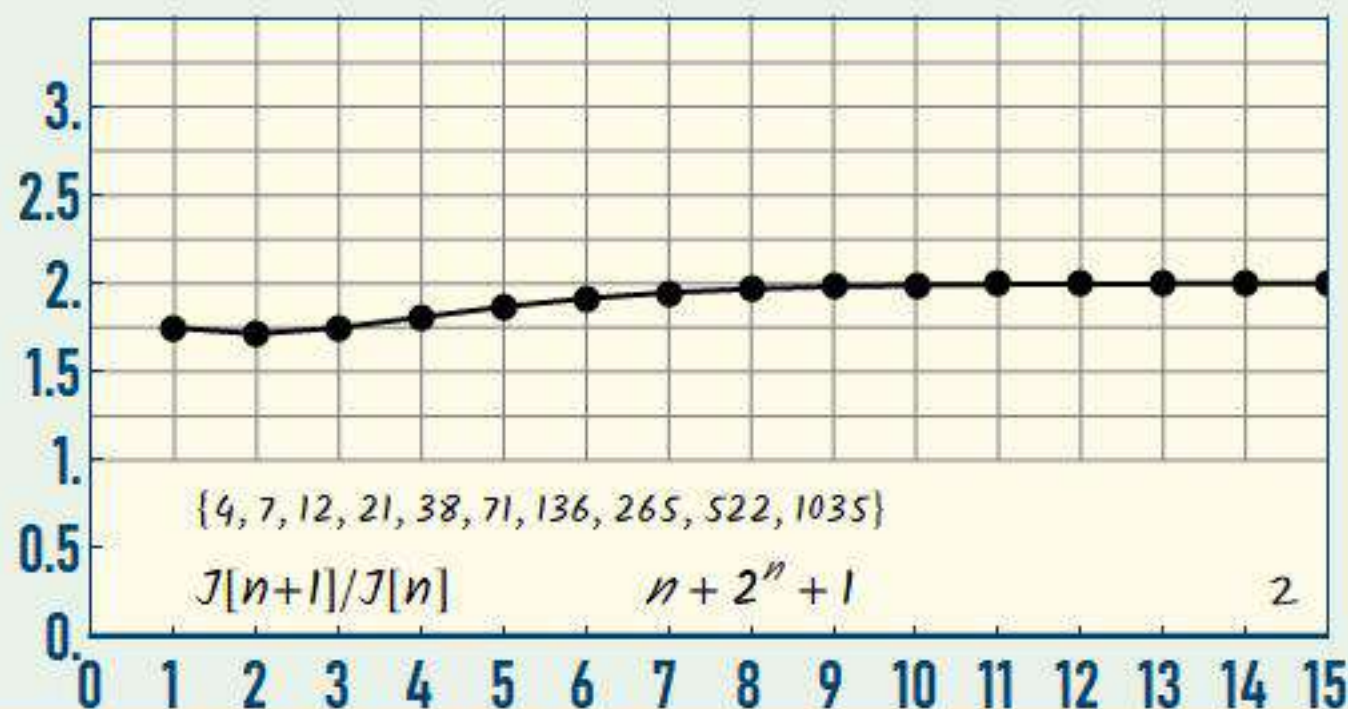
$$\alpha^3 - 4 \alpha^2 + 5 \alpha - 2 = 0 \quad [\alpha = 1 \text{ é uma solução}]$$

$$(\alpha^3 - 4 \alpha^2 + 5 \alpha - 2) / (\alpha - 1) = \alpha^2 - 3 \alpha + 2 = (\alpha - 1) (\alpha - 2)$$

$$\text{solução : } a 1^n + b n 1^n + c 2^n$$

se escolhemos como primeiros 3 termos $J(1) = 4$, $J(2) = 7$ e $J(3) = 12$ teremos $a = 1$, $b = 1$ e $c = 1$

