

Análise de curvas

- Determine o total de mortes de acordo com uma curva $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ passando pelos pontos $A(1, 0)$, $B(11, 0)$, $C(25, 0)$, $D(2, 1863)$ e $E(14, 1287)$. Faça o mesmo utilizando duas curvas quadráticas da forma $y = ax^2 + bx + c$, com a primeira passando pelos pontos A, B e D e a segunda passando pelos pontos B, C e E.

Solução. Inicialmente, podemos observar os pontos pelos quais as curvas passam.

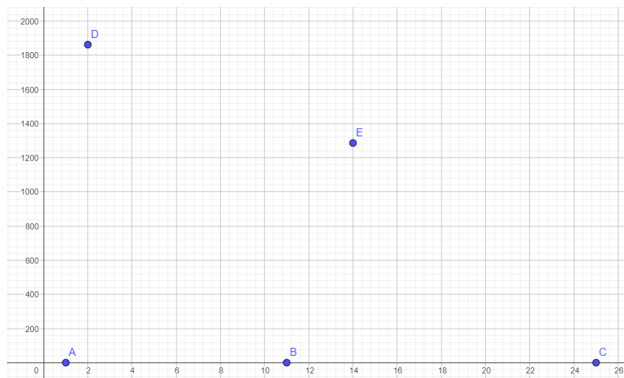


Figura 1: Pontos iniciais dados.

Cálculo com curva de quarto grau

Primeiramente, vamos calcular a equação da curva de quarto grau. Para isso, podemos encontrar uma equação para cada ponto que a função passa substituindo x e y em $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Assim,

$$A(1, 0) : \quad 0 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \Rightarrow a + b + c = 0$$

$$B(11, 0) : \quad 0 = a \cdot 11^2 + b \cdot 11 + c \Rightarrow 121a + 11b + c = 0$$

$$C(25, 0) : \quad 0 = a \cdot 25^2 + b \cdot 25 + c \Rightarrow 625a + 25b + c = 0$$

$$D(2, 1863) : \quad 1863 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \Rightarrow 4a + 2b + c = 1863$$

$$E(14, 1287) : \quad 1287 = a \cdot 14^2 + b \cdot 14 + c \Rightarrow 196a + 14b + c = 1287$$

Embora seja bem trabalhoso, podemos resolver esse sistema de equações e obter $a = -1$, $b = 48$, $c = -718$, $d = 3696$, $e = 3025$. Portanto, a curva é $y = -x^4 + 48x^3 - 718x^2 + 3696x - 3025$.

Outra maneira que talvez seja mais fácil de calcular é considerar que uma função de quarto grau da forma $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ que possui 4 raízes x_1, x_2, x_3, x_4 pode ser escrita como $y = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$.

Assim, como já temos 3 raízes dessa equação, sabemos que ela é da forma $y = a(x - 1)(x - 11)(x - 25)(x - x_4)$ e agora precisamos encontrar apenas os valores de a e x_4 com um sistema bem mais simples do que o anterior:

$$D(2, 1863) : \quad 1863 = a(2 - 1)(2 - 11)(2 - 25)(2 - x_4) \Rightarrow (1)(-9)(-23)a(2 - x_4) = 1863 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(2 - x_4) = \frac{1863}{207} \Rightarrow 2a - a \cdot x_4 = 9 \quad (1)$$

$$E(14, 1287) : \quad 1287 = a(14 - 1)(14 - 11)(14 - 25)(14 - x_4) \Rightarrow (13)(3)(-11)a(14 - x_4) = 1287 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(14 - x_4) = \frac{1287}{-429} \Rightarrow 14a - a \cdot x_4 = -3 \quad (2)$$

$$(2) - (1) : \quad 14a - a \cdot x_4 - (2a - a \cdot x_4) = -3 - 9 \Rightarrow 12a = -12 \Rightarrow a = -1$$

Substituindo em (1) :

$$2(-1) - (-1) \cdot x_4 = 9 \Rightarrow -2 + x_4 = 9 \Rightarrow x_4 = 11$$

Dessa forma, a função é $y = -(x - 1)(x - 11)(x - 25)(x - 11) = -(x - 1)(x - 11)^2(x - 25) = -x^4 + 48x^3 - 718x^2 + 3696x - 3025$.

O gráfico dessa função pode ser observado na Figura 2.

