

Integrais indefinidas

Sendo $f(x)$ e $F(x)$ definidas em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, para todo $x \in I$, dizemos que:

F é uma antiderivada ou uma primitiva de f , em I , se $F'(x) = f(x)$

Exemplos:

$F(x) = x^2$ é uma antiderivada (primitiva) de $f(x) = 2x$, pois $F'(x) = 2x$.

$F(x) = x^2 + 7$ é uma antiderivada (primitiva) de $f(x) = 2x$, pois $F'(x) = 2x$.

$F(x) = x^2 + \frac{1}{2}$ é uma antiderivada (primitiva) de $f(x) = 2x$, pois $F'(x) = 2x$.

$F(x) = 2x$ é uma antiderivada (primitiva) de $f(x) = 2$, pois $F'(x) = 2$.

$F(x) = e^x$ é uma antiderivada (primitiva) de $f(x) = e^x$, pois $F'(x) = e^x$.

Observação: Se F é antiderivada de f em I , e c é uma constante, então $F + c$ também é uma antiderivada de f em I .

De fato, se $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$, então $[F(x) + c]' = F'(x) = f(x)$, e portanto $F(x) + c$ também é uma antiderivada de $f(x)$ em I .

Assim, por exemplo $x^2, x^2 + 7, x^2 + \frac{1}{2}$, são primitivas de $f(x) = 2x$.

Proposição 1: Seja $F(x)$ uma função primitiva da função $f(x)$ e c uma constante qualquer. A função $G(x) = F(x) + c$ também é uma primitiva de $f(x)$.

Proposição 2: Se $f'(x)$ se anula em todos os pontos de um intervalo I , então $f(x)$ é constante em I .

Proposição 3: Se $F(x)$ e $G(x)$ são antiderivadas (primitivas) de uma função contínua f , então existe uma constante c tal que $G(x) = F(x) + c$, para todo $x \in I$.

Definição 1: (Integral Indefinida) Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, a expressão $F(x)+c$ é chamada de *integral indefinida* da função $f(x)$ e é denotada por:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

A ligação que existe entre derivadas e integrais permite usar regras já conhecidas de derivação para obter regras correspondentes para a integração. Assim, obtém-se as chamadas *integrais imediatas*.

Integrais Imediatas

1. $\int du = u + c$
2. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$
3. $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c$
4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c, \quad a > 0, a \neq 1$
5. $\int e^u du = e^u + c$
6. $\int \operatorname{sen} u du = -\cos u + c$
7. $\int \cos u du = \operatorname{sen} u + c$
8. $\int \operatorname{tg} u du = \ln|\sec u| + c$
9. $\int \operatorname{cotg} u du = \ln|\operatorname{sen} u| + c$
10. $\int \sec u du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + c$
11. $\int \operatorname{cosec} u du = \ln|\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u| + c$
12. $\int \sec u \operatorname{tg} u du = \sec u + c$
13. $\int \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u du = -\operatorname{cosec} u + c$
14. $\int \sec^2 u du = \operatorname{tg} u + c$
15. $\int \operatorname{cosec}^2 u du = -\operatorname{cotg} u + c$
16. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{u}{a} + c$
17. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + c$
18. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + c$
19. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \sec \left| \frac{u}{a} \right| + c$
20. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 \pm u^2}}{u} \right| + c$
21. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{u}{a} + c, \quad u^2 < a^2$
22. $\int \operatorname{senh} u du = \cosh u + c$
23. $\int \cosh u du = \operatorname{senh} u + c$
24. $\int \sec h^2 u du = \operatorname{tgh} u + c$
25. $\int \operatorname{cosech}^2 u du = -\operatorname{cotgh} u + c$
26. $\int \operatorname{cosech} u \operatorname{cotgh} u du = -\operatorname{cosech} u + c$
27. $\int \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u du = -\operatorname{sech} u + c$

Propriedades da integral indefinida

Sejam $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ e $c \neq 0$ uma constante. Então:

a. $\int cf(x)dx = c \int f(x)dx$

b. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Exemplos:

a) $\int (3x^2 + 5 + \sqrt{x}) dx$

f) $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx$

b) $\int \left(\frac{x^3 + 2x + 7}{x} \right) dx$

g) $\int (\cos(t) - \sec(t) \operatorname{tg}(t)) dt$

c) $\int \left(\frac{e^x}{2} + x\sqrt{x} \right) dx$

h) $\int \left(\frac{\sec^2(x)}{\cos \sec(x)} \right) dx$

d) $\int \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{x} \right) dx$

i) $\int \left(\frac{2 \cot g(x) - 3 \operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}(x)} \right) dx$

e) $\int \left(\frac{x^4 + 3x^{-1/2} + 4}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$

j) $\int (\operatorname{tg}^2(t) + \cot g^2(t) + 4) dt$

k) Estima-se que daqui a t meses a população de certa cidade esteja aumentando à taxa de $4 + 5t^{2/3}$ habitantes por mês. Se a população atual é 10.000 habitantes, qual será a população daqui a 8 meses?

