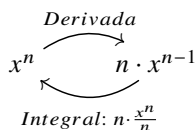


Material de auxílio sobre integral e derivada

Resumo integral e derivada

Derivada: $x^n \rightarrow n \cdot x^{n-1}$

Integral: $x^n \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}$



Cálculo da derivada

Vamos calcular a derivada da função $f(x) = x^n$ pela definição.

Utilizaremos a relação $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}b^n$, onde $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + \binom{n}{n}(\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}(\Delta x) + \dots + (\Delta x)^{n-1} \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

Exercícios de integral

1. Calcule a área abaixo das retas formadas pelos pontos $A(0, 2)$, $B(2, 6)$ e $C(3, 4)$ conforme a Figura 1:

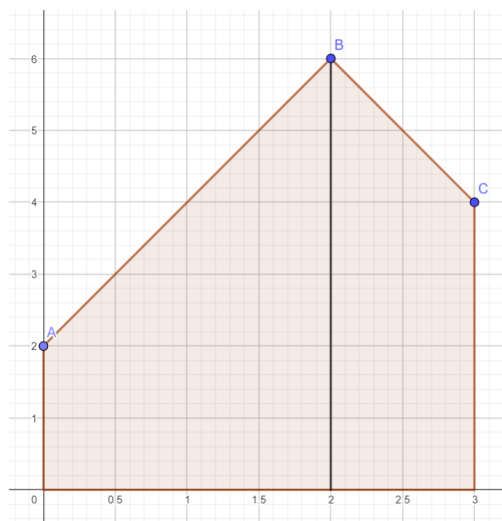


Figura 1: Região a ser calculada.

Solução. Primeiramente, calculemos a equação da reta $y = ax + b$ que passa pelos pontos A e B :

$$A(0, 2) : \quad \quad \quad 2 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 2 \quad (1)$$

$$B(2, 6) : \quad \quad \quad 6 = a \cdot 2 + b \Rightarrow 2a + b = 6 \quad (2)$$

$$\text{Substituindo (1) em (2) :} \quad \quad \quad 2a + 2 = 6 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

Portanto, a equação da primeira reta é $y = 2x + 2$.

Agora, vamos calcular qual a reta que passa por B e C :

$$B(2, 6) : \quad \quad \quad 6 = a \cdot 2 + b \Rightarrow 2a + b = 6 \quad (3)$$

$$C(3, 4) : \quad \quad \quad 4 = a \cdot 3 + b \Rightarrow 3a + b = 4 \quad (4)$$

$$(4) - (3) : \quad \quad \quad 3a + b - (2a + b) = 4 - 6 \Rightarrow a = -2$$

$$\text{Substituindo em (3) :} \quad \quad \quad 2 \cdot (-2) + b = 6 \Rightarrow b - 4 = 6 \Rightarrow b = 10$$

Portanto, a equação da segunda reta é $y = -2x + 10$.

Agora, notamos que queremos calcular a área abaixo da primeira reta no intervalo de 0 a 2 e abaixo da segunda reta no intervalo de 2 a 3. Assim, para a primeira reta, temos:

$$\int_0^2 (2x + 2) dx = \left[\frac{2x^2}{2} + 2x \right]_0^2 = [x^2 + 2x]_0^2 = (2^2 + 2 \cdot 2) - (0^2 + 2 \cdot 0) = 4 + 4 - 0 = 8$$

E para a segunda reta:

$$\int_2^3 (-2x + 10) dx = \left[\frac{-2x^2}{2} + 10x \right]_2^3 = [-x^2 + 10x]_2^3 = (-3^2 + 10 \cdot 3) - (-2^2 + 10 \cdot 2) = -9 + 30 - (-4 + 20) = 21 - 16 = 5$$

Dessa forma, a área total abaixo das duas retas é $8 + 5 = 13$.

Isso pode ser confirmado de forma geométrica também. Na Figura 2, dividimos a região esquerda em um retângulo azul de base e altura iguais a 2 e um triângulo de base 2 e altura 4. Enquanto isso, a região direita pode ser dividida em um retângulo rosa de base 1 e altura 4 e um triângulo de base 1 e altura 2.

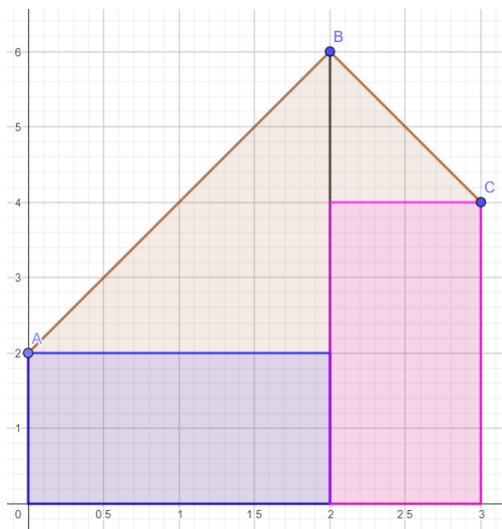


Figura 2: Divisão das regiões em formas geométricas simples.

Dessa forma, a área da esquerda é igual à soma da área do retângulo azul, $2 \cdot 2 = 4$, com a do triângulo acima dele, $\frac{2 \cdot 4}{2} = 4$, ou seja, $4 + 4 = 8$, como calculamos anteriormente.