$$J[n] = 1 + n + 2^n$$



$$K[n+3] = 3 K[n+2] - 3 K[n+1] + K[n]$$

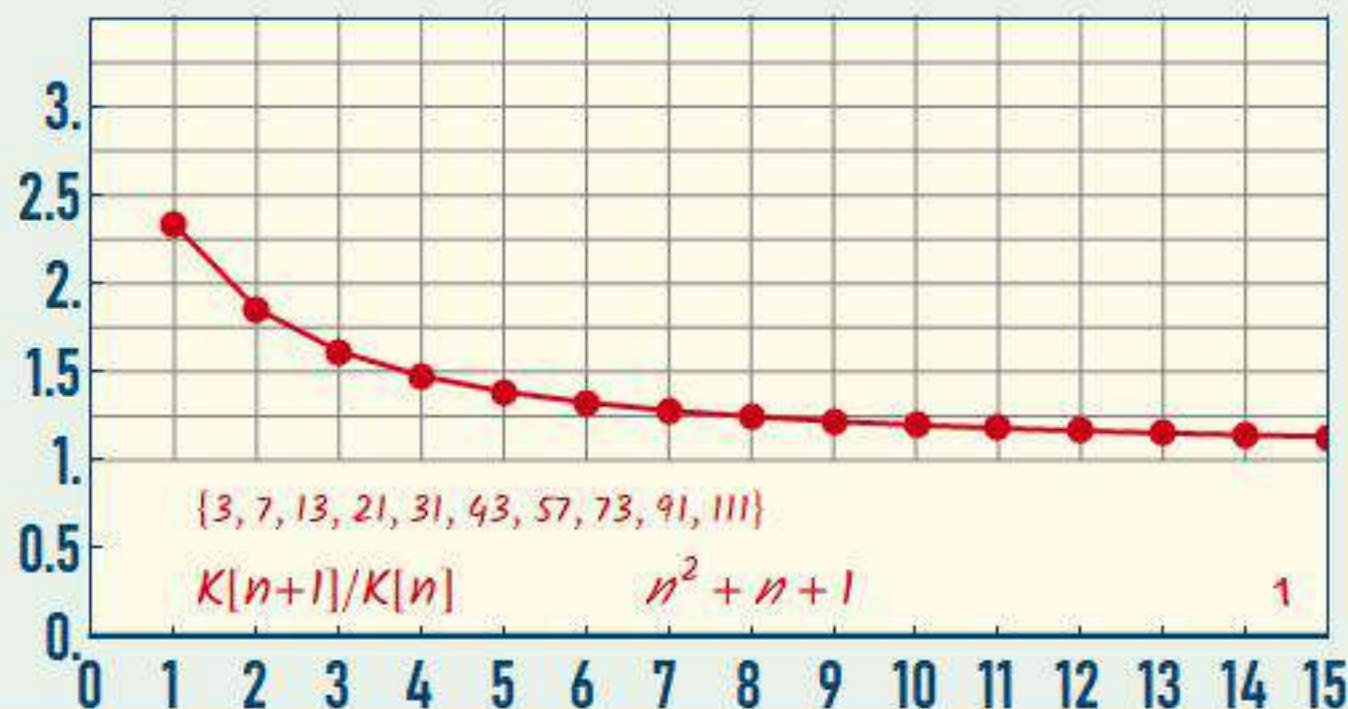
$$\alpha^3 - 3 \alpha^2 + 3 \alpha - 1 = 0 \quad [\alpha = 1 \text{ é uma solução}]$$

$$(\alpha^3 - 3 \alpha^2 + 3 \alpha - 1) / (\alpha - 1) = \alpha^2 - 2 \alpha + 1 = (\alpha - 1)^2$$

$$\text{solução: } a 1^n + b n 1^n + c n^2 1^n$$

se escolhemos como primeiros 3 termos $K(1) = 3$, $K(2) = 7$ e $K(3) = 13$ teremos $a = 1$, $b = 1$ e $c = 1$

$$K[n] = 1 + n + n^2$$



Como criar problemas a partir das soluções

α_1, α_2 e α_3 seja as soluções escolhidas

a sequência de terceira ordem será:

$$S[n+3] = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) S[n+2] - (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) S[n+1] + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 S[n]$$

raízes distintas solução:

$$S[n] = a (\alpha_1)^n + b (\alpha_2)^n + c (\alpha_3)^n$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 \neq \alpha_3$$

$$S[n] = (a + b n)(\alpha_1)^n + c (\alpha_3)^n$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$$

$$S[n] = (a + b n + c n^2)(\alpha_1)^n$$

enfim a escolha de a, b e c determina $S(1), S(2)$ e $S(3)$



$$G[n+2] = G[n+1] + G[n] + n, \quad G[1] = -1, \quad G[2] = -2$$

não homogênea por causa do termo n

$$G[n] = F[n] + a n + b$$

substituindo: $F[n+2] + a(n+2) + b = F[n+1] + (n+1) + b + F[n] + a n + b + n$

$$F[n+2] = F[n+1] + F[n] + (a+1)n + b - a$$

para obter uma recorrência homogênea para $F[n]$ basta impor $a = -1$ e $b = a$

$$G[n] = F[n] - n - 1$$

$$F[n+2] = F[n+1] + F[n], \quad F[1] = G[1] + 2 = 1, \quad F[2] = G[2] + 3 = 1$$

usando a solução de Fibonacci obtida anteriormente teremos

$$G[n] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n - n - 1$$

$\{-1, -2, -2, -2, -1, 1, 5, 12, 24, 44, 77, 131, 219, 362, 594, 970, 1579, 2565, 4161, 6744\}$



$$G[n+1] = G[n] + 10 - n, \quad G[1] = 1$$

não homogênea por causa do termo $10 - n$

$$G[n] = F[n] + a n^2 + b n$$

substituindo: $F[n+1] + a (n+1)^2 + b (n+1) = F[n] + a n^2 + b n + 10 - n$

$$F[n+1] = F[n] - (2a + 1) n + 10 - a - b$$

para obter uma recorrência homogênea para $F[n]$ basta impor $a = -1/2$ e $b = 10 - a = 21/2$

$$G[n] = F[n] - n^2 / 2 + 21 n / 2$$

$$F[n+1] = F[n], \quad F[1] = G[1] + 1/2 - 21/2 = -9$$

observando que a solução da homogênea é $\alpha = 1$ e que a condição inicial é -9 teremos

$$G[n] = -9 \cdot 1^n - n^2 / 2 + 21 n / 2$$

{1,10,18,25,31,36,40,43,45,46,46,45,43,40,36,31,25,18,10,1}