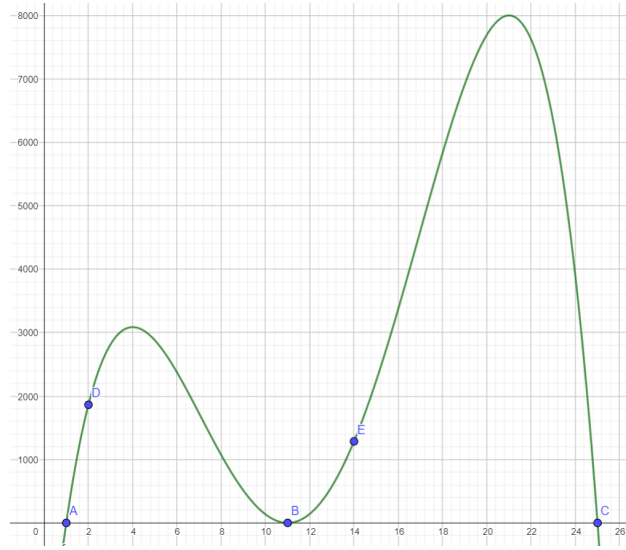


Figura 2: Gráfico da função de quarto grau.

Para calcular o número de mortes, poderíamos apenas integrar essa função de 1 a 25, mas vamos integrar separadamente de 1 a 11 e de 11 a 25 para poder comparar com os resultados obtidos com duas parábolas:

$$\begin{aligned} & \left\{ I[-x^4 + 48x^3 - 718x^2 + 3696x - 3025] \right\}_1^{11} \\ & \left[\frac{-x^5}{5} + \frac{48x^4}{4} - \frac{718x^3}{3} + \frac{3696x^2}{2} - 3025x \right]_1^{11} \\ & \left[\frac{-x^5}{5} + 12x^4 - \frac{718x^3}{3} + 1848x^2 - 3025x \right]_1^{11} \end{aligned}$$

Substituindo por 11:

$$\begin{aligned} & \frac{-11^5}{5} + 12 \cdot 11^4 - \frac{718 \cdot 11^3}{3} + 1848 \cdot 11^2 - 3025 \cdot 11 \\ & \frac{-161051}{5} + 175692 - \frac{955658}{3} + 223608 - 33275 \\ & \frac{228932}{15} \end{aligned}$$

Substituindo por 1:

$$\frac{-1^5}{5} + 12 \cdot 1^4 - \frac{718 \cdot 1^3}{3} + 1848 \cdot 1^2 - 3025 \cdot 1$$

$$\frac{-1}{5} + 12 - \frac{718}{3} + 1848 - 3025$$

$$\frac{-21068}{15}$$

Subtraindo o primeiro resultado do segundo, temos

$$\frac{228932}{15} - \frac{-21068}{15} = \frac{250000}{15} = 16666, \bar{6}$$

Assim, há 16666, $\bar{6}$ mortes com essa curva entre 1 e 11. Para calcular entre 11 e 25, a integral é a mesma, então não precisamos calcular novamente, basta substituir o 25 (uma vez que já calculamos em 11 também).

$$\left\{ I[-x^4 + 48x^3 - 718x^2 + 3696x - 3025] \right\}_{11}^{25}$$

$$\left[\frac{-x^5}{5} + 12x^4 - \frac{718x^3}{3} + 1848x^2 - 3025x \right]_{11}^{25}$$

Substituindo por 25:

$$\frac{-25^5}{5} + 12 \cdot 25^4 - \frac{718 \cdot 25^3}{3} + 1848 \cdot 25^2 - 3025 \cdot 25$$

$$-1953125 + 4687500 - \frac{11218750}{3} + 1155000 - 75625$$

$$\frac{222500}{3}$$

Substituindo por 11, temos $\frac{228932}{15}$, como calculado anteriormente. Assim, subtraindo o primeiro resultado do segundo, obtemos

$$\frac{222500}{3} - \frac{228932}{15} = \frac{883568}{15} = 58904, \bar{53}$$

Assim, há um total de $16666, \bar{6} + 58904, \bar{53} = 75571, 2$ mortes com essa curva.

Cálculo com duas parábolas

Da mesma forma que no exemplo anterior, poderíamos encontrar um sistema de três equações e resolvê-las para obter as funções de cada uma das parábolas. Porém, como já temos as duas raízes de ambas as parábolas, vamos utilizar o mesmo método anterior.