Analogamente, a área da região direita é igual à soma da área do retângulo rosa, $1 \cdot 4 = 4$, com a do triângulo, $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$, ou seja, $4 + 1 = 5$, como calculamos anteriormente.

2. Calcule a área abaixo das retas formadas pelos pontos $A(0, 2)$, $B(2, 6)$ e $C(3, 4)$ e acima da reta formada pelos pontos $D(0, 0)$ e $E(3, 3)$ conforme a Figura 3:

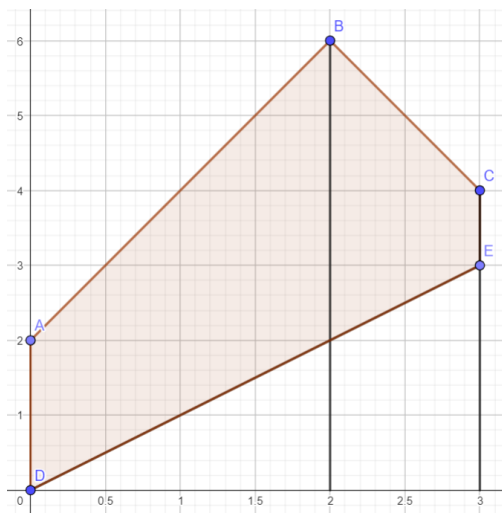


Figura 3: Região a ser calculada.

Solução. Já sabemos a equação das retas que passam pelos pontos A e B , $y = 2x + 2$, e pelos pontos B e C , $y = -2x + 10$, portanto resta calcular a equação da reta que passa pelos pontos D e E :

$$D(0,0) : \quad 0 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 0 \quad (5)$$

$$E(3,3) : \quad 3 = a \cdot 3 + b \Rightarrow 3a + b = 3 \quad (6)$$

$$\text{Substituindo (5) em (6) :} \quad 3a + 0 = 3 \Rightarrow 3a = 3 \Rightarrow a = 1$$

Portanto, a equação dessa reta é $y = x$.

Para calcular a área entre as duas retas no intervalo de 0 a 2, integramos a diferença entre elas, assim:

$$\int_0^2 (2x + 2 - x) dx = \int_0^2 (x + 2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^2 = \left(\frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 \right) - \left(\frac{0^2}{2} + 2 \cdot 0 \right) = 2 + 4 - 0 = 6$$

E para o intervalo de 2 a 3:

$$\begin{aligned} \int_2^3 (-2x + 10 - x) dx &= \int_2^3 (-3x + 10) dx = \left[\frac{-3x^2}{2} + 10x \right]_2^3 = \left(\frac{-3 \cdot 3^2}{2} + 10 \cdot 3 \right) - \left(\frac{-3 \cdot 2^2}{2} + 10 \cdot 2 \right) = \\ &= \left(\frac{-27}{2} + 30 \right) - (-6 + 20) = \frac{-27 + 60}{2} - 14 = \frac{33}{2} - 14 = \frac{33 - 28}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Dessa forma, a área total entre as retas é $6 + \frac{5}{2} = \frac{12+5}{2} = \frac{17}{2}$.

Novamente, podemos calcular de forma geométrica.

Pelo que foi calculado no primeiro exercício, sabemos que a área entre o eixo x e a reta que liga A e B no intervalo de 0 a 2 é 8. Assim, podemos retirar desse valor a área do triângulo verde, apresentado na Figura 4, para obter a área entre as duas retas.

Da mesma forma, como a área entre o eixo x e a reta que liga B e C é 5 no intervalo de 2 a 3, podemos retirar a área do retângulo azul e do triângulo amarelo para encontrar a área entre as duas retas.

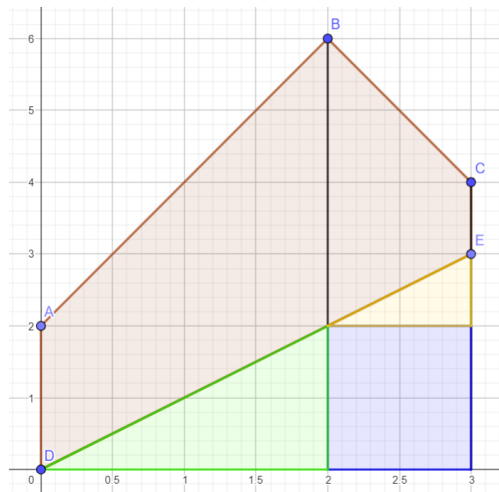


Figura 4: Divisão das regiões em formas geométricas simples.

Dessa forma, a área da esquerda é igual à diferença entre a área calculada no primeiro exercício, 8, e a área do triângulo verde, $\frac{2 \cdot 2}{2} = 2$, ou seja, $8 - 2 = 6$, como calculamos anteriormente.

Analogamente, a área da região direita é igual à diferença entre a área total 5 e as áreas do triângulo amarelo, $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$, e do retângulo azul, $1 \cdot 2 = 2$ ou seja, $5 - \frac{1}{2} - 2 = \frac{10-1-4}{2} = \frac{5}{2}$, como calculamos anteriormente.