l) Um estudo ambiental realizado em certa cidade revela que daqui a t anos o índice de monóxido de carbono no ar estará aumentando a razão de $0,1t + 0,1$ partes por milhão por ano. Se o índice atual de monóxido de carbono no ar é de 3,4 partes por milhão, qual será o índice daqui a 3 anos?

Método da Substituição ou Mudança de Variável para Integração

Utilizando regras de integração, é possível encontrar a primitiva de algumas funções. Entretanto, o que acontece quando temos que encontrar a primitiva de funções do tipo:

$$\int 2x\sqrt{1+x^2} dx$$

Método da substituição (Mudança de variável): Seja $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$ em um intervalo I e g uma função derivável tal que $F \circ g$ esteja definida.

Usando a Regra da Cadeia, temos:

$$(F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Logo, $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x)) \cdot g'(x)$. Então:

$$\int f(g(x)) \cdot [g'(x)] dx = F(g(x)) + C$$

Fazendo $u=g(x)$ tem-se $du=g'(x)dx$ temos:

$$\int f(g(x)) \cdot [g'(x)] dx = \int f(u) du = F(u) + C$$

Exemplos:

a) $\int 2x\sqrt{1+x^2} dx$

f) $\int \frac{e^t}{\cos^2(e^t - 2)} dt$

b) $\int \sqrt{5x+7} dx$

g) $\int \sin(x+7) dx$

c) $\int (2x^3+1)^7 x^2 dx$

h) $\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$

d) $\int \frac{2x}{1+x^2} dx$

i) $\int \sin^2(x) \cos(x) dx$

e) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$

j) $\int (x + \sec^2(3x)) dx$

$$k) \int \sqrt{1+x^2} x^5 dx$$

$$m) \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13}$$

$$l) \int \sqrt{t^2 - 2t^4} dt$$

$$n) \int \frac{\sqrt{x-2}}{x+1} dx$$

OBS: Utilizando a Regra da Substituição é possível obter a integral imediata de algumas funções trigonométricas.

Exemplos:

$$a) \int \operatorname{tg} x dx$$

$$c) \int \sec x dx$$

$$b) \int \operatorname{cotg} x dx$$

$$d) \int \operatorname{cosec} x dx$$

Exercícios:

$$a) \int x^3 \cos x^4 dx$$

$$f) \int \operatorname{sen}^5 x \cos x dx$$

$$b) \int \frac{dx}{x \ln x}$$

$$g) \int (x+1) \operatorname{sen}(x+1)^2 dx$$

$$c) \int \frac{\sec^2 x}{3 + 2 \operatorname{tg} x} dx$$

$$h) \int \operatorname{tg} x \sec^2 x dx$$

$$d) \int \frac{1}{x} \cos(\ln x) dx$$

$$i) \int \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$e) \int \left(\sqrt[7]{x^3} + \operatorname{sen} \frac{x}{5} \right) dx$$

$$j) \int \sec(5x - \pi) dx$$

Método da Integração por Partes

“A integração por partes corresponde a regra do produto para a derivação.”

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções deriváveis no intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Então, para cada x em I , temos:

$$[f(x) g(x)]' = f(x) g'(x) + g(x) f'(x)$$

$$f(x) g'(x) = [f(x) g(x)]' - g(x) f'(x)$$

Integrando ambos os lados desta equação:

$$\int f(x) g'(x) dx = \int [f(x) g(x)]' dx - \int g(x) f'(x) dx$$

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int g(x) f'(x) dx$$

Sendo:

$$u = f(x) \quad \Rightarrow \quad du = f'(x) dx$$

$$dv = g'(x) dx \quad \Rightarrow \quad v = g(x)$$

podemos escrever a formula da *integração por partes*, expressa por:

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

Exemplos:

a) $\int \ln x dx$

c) $\int x \ln x dx$

b) $\int x \sin x dx$

d) $\int x e^{2x} dx$

Uma estratégia para integrar por partes

Ao integrar $\int f(x) g(x) dx$, devemos sempre escolher, dentre as duas funções da expressão $f(x)g(x)dx$, uma delas como sendo o fator u e a outra como parte de uma diferencial dv . Esta escolha deve ser feita de modo que ao passarmos da

integral $\int u dv$ para a integral $\int v du$, passemos a uma integral mais simples de ser calculada.

