

Exercícios da aula de 07/03

Análise de curvas quadráticas

1. Determine o período pandêmico, o pico da pandemia e o total de mortes de acordo com duas curvas quadráticas da forma $y = ax^2 + bx + c$. A primeira função passa pelos pontos $A = (1, 0)$, $B = (2, 45)$ e $C = (3, 84)$, enquanto a segunda passa pelos pontos $\tilde{A} = (1, 0)$, $\tilde{B} = (2, 270)$ e $\tilde{C} = (3, 480)$.

Solução. Inicialmente, podemos observar os pontos da primeira curva na cor azul e os da segunda na cor vermelha.

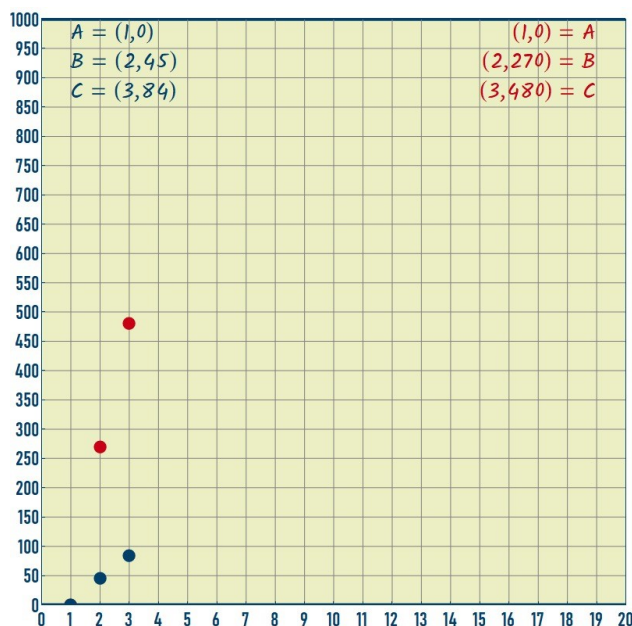


Figura 1: Pontos iniciais dados.

Agora, podemos encontrar uma equação para cada ponto que uma função passa substituindo x e y na equação $y = ax^2 + bx + c$. Assim,

$$A(1, 0) : \quad 0 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \Rightarrow a + b + c = 0 \quad (1)$$

$$B(2, 45) : \quad 45 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \Rightarrow 4a + 2b + c = 45 \quad (2)$$

$$C(3, 84) : \quad 84 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \Rightarrow 9a + 3b + c = 84 \quad (3)$$

$$(2) - (1) : \quad 4a + 2b + c - (a + b + c) = 45 - 0 \Rightarrow 3a + b = 45 \quad (4)$$

$$(3) - (2) : \quad 9a + 3b + c - (4a + 2b + c) = 84 - 45 \Rightarrow 5a + b = 39 \quad (5)$$

$$(5) - (4) : \quad 5a + b - (3a + b) = 39 - 45 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow a = \frac{-6}{2} \Rightarrow a = -3$$

$$\text{Substituindo em (4)} : \quad 3 \cdot (-3) + b = 45 \Rightarrow b - 9 = 45 \Rightarrow b = 54$$

$$\text{Substituindo em (1)} : \quad -3 + 54 + c = 0 \Rightarrow c + 51 = 0 \Rightarrow c = -51$$

Portanto, a equação da primeira parábola é $y = -3x^2 + 54x - 51$.

Da mesma forma, podemos encontrar a equação da segunda curva:

$$\tilde{A}(1, 0) : \quad 0 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \Rightarrow a + b + c = 0 \quad (6)$$

$$\tilde{B}(2, 270) : \quad 270 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \Rightarrow 4a + 2b + c = 270 \quad (7)$$

$$\tilde{C}(3, 480) : \quad 480 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \Rightarrow 9a + 3b + c = 480 \quad (8)$$

$$(7) - (6) : \quad 4a + 2b + c - (a + b + c) = 270 - 0 \Rightarrow 3a + b = 270 \quad (9)$$

$$(8) - (7) : \quad 9a + 3b + c - (4a + 2b + c) = 480 - 270 \Rightarrow 5a + b = 210 \quad (10)$$

$$(10) - (9) : \quad 5a + b - (3a + b) = 210 - 270 \Rightarrow 2a = -60 \Rightarrow a = \frac{-60}{2} \Rightarrow a = -30$$

$$\text{Substituindo em (9)} : \quad 3 \cdot (-30) + b = 270 \Rightarrow b - 90 = 270 \Rightarrow b = 360$$

$$\text{Substituindo em (6)} : \quad -30 + 360 + c = 0 \Rightarrow c + 330 = 0 \Rightarrow c = -330$$

Finalmente, a equação da segunda parábola é $y = -30x^2 + 360x - 330$.

