

ANALISAREMOS AS AVALÓCIAS

■ → ■ → ■

TRABALHOS NO SISTEMA BINÁRIO

○ → 1 → 1○

LISTAMOS A SEQUÊNCIA

"1"	○
"1"	1
"1"	1○
"2"	1○1
"3"	1○1○
"5"	1○1○1○
"8"	1○1○1○1○1○

SEQUÊNCIA 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

1 1 2 3 5 8  
 2 3 5 8 13

FÓRMULA DE RECORRÊNCIA

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

$$F_1 = F_2 = 1$$

FIBONACCI

USAREMOS AGORA A FÓRMULA DE RECORRÊNCIA PARA CALCULAR O ELEMENTO DE ORDEM "n" DA SEQUÊNCIA





$$F_n = \alpha^n \Rightarrow \alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n$$

SOLUÇÃO QUE COMBINA POTÊNCIA

$$\boxed{\alpha^2 = \alpha + 1}$$

EQUAÇÃO QUADRÁTICA CUJAS SOLUÇÕES SÃO

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\boxed{F_n = a \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n + b \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n}$$

COMBINAÇÃO LINEAR DAS 2 SOLUÇÕES  
COMO PODEMOS DETERMINAR  $a$  E  $b$ ?

USANDO OS PRIMEIROS 2 ELEMENTOS  
DA SEQUÊNCIA

$$F_1 = 1 \Rightarrow a \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 + b \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 = 1$$

$$F_2 = 1 \Rightarrow a \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 + b \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 = 1$$

TEREMOS QUE RESOLVER O SISTEMA

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} a + \frac{1+\sqrt{5}}{2} b = 1$$

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} a + \frac{3+\sqrt{5}}{2} b = 1$$

FAZENDO A DIFERENÇA OBTEREMOS

$$\boxed{a + b = 0 \Rightarrow a = -b}$$





QUANDO A PRIMEIRA EQUAÇÃO

$$-\frac{1-\sqrt{5}}{2}b + \frac{1+\sqrt{5}}{2}b = 1 \rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$F_n = \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] / \sqrt{5} \quad \Downarrow \quad \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

QUANDO ESTUDAMOS SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS UMA QUANTIDADE IMPORTANTE É

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} \quad \text{RAZÃO ÁUREA}$$

QUANDO  $n \rightarrow \infty \quad \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \rightarrow 0$

$$|1-\sqrt{5}| < 2!$$

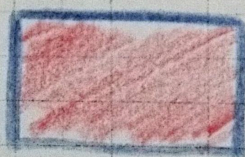
$$n \rightarrow \infty \quad F_n \sim \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n / \sqrt{5}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} / \sqrt{5}}{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n / \sqrt{5}}$$

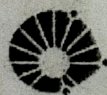
$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

NÚMERO ÁUREO

$$\sim 1.618$$



RETTÂNGULO ÁUREO





CONSIDERAMOS AGORA A SEQUÊNCIA

$$|C_{n+2} = 5C_{n+1} - 6C_n|$$

com  $C_1 = 1$   $C_2 = 2$

$$C_3 = 5C_2 - 6C_1 = 4$$

$$C_4 = 5C_3 - 6C_2 = 8$$

$$C_5 = 5C_4 - 6C_3 = 16$$

$$1, 2, 4, 8, 16, \dots$$

SE CALCULAMOS A FÓRMULA GERAL PARA O ELEMENTO "N"ÉSIMO É A RAZÃO ÁUREA

$$x^2 = 5x - 6 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x-2)(x-3) = 0$$

$$C_n = a \cdot 2^n + b \cdot 3^n$$

PARA DETERMINAR  $a$  E  $b$  USAREMOS  $C_1 = 1$   
 $C_2 = 2$

$$1 = a \cdot 2^1 + b \cdot 3^1$$

$$2 = a \cdot 2^2 + b \cdot 3^2$$



$$2a + 3b = 1$$

$$\begin{cases} 4a + 9b = 2 \\ 4a + 6b = 2 \end{cases}$$

$$3b = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$C_n = 2^{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^{n-1}} = 2$$





ANALISAREMOS AGORA A SEQUÊNCIA

$$H_{n+2} = 6H_{n+1} - 9H_n$$

$$\text{com } H_1 = 0 \quad H_2 = 9$$

$$H_3 = 6H_2 - 9H_1 = 54$$

$$H_4 = 324 - 81 = 243$$

$$0, 9, 54, 243, \dots$$

EQUAÇÃO QUADRÁTICA  $x^2 = 6x - 9$

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0$$

AS 2 SOLUÇÕES COINCIDEM: NESTE CASO A SOLUÇÃO GERAL SERÁ

$$H_n = a 3^n + b n 3^n$$

USANDO  $H_1 = 0$  E  $H_2 = 9$  OBTENHAMOS O SEGUINTE SISTEMA

$$\begin{aligned} 0 &= a 3^1 + b \cdot 1 \cdot 3^1 \\ 9 &= a 3^2 + b \cdot 2 \cdot 3^2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 3(a+b) &= 0 \\ 9(a+2b) &= 9 \end{aligned}$$

$$a = -b$$

$$a + 2b = 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} b &= 1 \\ a &= -1 \end{aligned}}$$

$$\boxed{H_n = (n-1)3^n}$$

$$H_1 = 0 \quad H_2 = 9 \quad H_3 = 54 \quad H_4 = 243 \quad \checkmark$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_{n+1}}{H_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n 3^{n+1}}{(n-1)3^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n 3^{n+1}}{n 3^n} = \boxed{3}$$





SABENDO QUE AS EQUAÇÕES CÚBICAS CARACTERÍSTICAS SÃO

$$(x-1)(x-2)(x-3)$$

$\Delta_n$

$$(x-1)(x-2)^2$$

$B_n$

$$(x-2)^3$$

$C_n$

1) ESCREVA AS FÓRMULAS DE RECORRÊNCIA

2) DETERMINE A FÓRMULA GERAL DO ELEMENTO "m" ÉSIMO SABENDO QUE OS

$$A_1 = 6 \quad A_2 = 14 \quad A_3 = 36$$

$$B_1 = 5 \quad B_2 = 13 \quad B_3 = 33$$

$$C_1 = 6 \quad C_2 = 28 \quad C_3 = 104$$

3) CALCULE A RAZÃO ÁUREA

DICAS

$$A_n = a1^n + b2^n + c3^n$$

$$B_n = a1^n + b2^n + c n 2^n$$

$$C_n = a2^n + b n 2^n + c n^2 2^n$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 8 \\ 1 & 8 & 24 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 33 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 8 & 64 \\ 8 & 24 & 72 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 28 \\ 104 \end{pmatrix}$$