Uma sugestão que funciona bem na **grande maioria das vezes** é escolher as funções u e dv segundo o critério: (“Publicado como uma pequena nota em uma edição antiga da revista *American Mathematical Monthly*”)

| L | I | A | T | E |
|--------------|-----------------------------|------------------------|-----------------|--------------|
| Logarítmicas | Inversas de trigonométricas | Algébricas elementares | Trigonométricas | exponenciais |

Estratégia:

Escolher entre as duas funções como:

- ✓ função u : a função cuja letra inicial de caracterização posiciona-se mais à esquerda no anagrama;
- ✓ diferencial dv : a função cuja letra inicial de caracterização posiciona-se mais à direita no anagrama.

Resumindo: u deve caracterizar-se pela letra mais próxima de L, e dv pela letra mais próxima de E.

Exemplos

a) $\int t^2 \ln t \, dt$

d) $\int e^x \sen x \, dx$

b) $\int x \sen 4x \, dx$

e) $\int \sen(\ln x) \, dx$

c) $\int t^2 e^t \, dt$

Integração de algumas funções envolvendo funções trigonométricas

Algumas identidades trigonométricas serão utilizadas para integrar certas combinações de funções trigonométricas.

Integrais da forma $\int \sin^m x \, dx$ e $\int \cos^n x \, dx$ com m e n inteiros não negativos

Identidades trigonométricas utilizadas:

$$\checkmark \quad \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad (\text{identidade trigonométrica})$$

$$\checkmark \quad \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad (\text{ângulo-metade})$$

$$\checkmark \quad \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad (\text{ângulo-metade})$$

$$\checkmark \quad \sin(x) \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$$

Para potências de seno e cosseno ímpares, fazemos:

$$\checkmark \quad \int \sin^m x \, dx = \int \sin^{m-1} x \sin x \, dx$$

$$\checkmark \quad \int \cos^n x \, dx = \int \cos^{n-1} x \cos x \, dx$$

Em seguida, utiliza-se a identidade trigonométrica $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ para chegar a uma fórmula fácil de integrar.

Se as potências de seno e cosseno são pares, utilizamos as identidades dos ângulos-metades. Algumas vezes pode ser útil utilizar a identidade $\sin(x) \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$.

Para nas integrais da forma $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ com m e n inteiros não negativos, quando pelo menos um dos expoentes é ímpar, usamos a identidade trigonométrica e, quando os dois expoentes são pares, usamos as identidades dos ângulos-metade. Algumas vezes pode ser útil utilizar $\sin(x) \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$.

Exemplos:

a. $\int \cos^5(x) \, dx$

d. $\int \cos^3(x) \sin^4(x) \, dx$

b. $\int \sin^4(x) \, dx$

e. $\int \sin^2(x) \cos^4(x) \, dx$

c. $\int \sin^3(2\theta) \, d\theta$

f. $\int \sin^4(x) \cos^4(x) \, dx$

Integrais da forma $\int tg^m x dx$ e $\int \cotg^n x dx$ com m e n inteiros não negativos

Identidades trigonométricas utilizadas:

$$\checkmark \quad tg^2(x) = \sec^2(x) - 1$$

$$\checkmark \quad \cotg^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x) - 1$$

Os artifícios utilizados consistem em:

$$\checkmark \quad \int tg^m x dx = \int tg^{m-2} x tg^2 x dx = \int tg^{m-2} x (\sec^2 x - 1) dx$$

$$\checkmark \quad \int \cotg^n x dx = \int \cotg^{n-2} x \cotg^2 x dx = \int \cotg^{n-2} x (\operatorname{cosec}^2 x - 1) dx$$

Exemplos:

a) $\int tg^3 x dx$

b) $\int \cotg^4(2x) dx$

Integrais da forma $\int \sec^m x dx$ e $\int \operatorname{cosec}^n x dx$ com m e n inteiros não negativos

Quando m e n forem números pares, os artifícios utilizados consistem em:

$$\checkmark \quad \int \sec^m x dx = \int (\sec^2 x)^{\frac{m-2}{2}} \sec^2 x dx = \int (tg^2 x + 1)^{\frac{m-2}{2}} \sec^2 x dx$$

$$\checkmark \quad \int \operatorname{cosec}^n x dx = \int (\operatorname{cosec}^2 x)^{\frac{n-2}{2}} \operatorname{cosec}^2 x dx = \int (\cotg^2 x + 1)^{\frac{n-2}{2}} \operatorname{cosec}^2 x dx$$

Quando m e n forem ímpares, utiliza-se o método da integração por partes.