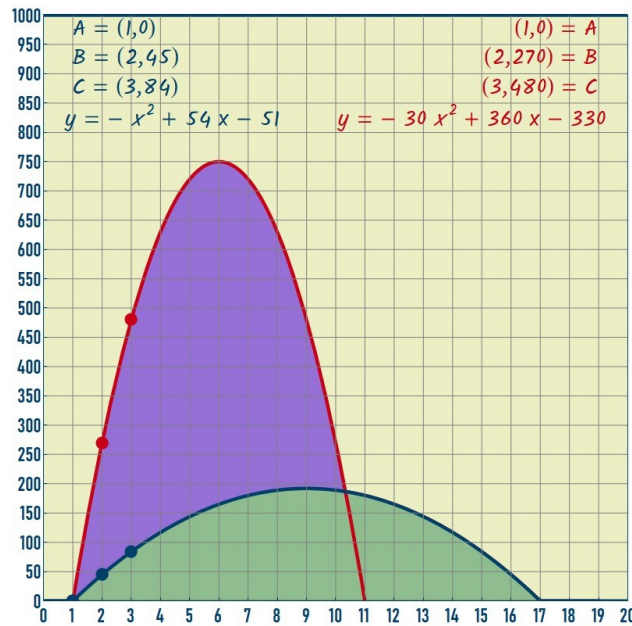


Figura 2: Equações das parábolas.

Para encontrar o pico da pandemia de acordo com a primeira curva, derivamos a equação $y = -3x^2 + 54x - 51$ e igualamos a zero. Assim,

$$-3 \cdot (2x) + 54 = 0 \Rightarrow -6x + 54 = 0 \Rightarrow -6x = -54 \Rightarrow x = \frac{-54}{-6} \Rightarrow x = 9$$

Substituindo na equação da parábola, temos que

$$y = -3 \cdot 9^2 + 54 \cdot 9 - 51 \Rightarrow y = -243 + 486 - 51 \Rightarrow y = 192$$

Portanto, o ponto de máximo é $(9, 192)$, ou seja, o pico da pandemia ocorre depois de 9 “semanas” com 192 mortos.

Para o máximo da segunda parábola, derivamos a equação $y = -30x^2 + 360x - 330$. Assim,

$$-30 \cdot (2x) + 360 = 0 \Rightarrow -60x + 360 = 0 \Rightarrow -60x = -360 \Rightarrow x = \frac{-360}{-60} \Rightarrow x = 6$$

Substituindo na equação encontrada anteriormente, temos que

$$y = -30 \cdot 6^2 + 360 \cdot 6 - 330 \Rightarrow y = -1080 + 2160 - 330 \Rightarrow y = 750$$

Portanto, o ponto de máximo é $(6, 750)$.

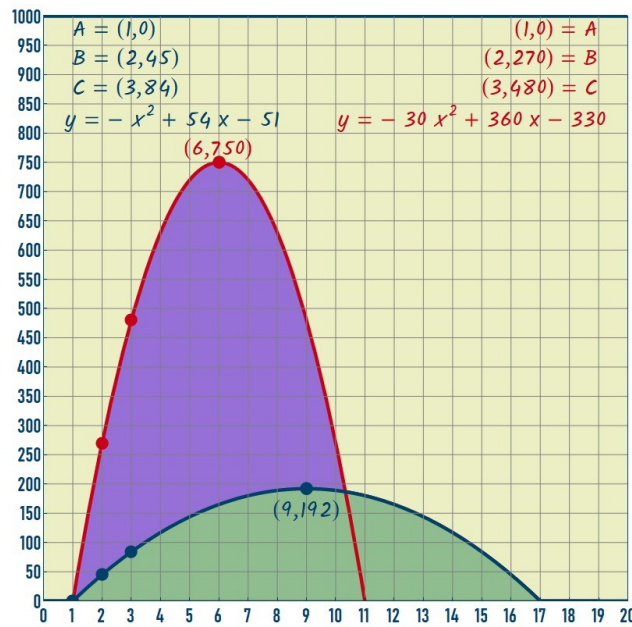


Figura 3: Pontos de máximo das funções.