Sabendo que uma função da forma $y = ax^2 + bx + c$ com raízes x_1 e x_2 pode ser escrita como $y = a(x-x_1)(x-x_2)$, notamos que a primeira função, que passa por A, B e D, é da forma $y = a(x-1)(x-11)$.

Assim,

$$D(2, 1863) : \quad 1863 = a(2-1)(2-11) \Rightarrow (1)(-9)a = 1863 \Rightarrow a = \frac{1863}{-9} = -207$$

Logo, a primeira função é $y = -207(x-1)(x-11) = -207x^2 + 2484x - 2277$.

A segunda função, que passa por B, C e E, é da forma $y = a(x-11)(x-25)$. Assim, $E(14, 1287) :$

$$1287 = a(14-11)(14-25) \Rightarrow (3)(-11)a = 1287 \Rightarrow a = \frac{1287}{-33} = -39$$

Dessa forma, a segunda função é $y = -39(x-11)(x-25) = -39x^2 + 1404x - 10725$.

O gráfico dessas funções é apresentado na Figura 3.

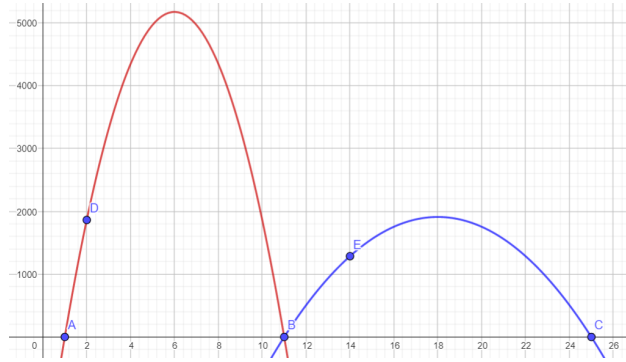


Figura 3: Gráficos das duas parábolas.

Para calcular o número de mortes, vamos integrar a primeira função de 1 a 11 e depois a segunda de 11 a 25:

$$\begin{aligned} & \left\{ I[-207x^2 + 2484x - 2277] \right\}_1^{11} \\ & \left[\frac{-207x^3}{3} + \frac{2484x^2}{2} - 2277x \right]_1^{11} \\ & [-69x^3 + 1242x^2 - 2277x]_1^{11} \end{aligned}$$

Substituindo por 11:

$$\begin{aligned} & -69 \cdot 11^3 + 1242 \cdot 11^2 - 2277 \cdot 11 \\ & -91839 + 150282 - 25047 \\ & 33396 \end{aligned}$$

Substituindo por 1:

$$\begin{aligned} & -69 \cdot 1^3 + 1242 \cdot 1^2 - 2277 \cdot 1 \\ & -69 + 1242 - 2277 \\ & -1104 \end{aligned}$$

Subtraindo o primeiro resultado do segundo, temos

$$33396 - (-1104) = 34500$$

Integrando agora a segunda função de 11 a 25:

$$\begin{aligned} & \left\{ I[-39x^2 + 1404x - 10725] \right\}_{11}^{25} \\ & \left[\frac{-39x^3}{3} + \frac{1404x^2}{2} - 10725x \right]_{11}^{25} \\ & [-13x^3 + 702x^2 - 10725x]_{11}^{25} \end{aligned}$$

Substituindo por 25:

$$\begin{aligned} & -13 \cdot 25^3 + 702 \cdot 25^2 - 10725 \cdot 25 \\ & -203125 + 438750 - 268125 \\ & -32500 \end{aligned}$$

Substituindo por 11:

$$-13 \cdot 11^3 + 702 \cdot 11^2 - 10725 \cdot 11$$

$$\begin{aligned}
 & -17303 + 84942 - 117975 \\
 & -50336
 \end{aligned}$$

Subtraindo o primeiro resultado do segundo, temos

$$-32500 - (-50336) = 17836$$

Assim, com as funções quadráticas tivemos um total de $34500 + 17836 = 52336$ mortes.

Na Figura 4 são apresentadas todas as funções e na Tabela 1 é realizada uma comparação entre os resultados obtidos em ambos os casos.



Figura 4: Gráficos das três funções.

	Função de quarto grau	Parábolas
Mortes de 1 a 11	16666,6	34500 (+107%)
Mortes de 11 a 25	58904,53 (+230,3%)	17836
Total de mortes	75571,2	52336 (+44,4%)

Tabela 1: Comparação das duas metodologias