Exemplos:

a) $\int \operatorname{cosec}^6 x dx$

b) $\int \sec^3 x dx$

Integrais da forma $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x \, dx$ e $\int \operatorname{cotg}^m x \operatorname{cosec}^n x \, dx$ com m e n inteiros não negativos

Quando m for ímpar e n for par, podemos preparar o integrando e aplicar o método da substituição.

Quando m for par e n for ímpar, a integral deve ser resolvida por integração por partes.

Exemplos:

a) $\int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x \, dx$

c) $\int \operatorname{tg}^2 x \sec^3 x \, dx$

b) $\int \operatorname{tg}^5 x \sec^7 x \, dx$

Integração de funções envolvendo seno e cosseno de arcos diferentes

Para a resolução dessas integrais, as seguintes identidades trigonométricas serão utilizadas:

- ✓ $\operatorname{sen}(a)\cos(b) = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)]$
- ✓ $\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$
- ✓ $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

Exemplos:

a) $\int \operatorname{sen} 4x \cos 2x \, dx$

b) $\int \cos 5x \cos 3x \, dx$

Integração de funções racionais por frações parciais

Uma função racional $f(x)$ é definida como o quociente de duas funções polinomiais, ou seja, $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, em que $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios e $q(x) \neq 0$.

Exemplos:

$$f(x) = \frac{2}{x^2+1}, \quad f(x) = \frac{3x}{x^2+4x}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2+6x+1}$$

Para calcular a integral de qualquer função racional, escrevemos a função como uma soma de frações mais simples.

Proposição: Se $q(x)$ é um polinômio com coeficientes reais, então $q(x)$ pode ser expresso como o produto de fatores lineares e/ou quadráticos, todos com coeficientes reais.

Para a decomposição da função racional em funções mais simples, o coeficiente do termo de mais alto grau do polinômio $q(x)$ = 1. Se isso não ocorrer, dividimos $p(x)$ e $q(x)$ por esse coeficiente.

Além disso, é possível expressar $f(x)$ como uma soma de frações mais simples desde que o grau de $p(x)$ seja menor que o grau de $q(x)$ (*função racional própria*). Se o grau de $p(x)$ for maior que o grau de $q(x)$, dividimos $p(x)$ por $q(x)$ até que o resto $r(x)$ tenha grau menor que o grau de $q(x)$.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

Situações que podem ocorrer:

Caso 1: O denominador $q(x)$ é um produto de fatores lineares distintos.

$$q(x) = (x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)$$

em que nenhum fator é repetido (e nenhum fator é múltiplo constante do outro). Nesse caso, existem constantes A_1, A_2, \dots, A_n tais que:

$$f(x) = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

Exemplos:

a. $\int \frac{x-2}{x^3-3x^2-x+3} dx$

c. $\int \frac{6x^2+6}{(1-x)(x+2)(x+3)} dx$

b. $\int \frac{4x^3}{2x^3+x^2-2x-1} dx$

Caso 2: O denominador $q(x)$ é um produto de fatores lineares sendo que alguns deles se repetem

Se na decomposição de $q(x)$ há fatores da forma $(x - a_i)^r$, $r \geq 2$, a cada um desses fatores corresponderá uma soma de frações da forma:

$$f(x) = \frac{B_1}{x - a_i} + \frac{B_2}{(x - a_i)^2} + \frac{B_3}{(x - a_i)^3} + \cdots + \frac{B_r}{(x - a_i)^r}$$

Exemplos:

a) $\int \frac{x^3+3x-1}{x^4-4x^2} dx$

c) $\int \frac{1-2x^2}{x^4+x^3} dx$

b) $\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1} dx$

Caso 3: Os fatores de $q(x)$ são quadráticos irredutíveis que não se repetem.