Para encontrar o período epidêmico, igualamos ambas as funções a zero. Dessa forma,

$$-3x^2 + 54x - 51 = 0 \quad \div (-3) \quad (11)$$

$$x^2 - 18x + 17 = 0 \quad (12)$$

$$(x - 1)(x - 17) = 0 \quad (13)$$

Assim, temos os pontos $(1, 0)$ e $(17, 0)$ que zeram o número de mortes. Portanto, o período é $17 - 1 = 16$ “semanas”.

Para a segunda parábola,

$$-30x^2 + 360x - 330 = 0 \quad \div (-30) \quad (14)$$

$$x^2 - 12x + 11 = 0 \quad (15)$$

$$(x - 1)(x - 11) = 0 \quad (16)$$

Nesse caso, temos os pontos $(1, 0)$ e $(11, 0)$ que zeram o número de mortes e o período epidêmico é de $11 - 1 = 10$ “semanas”.

Finalmente, podemos calcular a integral ao longo do período epidêmico para calcular o número de mortes. Lembrando que $I[x^n] = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, temos:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ I[-3x^2 + 54x - 51] \right\}_1^{17} \\
 & \left[\frac{-3x^3}{3} + \frac{54x^2}{2} - 51x \right]_1^{17} \\
 & [-x^3 + 27x^2 - 51x]_1^{17} \\
 & (-17^3 + 27 \cdot 17^2 - 51 \cdot 17) - (-1^3 + 27 \cdot 1^2 - 51 \cdot 1) \\
 & 17 \cdot (-17^2 + 27 \cdot 17 - 51) - (-1 + 27 - 51) \\
 & 17 \cdot (119) - (-25) \\
 & 2023 + 25 \\
 & 2048
 \end{aligned}$$

Assim, há um total de 2048 mortes com a primeira curva.

$$\begin{aligned}
 & \left\{ I[-30x^2 + 360x - 330] \right\}_1^{11} \\
 & \left[\frac{-30x^3}{3} + \frac{360x^2}{2} - 330x \right]_1^{11} \\
 & [-10x^3 + 180x^2 - 330x]_1^{11} \\
 & (-10 \cdot 11^3 + 180 \cdot 11^2 - 330 \cdot 11) - (-10 \cdot 1^3 + 180 \cdot 1^2 - 330 \cdot 1) \\
 & 11 \cdot (-10 \cdot 11^2 + 180 \cdot 11 - 330) - (-10 + 180 - 330) \\
 & 11 \cdot (440) - (-160) \\
 & 4840 + 160 \\
 & 5000
 \end{aligned}$$

Com a segunda curva, há um total de 5000 mortes.

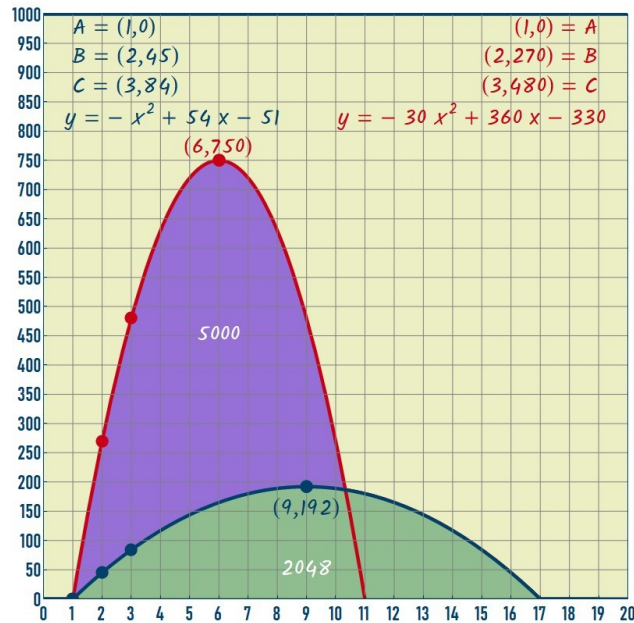


Figura 4: Análise completa das funções.

Finalmente, podemos fazer uma tabela comparando os resultados.

	Função 1	Função 2
Período	16 (+60%)	10
Pico	192	750 (+290.6%)
Mortes	2048	5000 (+144.1%)

Tabela 1: Comparação das duas curvas