Se $q(x)$ tiver um fator $ax^2 + bx + c$, em que $b^2 - 4ac < 0$, então, a cada fator quadrático corresponderá uma fração parcial da forma:

$$\frac{Cx + D}{x^2 + bx + c}$$

Exemplos:

a) $\int \frac{2x^2-5x-3}{(x+1)(x^2+1)} dx$

c) $\int \frac{x-3}{x^2+2x+4} dx$

b) $\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x} dx$

d) $\int \frac{2x^2+5x+4}{x^3+x^2+x-3} dx$

Caso 4: Os fatores de $q(x)$ são quadráticos irredutíveis e se repetem.

Se $q(x)$ tiver um fator $(ax^2 + bx + c)^r$, em que $b^2 - 4ac < 0$ e $r \geq 2$, então, a cada um desses fatores corresponderá uma soma de frações parciais da forma:

$$\frac{C_1x + D_1}{(x^2 + bx + c)} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{C_rx + D_r}{(x^2 + bx + c)^r}$$

Exemplos:

a) $\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} dx$

b) $\int \frac{5x^3-3x^2+7x-3}{(x^2+1)^2} dx$

Integração de funções racionais de seno e cosseno

Se na integral o integrando for uma função racional de $\sin(x)$ e $\cos(x)$, podemos reduzir a integral a uma função racional de uma nova variável t fazendo a substituição:

$$t = tg\left(\frac{1}{2}x\right), -\pi < x < \pi$$

Para obter as fórmulas de $\sin(x)$ e $\cos(x)$ em termos de t , usamos as identidades:

✓ $\sin(2y) = 2\sin y \cos y$

✓ $\cos(2y) = 2\cos^2 y - 1$

Fazendo $y = \frac{1}{2}x$, temos:

✓ $\sin(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

$$= 2 \frac{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

$$= 2tg\left(\frac{1}{2}x\right) \frac{1}{\sec^2\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

$$= \frac{2tg\left(\frac{1}{2}x\right)}{1+tg^2\left(\frac{1}{2}x\right)} = \frac{2t}{1+t^2}$$

Logo, $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$

$$\checkmark \cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) - 1$$

$$= 2\frac{1}{\sec^2\left(\frac{1}{2}x\right)} - 1$$

$$= \frac{2}{1+\tan^2\left(\frac{1}{2}x\right)} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\text{Logo, } \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\text{Como } t = \tan\left(\frac{1}{2}x\right), dt = \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{1}{2}x\right) dx = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{1}{2}x\right)\right) dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

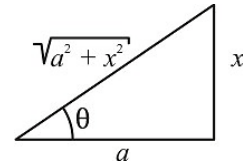
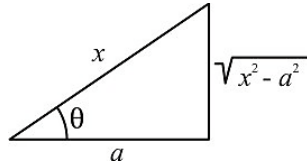
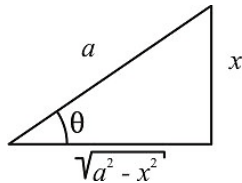
Exemplos:

$$\text{a) } \int \frac{1}{1 - \sin x + \cos x} dx$$

$$\text{b) } \int \frac{1}{3 + 5 \cos x} dx$$

Integração por substituição trigonométrica

As substituições trigonométricas são substituições empregadas em integrais envolvendo uma das expressões $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$ e $\sqrt{a^2 + x^2}$, nas quais a variável x é substituída (correspondentemente) por uma das funções $a \sin \theta$, $a \tan \theta$ e $a \sec \theta$.



- ✓ Quando a função integrando envolve $\sqrt{a^2 - x^2}$, fazemos $\frac{x}{a} = \sin \theta$. Assim, $x = a \sin \theta$ e $dx = a \cos \theta d\theta$. Supondo que $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 \theta)} = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} = a \cos \theta$$

- ✓ Quando a função integrando envolve $\sqrt{x^2 - a^2}$, fazemos $\frac{a}{x} = \cos \theta$ ou $\frac{x}{a} = \sec \theta$. Assim, $x = a \sec \theta$ e $dx = a \sec \theta \tan \theta d\theta$. Supondo que $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2 \theta - 1)} = \sqrt{a^2 \tan^2 \theta} = a \tan \theta$$

OBS: Em ambos os casos, a raiz quadrada da diferença de quadrados é um cateto.

- ✓ Quando a função integrando envolve $\sqrt{a^2 + x^2}$, fazemos $\frac{x}{a} = \tan \theta$. Neste caso, $x = a \tan \theta$ e $dx = a \sec^2 \theta d\theta$. Supondo θ tal que $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$:

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 \theta} = \sqrt{a^2(1 + \tan^2 \theta)} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta} = a \sec \theta$$

Exemplos:

a) $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} dx$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$

b) $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2+4}} dx$